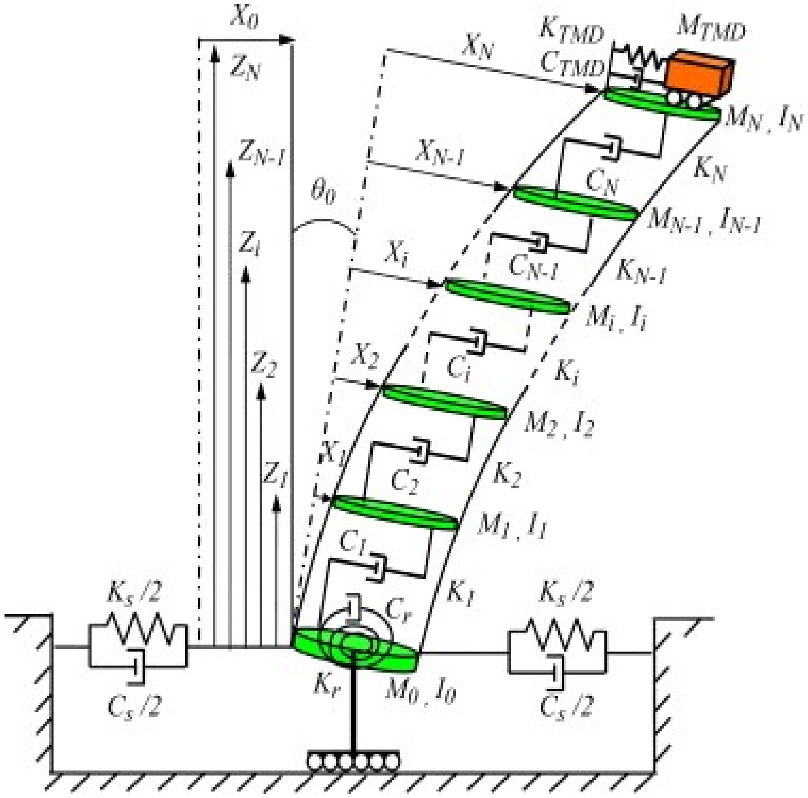
بسم الله الرحمن الرحیم

پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی عمران

جزوه حل تمرین مهندسی زلزله

نام استاد: جناب آقای دکتر یوسفی



نویسنده:

1-امین رشیدی

2-پویا توکلی

3-داوود صالحی

حل تمرین مهندسی زلزله

مفاهیم پایه ای :

شتاب ثقل :

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2} = 32.174 \frac{ft}{sec^2}$$

$$\underbrace{W}_{\text{وزن جسم}} = \underbrace{m}_{\text{جرم جسم}} \cdot \underbrace{g}_{\text{شتاب ثقل}}$$

انواع سیستم آحاد (units) :

الف) سیستم آحاد MKS قدیم (متر - کیلوگرم نیرو - ثانیه) :

در این سیستم واحد های نیرو ، طول و زمان به عنوان واحد های اصلی انتخاب شده اند و واحد جرم از قانون دوم نیوتن استنتاج می شود.

کمیت	دیمانسیون	واحد	نماد
نیرو	F	آحاد اصلی - کیلوگرم نیرو	kgf
طول	L	- متر	m
زمان	T	- ثانیه	s
جرم	M	کیلوگرم نیرو . مجذور ثانیه بر متر	$kgf.s^2/m$

نکته : به طور اشتباه واژه کیلوگرم (kg) به جای واژه کیلوگرم نیرو (kgf) برای اندازه گیری وزن و بار های وارد بر سازه استفاده می شود.

توجه شود که واحد کیلوگرم (kg) یک واحد برای اندازه گیری جرم در سیستم SI است.

$$\boxed{1\ kgf = 9.81\ N}$$

مثال : وزن یک شخص در سیستم MKS ، 80 kgf اعلام شده است. جرم آن شخص در این سیستم چقدر است؟

$$W = 80\ kgf \quad \text{و} \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{80}{9.81} = 8.155\ kgf.s^2/m$$

$$\text{MKS:}\quad W\ (kgf) = m\ (kgf.s^2/m) \cdot g\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

ب) سیستم بین المللی SI : در سیستم SI ، واحد های جرم ، طول و زمان به عنوان واحد اصلی انتخاب شده اند و واحد نیرو از قانون دوم نیوتن بدست آمده است.

کمیت	دیمانسیون	واحد	نماد
جرم	M	آحاد اصلی - کیلوگرم	kg
طول	L	- متر	m
زمان	T	- ثانیه	s
نیرو	F	نیوتن	N

مثال: اگر وزن یک شخص در سیستم MKS ، برابر با 80kgf بیان شود ، وزن و جرم این شخص در سیستم SI چقدر است؟

$$(MKS): W = 80 \text{ kgf} \quad , \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$(SI): W = 80 (\text{kgf}) \times 9.81 \left(\frac{N}{\text{kgf}}\right) = 784.8 \ (N)$$

$$(SI): m = \frac{W}{g} = \frac{784.8 \ (N)}{9.81 \left(\frac{m}{s^2}\right)} = 80 \text{ kg}$$

$$SI: \quad W \ (N) = m \ (kg) \cdot g \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

پ) سیستم آحاد انگلیس - آمریکایی (U.S):

در این سیستم ، واحد های نیرو ، طول و زمان ، اصلی هستند و واحد جرم از قانون دوم نیوتن استخراج می شود.

کمیت	دیمانسیون	واحد	نماد
نیرو	F	آحاد اصلی - پوند	lb
طول	L	- فوت	ft
زمان	T	- ثانیه	sec
جرم	M	اسلاگ	slug

توجه: در سیستم (U.S) ممکن است از پوند هم برای جرم و هم برای نیرو استفاده شود. در این موارد برای نیرو از واحد پوند نیرو (lbf) و برای جرم از واحد پوند جرم (lbm) استفاده می شود

$$\boxed{1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lb}_m}$$

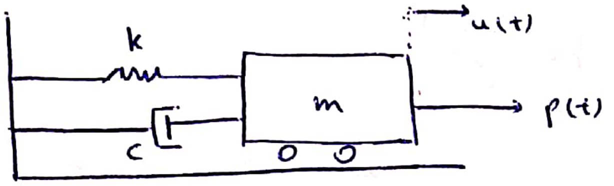
$$W \ (lb) = m \ (slug) \cdot g \left(\frac{ft}{sec^2}\right)$$

$$US: \quad g = 32.174 \frac{ft}{sec^2}$$

مفاهیم اصلی :

درجه آزادی : درجه آزادی عبارت است از کمترین تعداد مختصهٔ مستقلی که برای تعیین موقعیت تمام اجزای سیستم در هر لحظه مورد نیاز است.

اجزای تشکیل دهنده مدل ساده شده‌ی سیستم های یک درجه آزادی :



1- اجزای فنری (سختی)
2- میراگر
3- جرم (اینرسی)
4- نیروی دینامیکی

* موارد 1، 2 و 3 باهم تعیین کننده رفتار طبیعی یک سیستم دینامیکی هستند.

1- اجزای فنری : شرط ایجاد نیرو در فنر، فشردگی یا کشیدگی فنر است و این با ایجاد تغییر مکان نسبی بین دو انتهای فنر بوجود می آید.

$f_s = k . u$

نیروی فنر

سختی فنر

تغییر طول نسبی فنر

if $u = 1$

$\Rightarrow f_s = k$

نکته : برای تعیین سختی سازه، در درجه آزادی مورد نظر، باید یک تغییر مکان واحد در جهت آن درجه آزادی اعمال شود و نیروی بوجود آمده که همان سختی است، یافت شود.

2- میراگر : نیروی میرایی فقط در صورت وجود سرعت نسبی بین دو انتهای میراگر حاصل می شود.

SI: $f_D = c \dot{u}$

نیروی میرایی (N)

میرایی سازه $\left(\frac{N.s}{m}\right)$

سرعت نسبی $\left(\frac{m}{s}\right)$

3- جرم (اینرسی) : مطابق با قانون دوم نیوتن، برای آنکه اینرسی در یک جسم فعال شود لازم است شتاب بر آن وارد شود. پس نیروی اینرسی با وارد شدن شتاب به کار می افتد.

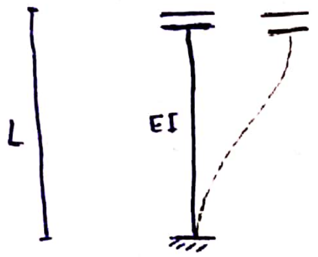
$F = m . \ddot{u}$

نیروی ناشی از اینرسی (N)

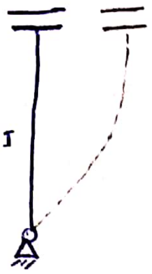
جرم (kg)

شتاب $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

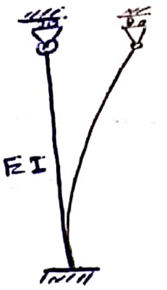
سختی انواع المان ها :



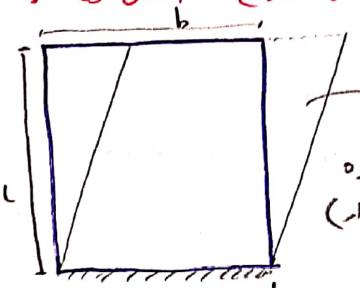
$$\boxed{k_c = \frac{12\,EI}{L^3}}$$



$$\boxed{k_c = \frac{3EI}{L^3}}$$



$$\boxed{k_c = \frac{3EI}{L^3}}$$

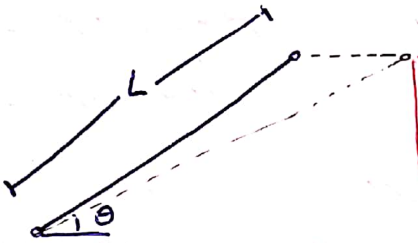


دیوار برشی طره
(یک سر گیردار)

$$k_w = \frac{3EI}{L^3} \times \frac{1}{1+0.5\left(\frac{b}{L}\right)^2(1+\nu)}$$

$$k_w = \frac{3EI}{L^3} \times \frac{1}{1+0.6\left(\frac{b}{L}\right)^3(1+\nu)}$$

نکته : توجه شود که طول مهار بند در رابطه قرار داده نشود.

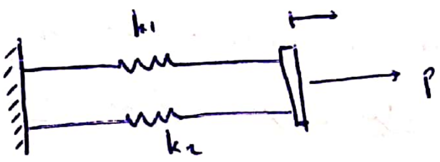


$$\boxed{k_b = \frac{EA}{L}\cos^2\theta}$$

نکته : در صورتی که مهار بند در فشار کمانش کند ، سختی آن صفر می‌شود.

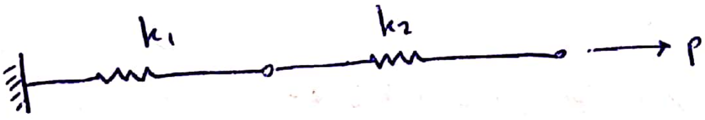
تعیین سختی معادل فنرها :

+ فنرهای موازی : در حالت موازی ، تغییر مکان تمامی فنرها یکسان بوده و مقدار نیروی کل برابر با مجموع نیروی کل فنرها می باشد.



$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$$

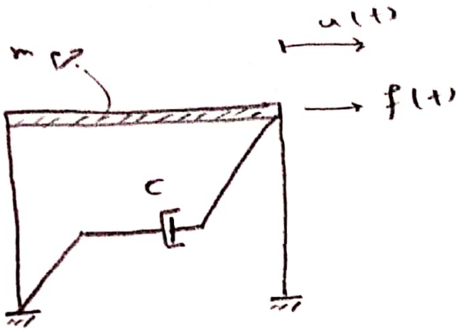
+ فنرهای سری : در حالت سری ، مقدار نیروی موجود در تمام فنرها یکسان است. اما تغییر مکان کل ، برابر است با مجموع تغییر مکان نسبی فنرها.

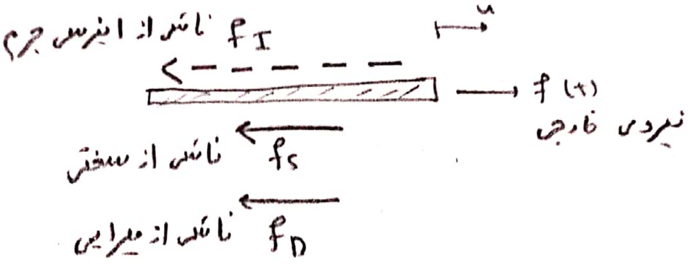


$$\boxed{k_{eq} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}}$$

تشکیل معادله حرکت سیستم ها با استفاده از اصل دالامبر:

اصل دالامبر: نیروی اینرسی یک نیروی مجازی در نظر گرفته می شود که مقدار آن ، مساوی حاصل ضرب جرم در شتاب کل ($\ddot{u}^t$) بوده و در خلاف جهت حرکت (به بیان دیگر در خلاف علامت حرکت فرضی) وارد نمودار پیکره آزاد سیستم می شود.





$$\sum F = 0 \qquad f(t) - f_I - f_D - f_s = 0$$

f_s : نیروی مخالف با حرکت سیستم به دلیل وجود سختی در اعضای فنری که با تغییر مکان نسبی سازه نسبت به پایه، نیروی آن ها فعال می‌شود.

f_D : نیروی مخالف با حرکت سیستم به دلیل وجود میراگر، که این نیرو با توجه به وجود سرعت نسبی سازه نسبت به پایه، فعال خواهد شد.

f_I : نیروی مجازی اینرسی که با حرکت سازه مخالفت می‌کند (قانون اول نیوتن) . از حاصل ضرب جرم سازه در شتاب کل وارد شده بر آن جرم تعیین می‌شود.

$$f_I + f_D + f_s = f(t)$$

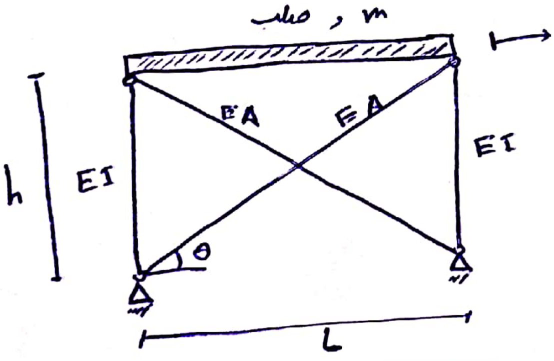
$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)} \longrightarrow$$ معادله حرکت حاکم بر سیستم

مثال : قاب ساختمانی ساده + مهاربند هم محور فولادی نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. چنانچه اتصال های تیرها به ستون ها مفصلی فرض شود و سطح مقطع مهاربندها برابر A و مدول ارتجاعی آن ها E باشد، سختی جانبی معادل را برای حالات زیر بیابید.

الف) از سختی مهاربند فشاری با توجه به لاغری آن صرف نظر شود.

ب) سختی مهاربند فشاری برابر $\frac{1}{3}$ سختی مهاربند کششی فرض شود.

پ) سختی مهاربند فشاری و کششی یکسان فرض شود.



حل : با توجه به آن که اتصال ستون ها دو سر مفصل می‌باشد لذا هیچ سختی جانبی برای این قاب بوجود نمی‌آورند و سختی جانبی این سازه فقط از طریق مهاربندها تامین می‌شود.

یافتن سختی مهاربند کششی :

$$\boxed{k_b = \frac{EA}{\text{طول مهاربند}} \cos^2\theta}$$

$$\text{طول مهاربند} = \sqrt{L^2 + h^2} \qquad \cos\theta = \frac{L}{\sqrt{h^2 + L^2}}$$

$$k_b = \frac{EA}{\sqrt{L^2+h^2}} \times \left(\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}}\right)^2 = \boxed{\frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

الف) به دلیل کمانش مهار بند فشاری، سختی آن صفر در نظر گرفته خواهد شد و سختی جانبی قاب فقط از طریق مهاربند کششی تامین می‌شود:

$$k_b = \frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

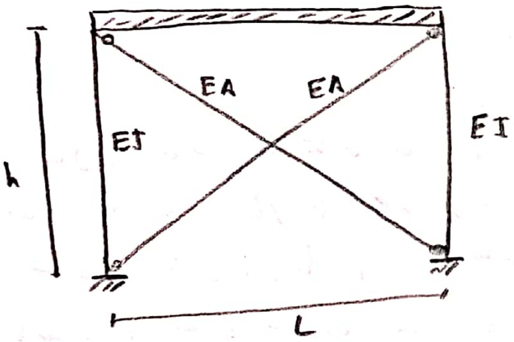
ب) سختی مهار بند فشاری برابر $\frac{1}{3}$ سختی مهاربند کششی باشد:

$$k_{eq} = (1+\frac{1}{3})\frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3} \times \frac{EAL^2}{(L^2+h^3)^{\frac{3}{2}}}$$

ج) سختی در فشار و کشش یکسان باشد:

$$k_{eq} = (1+1) \times \frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : چنانچه در قاب مثال قبل، ستون ها در سرگیردار باشند، سختی جانبی این قاب را در هر 3 حالت پیدا کنید:



حل : در این حالت ستون ها در برابر حرکت جانبی قاب، از خود سختی نشان می دهند.

به دلیل آن که سیستم قاب مهار بندی شده با سیستم قاب خمشی به یک سقف صلب اتصال دارند، لذا تغییر مکان آن ها برابر است و سیستم از نوع فنر های موازی به شمار می آید پس سختی ستون ها و مهار بند ها جمع خواهد شد.

سختی یک ستون در سرگیردار $k_c = \frac{12EI}{h^3}$

الف) کمانش مهار بند در فشار:

$$k_{eq} = \frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3}$$

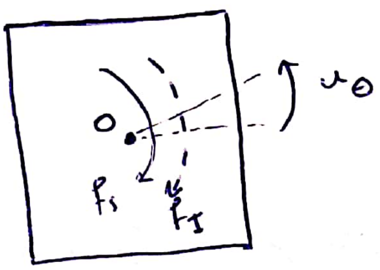
ب) در نظر گرفتن $\frac{1}{3}$ سختی مهار بند فشاری:

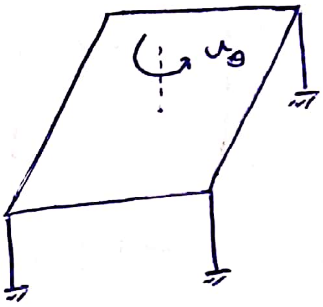
$$k_{eq} = \frac{4}{3}\frac{EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3}$$

ج) برابری سختی در فشار و کشش:

$$k_{eq} = \frac{2EAL^2}{(L^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3}$$

ارتعاش پیچشی در سازه ها: ارتعاش پیچشی در سازه ها حول مرکز سختی صورت می‌گیرد. نوشتن روابط حرکت همانند ارتعاش خطی می باشد و با استفاده از اصل دالامبر، اینرسی پیچشی یافت شده و [illegible] همچنین با دوران دادن سازه به اندازه واحد حول مرکز سختی و لنگر گیری حول این نقطه، سختی پیچشی در سازه یافت می شود:





$$\boxed{I_0 \ddot{u}_\theta + k_0 u_\theta = 0}$$

$$\boxed{\omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_\theta}}}$$

مثال: مطلوب است نوشتن معادل حرکت سازه در هر 3 درجه آزادی مستقل.

فرضیات:

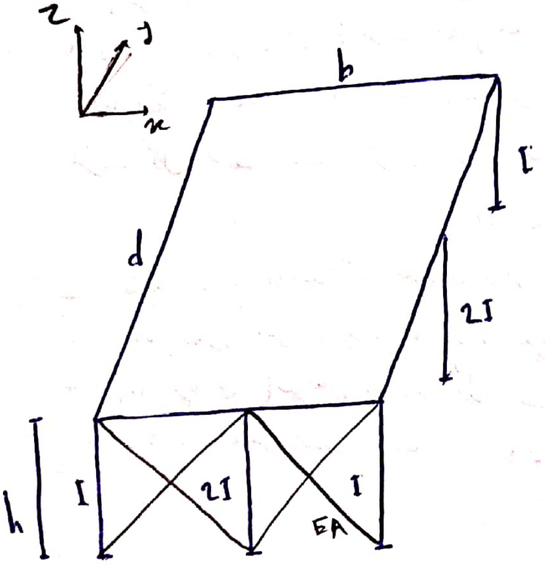
- از جرم ستون ها صرف نظر شده است.
- سختی ستون ها در هر دو راستای x و y یکسان است.
- مرکز جرم سقف بر مرکز سختی سازه قرار دارد و محاسبات حول این نقطه صورت می‌گیرد.
- ستون های گوشه دارای ممان اینرسی I در هر دو جهت x و y هستند. و ستون های میانی دارای ممان اینرسی 2I در هر دو جهت x و y هستند.
- سقف سازه صلب بوده و جرم کل m دارد.
- میرایی در سازه صفر است.

$$\text{جرم دال} = m$$

$$\xi = 0$$

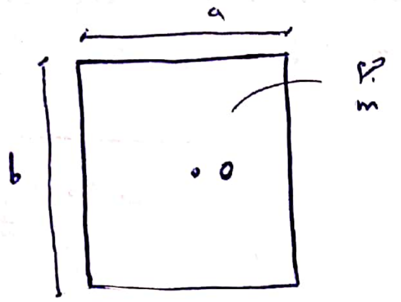
- قاب در جهت شرقی - غربی با مهاربندی <u>کابلی</u> تقویت شده است.

توجه: کابل فقط در کشش کار می‌کند.



نکته : تعیین ممان اینرسی پیچشی در سازه ها :

+ در صورتی که جرم سازه فقط در سقف متمرکز باشد (مانند یک سوله بدون دیوار های جانبی) :

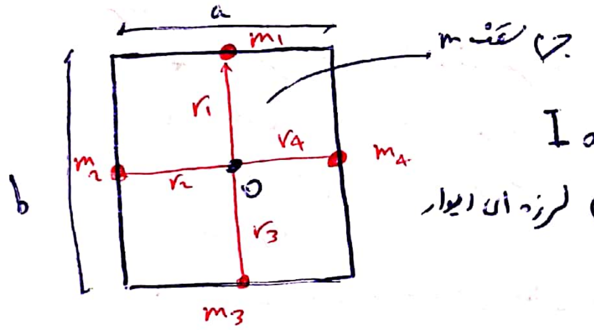


$$I_o = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

+ در صورتی که علاوه بر سقف سازه ، دیوار های اطراف نیز دارای جرم باشند، باید ممان اینرسی دیوارها با روش انتقال ، به ممان کل اضافه شود.

توجه: در اکثر سازه ها نصف جرم لرزه ای دیوار توسط تیرهای سقف تحمل می شود و نصف دیگر به زمین زیر دیوار وارد می شود.

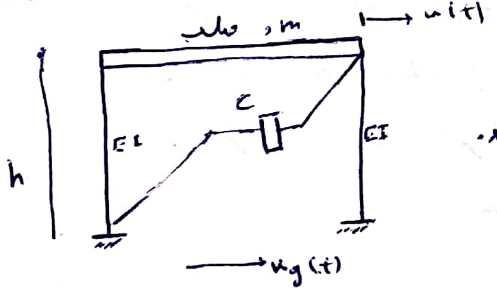
همچنین به طور تقریبی و راحتی در محاسبات ، جرم دیوار در وسط آن متمرکز در نظر گرفته می شود.



$$I_o = \frac{m}{12}(a^2+b^2) + \sum\left(\frac{m_i}{2}\right)r_i^2$$

فرض شده است که نصف جرم لرزه ای دیوار به سقف سازه وارد می شود.

اثر تحریک تکیه گاه در معادله های حرکت :



زمین در زیر سازه ، حرکت $u_g(t)$ را در زمان انجام می دهد.

تغییر مکان سقف نسبت به پایه آن ، همانند قبل $u(t)$ می باشد.

حرکت کل سقف تحت تحریک زمین به صورت زیر بیان می شود :

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t)$$

+ باید توجه داشت که نیروی بوجود آمده در اعضای فنری در اثر تغییر مکان نسبی بوجود می آیند.

+ همچنین نیروی بوجود آمده در میراگر در اثر سرعت نسبی سقف نسبت به پایه بوجود می آید.

+ اما نیروی اینرسی در اثر کل شتاب وارد شده به جرم بوجود می آید. (جمع شتاب حرکت زمین و شتاب نسبی سقف نسبت به پایه) :

$$f_S = k\left[u^t(t) - u_g(t)\right] = k\,u(t)$$

$$f_D = c\left[\dot{u}^t(t) - \dot{u}_g(t)\right] = c\,\dot{u}(t)$$

$$f_I = m\ddot{u}^t(t) = m\left[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)\right]$$

$$m[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}(t)]+c\,\dot{u}(t)+k\,u(t)=0$$

$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t)}$$

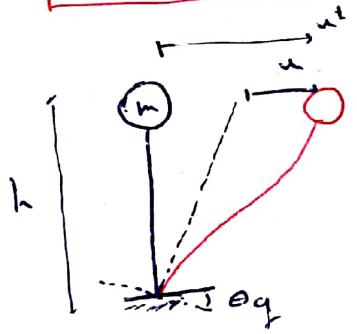
$P_{effective}$

این نیرو نشان می دهد که می توان تحریک تکیه گاهی وارد بر سازه را با یک نیروی خارج وارد شده معادل دانست.

نکته: علامت منفی در P_{eff} بیانگر این موضوع است که نیروی موثر تحریک تکیه گاهی، در خلاف جهت شتاب تکیه گاهی عمل می کند. (علت تحقیق شود)

+ نوشتن معادله حرکت براساس تغییر مکان کل $u^t(t)$:

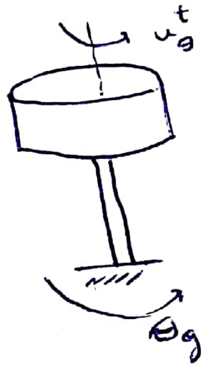
$$\boxed{m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=c\dot{u}_g+ku_g}$$



+ معادله ارتعاش در حضور حرکت دورانی زمین (امواج رایله):

$$u^t=h\theta_g+u(t)$$

$$\boxed{m\ddot{u}+ku=-mh\ddot{\theta}_g}$$



+ معادله ارتعاش در حضور حرکت پیچشی زمین (امواج لاو):

$$u_\theta^t=u_\theta+\theta g$$

$$\boxed{I_o\ddot{u}_\theta+k_\theta u_\theta=-I_o\ddot{\theta}_g}$$

ممان اینرسی پیچشی جرم

سختی پیچشی سیستم

شتاب پیچشی زمین

ارتعاش آزاد یک درجه آزادی بدون میرایی:

$$m\ddot{u}+ku=0 \longrightarrow$$ معادله حرکت

$$u(t)=A_1\sin\omega_nt+A_2\cos\omega_nt \Longleftrightarrow$$ شرایط اولیه

$u_0\rightarrow$ تغییر شکل اولیه

$\dot{u}_0\rightarrow$ سرعت اولیه

پاسخ سازه در زمان

$$\boxed{u(t)=u_0\cos\omega_nt+\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_nt}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرم ساده شده:

$$u(t)=\rho\sin(\omega_nt+\alpha)$$

$$\rho=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{u_0\omega_n}{\dot{u}_0}$$

$$u(t)=\rho\cos(\omega_nt-\theta)$$

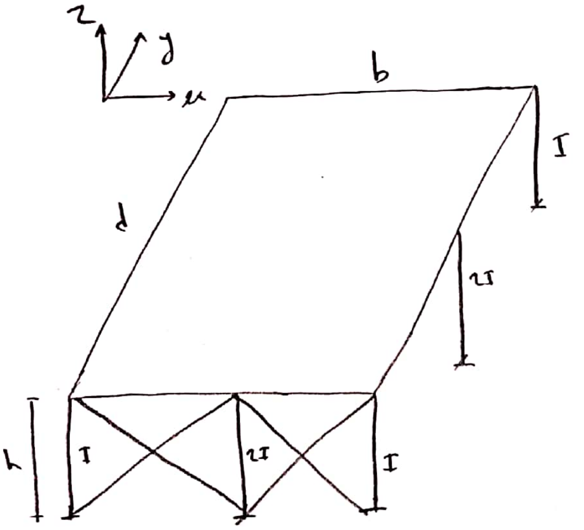
$$\rho=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\dot{u}_0}{u_0\omega_n}$$

مثال: مطلوب است نوشتن معادله حرکت سازه در هر 3 درجه آزادی مستقل.

مفروضات:

+ از جرم ستون‌ها صرف نظر شده است.
+ سختی ستون‌ها در هر دو راستای x و y یکسان است.
+ مرکز جرم سقف بر مرکز سختی سازه قرار دارد و محاسبات حول این نقطه صورت می‌گیرد.
+ ستونهای گوشه دارای ممان اینرسی I در هر دو جهت x و y هستند.
+ ستون های کناری دارای ممان اینرسی 2I در هر دو جهت x و y هستند.
+ سقف سازه صلب بوده و جرم کل m دارد.
+ میرایی در سازه صفر است.
+ قاب در جهت شرقی - غربی با مهاربندی کابلی تقویت شده است.
توجه: کابل در کشش کار می‌کند.
+ مدول ارتجاعی همه مصالح E.
+ مساحت کابل A

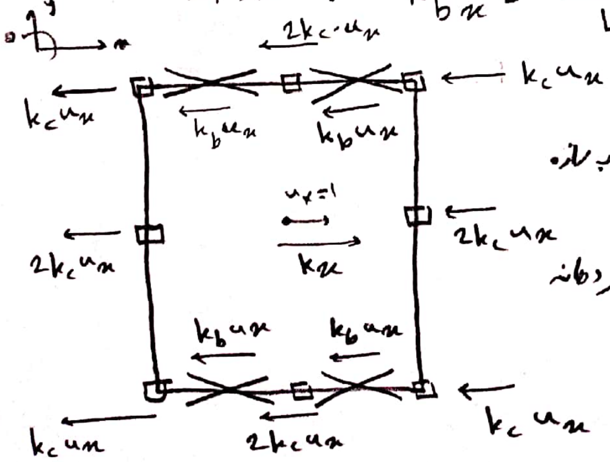


ابتدا سختی هر المان به تنهایی یافت می‌شود:

ستون های گوشه : $k_x = k_y = \frac{12EI}{h^3} = k_c$

ستون های میانی : $k_x = k_y = \frac{12E(2I)}{h^3} = 2k_c$

مهار بند : $k_{bx} = \frac{EA}{L}\cos^2\theta = \frac{EA}{\sqrt{h^2+(\frac{b}{2})^2}} \times \left[\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{h^2+(b/2)^2}}\right]^2 = k_b$



الف) معادله حرکت در جهت x (شرقی - غربی):

برای یافتن سختی کافی است، حرکت واحد در جهت x به سازه داده شود و با نوشتن تعادل سختی یافت شود.

* توجه: مهار بند کابلی در فشار کار نمی‌کند به همین دلیل در هر دهانه فقط 1 کابل کار می‌کند.

$\sum F_x = 0 \qquad k_x \cancel{u_x} = 12 k_c \cancel{u_x} + 4 k_b \cancel{u_x}$

$$\boxed{k_x = 12 k_c + 4 k_b}$$

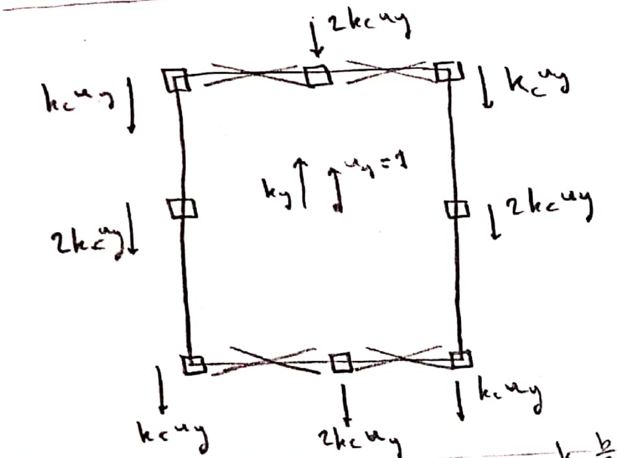
سختی سازه در جهت x

$$\boxed{m \ddot{u}_x + (12k_c + 4k_b) u_x = 0}$$

معادله حرکت در جهت x

$$\boxed{\omega_{N_x} = \sqrt{\frac{12k_c + 4k_b}{m}}}$$

ب) حرکت در راستای y :



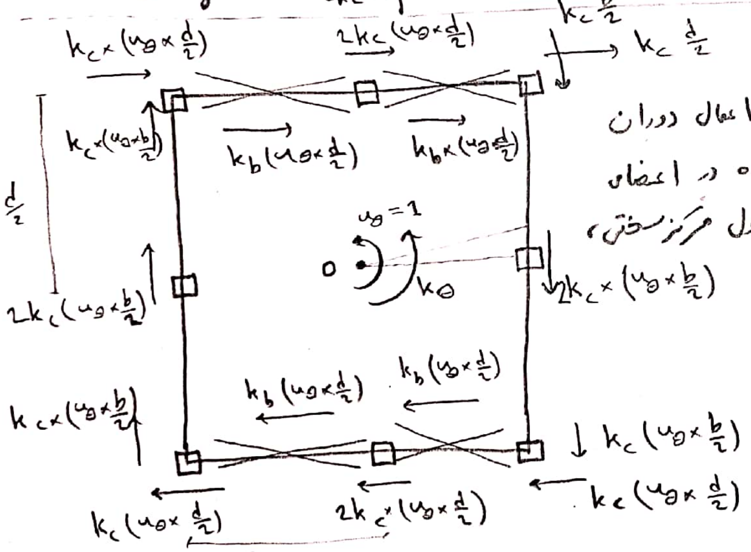
$$k_y = 12 k_c \overset{1}{\cancel{u_y}} = \boxed{12 k_c}$$

$$\boxed{m \ddot{u}_y + 12 k_c u_y = 0}$$

معادله حرکت در جهت y

$$\boxed{\omega_{N_y} = \sqrt{\frac{12 k_c}{m}}}$$

ج) معادله ارتعاش پیچش در راستای θ :



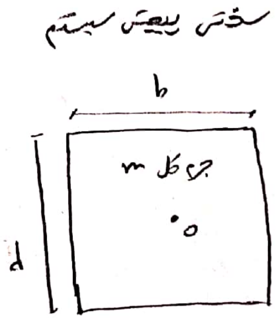
برای یافتن سختی پیچش لازم است تا با اعمال دوران واحد در جهت θ ، نیرو های بوجود آمده در اعضای فنری یافت شوند. سپس با لنگر گیری حول مرکز سختی، مقدار سختی پیچشی تعیین شود:

لنگر گیری حول o

$$k_\theta \times \cancel{u_\theta} = \left[8 k_c (\cancel{u_\theta} \times \tfrac{d}{2}) \times \underset{\text{بازوی نیروها از o}}{\tfrac{d}{2}} + 8 k_c \times (\cancel{u_\theta} \times \tfrac{b}{2}) \times \tfrac{b}{2} + 4 k_b (\cancel{u_\theta} \times \tfrac{d}{2}) \times \tfrac{d}{2} \right]$$

$$\boxed{k_\theta = 2 k_c d^2 + 2 k_c b^2 + k_b d^2} \longrightarrow$$

سختی پیچش سیستم



$$\boxed{I_o = \frac{m(b^2 + d^2)}{12}}$$

ممان اینرسی جرمی سقف سازه حول نقطه o

$$\boxed{\underbrace{\left[\frac{m(b^2+d^2)}{12}\right]}_{m^*} \ddot{u}_\theta + \underbrace{\left[2k_c d^2 + 2k_c d^2 + k_b d^2\right]}_{k^*} u_\theta = 0}$$

معادله ارتعاش پیچش سازه

$$\omega_{N_\theta} = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

$$m\left[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}(t)\right]+c\,\dot{u}(t)+k\,u(t)=0$$

$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t)}$$

$P_{effective}$

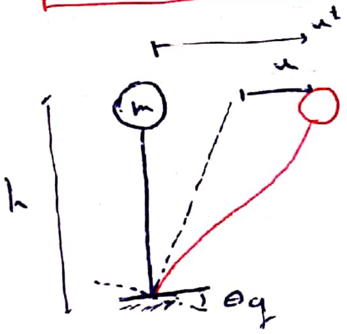
این نیرو نشان می دهد که می توان تحریک تکیه گاهی وارد بر سازه را با یک نیروی خارجی وارد شده معادل دانست.

نکته: علامت منفی در P_{eff} بیانگر این موضوع است که نیروی موثر تحریک تکیه گاهی در خلاف جهت شتاب تکیه گاهی عمل می کند. (علت تحقیق شود)

+ نوشتن معادله حرکت بر اساس تغییر مکان کل $u^t(t)$:

$$\boxed{m\ddot{u}^t+c\dot{u}^t+ku^t=c\dot{u}_g+ku_g}$$

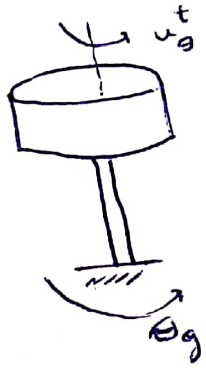
+ معادله ارتعاش در حضور حرکت دورانی زمین (امواج رایله):



$$u^t=h\theta_g+u(t)$$

$$\boxed{m\ddot{u}+ku=-mh\ddot{\theta}_g}$$

+ معادله ارتعاش در حضور حرکت پیچشی زمین (امواج لاو):



$$u_\theta^t=u_\theta+\theta_g$$

$$\boxed{I_o\ddot{u}_\theta+k_\theta u_\theta=-I_o\ddot{\theta}_g}$$

ممان اینرسی پیچشی جرم

سختی پیچشی سیستم

شتاب پیچشی زمین

ارتعاش آزاد یک درجه آزادی بدون میرایی:

$m\ddot{u}+ku=0$ ⟶ معادله حرکت

$u(t)=A_1\sin\omega_n t+A_2\cos\omega_n t$ ⟺ شرایط اولیه

u_0 ⟶ تغییر شکل اولیه

$\dot{u}_0$ ⟶ سرعت اولیه

پاسخ سازه در زمان

$$\boxed{u(t)=u_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}\longrightarrow\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرم ساده شده:

$$u(t)=\rho\sin(\omega_n t+\alpha)$$

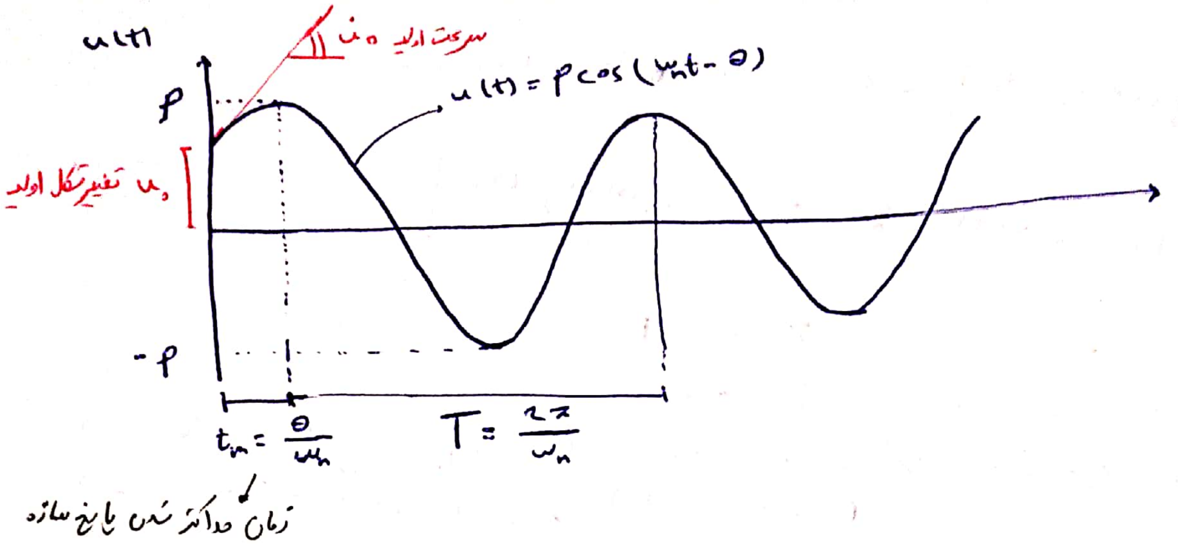
$$\rho=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{u_0\omega_n}{\dot{u}_0}$$

$$u(t)=\rho\cos(\omega_n t-\theta)$$

$$\rho=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\dot{u}_0}{u_0\omega_n}$$

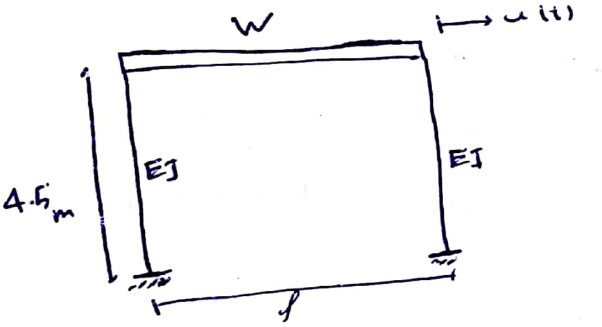


مثال: قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر از دو ستون ارتجاعی و یک تیر افقی صلب تشکیل شده است. برای شرایط اولیه $u(0)=10\ mm$ و $\dot{u}(0)=400\ \frac{mm}{s}$ مطلوب است:

الف) محاسبه تغییرمکان حداکثر و زمان نظیر آن.

ب) محاسبه سرعت و شتاب طبقه در زمان نظیر تغییرمکان حداکثر.

ج) محاسبه حداکثر تنش بوجود آمده در ستون‌ها.



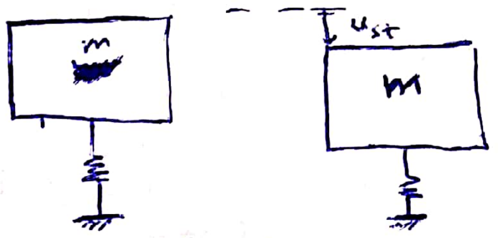
$W = 25\ kN$ وزن سقف

مقطع ستون IPB 180

$I = 3830\ cm^4$

$E = 2.05 \times 10^5\ mpa$

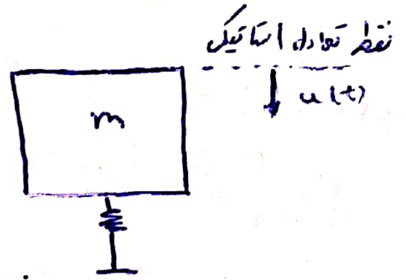
اثر نیروهای ثقلی در معادله حرکت:



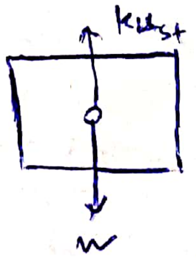
فرض کنید یک جرم بر روی یک فنر قرار دارد.

پس از قرار دادن جرم روی فنر آن را به آرامی پایین می‌آوریم تا در نقطه‌ای به تعادل استاتیک برسد، در این حالت فنر به اندازه u_{st} فشرده شده است.

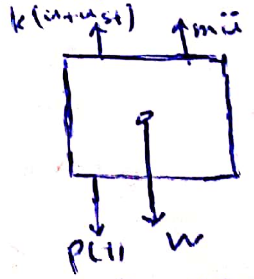
* در این حالت در صورتی که شرایط اولیه‌ای مثل سرعت اولیه و یا تغییرمکان اولیه (نسبت به حالت تعادل استاتیک) به این سیستم داده شود، می‌توان معادلات را بدون در نظر گرفتن u_{st} نوشت:



نوسان سیستم حول نقطه تعادل استاتیک صورت خواهد گرفت.



پیکره آزاد در حالت تعادل استاتیک



پیکره آزاد در حالت نوسان سازه

در حالت نوسان ، تغییرمکان کل (یعنی مجموع تغییرمکان استاتیکی و دینامیکی) :

$u^t(t) = u(t) + u_{st}$

توجه شود که تغییرمکان استاتیکی یک عدد ثابت است و تابعی از زمان نیست .

$$\frac{d}{dt}u_{st} = \dot{u}_{st} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}u^t(t) = \dot{u}(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}\dot{u}^t(t) = \ddot{u}(t)$$

★ با نوشتن تعادل دینامیکی برای کل سیستم خواهیم داشت :

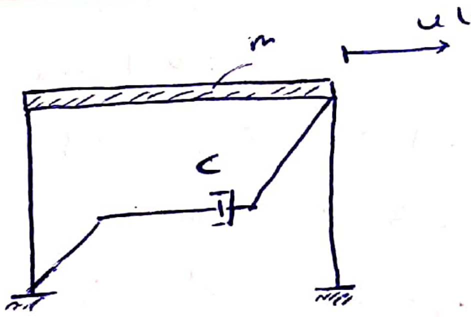
$$m\ddot{u} + ku + \cancel{ku_{st}} = p(t) + \cancel{mg}$$

★ توجه شود در حالت تعادل استاتیکی نیرو فنری که در فنر وجود دارد (ku_{st}) برابر است با وزن جسمی که روی CT قرار دارد ($W = mg$)

$$\boxed{m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t)}$$

نکته : در حالتی که اثر P-Δ در سازه بوجود آید، سختی سازه کم خواهد شد و باید اثر نیروهای ثقلی در نظر گرفته شود . اما این کار نیاز به محاسبات پیچیده‌تر و یا مدلسازی دارد .

ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی میرا :



$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

شرایط اولیه
$u(0) = u_0$
$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

برای $\xi < 1$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(u_0\cos\omega_D t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_n u_0}{\omega_D}\right)\sin\omega_D t\right)}$$

معادله حرکت سازه میرا در زمان

نسبت میرایی سازه $\xi = \frac{c}{c_{cr}}$

c ← میرایی سازه

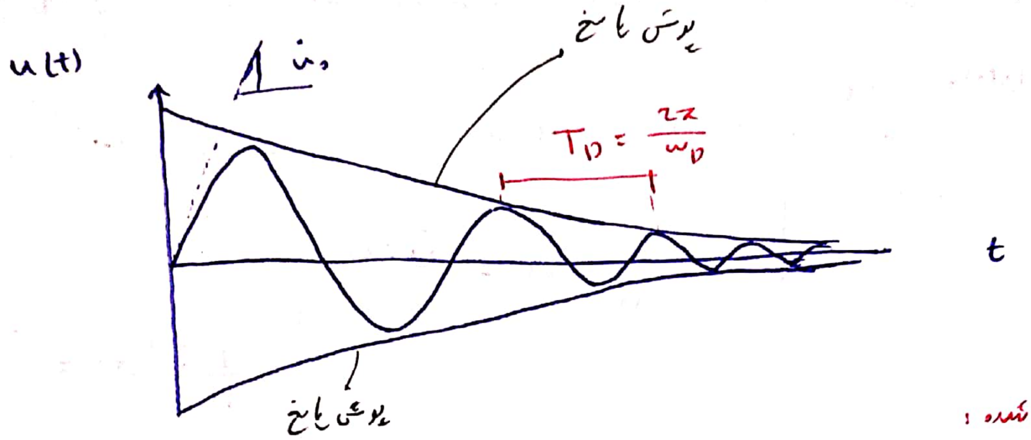
c_{cr} ← مقدار میرایی بحرانی

میرایی بحرانی $c_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$

فرکانس طبیعی سازه بدون میرایی $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

فرکانس سازه میرا $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

زمان تناوب سازه میرا $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$



معادله به فرم ساده شده :

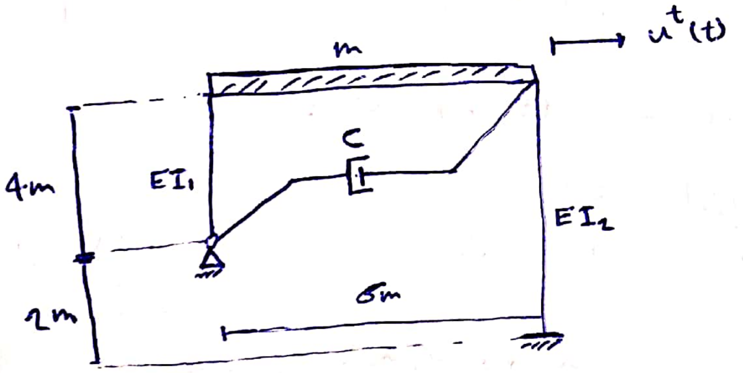
$$u(t) = \rho e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_D \cdot t - \theta)$$

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{\omega_D \cdot u_0}\right)$$

مثال :

قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر از دو ستون ارتجاعی و یک تیر صلب تشکیل شده است. برای شرایط اولیه $u(0) = 100 mm$ و $\dot{u}(0) = 0$ تغییر مکان قاب را به صورت تابعی از زمان بدست آورید :



$m = 10$ tonne $= 10000$ kg

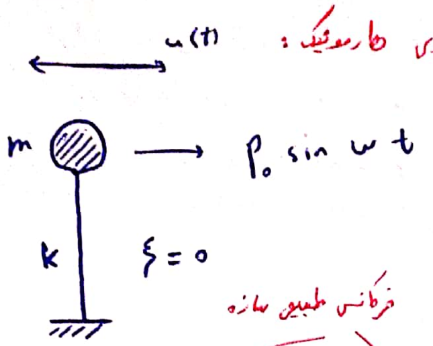
$C = 30$ kN·s /m

$EI_1 = 8$ MN·m^2

$EI_2 = 11.25$ MN·m^2

پاسخ سیستم های یک درجه آزادی نامیرا تحت بارگذاری هارمونیک :

+ بارگذاری هارمونیک سینوسی :



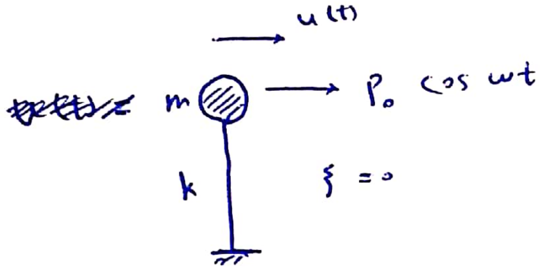
فرکانس طبیعی سازه

فرکانس بار

$$u(t) = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t) + \left(\frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \times \sin\omega t\right)$$

$$u(t) = \underbrace{\left[u_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\,\frac{\omega/\omega_n}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\sin\omega_n t\right]}_{\text{حل گذرا (پاسخ عمومی)}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t}_{\text{پاسخ ماندگار (حل خصوصی) وابسته به بارگذاری}}$$

+ بارگذاری هارمونیک کسینوسی :



$$u(t) = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t) + \left(\frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t\right)$$

$$u(t) = \left[\left(u_0 - \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t\right] + \frac{P_0}{K} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t$$

مثال :

یک پمپ به وزن 981 N در وسط دهانه یک تیر فولادی با تکیه گاه های ساده ، صلبیت خمشی $EI = 22.5\ kN.m^2$ و طول 3 متر قرار گرفته است. بر اثر کارکرد پمپ ، تیر فولادی تحت اثر نیروی هارمونیک $p(t) = 1000\cos 10t$ (N) قرار میگیرد . چنانچه تیر بی وزن باشد و سیستم در ابتدا در حال سکون باشد :

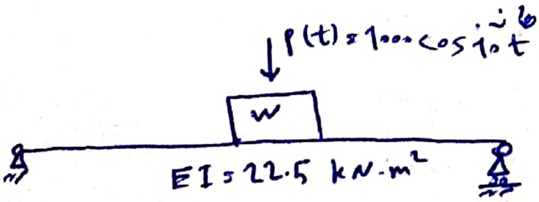
الف) تغییر مکان وسط تیر به صورت تابعی از زمان یافت شود .

ب) ضریب بزرگنمایی مربوط به کل بار دینامیکی (حالت گذرا + حالت مانا) یافت شود.

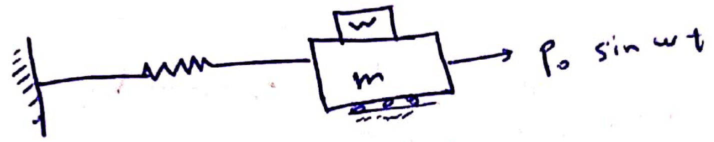
پ) ضریب بزرگنمایی مربوط به پاسخ مانا R_d یافت شود .

ت) حداکثر لنگر خمشی ناشی از حالت پایدار در وسط دهانه .

ث) حداکثر لنگر خمشی دینامیک کل در وسط دهانه .



مثال: برای تعیین جرم m و سختی k مربوط به یک سیستم یک درجه آزادی نامیرا، آن را تحت اثر یک نیروی هارمونیک قرار می‌دهیم. زمانی که فرکانس دوره‌ای تحریک 4HZ باشد، حالت تشدید رخ می‌دهد. سپس به سیستم وزنه ۱۵۰N اضافه نموده و آزمایش را تکرار می‌کنیم. در این حالت همگام به ازای به ازای فرکانس دوره‌ای 3.6 (HZ) رخ می‌دهد. جرم m و سختی k را محاسبه کنید.



حل:

$$f_1 = 4\ \text{Hz} \longrightarrow \omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 4 = 25.133 \left(\frac{rad}{s}\right)$$

چون در حالت تشدید قرار داریم $\omega = \omega_n$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 25.133 \longrightarrow \underline{k = 631.668\ m} \quad (I)$$

پس از افزودن وزنه به سیستم:

$$f_2 = 3.6\ \text{Hz} \longrightarrow \omega_2 = 2\pi f_2 = 22.619 \left(\frac{rad}{s}\right)$$

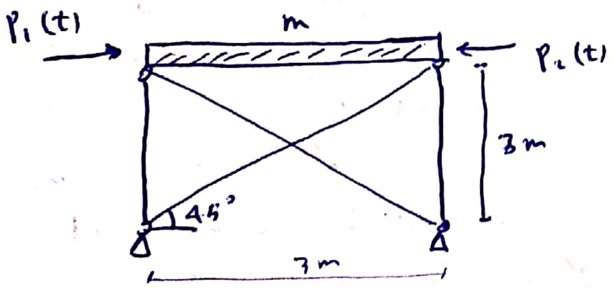
$$\omega = \omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\left(m + \frac{150}{9.81}\right)}} = 22.619 \left(\frac{rad}{s}\right) \longrightarrow \underline{k = 511.619\left(m + \frac{150}{9.81}\right)} \quad II$$

$$I, II \quad 511.619\left(m + \frac{150}{9.81}\right) = 631.668\ m$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 4.334\ (kg) \\ k = 2.744\ \left(\frac{kN}{m}\right) \end{array}}$$

مثال:



A مطلوب است حداکثر پاسخ سازه:

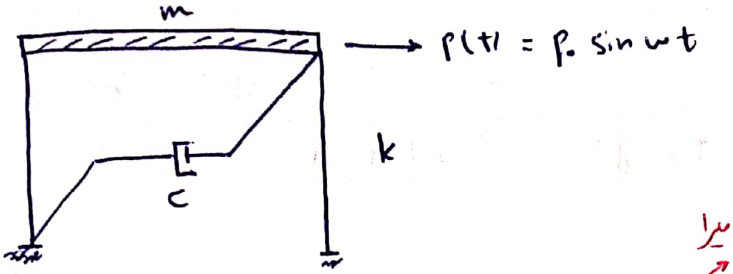
$W = 1$ tonne وزن

$$\begin{cases} P_1(t) = 20 \sin \pi t\ (kN) & t \geq 0 \\ P_2(t) = 30 \sin \pi t\ (kN) & t \geq 10\ (s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_s = 2.1 \times 10^6\ \frac{kg}{cm^2} \\ d_b = 25\ mm \\ \theta = 45^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \dot{u}_0 = 0 \end{cases}$$

ارتعاش سیستم های یک درجه آزادی میرا تحت بارهای هارمونیک :



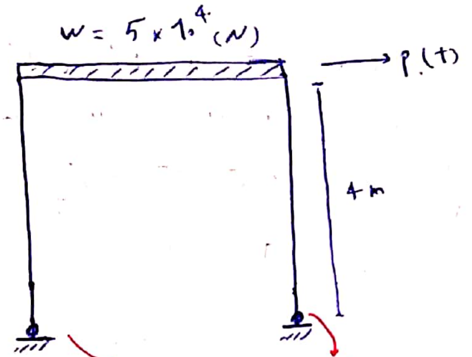
$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ فرکانس سازه میرا

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t}\left(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t\right) \leftarrow \text{پاسخ گذرا}$$

$$+ \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t - \alpha) \leftarrow \text{ارتعاش اجباری}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

مثال : قاب نشان داده شده در شکل زیر موتوری را حمل می‌کند که نیروی هارمونیک $p(t) = 1000 \sin 5t$ (N) را بر قاب وارد می‌سازد. اگر درصد میرایی 5% باشد، دامنه حرکت جواب پایدار و حداکثر تنش دینامیکی در ستون ها را بدست آورید. همچنین تکان مدار موق را در حالت تشدید بررسی نمائید.



اتصال مفصلی

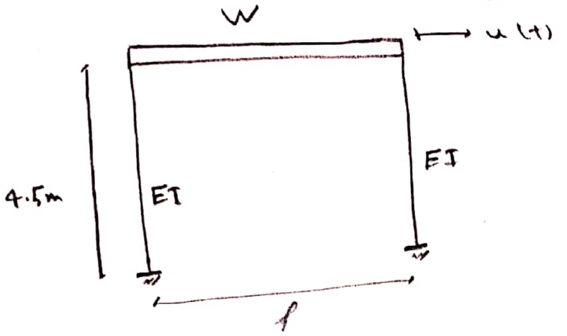
مشخصات ستون ها
$I = 2140 \text{ cm}^4$
$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

قاب ساختمانی نشان داده شده را برای شرایط اولیه $u(0)=10\,mm$ و $\dot{u}(0) = 400\,\frac{mm}{s}$ درنظر بگیرید.

الف) محاسبه تغییر مکان حداکثر و زمان نظیر آن.

ب) محاسبه سرعت و شتاب طبقه در زمان نظیر تغییر مکان حداکثر

پ) محاسبه حداکثر تنش بوجود آمده در ستون ها



$W = 25\,kN$ وزن سقف

مقطع ستون : IPB 180

$I = 3830\ cm^4$

$E = 2.05 \times 10^5\ Mpa$

حل:

$$K = \frac{2\times 12EI}{h^3} = \frac{2\times12\times2.05\times10^5\times10^6\,(\frac{N}{m^2})\times 3830\times(10^{-2})^4}{4.5^3}$$

$$K = 2.068\times10^6\,(\frac{N}{m}) \longrightarrow$$ سختی کل سازه در واحد (SI)

جرم سازه $$m = \frac{w}{g} = \frac{25\times10^6\,(N)}{9.81\,(\frac{m}{s^2})} = 2548.42\ (kg)$$

فرکانس طبیعی $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 28.487\ (\frac{rad}{s})$$ و $$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.221\ (s)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت ارتعاش آزاد قاب به صورت زیر است:

$$m\ddot{u}(t) + k u(t) = 0$$

پاسخ معادله دیفرانسیل $$u(t) = u_0 \cos\omega_n(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n(t)$$

$$u(t) = (10\times10^{-3})\cos(28.487\cdot t) + \frac{400\times10^{-3}}{28.487}\sin(28.487\cdot t)$$

الف) برای یافتن تغییر مکان حداکثر داریم:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + (\frac{\dot{u}_0}{\omega_n})^2} = \sqrt{(0.01)^2 + (\frac{0.4}{28.487})^2} = 0.0172\,m = \boxed{17.2\,mm}$$

* برای یافتن زمان نظیر پاسخ حداکثر باید از $u(t)$ مشتق گرفته تا معادله سرعت $\dot{u}(t)$ بدست آید. سپس با مساوی صفر قرار دادن این معادله، مقدار زمانی که سرعت سازه صفر می‌شود یافت شود که همان نقطه با حداکثر پاسخ جابجایی می‌باشد:

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = -(10^{-2}\times28.487)\sin(28.487t) + \frac{400\times10^{-3}}{\cancel{28.487}}\times\cancel{28.487}\cos(28.487\cdot t)$$

با مساوی صفر قرار دادن این رابطه در ماشین حساب داریم:

$$\boxed{t_m = 0.0334\ (s)}$$

+ راه حل دیگر: می توان معادله حرکت را به یکی از فرم های ساده شده نوشت و

$$u(t) = 0.0172 \cos(28.487 \cdot t - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\dot{u}_0}{u_0 w_n} = \tan^{-1}\frac{400\times10^{-3}}{10^{-2}\times 28.487} = 0.9519\ (rad)$$

برای آن که مقدار $u(t)$، حداکثر شود، باید $\cos$ برابر با 1 شود:

$$28.487 \cdot t - 0.9519 = 0 \longrightarrow \boxed{t = 0.0334\ (s)}$$

همان جواب بدست آمد

ب) به دلیل راحت تر بودن محاسبات با فرم ساده شده، در ادامه از این فرم استفاده می‌شود:

$$\dot{u}(t) = -0.0172 \times 28.487 \sin(28.487 \cdot t - 0.9519)$$

$$\dot{u}(t = 0.0334) = 0 \longrightarrow$$

سرعت طبقه در لحظه تغییر مکان حداکثر برابر صفر است و بدون محاسبات هم قابل بیان می باشد.

پ)

$$\dot{u}(t) = -0.48998 \sin(28.487 \cdot t - 0.9519)$$

$$\ddot{u}(t) = -0.48998 \times 28.487 \cos(28.487 \cdot t - 0.9519)$$

$$\ddot{u}(t) = -13.958 \cos(28.487 \cdot t - 0.9519)$$

$$\ddot{u}(t = 0.0334(s)) = -13.9525\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

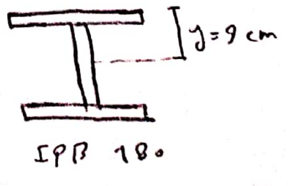
توجه شود که در لحظه ای که سازه در نقطه حداکثر تغییر مکان توقف دارد، مقدار شتاب بیشترین مقدار منفی خود را دارد. این مسئله با توجه به آن که مقدار تقعر در نمودار $u-t$ در نقاط اکسترمم بیشترین مقدار است نیز قابل تشخیص می باشد.

ت)

$$\underset{\text{برشی حداکثر در یک ستون}}{V} = \underset{\text{یک ستون}}{k} \times u_{max} = 1.034\times10^{6} \times 0.0172 = 17.785\ (kN)$$

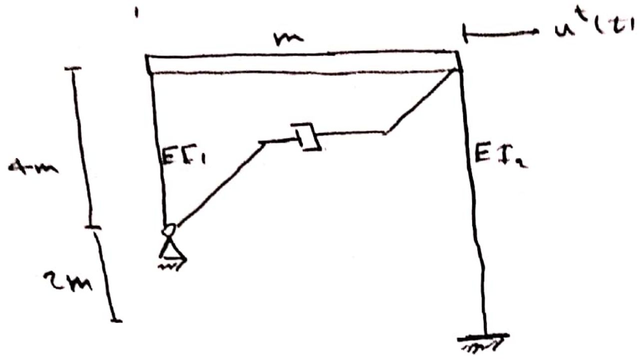
$$\underset{\text{حداکثر لنگر در ستون}}{M} = \frac{V \cdot h}{2} = 40.016\ kN.m$$

$$\underset{\text{تنش حداکثر}}{\sigma} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{40.016\times10^{3} \times 0.09}{3830\times10^{-8}} = \underline{94.032\ (MPa)}$$



IPB 180

مثال : قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر از دو ستون ارتجاعی و یک تیر صلب تشکیل شده است. برای شرایط اولیه $u(0) = 100mm$ و $\dot{u}(0) = 0$ تغییر مکان قاب را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید:



$m = 10$ tonne $= 10,000$ kg

$c = 30$ kN.s/m

$EI_1 = 8$ MN.m^2

$EI_2 = 11.25$ MN.m^2

حل : نیرویی به سازه وارد نشده و فقط شرایط اولیه باعث ارتعاش سازه خواهد بود. تغییر مکان ستون ها به دلیل اتصال به سقف صلب، با هم برابر می باشد، پس به صورت فنرهای موازی عمل می کنند و سختی آن ها جمع می گردد.

$$k = \underbrace{\frac{3EI_1}{h_1^3}}_{\text{سختی ستون یک سرگیردار}} + \underbrace{\frac{12EI_2}{h_2^3}}_{\text{سختی ستون دو سرگیردار}} = \frac{3\times 8}{4^3} + \frac{12\times 11.25}{6^3} = 1\ MN/m$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

با فرض معادله حرکت به فرم ساده :

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_D\cdot t - \theta)$$

فرکانس طبیعی سیستم بدون میرایی $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1\times 10^6}{10\times 10^3}} = 10\ (\frac{rad}{s})$ $\qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{10} = 0.628\ (s)$

میرایی بحرانی برای این سازه $c_{cr} = 2m\omega_n = 2\times 10000\times 10 = 2\times 10^5\ (\frac{N.s}{m})$

نسبت میرایی $\boxed{\xi = \frac{30\times 10^3}{2\times 10^5} = 0.15}$

فرکانس سازه با میرایی $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 10\times\sqrt{1-0.15^2} = 9.887\ (\frac{rad}{s})$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{9.887} = 0.6355\ (s)$$

* همان طور که انتظار می رود سازه در حالت میرا، کُندتر از سازه بدون میرایی عمل می کند:

$$\omega_D < \omega_n$$
$$T_D > T_n$$

$\dot{u}(0) = 0$

$u(0) = 100\,mm = 100 \times 10^{-3} = 0.1 \quad (m)$

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi w_n u_0}{w_n}\right)^2} = \sqrt{0.1^2 + \left(\frac{0 + 0.15 \times 10 \times 0.1}{9.887}\right)^2}$$

$\rho = 0.101144 \quad (m)$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.15 \times 10 \times 0.1}{9.887 \times 0.1}\right) = 0.1506 \text{ rad}$

$u(t) = 0.101144 \; e^{-0.15 \times 10 \times t} \cos(9.887 t - 0.1506)$ $\Longleftarrow$ معادله حرکت

* یافتن نقاطی که نمودار با محور افقی برخورد دارد $(u=0)$: مقدار $\cos$ باید صفر شود .

1) $9.887 t - 0.1506 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = 0.1741 \; (S)$

2) $9.887 t - 0.1506 = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow t = 0.4919 \; (S)$

3) $9.887 t - 0.1506 = \frac{5\pi}{2} \longrightarrow t = 0.8096 \; (S)$

4) $9.887 t - 0.1506 = \frac{7\pi}{2} \longrightarrow t = 1.1274 \; (S)$

* یافتن نقاطی که تغییر مکان حداکثر است :

$$\dot{u}(t) = 0.101144 \times (-0.15 \times 10)\, e^{-0.015 \times 10 \times t} \cos(9.887 t - 0.1506) + 0.101144 \times e^{-0.15 \times 10 t} \times (-9.887 \sin(9.887 t - 0.1506))$$

$$\dot{u}(t) = 0.101144 \times e^{-0.15 \times 10 \times t} \times \left[-1.5 \cos(9.887 t - 0.1506) - 9.887 \sin(9.887 t - 0.1506)\right]$$

$-1.5 \cos(9.887 t - 0.1506) - 9.887 \sin(9.887 t - 0.1506) = 0$

$\tan(9.887 t - 0.1506) = -0.151714$

$9.887 t - 0.1506 = \boxed{\tan^{-1}(-0.151714)}$ -0.1506

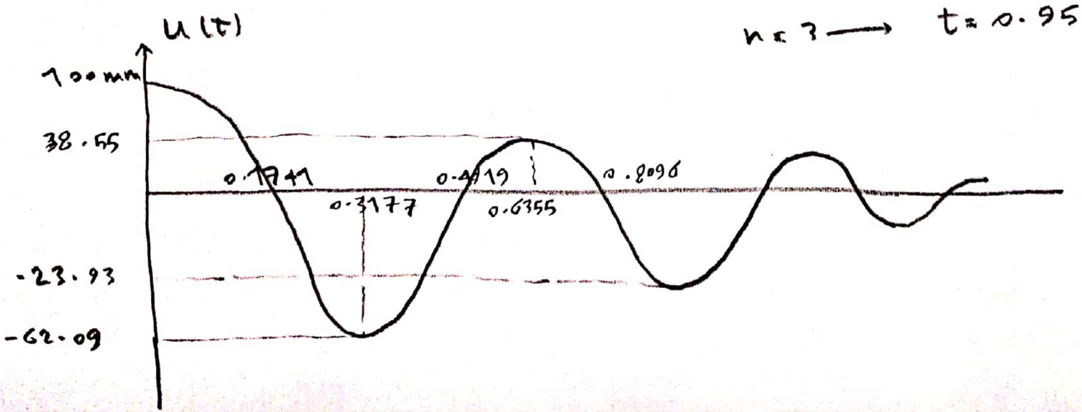
$9.887 t = 0 + n\pi$,

$n = 0 \longrightarrow t = 0$

$n = 1 \longrightarrow t = 0.3177 \; (S)$

$n = 2 \longrightarrow t = 0.6355 \; (S)$

$n = 3 \longrightarrow t = 0.9532 \; (S)$



مثال : یک بسته به وزن 981 (N) در وسط دهانه یک تیر فولادی با تکیه گاه‌های ساده، با صلبیت خمشی $EI = 22.5\ kN.m^2$ و طول 3 متر قرار دارد. بر اثر کارکرد بسته، تیر فولادی تحت اثر نیروی هارمونیک $p(t) = 1000 \cos 10\, t$ (N) قرار می‌گیرد. خاصیت تیر بی وزن باشد و سیستم در ابتدا در حال سکون باشد:

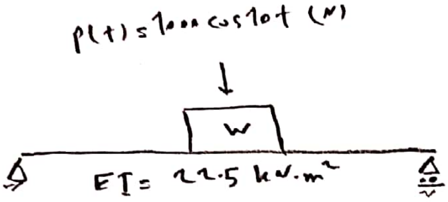
الف) تغییر مکان وسط تیر به صورت تابعی از زمان یافت شود.

ب) ضریب بزرگنمایی مربوط به کل بار دینامیک.

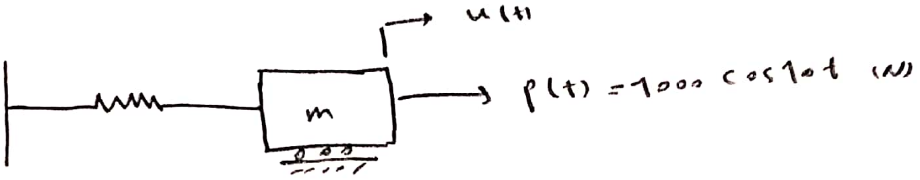
پ) ضریب بزرگنمایی مربوط به پاسخ مانا R_d.

ت) حداکثر لنگر خمشی ناشی از حالت پایدار در وسط دهانه

ث) حداکثر لنگر خمشی دینامیکی کل در وسط دهانه.



حل :



$$m = \frac{w}{g} = \frac{981}{9.81} = 100 \quad (kg)$$

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 22.5}{3^3} = 40 \quad kN/m$$

سختی خمشی تیر در وسط دهانه
(نیازی به حفظ کردن نیست)

فرکانس طبیعی سازه $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40 \times 1000}{100}} = 20 \ \frac{rad}{s}$$

فرکانس بار $$\omega = 10 \ \frac{rad}{s}$$

الف)

$$u(t) = \left[\left(\cancel{u_0} - \frac{p_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\cos \omega_n t + \frac{\cancel{\dot{u}_0}}{\omega_n}\sin \omega_n t\right]$$

$$+ \frac{p_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t$$

$$u(t) = \left[-\frac{1000}{40 \times 10^3} \times \frac{1}{1-0.5^2}\right] \times (\cos 10t - \cos 20t)$$

$$= 33.333\,(\cos 10t - \cos 20t)\,(mm) \longrightarrow$$ تغییر مکان وسط تیر در زمان

ب) برای تعیین ضریب بزرگنمایی کل لازم است تا حداکثر جابجایی سازه در حالت بار دینامیکی و همچنین حداکثر جابجایی سازه تحت بار استاتیکی محاسبه شود:

$$\dot{u}(t) = 0 \Longrightarrow -10 \sin 10t + 20 \sin 20t = 0$$

$$10 \sin 10t = 2 \sin 20t = 4 \sin 10t \cos 10t$$

hint : $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$$\sin 10t\,(1 - 4\cos 10t) = 0$$

$1 - 4\cos 10t = 0 \Longrightarrow t_1 = 0.1318\ (s)$ $u_{max} = 37.5\ (mm)$

$\sin 10t = 0 \Longrightarrow t_2 = \frac{\pi}{10} = 0.31416\ (s)$ $u_{min} = -66.667\ (mm)$

$$u_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{1000}{40 \times 10^3} \times 1000 = 25\,(mm)$$

ضریب بزرگنمایی کل $D = \left|\frac{u_{min}}{u_{st}}\right| = \frac{66.667}{25} = 2.667$

پ) تعیین ضریب بزرگنمایی دینامیک R_d :

$$R_d = \left| \frac{u_p(t)_{max}}{u_{st}} \right| = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1-0.5^2} = 1.333$$

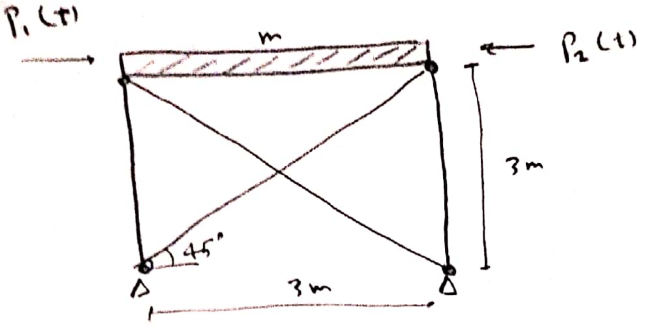
ت) حداکثر لنگر خمش دینامیکی نظیر حالت مانا :

$$M^p_{max} = R_d \times \frac{P_0 L}{4} = 1.333 \times \frac{1000 \times 3}{4} = 1000\,(N.m)$$

ث) حداکثر لنگر خمشی دینامیکی کل :

$$M^t_{max} = D \times \frac{P_0 L}{4} = 2.667 \times \frac{1000 \times 3}{4} = 2000\,(N.m)$$

مطلوب است حداکثر پاسخ سازه :



$W = 1$ tonne force

$$\begin{cases} P_1(t) = 20 \sin \pi(t) \ (kN) & t \geq 0 \\ P_2(t) = 30 \sin \pi(t) \ (kN) & t \geq 1.5 \end{cases}$$

مشخصات مهاربند
$$\begin{cases} E_s = 2.1 \times 10^6 \ \frac{kg}{cm^2} \\ d_b = 25 \ mm \\ \theta = 45^\circ \end{cases}$$

$$I.C \begin{cases} u_0 = 0 \\ \dot{u}_0 = 0 \end{cases}$$

ابتدا یافتن مشخصات سازه :

$$m = \frac{w}{g} = \frac{10^3 \ kgf}{9.81 \ (\frac{m}{s^2})} = 101.94 \ (\frac{kg.s^2}{m})$$

$$k = \frac{EA}{L} \cos^2\theta = \frac{2.1 \times 10^6 \ (\frac{kg}{cm^2}) \times \frac{\pi}{4} \times 2.5^2 \ cm^2}{300\sqrt{2} \ (cm)} \times \frac{1}{2} = 12148.5 \ (\frac{kgf}{cm})$$

$$12148.5 \ (\frac{kgf}{\cancel{cm}}) \times \frac{100 \ \cancel{cm}}{1m} = 1.21485 \times 10^6 \ \frac{kgf}{m}$$

$$\boxed{w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 109.166 \ (\frac{rad}{s})}$$

یافتن پاسخ سازه در حالت ماندگار :

$t \geq 0(s)$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} R_d \sin wt = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1 - (\frac{w}{w_n})^2} \sin wt$$

$$u(t) = \frac{20 \times 10^3 \ N \times \frac{1 \ kgf}{9.81 (N)}}{1.21485 \times 10^6 \ \frac{kgf}{m}} \times \frac{1}{1 - (\frac{\pi}{109.166})^2} \sin \pi t \ (m)$$

$$\text{پاسخ حداکثر} = \frac{20 \times 10^3 \times \frac{1}{9.81}}{1.21485 \times 10^6} \times \frac{1}{1 - (\frac{\pi}{109.166})^2} =$$

$$= 0.001678 \times 1.00083 = \boxed{0.0016794 \ (m)}$$

پاسخ حداکثر در $t > 0$

$t > 10\,(s)$

از مرحله قبل ارتعاش آزاد باقی می‌ماند و پاسخ مرحله جدید باید با علامت منفی با ارتعاش آزاد جمع شود زیرا جهت آن خلاف جهت مثبت است.

ارتعاش آزاد $u(t) = u_0 \cos \omega_n(t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n(t)$

u_0 و $\dot{u}_0$ (در این مرحله) برابر مقادیر پاسخ در لحظه $t=10(s)$ از مرحله قبل است

$$u(t=10) = 0.001679 \sin \pi \times 10 = 0 \quad (m)$$

$$\dot{u}(t) = 0.001679 \times \pi \cos \pi t$$

$$\dot{u}(t=10) = 0.001679 \times \pi \cos(\pi \times 10) = 0.001679 \left(\frac{m}{s}\right)$$

پاسخ ارتعاش آزاد از مرحله قبل $u(t) = 0 \cos \omega_n(t) + \frac{0.001679}{109.166} \sin(109.166\, t)$

پاسخ مرحله جدید $u(t) = -\frac{p_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \pi (t)$

$$= -\frac{30\times 10^3 \times \frac{2}{9.81}}{1.21485\times 10^6} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{109.166}\right)^2} \sin \pi (t)$$

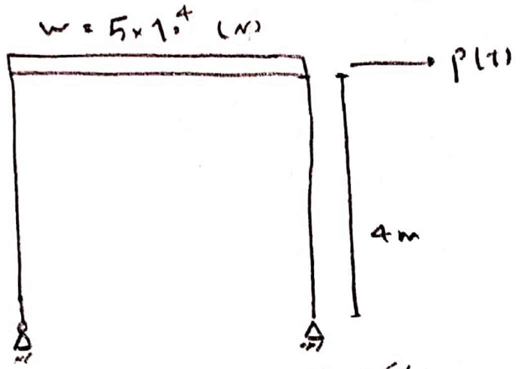
$$= -\underbrace{0.002517 \times 1.00083}_{-0.002519} \sin \pi (t)$$

پاسخ کل $u(t) = 0.000015 \sin(109.166\, t) - 0.002519 \sin \pi t$

باید با مشتق گیری و برابر صفر قرار داده پاسخ حداکثر یافت شود.

$$t = 0.453256 \longrightarrow u = -0.00250249 \quad (m)$$

مثال: قاب نشان داده شده در شکل زیر موتوری را حمل می‌کند که نیروی هارمونیک $p(t) = 1000 \sin 5t$ (N) را بر قاب وارد می‌سازد. اگر درصد میرایی 5٪ باشد. دامنه حرکت جواب پایدار و حداکثر تنش دینامیک در ستون‌ها را بدست آورید. همچنین تمام موارد فوق را در حالت تشدید بررسی نمایید.



مشخصات ستون‌ها (INP20)

$$I = 2140 \ \mathrm{cm^4}$$

$$E = 2.1\times10^6 \ \frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{cm^2}}$$

دو ستون موازی

$$k = \frac{2\times3EI}{L^3} = 2\times\frac{3\times2.1\times10^6\times2140}{(400)^3} = 421.3\left(\frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{cm}}\right)$$

$$k = 421.3\ \frac{\mathrm{kgf}}{\mathrm{cm}}\times\frac{9.81\,\mathrm{N}}{\mathrm{kgf}}\times\frac{100\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} = 412874\ (\mathrm{N/m})$$

$$u_{st} = \frac{P_0}{k} = \frac{1000\ (\mathrm{N})}{412874} = 0.0024\ (\mathrm{m})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{412874}{5\times10^4/9.81}} = 8.99 \simeq 9\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\beta = \frac{5}{9} \simeq 0.556$$

جواب خصوصی

$$u_p = u_{st}\cdot R_d \sin(\omega t - \phi)$$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$u_{max} = 0.0024\times\frac{1}{\sqrt{(1-0.556^2)^2 + (2\times0.05\times0.556)^2}} = 0.0035\ (\mathrm{m})$$

+ حداکثر برش در هرکدام از ستون‌ها:

$$\underset{\text{برش ستون}}{V_{max}} = \text{جابجایی}\times\text{سختی ستون} = u_{max}\times k$$

$$= 0.35\ (\mathrm{cm})\times\frac{3EI}{L^3} = 0.35\times\frac{3\times2.1\times10^6\times2140}{(400)^3} = 73.73\,(\mathrm{kgf})$$

+ حداکثر لنگر خمشی در ستون:

$$M_{max} = V_{max}\times L = 73.73\times400 = 29492\ (\mathrm{kgf.cm})$$

حداکثر تنش در ستون :

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I} = \frac{29492 \times 10}{2140} = 137.8 \left(\frac{kgf}{cm^2}\right)$$

در حالت تشدید $\beta = 1$ خواهد بود :

$$u_{max} = u_{st} \times R_d$$

$$= 0.0024 \times \frac{1}{\sqrt{(\cancel{1-1^2})^2 + (2 \times 0.05 \times 1)^2}} = 0.0024 \times 10 = 0.024\ (m)$$

$$V_{max} = \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times 2140}{(400)^3} \times 2.4 = 505.6\ (kgf)$$

$$M_{max} = 505.6 \times 400 = 202230\ (kgf \cdot cm)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{202230 \times 10}{2140} = 945 \left(\frac{kgf}{cm^2}\right)$$

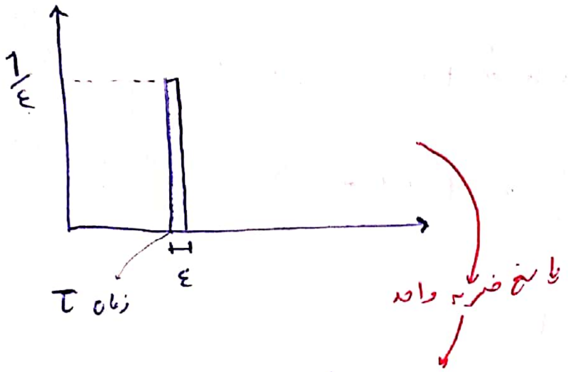
$$\text{نسبت تنش ها} = \frac{945}{137.8} = \boxed{6.86}$$

پاسخ سیستم به ضربه :

ضربه دلخواه :

$$u(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

* پاسخ در زمان t وقتی که $t = \tau$ باشد.



بدون میرایی $$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t-\tau) \qquad t \geqslant \tau$$

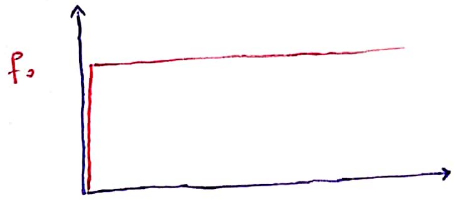
با میرایی $$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) \qquad t \geqslant \tau$$

بار گذاری دلخواه + شرایط اولیه :

در چنین حالتی ، ناشی از مرحله قبلی یک شرایط اولیه در سیستم وجود دارد که یک ارتعاش آزاد در سیستم ایجاد خواهد کرد. همچنین در صورتی که بارگذاری دلخواه اعمال شود با آن جمع خواهد شد.

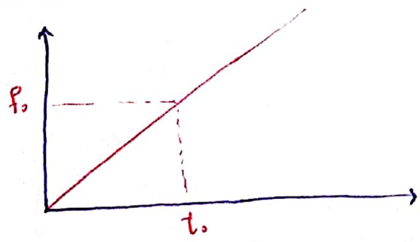
$$u(t) = \left[u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \right] + \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

بارگذاری پله ای :



$$u(t) = \frac{f_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

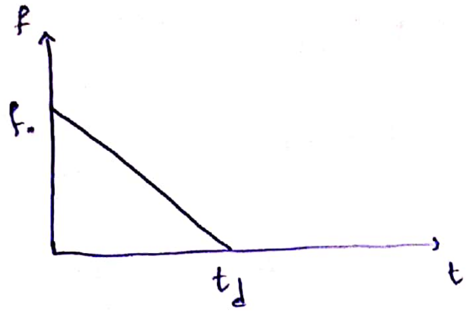
بارگذاری شیبدار :



تابع بار $$f(\tau) = \frac{f_0}{t_0} \tau$$

$$u(t) = \frac{f_0}{t_0} \int_0^t \tau \cdot \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n (t-\tau))\, d\tau = \frac{f_0}{k} \left(\frac{t}{t_0} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_0} \right)$$

بارگذاری مثلثی قائم الزاویه :

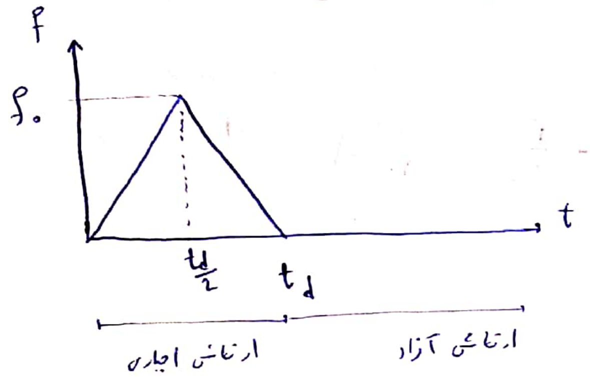


$$f(t) = \begin{cases} f_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{f_0}{k}\left(1 - \frac{t}{t_d} - \cos w_n t + \frac{\sin w_n t}{w_n t_d}\right) \qquad t \leq t_d$$

$$u(t) = \frac{f_0}{k}\left[-\cos w_n t - \frac{\sin w_n (t - t_d) - \sin w_n t}{w_n \cdot t_d}\right] \qquad t \geq t_d$$

بارگذاری مثلث متساوی الساقین :



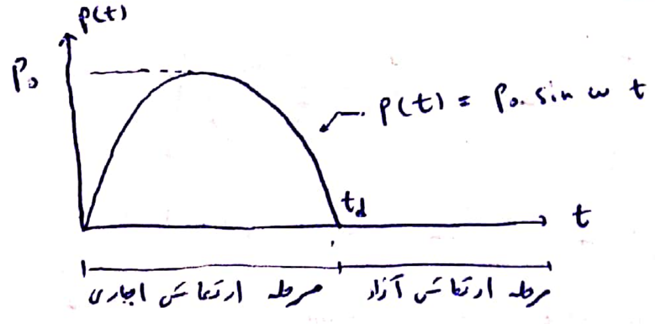
$$f(t) \begin{cases} 2 f_0 \frac{t}{t_d}, & 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2} \\ 2 f_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) & \frac{t_d}{2} \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{f_0}{k} \cdot \left[\frac{2}{t_d}\left(t - \frac{1}{w_n} \sin w_n t\right)\right] \qquad 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2}$$

$$u(t) = \frac{f_0}{k} \cdot \frac{2}{t_d}\left\{t_d - t + \frac{1}{w_n}\left[2 \sin w_n \left(t - \frac{t_d}{2}\right) - \sin w_n t\right]\right\} \qquad \frac{t_d}{2} \leq t \leq t_d$$

$$u(t) = \frac{f_0}{k}\left\{\frac{2}{w t_d}\left[2 \sin w_n \left(t - \frac{t_d}{2}\right) - \sin w_n t - \sin w_n (t - t_d)\right]\right\} \qquad t \geq t_d$$

بارگذاری نیم موج سینوسی :



فرکانس بارگذاری نیم موج سینوسی به صورت زیر خواهد بود :

$$w t_d = \pi \longrightarrow w = \frac{\pi}{t_d}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\pi / t_d} = 2 t_d$$

پریود بارگذاری

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin \omega t = p_0 \sin \dfrac{\pi t}{t_d} & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

کل بارگذاری

پس معادله دیفرانسیل سیستم تحت ضربه نیم موج سینوسی به صورت زیر است :

$$m\ddot{u}(t) + k u(t) = \begin{cases} p_0 \sin \omega t & t \leq t_d \longrightarrow \\ 0 & t \geq t_d \longrightarrow \end{cases}$$

ارتعاش اجباری

ارتعاش آزاد

پاسخ مرحله ارتعاش اجباری $(t < t_d)$:

با فرض شرایط اولیه سکون $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ پاسخ در مرحله ارتعاش اجباری به صورت زیر است :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \times \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{T}{2t_d}\right)^2}_{\text{همان مقدار } \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}} \left[\sin\left(\frac{\pi t}{t_d} - \frac{T}{2t_d} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\right]$$

فرکانس طبیعی سیستم $\omega_n = \dfrac{2\pi}{T}$ $\qquad$ $\omega = \dfrac{\pi}{t_d}$

پاسخ در مرحله ارتعاش آزاد $(t > t_d)$:

با یافتن شرایط نهایی ارتعاش اجباری در لحظه t_d و منظور کردن آن به عنوان شرایط اولیه ارتعاش آزاد :

$$u(t_d) = \frac{p_0}{k} \times \frac{-1}{1 - \left(\frac{T}{2t_d}\right)^2} \times \frac{T}{2t_d} \sin\left(\frac{2\pi t_d}{T}\right)$$

$$\dot{u}(t_d) = \frac{p_0}{k} \times \frac{-(\pi/t_d)}{1 - \left(\frac{T}{2t_d}\right)^2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t_d}{T}\right)\right]$$

$$u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d)$$

در این فرمول مبدأ زمان در ابتدای بارگذاری (مرحله ارتعاش اجباری) انتخاب شده است.

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \left[\frac{(T/t_d) \cos\left(\frac{\pi t_d}{T}\right)}{\left(\frac{T}{2t_d}\right)^2 - 1}\right] \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{t_d}{2T}\right)\right]$$

فرم ساده شده پاسخ سیستم در مرحله ارتعاش آزاد

مقادیر حداکثر پاسخ :

در مرحله ارتعاش آزاد :

دامنه پاسخ (مقدار حداکثر)

$$\rho = \frac{P_0}{k} \times \frac{(T/t_d)}{\left(\frac{T}{2t_d}\right)^2 - 1} \cos\left(\frac{\pi t_d}{T}\right)$$

زمان نظیر اولین پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش آزاد (t_{m2}) اندیس 2 به مفهوم مرحله دوم ارتعاش است.

$$\frac{t_{m2}}{T} = \frac{1}{4} + \frac{t_d}{2T}$$

در مرحله ارتعاش اجباری : $t > t_d$

در مرحله ارتعاش اجباری ممکن است چندین پاسخ حداکثر بوجود آید و لازم است، همه آن ها یافت شده و مقدار حداکثر مطلق به عنوان جواب منظور شود :

زمان نظیر پاسخ حداکثر در ارتعاش اجباری :

$$\frac{t_{m1}}{T} = \frac{\frac{2t_d}{T}}{\left(1 + \frac{2t_d}{T}\right)} n \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

فقط t_{m1} هایی که از t_d کوچکتر باشند مورد قبول هستند.

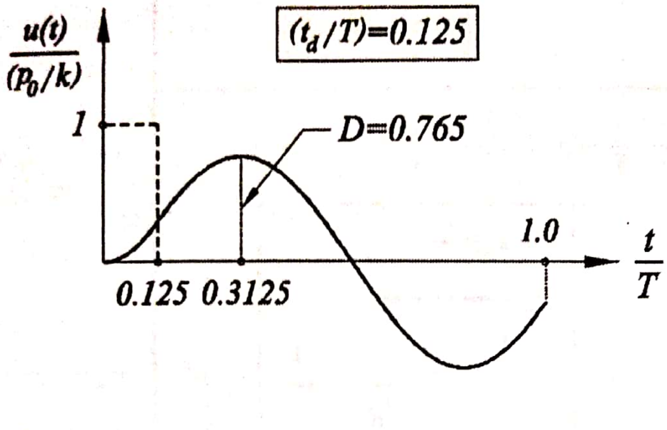
$$u(t_{m1}) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{2t_d}\right)^2} \left[\sin\left(\frac{2\pi n}{1 + \frac{2t_d}{T}}\right) - \frac{T}{2t_d} \sin\left(\frac{2\pi n}{1 + \frac{T}{2t_d}}\right)\right]$$

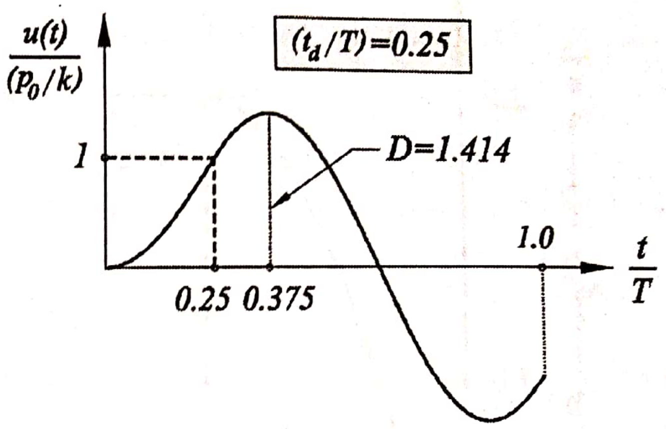
نکات :

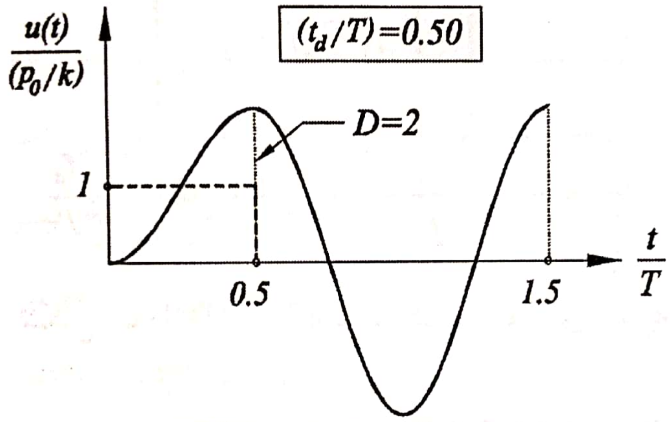
① در صورتی که $\frac{t_d}{T} < \frac{1}{2}$ باشد، در مرحله ارتعاش اجباری هیچ نقطه حداکثری نخواهیم داشت. پاسخ در این مرحله فقط افزایش خواهد یافت.

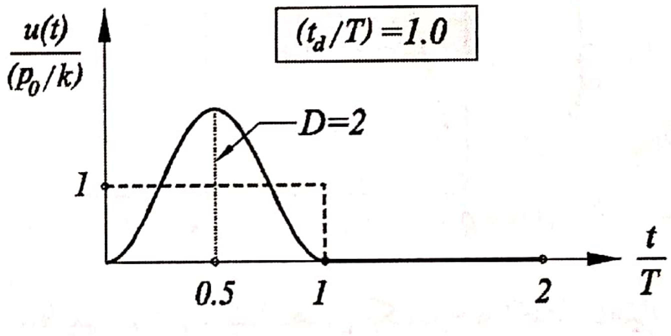
② در صورتی که $\frac{t_d}{T} = \frac{1}{2}$ باشد، مقادیر حداکثر مرحله ارتعاش اجباری و آزاد باهم معادل بوده و هر دو در زمان $t = t_d$ خواهد بود.

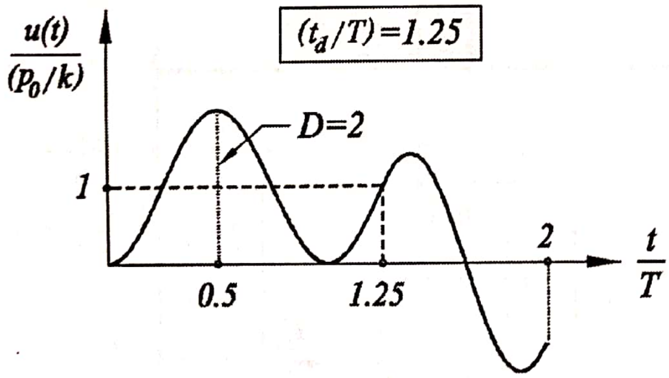
③ در صورتی که $\frac{t_d}{T} > \frac{1}{2}$ باشد، حداقل یک قله در مرحله ارتعاش اجباری وجود دارد.

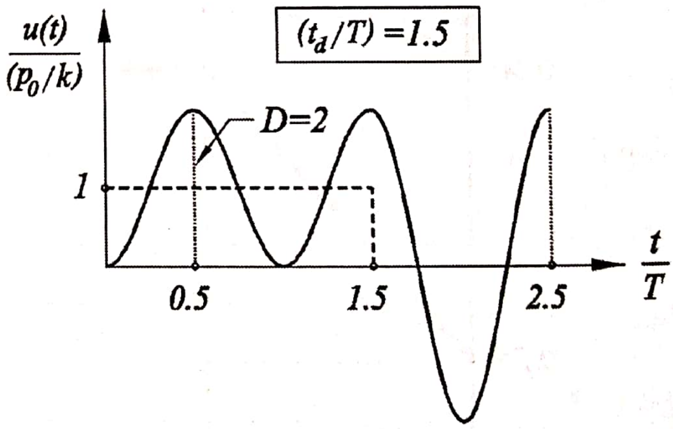

$(t_d/T)=0.125$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
1
D=0.765
1.0
0.125
0.3125
$\frac{t}{T}$

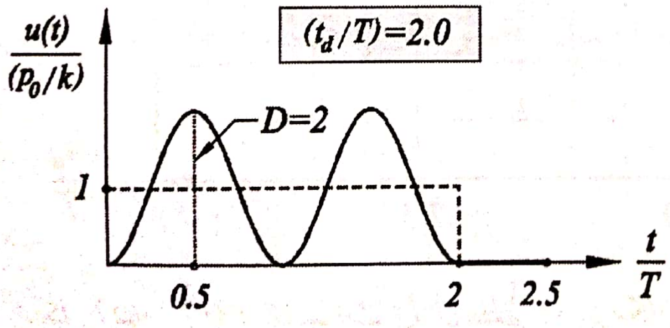

$(t_d/T)=0.25$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
1
D=1.414
1.0
0.25
0.375
$\frac{t}{T}$

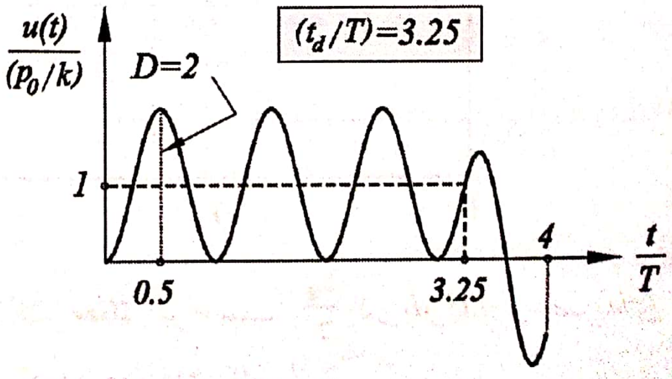

$(t_d/T)=0.50$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
0.5
1.5
$\frac{t}{T}$

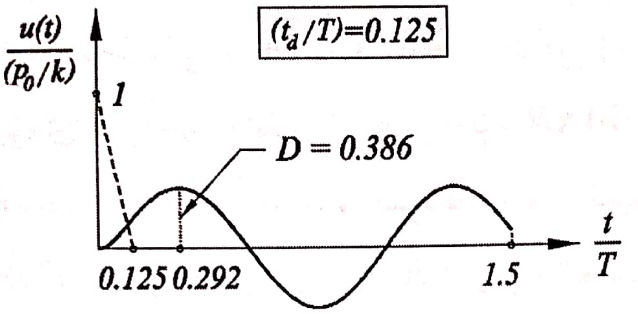

$(t_d/T)=1.0$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
0.5
1
2
$\frac{t}{T}$

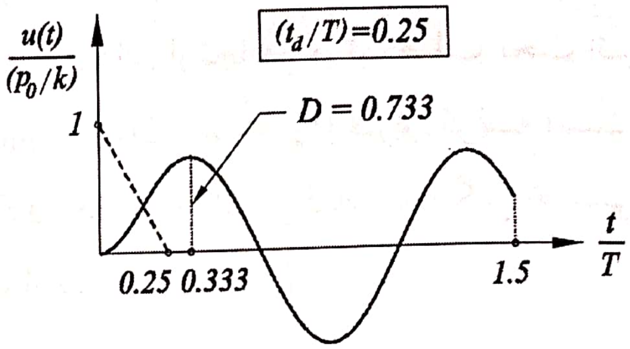

$(t_d/T)=1.25$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
2
0.5
1.25
$\frac{t}{T}$

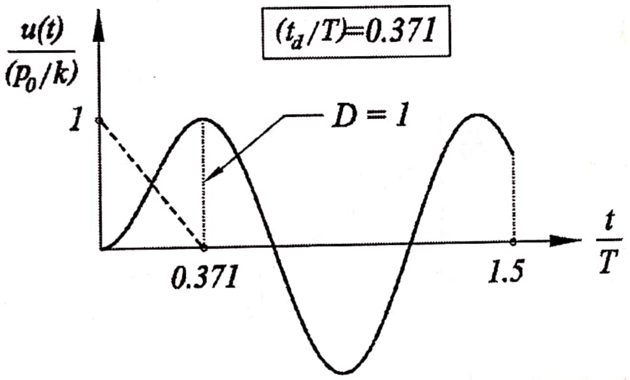

$(t_d/T)=1.5$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
0.5
1.5
2.5
$\frac{t}{T}$

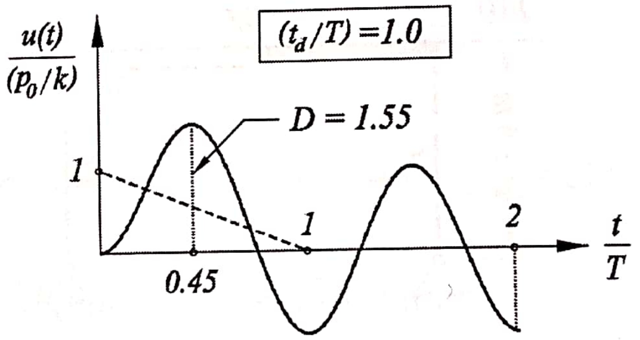

$(t_d/T)=2.0$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
0.5
2
2.5
$\frac{t}{T}$

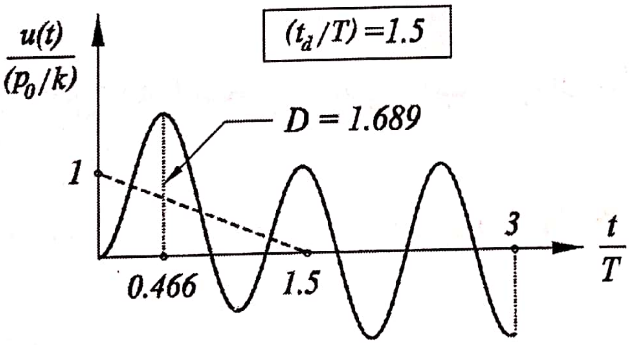

$(t_d/T)=3.25$
$\frac{u(t)}{(p_0/k)}$
D=2
1
4
0.5
3.25
$\frac{t}{T}$

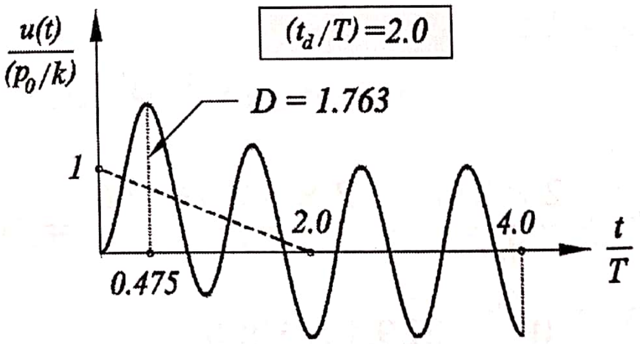

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=0.125
1
D = 0.386
0.125
0.292
1.5
t/T

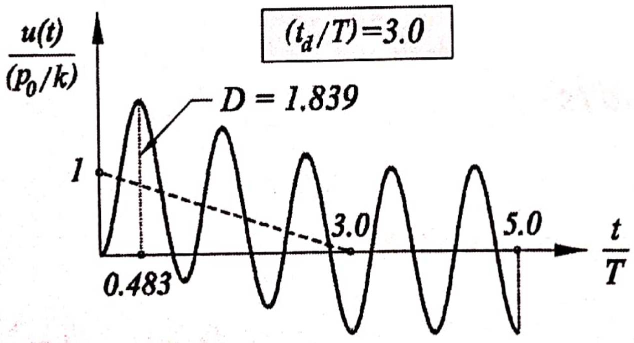

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=0.25
D = 0.733
1
0.25
0.333
1.5
t/T

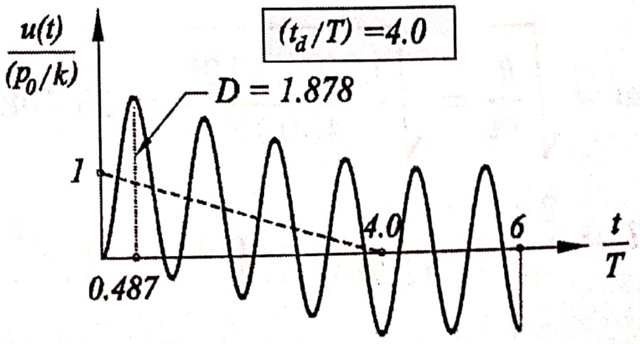

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=0.371
D = 1
1
0.371
1.5
t/T

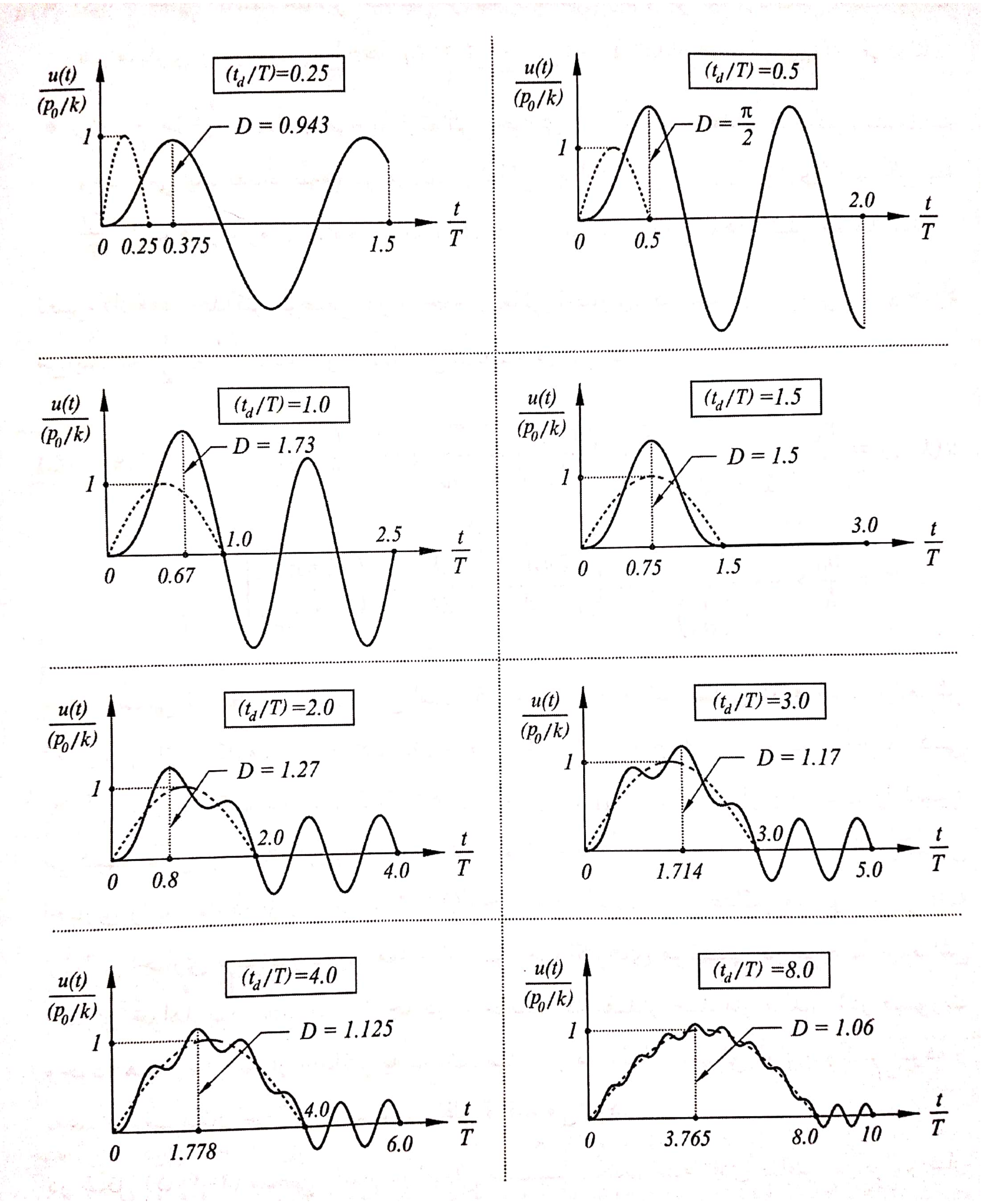

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=1.0
D = 1.55
1
1
2
0.45
t/T


u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=1.5
D = 1.689
1
3
0.466
1.5
t/T

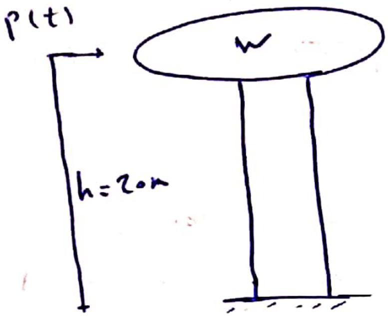

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=2.0
D = 1.763
1
2.0
4.0
0.475
t/T

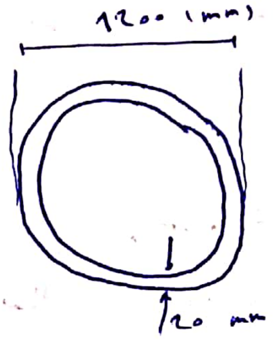

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=3.0
D = 1.839
1
3.0
5.0
0.483
t/T

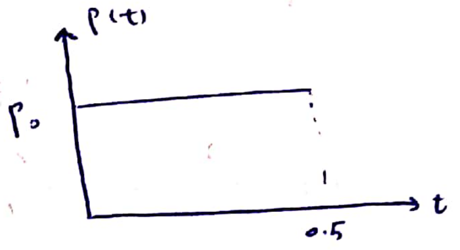

u(t)/(p_0/k)
(t_d/T)=4.0
D = 1.878
1
4.0
6
0.487
t/T


(t_d/T)=0.25
u(t)/(p_0/k)
1
D = 0.943
0
0.25
0.375
1.5
t/T
(t_d/T) =0.5
u(t)/(p_0/k)
1
D = π/2
0
0.5
2.0
t/T
(t_d/T)=1.0
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.73
0
0.67
1.0
2.5
t/T
(t_d/T) =1.5
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.5
0
0.75
1.5
3.0
t/T
(t_d/T)=2.0
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.27
0
0.8
2.0
4.0
t/T
(t_d/T)=3.0
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.17
0
1.714
3.0
5.0
t/T
(t_d/T)=4.0
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.125
0
1.778
4.0
6.0
t/T
(t_d/T) =8.0
u(t)/(p_0/k)
1
D = 1.06
0
3.765
8.0
10
t/T

مثال: منبع هوایی نشان داده شده در شکل زیر دارای پایه‌ای فولادی با مقطع دایره‌ای توخالی به قطر خارجی ۱۲۰۰(mm) و ضخامت ۲۰(mm) می‌باشد. وزن منبع در حالت پُر برابر $W = 500(kN)$ و ارتفاع آن $h = 20(m)$ است. منبع هوایی تحت اثر نیروی ضربه‌ای مستطیلی با دامنه $P_0 = 75(kN)$ و زمان تداوم $t_d = 0.5(s)$ قرار دارد. با صرف نظر از میرایی و وزن پایه منبع، تغییر مکان جانبی حداکثر و تنش خمشی حداکثر در پایه منبع را تعیین نمایید.



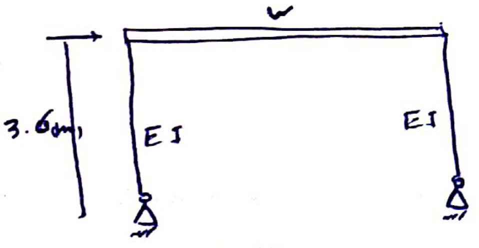




$$F_y = 240(Mpa) \qquad E = 2.05 \times 10^5 (Mpa)$$

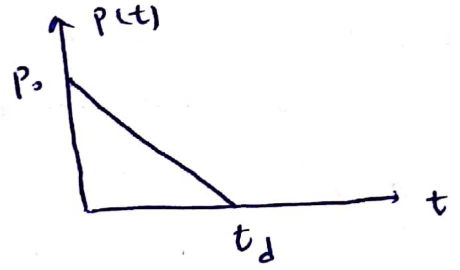
مثال: قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر با ستون‌های ارتجاعی و تیر صلب تحت اثر نیروی ضربه‌ای مثلثی با مقدار اولیه $P_0 = 40(kN)$ و زمان تداوم t_d قرار گرفته است. چنانچه سیستم بدون میرایی باشد، تغییرمکان جانبی حداکثر قاب و لنگر خمشی حداکثر ستون‌ها را در دو حالت زیر مشخص کنید:

الف) $t_d = 0.8(s)$ ب) $t_d = 0.08(s)$

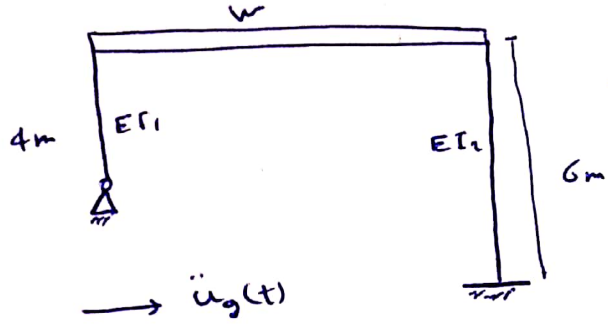


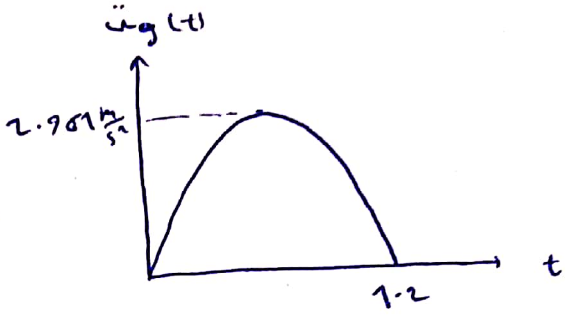
$W = 392.4kN$ $EI = 76.746\ MN.m^2$

$P_0 = 40\ kN$



مثال: قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر با ستون های ارتجاعی و تیر صلب تحت اثر شتاب تکیه گاهی ضربه ای نیم موج سینوسی با دامنه $\ddot{u}_{g0} = 2.961 \frac{m}{s^2}$ و زمان تداوم $t_d = 1.2(s)$ قرار گرفته است. تغییر مکان جانبی حداکثر و لنگر حداکثر یافت شود:



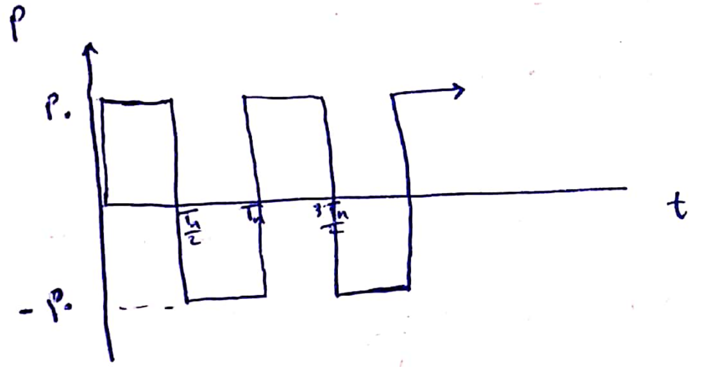


$W = 196.2 (kN)$

$EI_1 = 42.112 \ MN.m^2$

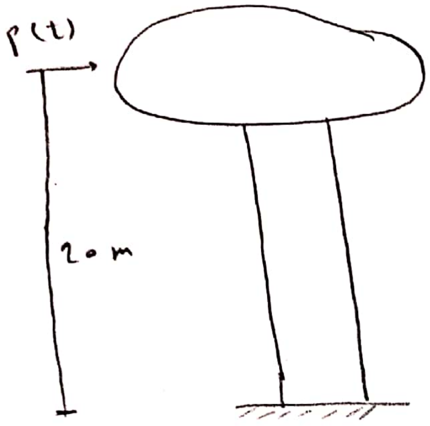
$EI_2 = 53.298 \ MN.m^2$

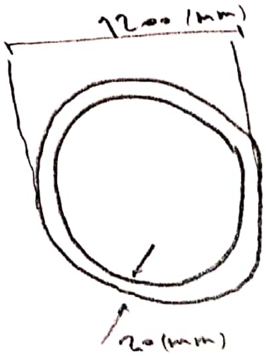
مثال: مطلوب است یافتن پاسخ سازه ای فرضی تحت بار پله ای پریودیک:

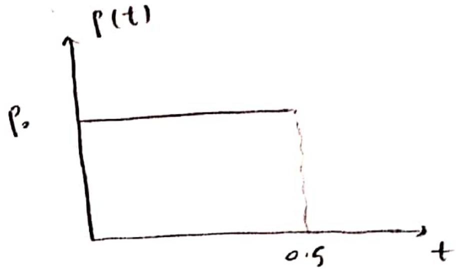


$$I.C \begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

مثال: منبع هوایی زیر دارای پایه فولادی با مقطع نشان داده شده می‌باشد. وزن منبع در حالت پر $W = 500 \, (kN)$ و ارتفاع آن $h = 20 \, (m)$ است. این منبع تحت نیروی ضربه مستطیلی با دامنه $P_0 = 75 \, kN$ و زمان تداوم $t_d = 0.5 \, (s)$ قرار دارد. با صرف نظر کردن از میرایی و وزن پایه منبع، تغییرمکان جانبی حداکثر و تنش خمشی حداکثر در پایه منبع را تعیین نمایید. $(F_y = 240 \, (MPa) \quad E = 2.05 \times 10^5 \, (MPa))$







حل:

یافتن مشخصات سازه:

$$k = \frac{3EI}{h^3}$$

$$I = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4) \text{ یا } \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)$$

$$I = \frac{\pi}{4}(0.6^4 - 0.58^4) = 0.01290805 \, (m^4)$$

$$k = \frac{3 \times 2.05 \times 10^5 \times 10^6 \times 0.01290805}{20^3} = 992.306 \, \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{500 \times 10^3}{9.81} = 50968.4 \, (kg)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{992.306 \times 10^3}{50968.4}} = 4.412 \, \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.412} = 1.424 \, (s)$$

پاسخ سیستم در ۲ مرحله بررسی خواهد شد: مرحله اول در زمان ارتعاش اجباری و مرحله دوم پس از اتمام بار و ارتعاش آزاد.

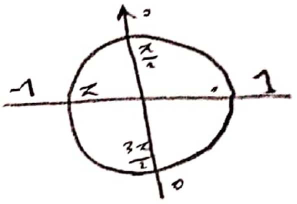
پاسخ در مرحله ارتعاش اجباری :

$$u(t) = \frac{f_0}{k}(1 - \cos w_n t)$$

پاسخ زمانی حداکثر است که عبارت داخل پرانتز مقدار حداکثرخود یعنی ۲ را بگیرد.

$$1 - \cos w_n t = 2 \qquad \cos w_n t = -1$$

$$w_n t = \pi$$



$$t = \frac{\pi}{w_n} = \frac{\pi}{4.412} = 0.712 > 0.5\,(s)$$

پاسخ حداکثر در زمان ارتعاش اجباری رخ بخواهد داد و در مرحله ارتعاش آزاد خواهد بود.

مرحله دوم ارتعاش به صورت ارتعاش آزاد با شرایط اولیه خواهد بود :

$$u(t=0.5) = \frac{75\times10^3}{992.306\times10^3}(1-\cos 4.412\times0.5) = 0.120427\,(m)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{f_0 w_n}{k}\sin w_n t$$

$$\dot{u}(t=0.5) = \frac{75\times10^3\times4.412}{992.306\times10^3}\sin(4.412\times0.5) = 0.268423\,(\tfrac{m}{s})$$

$$\underset{\downarrow}{u(t)} = u_0\cos w_n t + \frac{\dot{u}_0}{w_n}\sin w_n t$$

ارتعاش آزاد

$$u(t) = 0.120427\cos 4.412\,t + \frac{0.268423}{4.412}\sin 4.412\,t$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{0.120427^2 + \left(\frac{0.268423}{4.412}\right)^2} = 0.1349\,(m)}$$

پاسخ حداکثر در ارتعاش آزاد

برای یافتن زمان متناظر با پاسخ حداکثر از عبارت $u(t)$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار میدهیم :

$t = 0.1060 \longrightarrow$ به دلیل آنکه مبدأ زمان در معادله بالا از لحظه پس از اتمام بارضربه لحاظ شده است

پس برای یافتن زمان صحیح باید 0.5(s) به این زمان اضافه کرد

$$t_{max} = 0.106 + 0.5 = 0.606\,(s)$$

حداکثر نیروی برشی وارد شده به مقطع در زمان تغییر شکل حداکثر خواهد بود :

$$V_{max} = k \times u_{max} = 992.306 \ \frac{kN}{m} \times 0.1349 = 133.862 \ kN$$

$$M_{max} = V_{max} \times h = 133.862 \times 20 = 2677.24 \ kN.m$$

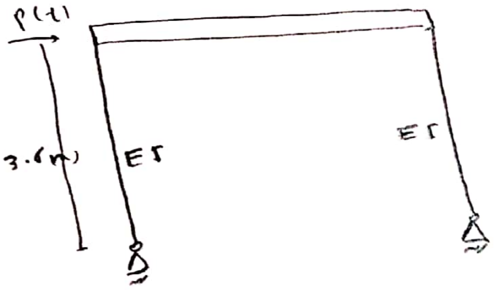
$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{2677.24 \times 10^3 \times 0.6}{0.01290805} = 124.46 \ (Mpa)$$

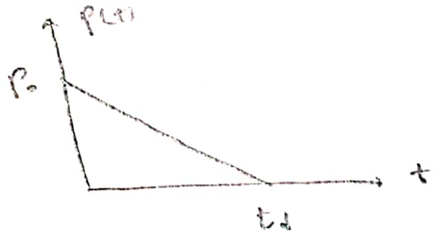
$$\text{اساس مقطع} = \frac{I}{y}$$

حداکثر فاصله از تار خنثی

مثال : قاب ساختمان نشان داده شده در شکل زیر با ستون های ارتجاعی و تیر صلب تحت اثر نیروی ضربه ای مثلثی با مقدار اولیه $P_0 = 40 \ kN$ و زمان تداوم t_d قرار گرفته است. چنانچه از میرایی سیستم صرف نظر شود، تغییر مکان جانبی حداکثر قاب و لنگر خمشی حداکثر ستون ها را در دو حالت زیر مشخص کنید :

الف) $t_d = 0.8 \ (s)$ ب) $t_d = 0.08 \ (s)$





$W = 392.4 \ (kN)$ $EI = 76.746 \ MN.m^2$ $P_0 = 40 \ (kN)$

حل : یافتن مشخصات سازه :

$$k = \frac{2 \times 3EI}{h^3} = \frac{2 \times 3 \times 76.746}{3.6^3} = 9.8696 \ \left(\frac{MN}{m}\right)$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{329.4 \times 1000}{9.81} = 40000 \ kg = 40 \ tonne$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9.896 \times 10^6}{40000}} = 15.708 \ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.4 \ (s)$$

برای یافتن پاسخ حداکثر مجدداً باید پاسخ را به دو قسمت، قبل از اتمام بارگذاری و پس از آن تقسیم کنیم و پاسخ حداکثر را از میان آن‌ها انتخاب کنیم.

برای حل این مسئله لازم است، محاسبات پیچیده‌ای انجام شود، می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد:

برای بارگذاری از نوع مثلث قائم الزاویه می‌توان اثبات کرد:

$$\text{if} \quad \frac{t_d}{T} \leqslant 0.371 \longrightarrow$$ پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش آزاد خواهد بود

$$\text{if} \quad \frac{t_d}{T} > 0.371 \longrightarrow$$ پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش اجباری خواهد بود

+ زمان متناظر با پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش آزاد (t_{m2}):

$$\frac{t_{m2}}{T} = \frac{1}{4} + \frac{t_d}{T} - \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_n \, u(t_d)}{\dot{u}(t_d)}$$

+ زمان متناظر با پاسخ حداکثر در مرحله ارتعاش اجباری (t_{m1}):

$$\frac{t_{m1}}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{T}{2\pi t_d}\right)$$

الف)

پاسخ حداکثر در مرحله بارگذاری است

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.8}{0.4} = 2 > 0.371$$

$$t_{m1} = T\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{T}{2\pi t_d}\right)\right]$$

$$= 0.4\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\pi \times 2}\right)\right] = 0.19 \ (S)$$

$$u_{max} = \frac{40\times10^{3}}{9.8696}\left(1 - \frac{0.19}{0.8} - \cos 15.708\times0.19 + \frac{\sin 15.708\times0.19}{15.708\times0.8}\right)$$

$$\boxed{u_{max} = 7.144\times10^{-3} \ (m)}$$

یافتن برش و لنگر حداکثر در مقطع :

$$V_{max} = \frac{1}{2} k \times u_{max} = \frac{1}{2} \times 9.8696 \times 10^{6} \times 7.144 \times 10^{-3} = 35.254 \ (kN)$$

$\frac{1}{2} \swarrow$ 2 ستون

$$M_{max} = V \times h = 35.254 \times 3.6 = 126.914 \ (kN.m)$$

ب)

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.08}{0.4} = 0.2 < 0.371$$

پاسخ حداکثر در مرحله 2 خواهد بود :

$$u(t_d) = \frac{P_0}{k}\left[1 - \frac{0.08}{0.08} - \cos 15.708 \times 0.08 + \frac{\sin 15.708 \times 0.08}{15.708 \times 0.08}\right]$$

$$= 0.4478 \frac{P_0}{k}$$

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{t_d} + \omega_n \sin \omega_n t + \frac{\cos \omega_n t}{t_d}\right)$$

$$\dot{u}(t_d) = \frac{P_0}{k}\left(-\frac{1}{0.08} + 15.708 \sin 15.708 \times 0.08 + \frac{\cos 15.708 \times 0.08}{0.08}\right)$$

$$= 6.3019 \frac{P_0}{k}$$

$$u_{max} = \sqrt{\left[u(t_d)\right]^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n}\right]^2} = \frac{P_0}{k}\sqrt{(0.4478)^2 + \left(\frac{6.3019}{15.708}\right)^2}$$

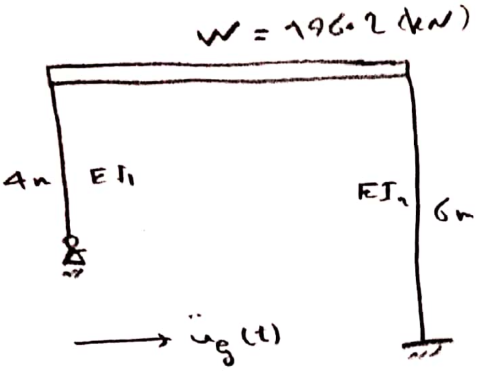
در ارتعاش آزاد

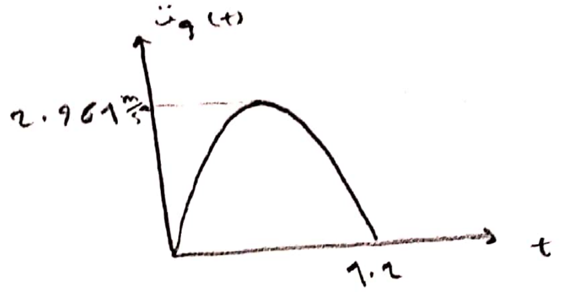
$$= 4.053 \times 10^{-3} \times 0.601 = 2.436 \times 10^{-3} \ (m)$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} k \times u_{max} = \frac{1}{2} \times 9.8696 \times 10^{6} \times 2.436 \times 10^{-3} = 12.027 \ (kN)$$

$$M = V \times h = 12.027 \times 3.6 = \boxed{43.276 \ kN.m}$$

مثال) قاب ساختمانی نشان داده شده در شکل زیر با ستون ارتجاعی و تیر صلب تحت اثر شتاب زمین با دامنه $\ddot{u}_{go} = 2.961 \frac{m}{s^2}$ و زمان تداوم $t_d = 1.2(s)$ قرار دارد.
تغییر مکان حداکثر و لنگر حداکثر یافت شود.





حل : یافتن مشخصات سازه

$$k = \frac{3EI_1}{h_1^3} + \frac{12EI_2}{h_2^3} = \cdot$$

$$= \frac{3\times 42.112}{4^3} + \frac{12\times 53.298}{6^3} = 4.935 \quad MN/m$$

$$m = \frac{196.2\times 10^3}{9.81} = 20000\ kg = 20\ tonne$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.935\times 10^6}{20000}} = 15.708\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{15.708} = 0.4\ (s)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم در حالت حرکت زمین :

$$m\left[\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)\right] + k\,u(t) = 0$$

$$m\ddot{u}(t) + k\,u(t) = \underset{P_{eff}}{\boxed{-m\ddot{u}_g(t)}}$$

$$P_{eff} = -m\ddot{u}_g(t) = \begin{cases} -m\times 2.961\times \sin\frac{\pi t}{t_d} & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

$$t_d = 1.2\ (s) \qquad T_n = 0.4 \longrightarrow \frac{t_d}{T_n} = \frac{1.2}{0.4} = 3 > \frac{1}{2}$$

تغییر مکان حداکثر در مرحله ارتعاش اجباری رخ خواهد داد.

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \times \frac{1}{1-\left(\frac{T_n}{2t_d}\right)^2}\left[\sin\left(\frac{\pi t}{t_d}\right) - \frac{T_n}{2t_d}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right)\right] \qquad t \leq t_d$$

$$= \frac{-20000\times2.961}{4.935\times10^{6}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{0.4}{2\times1.2}\right)^2}\left[\sin\left(\frac{\pi\times t}{1.2}\right) - \frac{0.4}{2\times1.2}\sin\left(\frac{2\pi t}{0.4}\right)\right]$$

$$= -0.012\times1.02857\times\left[\sin\left(\frac{\pi t}{1.2}\right) - \frac{0.4}{2.4}\sin(5\pi t)\right]$$

$$\frac{t_{m1}}{T_n} = \frac{\frac{2t_d}{T_n}}{\left(1+\frac{2t_d}{T}\right)} n \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$t_{m1} = \frac{2\times3\times0.4}{(1+2\times3)} n = \frac{2.4}{7} n$$

$n=1 \longrightarrow t_{m1} = \frac{2.4}{7}(s) < 1.2\ (s)$ ✓

$n=2 \longrightarrow t_{m1} = \frac{4.8}{7}(s) < 1.2\ (s)$ ✓

$n=3 \longrightarrow t_{m1} = \frac{7.2}{7}(s) < 1.2\ (s)$ ✓

$n=4 \longrightarrow t_{m1} = \frac{9.6}{7}(s) \not< 1.2$ ✗

$t_{m1} = \frac{2.4}{7} \longrightarrow u(t_{m1}) = -0.013258\ (m)$

$t_{m1} = \frac{4.8}{7} \longrightarrow u(t_{m1}) = -0.014039\ (m) \longrightarrow$ مقدار ماکزیمم

$t_{m1} = \frac{7.2}{7}(s) \longrightarrow u(t_{m1}) = -0.006248\ (m)$

$V_{max} = k\,u_{max} = 4.935\times10^{3}\times0.014039 = 69.28\ (kN)$ برش کل

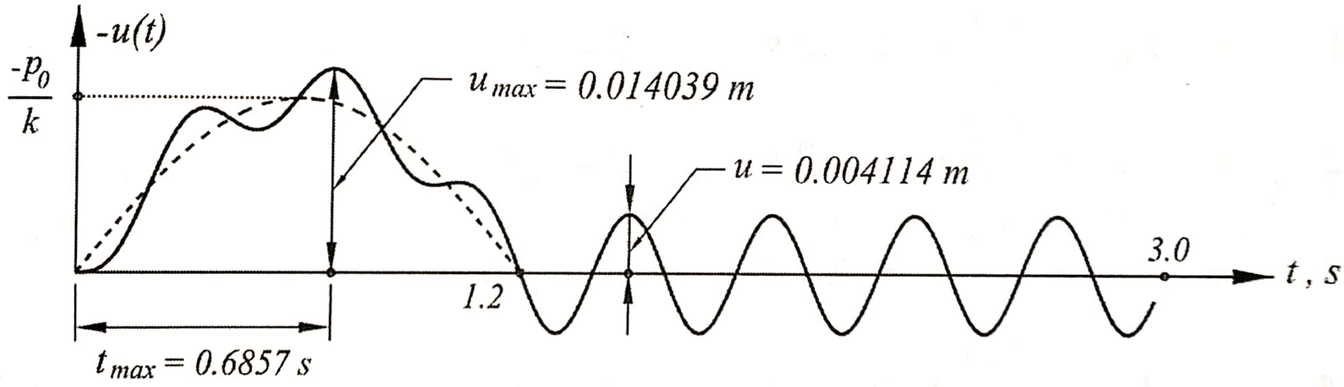
$V_1 = \frac{3EI_1}{h_1^3}\times u_{max} = \frac{3\times42.222\times10^3}{4^3}\times0.014039 = 27.71\ (kN)$

$V_2 = \frac{12EI_2}{h_2^3}\times u_{max} = \frac{12\times53.298\times10^3}{6^3}\times0.014039 = 41.57\ (kN)$

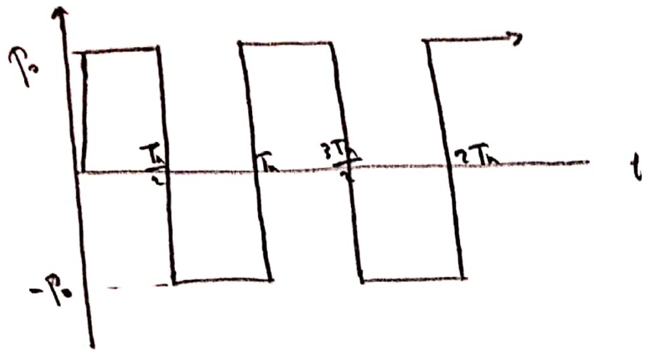
$M_1 = V_1\times h_1 = 27.71\times4 = 110.84\ (kN.m)$

$M_2 = V_2\times\frac{h_2}{2} = 41.57\times\frac{6}{2} = 124.71\ (kN.m)$

به دلیل گیردار


-u(t)
$\frac{-p_0}{k}$
$u_{max} = 0.014039\ m$
$u = 0.004114\ m$
3.0
t , s
1.2
$t_{max} = 0.6857\ s$

مثال : مطلوب است یافتن پاسخ سازه‌ای فرض تحت بار پله‌ای پریودیک :



$$I.C \begin{cases} u(0)=0 \\ \dot{u}(0)=0 \end{cases}$$

$(t<t_d)$ پاسخ بار پله ای $= \quad u(t) = \underset{(\frac{P_0}{k})}{(u_{st})_0}\,(1-\cos\omega_n t)$

باید پاسخ را به بازه ها $\frac{T_n}{2}$ تقسیم کنیم :

for $t < \frac{T_n}{2}$

$$u(t) = (u_{st})_0\,(1-\cos\omega_n t)$$

$R_d = 2$

for $\frac{T_n}{2} < t < T_n$

در این مرحله یک ارتعاش آزاد از مرحله قبل با یک ارتعاش اجباری در این مرحله جمع خواهد شد :

$$\underset{\text{ارتعاش آزاد}}{u(t)} = u_0 \cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right)$$

$$u\left(\frac{T_n}{2}\right) = (u_{st})\left(1-\cos\frac{2\pi \times \cancel{T_n}}{\cancel{T_n}\;\cancel{2}}\right) = 2(u_{st})_0$$

$$\dot{u}\left(\frac{T_n}{2}\right) = (u_{st})_0\,\omega_n \sin\omega_n t = (u_{st})_0\,\omega_n \sin\frac{2\pi\cancel{T_n}}{\cancel{T_n}\cancel{2}} = 0$$

$$u(t) = 2(u_{st})_0 \cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right)$$

ارتعاش آزاد

$$u(t) = \underset{\text{چون بار منفی شده است}}{-}(u_{st})_0\left[1-\cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right)\right]$$

ارتعاش اجباری در این مرحله

$$\text{کل}\; u(t) = 2(u_{st})_0 \cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right) - (u_{st})_0 + (u_{st})_0 \cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right)$$

$$= (u_{st})_0\left[3\cos\omega_n\left(t-\frac{T_n}{2}\right) - 1\right] \qquad \frac{T_n}{2} < t < T_n$$

$R_d = 4$

for $T_n < t < \frac{3T_n}{2}$ $I.C \begin{cases} u(1) - 4\,(u_{st})_0 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$

ارتعاش آزاد / $u(t) = -4\,(u_{st})_0 \cos w_n(t - T_n)$

ارتعاش اجباری / $u(t) = (u_{st})_0 \left[1 - \cos w_n (t - T_n)\right]$

$u(t) = (u_{st})_0 \left[1 - 5 \cos w_n (t - T_n)\right]$

کل

$R_d = 6$

for $\frac{kT_n}{2} < t < \frac{(k+1)\ T_n}{2}$

$R_d = \frac{u_{max}}{(u_{st})_0} = (-1)^k (2n)$

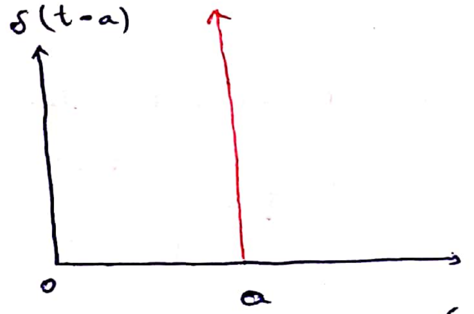
$u(t) = (u_{st})_0 \left[(-1)^k + (-1)^{k+1} (2k+1) \cos w_n t\right]$

پاسخ در برابر تحریک های دلخواه به روش انتگرال دیوهامل :

در بسیاری از تحریک هایی که در عمل رخ می دهد، نمی توان از توابعی که قبلاً بیان شد استفاده کرد. یعنی تابع تحریک شبیه هیچ یک از توابع هارمونیک و یا توابع ساده نیست. به طور مثال رکورد های ثبت شده از شتابنگاشت ها، توابعی دلخواه از زمان هستند. یک روش برای بدست آوردن پاسخ سازه به چنین تحریکی، استفاده از انتگرال دیوهامل است. همچنین در صورتی که تابع بار مشخص باشد و زمان تداوم آن نسبت به پریود سازه خیلی کوچک باشد، می توان آن بار را به صورت یک ضربه در نظر گرفته و پاسخ سازه را یافت. اما کاربرد این روش کمتر است.

تابع دلتای دیراک :

برای بیان ریاضی پدیده ای که در یک لحظه از زمان وجود دارد، از تابع دلتای دیراک استفاده می شود.



در شکل روبرو در زمان a تابع مقدار داشته و در هیچ زمان دیگری مقدار ندارد

بیان ریاضی

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & t=a\\ 0 & t\neq a\end{cases}$$

ویژگی های تابع دلتای دیراک :

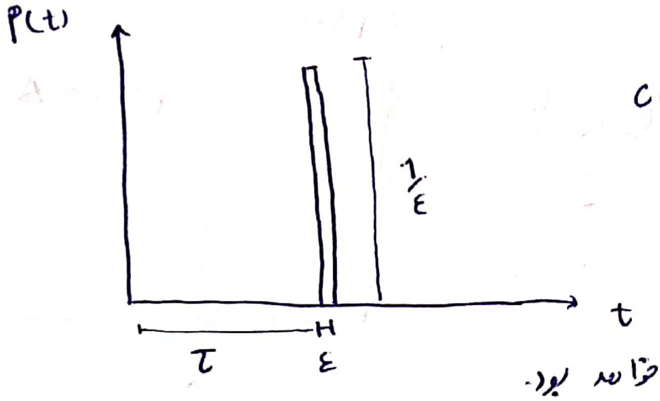
① $$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(t-a)\,dt=1 \qquad \varepsilon>0$$

② $$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(t-a)\cdot f(t)\,dt=f(a) \qquad \varepsilon>0$$

③ $$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(\tau-a)\cdot f(t,\tau)\,d\tau=f(t,a) \qquad \varepsilon>0$$

④ $$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(\tau)\cdot f(t,\tau)\,d\tau=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(\tau-0)\cdot f(t,\tau)\,d\tau=f(t,0) \qquad \varepsilon>0$$

ضربه واحد :



در شکل مقابل نیرویی با بزرگی $\frac{1}{\varepsilon}$ در زمان تداوم ε به سازه ای وارد می شود.

در صورتی که ($\varepsilon \longrightarrow 0$) ، مقدار بزرگی نیرو به سمت بی نهایت میل می کند.

سطح زیر نمودار نیرو - زمان بیانگر ضربه خواهد بود.

سطح زیر نمودار با چنین مشخصاتی ، بیانگر ضربه واحد است.

$$p(t) = 1 \times \delta(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

سطح زیر نمودار (مقدار ضربه)

تابعی که نشان می دهد ضربه مذکور فقط در زمان τ وجود دارد و در هیچ زمان دیگری وجود ندارد.

★ پاسخ یک سیستم یک درجه آزادی به ضربه واحدی که در زمان τ به آن وارد می گردد از روابط زیر استخراج خواهد شد :

بدون میرایی $(\xi = 0)$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t-\tau)$$

با میرایی $(\xi \neq 0)$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)$$

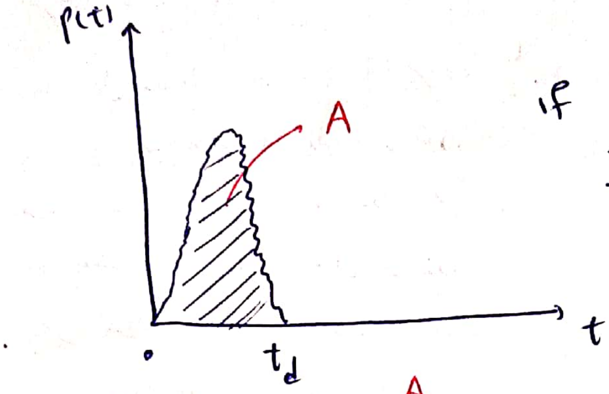
$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

شرط استفاده از توابع بالا، کوچک بودن زمان بارگذاری است. در صورتی که باری در یک لحظه به سازه برخورد کند و بزرگای آن غیر از یک باشد، با ضرب بزرگای بار در توابع بالا پاسخ سازه در هر زمان یافت می شود.

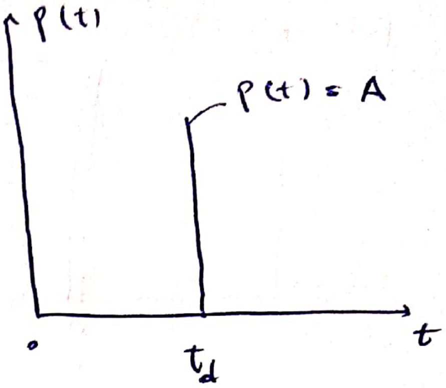
پاسخ تقریبی سازه در برابر تحریک ضربه ای کوتاه مدت $(t_d < \frac{T_n}{4})$:

در صورتی که مدت زمان وارد شدن نیرو به سازه از 0.25 پریود طبیعی سازه کمتر باشد، در آن صورت سازه در طول زمان t_d فرصت چندانی برای پاسخ نداشته و به طور تقریبی می توان از پاسخ سازه در این مرحله صرف نظر کرد. اگر پاسخ سازه در اثر چنین باری در مرحله ارتعاش آزاد خواهد بود.

هرچه که نسبت $\frac{t_d}{T}$ کوچکتر باشد، این روش دقیق تر خواهد بود.



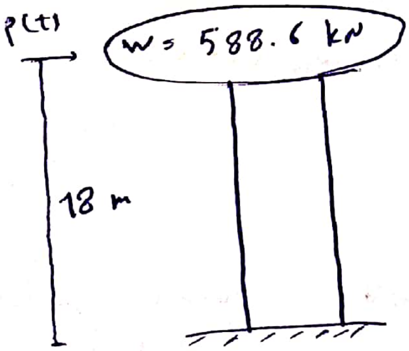
$$\text{if} \quad t_d < \frac{T_n}{4} \quad \equiv$$

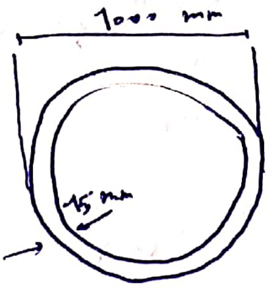


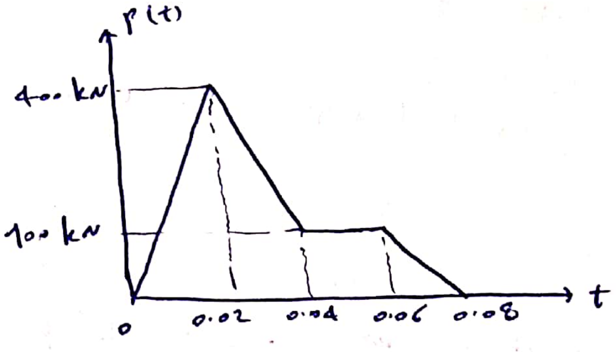
$$u(t) = \frac{\overbrace{\int_0^{t_d} p(t)\,dt}^{A}}{m\,\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d) \qquad t \geq t_d$$

$$u(t) = \frac{\overbrace{\int_0^{t_d} p(t)\,dt}^{A}}{m\,\omega_d} e^{-\xi \omega_n (t - t_d)} \sin \omega_d (t - t_d) \qquad t \geq t_d$$

مثال : منبع زیر دارای پایه‌ای استوانه‌ای توخالی می باشد. منبع در معرض انفجار قرار گرفته است و نیرویی در زمان کوتاه به آن وارد شده است. با صرف نظر از میرایی و وزن پایه، تغییر مکان جانبی حداکثر و تنش خمشی حداکثر را به روش تقریبی بدست آورید :

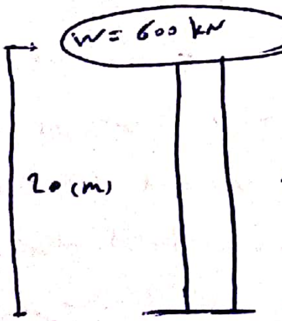


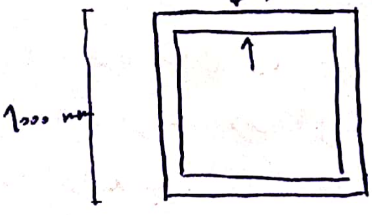


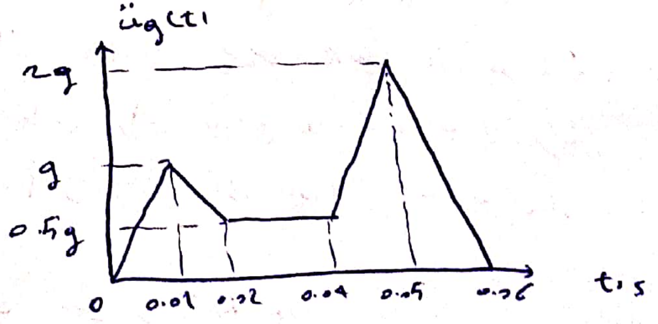


$F_y = 240$ Mpa $\qquad E = 2.05 \times 10^5$ mpa

مثال : منبع مطابق زیر تحت شتاب ناشی از انفجار با نمودار زیر قرار می‌گیرد. مطلوب است حداکثر تغییر شکل جانبی و حداکثر تنش خمشی در پایه به روش تقریبی :





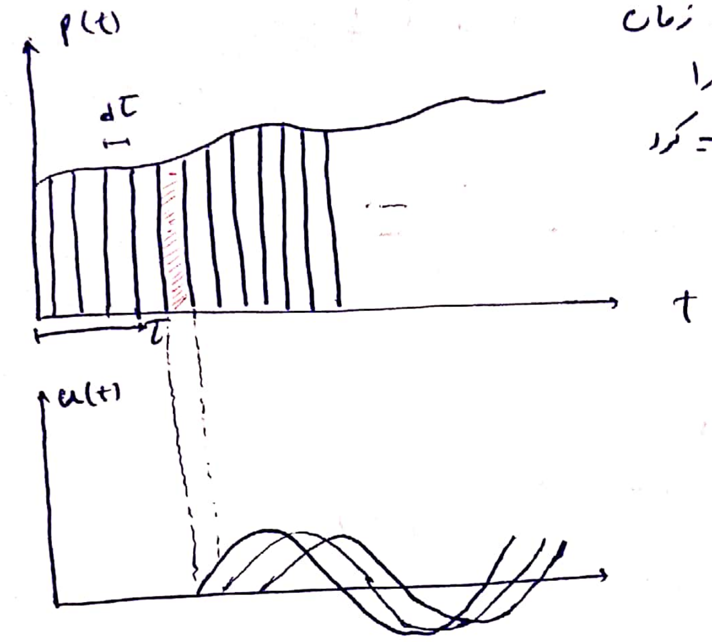


$\rightarrow \ddot{u}_g(t)$ $\qquad \xi = 10\%$ $\qquad E = 2.05 \times 10^5$ mpa

تعیین پاسخ به تحریک دلخواه به روش انتگرال دیو هامل (روش دقیق):

نیروی با تابع تغییرات دلخواه برحسب زمان به سازه وارد می‌شود. می‌توان این نیرو را به بی‌نهایت بازه با زمان $d\tau$ تجزیه کرد و ضرایب بازه‌ها را باهم جمع کرد

ضربه یک بازه $= p(\tau)\, d\tau$



نامیرا

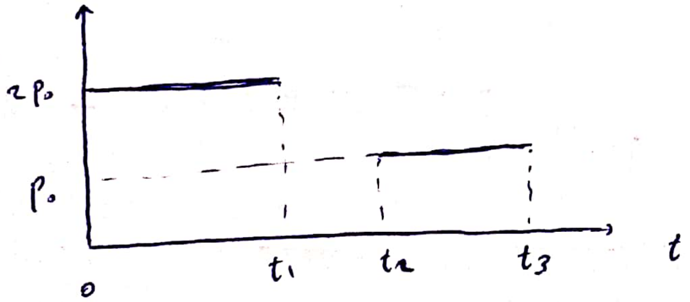
$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

میرا

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau)\, e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

* پاسخ‌های بالا در حالتی که شرایط اولیه سکون باشد کاربرد دارند. در حالتی که شرایط اولیه در سیستم وجود داشته باشد باید جملات ارتعاش آزاد به عبارات بالا اضافه گردد.

مثال: نیروی دینامیکی مطابق زیر بر سیستمی وارد شده است، معادلات حرکت در هر بازه زمانی را با استفاده از انتگرال دیو هامل بیان کنید:



$$u(t) = \frac{2p_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau \qquad t \leq t_1$$

در بازه اول شرایط اولیه سکون بوده است.

در بازه زمانی بین t_1 و t_2، هیچ نیرویی به سیستم وارد نمی‌شود. یعنی ارتعاش آزاد وجود دارد، در این شرایط هم می‌توان از فرمول ارتعاش آزاد استفاده کرد و شرایط نهایی مرحله اول را به عنوان شرایط اولیه ارتعاش آزاد در این مرحله نوشت و هم می‌توان از انتگرال دیوهامل استفاده کرد.

for $\quad t_1 \leq t \leq t_2$

$$u(t) = \underbrace{u(t_1) \cos \omega_n (t - t_1) + \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega_n}}_{\text{از مرحله قبل استخراج شده‌اند}} \sin \omega_n (t - t_1)$$

$$u(t) = \frac{2p_0}{m\omega_n} \int_0^{t_1} \sin \omega_n (t - \tau) \, d\tau$$

or

به همین ترتیب در ادامه مراحل یا می‌توان از فرمول‌های ارتعاش آزاد مراحل قبل کمک گرفت و آن‌ها را با ارتعاش در مرحله جدید جمع کرد، و یا از انتگرال دیوهامل برای تمام مراحل استفاده کرد.

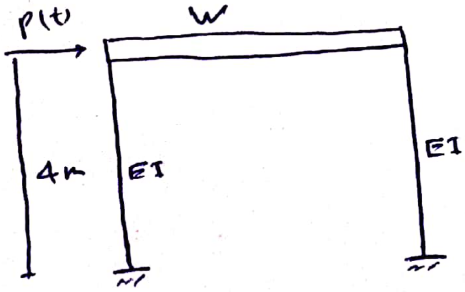
for $\quad t_2 \leq t \leq t_3$

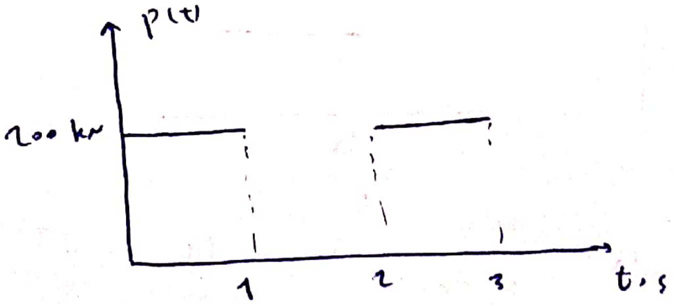
$$u(t) = \frac{2p_0}{m\omega_n} \int_0^{t_1} \sin \omega_n (t - \tau) \, d\tau + \frac{p_0}{m\omega_n} \int_{t_2}^{t} \sin \omega_n (t - \tau) \, d\tau$$

for $\quad t \geq t_3$

$$u(t) = \frac{2p_0}{m\omega} \int_0^{t_1} \sin \omega_n (t - \tau) \, d\tau + \frac{p_0}{m\omega_n} \int_{t_2}^{t_3} \sin \omega_n (t - \tau) \, d\tau$$

مثال: قاب ساختمانی نشان داده شده، تحت اثر دو نیرو مطابق شکل زیر قرار دارد. تغییر مکان جانبی حداکثر قاب و لنگر خمشی حداکثر ستون‌ها را تعیین کنید.





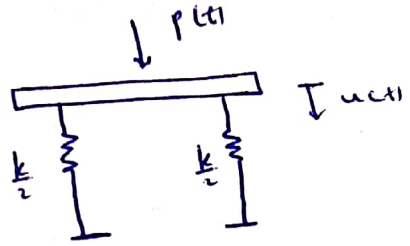
$EI = 36.554 \; (MN \cdot m^2)$

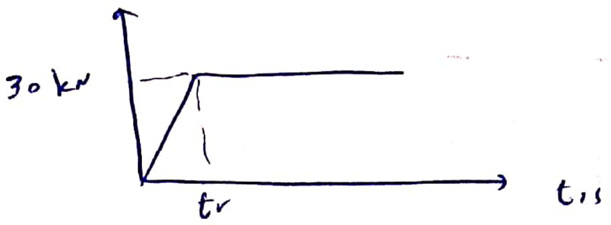
$w = 196.2 \; kN$

$\xi = 0$

$p_0 = 200 \; kN$

مثال: جعبه ای مطابق شکل قرار دارد و نیروی افزایشی به آن وارد می‌شود. حداکثر نیروی ایجاد شده در فنرها را در دو حالت زیر بدست آورید.





$m = 4000\ kg$

$k = 986.96\ \frac{kN}{m}$

الف) $tr = 1.2 (s)$

ب) $tr = 0.1 (s)$

یادآوری: انتگرال گیری جزء به جزء به روش جدولی:

$$\int u\, dV = uV - \int V\, du$$

V تابعی که از آن انتگرال گیری می‌شود

u تابعی که از آن مشتق گیری می‌شود تا جایی که مقدار آن صفر گردد (معمولاً)

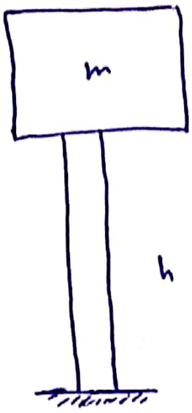
$$\int x^3 \cos x\, dx$$

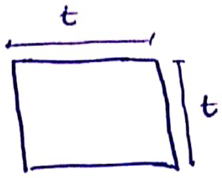
- با مشتق گیری پی در پی از x^3 مقدار آن به صفر می‌رسد (u)
- انتگرال پی در پی از $\cos x$ گرفته می‌شود (V)

انتگرال V		مشتقات u
$\cos x$	+	x^3
$\sin x$	−	$3x^2$
$-\cos x$	+	$6x$
$-\sin x$	−	6
$\cos x$		0

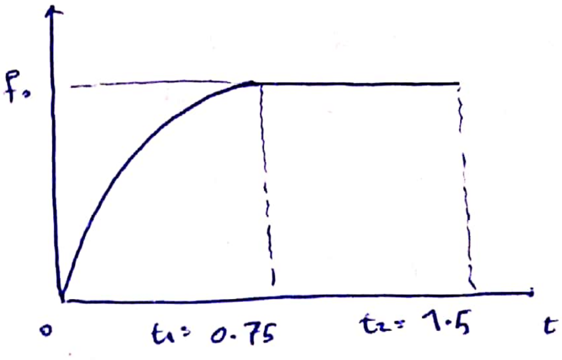
$$\int x^3 \cos x\, dx = +x^3 \sin x - 3x^2(-\cos x) + 6x(-\sin x) - 6\cos x + C$$

مثال : مخزن آبی به ارتفاع h و جرم m مطابق شکل، تحت اثر بار افزایشی قرار می‌گیرد. مطلوب است حداکثر تنش وارده بر مقطع و جابجایی بیشینه منبع.

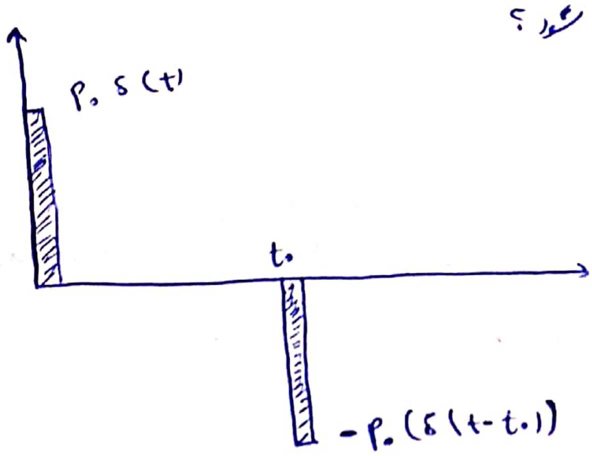




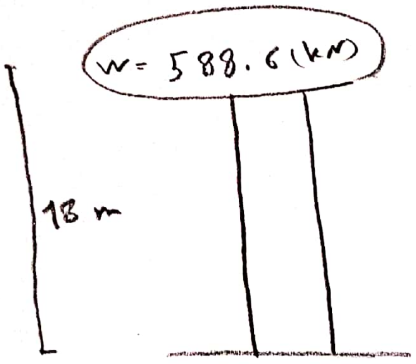
مشخصات سازه
$\omega_n = \pi$
$\xi = 0$

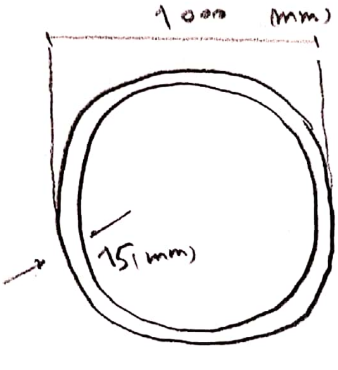


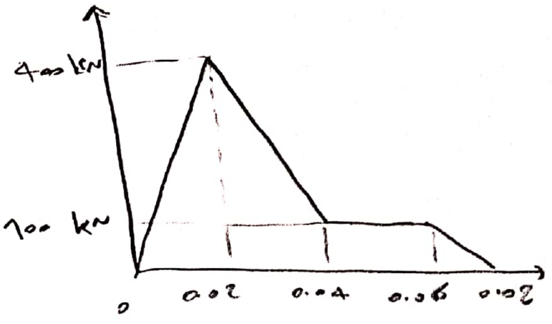
مثال : - با توجه به بارگذاری روبرو پاسخ سیستم را بیابید.
- میزان t_0 چقدر تا پاسخ حداکثر شود؟



مثال: منبع زیر دارای پایه ای با مشخصات ای تو خالی می باشد. منبع در معرض انفجار قرار گرفته است و نیرویی در زمان کوتاه به آن وارد شده است. با صرف نظر از میرایی و وزن پایه، تغییرمکان جانبی حداکثر و تنش خمشی حداکثر را به روش تقریبی بدست آورید:







$F_y = 440$ mpa

$E = 2.05 \times 10^5$ (mpa)

حل:

$$k = \frac{3EI}{h^3}$$

$$I = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4}(0.5^4 - 0.485^4) = 563067.6 \times 10^{-8} (m^4)$$

$$k = \frac{3 \times 2.05 \times 10^{11} \times 563067.6 \times 10^{-8}}{18^3} = 593.77 \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{588.6 \times 10^{-3}}{9.81} = 60\,000 \text{ (kg)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{593.77 \times 10^3}{60000}} = 3.1458 \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.9973 \text{ (s)}$$

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.08}{1.9973} = 0.04 \ll 0.25$$

نیروی وارده بسیار سریع اعمال می شود و شرایط ضربه حاکم است.

می توان سطح زیر نمودار را به عنوان مقدار ضربه یافت و در پاسخ ضربه وارد فرض کرد.

$$A = 0.02 \times \left[\frac{400+0}{2} + \frac{400+100}{2} + 100 + \frac{100+0}{2}\right] = 12 (kN.s)$$

$$u(t) = \frac{A}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d)$$

$$= \frac{12\times10^3}{60\times10^3 \times 3.1458} \sin 3.1458\,(t - 0.08) \qquad t > 0.08$$

$$= 0.0636 \quad \sin 3.1458\,(t - 0.08)$$

$$\boxed{u_{max} = 0.0636 \quad (m)}$$

$$V_{max} = k \cdot u_{max} = 593.77 \times 0.0636 = 37.76 \text{ (kN)}$$

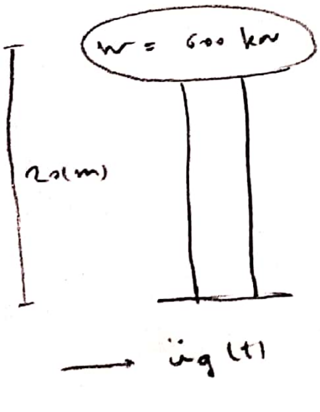
برش

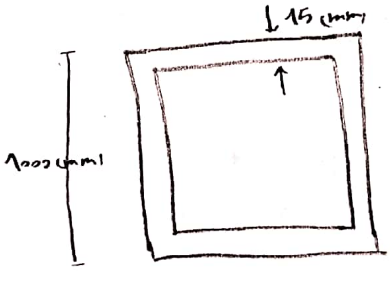
$$M_{max} = V\times h = 37.76 \times 18 = 679.68 \text{ (kN.m)}$$

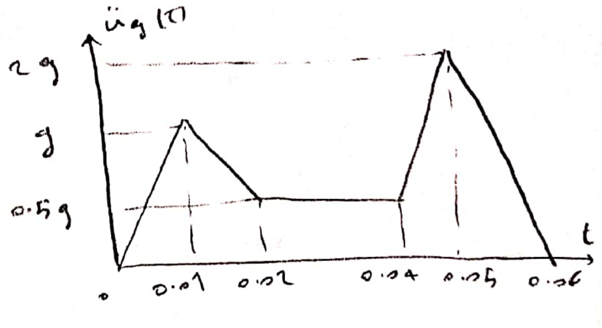
$$\sigma = \frac{M}{S} = 60.36 \text{ (MPa)}$$

اساس مقطع $S = \frac{I}{y}$

مثال: منبع مطابق زیر تحت شتاب ناشی از انفجار با نمودار زیر قرار دارد. مطلوب است حداکثر تغییر شکل جانبی و حداکثر تنش خمشی در پایه به روش تقریبی:







$$\xi = 10\% \qquad E = 2.05 \times 10^5 \text{ Mpa}$$

$$I = \frac{b_o h_o^3}{12} - \frac{b_i h_i^3}{12} = \frac{1\times1^3}{12} - \frac{0.97\times0.97^3}{12} = 9.559\times10^{-3} \;(m^4)$$

$$k = \frac{3EI}{h^3} = \frac{3\times2.05\times10^5\times10^6\times9.559\times10^{-3}}{20^3} = 734848 \;\left(\frac{N}{m}\right)$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{600\times10^3}{9.81} = 61162.1 \quad (kg)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.466 \quad \frac{rad}{s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.813 \quad (s)$$

$$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.06}{1.813} = 0.033 < 0.25 \longrightarrow$$ حالت ضربه حاکم است

$$m[\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)] + k\,u(t) = 0$$

$$m\ddot{u}(t) + k\,u(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

مساحت زیر نمودار شتاب $= \frac{1}{2}\times0.01\times g + \frac{1}{2}(0.5g+g)\times0.01 + 0.5g\times0.02$

$$+ \frac{1}{2}\times(0.5g+2g)\times0.01 + \frac{1}{2}\times2g\times0.01$$

$$= 0.045\,g$$

(A) بارگذاری ضربه $= -m\times0.045g = -61162.1\times0.045\times9.81 = -27\,000 \ (N.s)$

$$u(t) = \frac{A}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-t_d)} \sin\omega_d(t-t_d) \qquad t > t_d$$

$$u(t) = \frac{-27\,000}{61162.1\times3.466\sqrt{1-0.01^2}} e^{-0.01\times3.466(t-0.06)} \sin\omega_d(t-0.06)$$

$$u(t) = -0.1274\, e^{-0.01\times3.466(t-0.06)} \sin\omega_d(t-0.06)$$

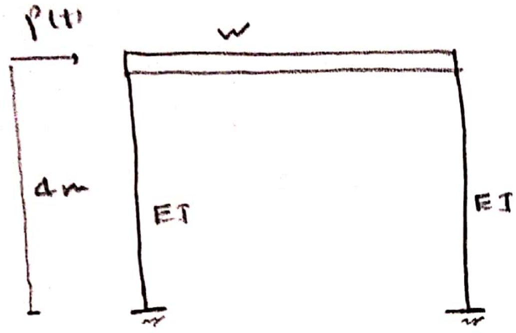
$$u_{max} = 0.1274 \quad (m)$$

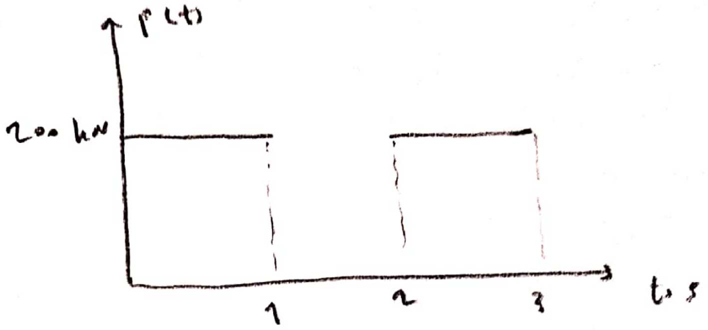
$$V_{max} = k\times u_{max} = 734848\times0.1274 = 93599.2 \quad (N)$$

$$M_{max} = V\times h = 93599.2\times20 = 1.87198\times10^6 \quad (N.m)$$

$$\sigma = \frac{M}{S} = \boxed{97.92 \ MPa}$$

مثال ۶ : قاب ساختمانی نشان داده شده، تحت اثر نیرو مطابق نمودار زیر قرار دارد. تغییرمکان جانبی حداکثر قاب و لنگر خمشی حداکثر ستون ها را تعیین کنید.





$$EI = 36.554 \ (MN \cdot m^2)$$

$$w = 196.2 \ kN$$

$$\xi = 0$$

حل:

$$k = \frac{2 \times 12EI}{h^3} = \frac{2 \times 12 \times 36.554}{4^3} = 13.7078 \ \left(\frac{MN}{m}\right)$$

$$m = \frac{w}{g} = \frac{196.2 \times 10^3}{9.81} = 20000 (kg)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 26.18 \ \left(\frac{rad}{s}\right) \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.24 \ (s)$$

for $t < 1 \ (s)$

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{P_0 \omega_n}{k} \cdot \frac{1}{\omega_n} \left[\cos\omega_n (t-\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{P_0}{k} (1 - \cos\omega_n t)$$

$$\boxed{u_{max} = \frac{2P_0}{k}}$$

for $1 < t < 2 \ (s)$

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_n} \int_0^1 \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{P_0 \omega_n}{k} \cdot \frac{1}{\omega_n} \left[\cos\omega_n (t-\tau)\right]_0^1$$

$$= \frac{P_0}{k} \left[\cos\omega_n (t-1) - \cos\omega_n t\right] \longrightarrow$$

برای یافتن حداکثر این تابع می‌توان مستقیماً مشتق گیری کرد و یا عبارت را ساده تر کرد.

$$= \frac{P_0}{k}\left[\cos\omega_n \cdot \cos\omega_n t + \sin\omega_n \cdot \sin\omega_n t - \cos\omega_n t\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\left[(\cos\omega_n - 1)\cdot\cos\omega_n t + \sin\omega_n \cdot \sin\omega_n t\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\sqrt{(\cos\omega_n - 1)^2 + (\sin\omega_n)^2} \cdot \sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{P_0}{k}\sqrt{2(1-\cos\omega_n)} \cdot \sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{P_0}{k}\sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

* بجای این محاسبات میتوان از ارتعاش آزاد در این مرحله استفاده کرد!

$$(u_{max})_2 = \frac{P_0}{k}$$

for $2 < t \leq 3$ (s)

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^1 P_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{m\omega_n}\int_2^t P_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{P_0}{k}\sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{P_0\omega_n}{k} \times \frac{1}{\omega_n}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_2^t$$

$$= \frac{P_0}{k}\left[\sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 - \cos\omega_n(t-2)\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\left[1 + \cos\frac{\omega_n}{2} \cdot \sin\omega_n t - \sin\frac{\omega_n}{2} \cdot \cos\omega_n t - \cos 2\omega_n \cdot \cos\omega_n t - \sin 2\omega_n \cdot \sin\omega_n t\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega_n t - \frac{1}{2}\cos\omega_n t + \frac{1}{2}\cos\omega_n t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega_n t\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}$$

* بارگذاری طوری بوده است که پاسخ در این مرحله بدون نوسان بوده و به صورت جابجایی استاتیکی است

for $t \geq 3$ (s)

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^1 P_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{m\omega_n}\int_2^3 P_0 \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{P_0}{k}\sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{P_0\omega_n}{k} \times \frac{1}{\omega_n}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_2^3$$

$$= \frac{P_0}{k}\sin\omega_n\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{P_0}{k}\left[\cos\omega_n(t-3) - \cos\omega_n(t-2)\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\left[\sin\omega_n\left(t-\frac{1}{2}\right)-\cos\omega_n(t-2)+\cos\omega_n(t-3)\right]$$

$$= \frac{P_0}{k}\cos\omega_n(t-3)$$

مجدداً در صورتی که از ارتعاش آزاد استفاده شود رسیدن به پاسخ بسیار راحت تر خواهد بود.

$$(u_{max})_4 = \frac{P_0}{k}$$

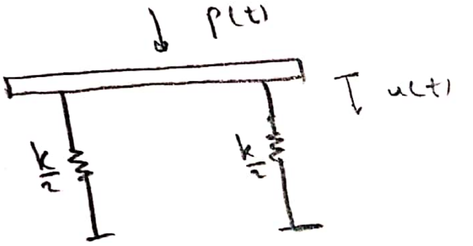
* مقدار پاسخ حداکثر در مرحله اول رخ می دهد:

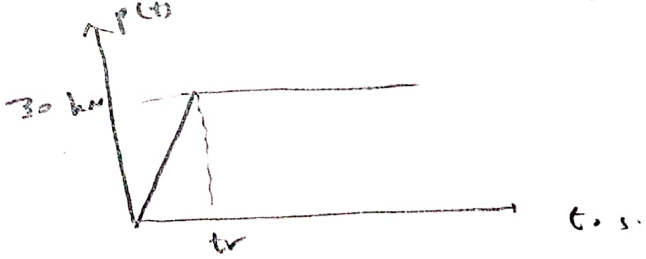
$$u_{max} = \frac{2P_0}{k} = \frac{2\times 200\times 10^3}{13.7078} = 0.0292\ (m)$$

$$V_{max} = \frac{12EI}{h^3}\times u_{max} = 200\ (kN)$$

$$M_{max} = V_{max}\times \underset{\text{به دلیل دو سر گیردار بودن}}{\frac{h}{2}} = 200\times 2 = \boxed{400\ kN.m}$$

مثال: جسمی با مطابق شکل قرار دارد و نیروی افزایشی به آن وارد می شود، حداکثر نیروی ایجاد شده در فنرها را در دو حالت زیر بدست آورید:





$m = 4000\ kg$

$k = 986.96\ \frac{kN}{m}$

الف) $tr = 1.2\ (s)$

ب) $tr = 0.1\ (s)$

حل:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{986.96\times 10^3}{4000}} = 15.708\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.4\ (s)$$

الف) $tr = 1.2$

پاسخ در دو مرحله یافت می شود.

در مرحله اول ($t < 1.2(s)$) بار گذاری از نوع شیبدار است و می توان از فرمول آن استفاده کرد. استفاده از انتگرال دیوهامل همان پاسخ را دارد.

for $t < t_d$

$$u(t) = \frac{f_0}{k}\left(\frac{t}{t_0} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_0}\right) = \frac{30\times10^3}{986.96\times10^3}\left(\frac{t}{1.2} - \frac{\sin 15.708\, t}{15.708\times1.2}\right)$$

برای یافتن حداکثر لازم است مشتق گیری انجام شود :

$$\dot{u}(t) = 0.030396 \times \left[\underbrace{\frac{1}{1.2} - \frac{\cancel{15.708}\cos 15.708\, t}{\cancel{15.708}\times1.2}}_{\text{باید صفر شود}}\right]$$

$$\frac{\cos 15.708\, t}{\cancel{1.2}} = \frac{1}{\cancel{1.2}} \longrightarrow 15.708\, t = 2n\pi$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$n = 0$ ✓ $t = 0$ (s)

$n = 1$ ✓ $t = 0.3999$ (s)

$n = 2$ ✓ $t = 799999$ (s)

$n = 3$ ✓ $t = 1.2$ (s)

$$u_{max}(t = 1.2(s)) = \boxed{0.0304 \ (m)}$$

for $t > 1.2$ (s)

یک بار پله ای + شرایط ارتعاش آزاد مرحله قبل

$$\text{I.C}\begin{cases} u(t=1.2) = 0.0304 \\ \dot{u}(t=1.2) = 0 \end{cases}$$

$u(t-1.2) = 0.0304 \cos 15.708\,(t-1.2)$

ارتعاش آزاد

$$u(t) = \frac{f_0}{k}(1-\cos\omega_n t) \longrightarrow$$ مربوط به بار پله ای

$$u(t) = \frac{30\times10^3}{986.96\times10^3}\left(1-\cos 15.708\,(t-1.2)\right)$$

$$u(t) = 0.0304\ \cancel{\cos 15.708\,(t-1.2)} + 0.0304 - \cancel{0.0304\cos\omega_n(t-1.2)}$$

پاسخ کل

$$\boxed{u(t) = 0.0304}$$

بارگذاری به گونه ای بوده است که در آخر مرحله اول سرعت صفر شده و در مرحله دوم نیز هیچگونه نوسانی بوجود نمی آید. پاسخ حداکثر در مرحله 1 و ۲ برابر شده.

ب) $t_r = 0.1 \, (s)$

for $t < t_r$

$$u(t) = \frac{30\times10^3}{986.96\times10^3}\left(\frac{t}{0.1} - \frac{\sin 15.708\, t}{15.708\times0.1}\right)$$

$$\dot{u}(t) = 0.0304 \times \left[\frac{1}{0.1} - \frac{\cancel{15.708} \cos 15.708\, t}{\cancel{15.708}\times 0.1}\right]$$

$\cos 15.708\, t = 1$ $\qquad 15.708\, t = 2n\pi$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 0 \qquad t = 0$ ✓

$n = 1 \qquad t = 0.3999 > 0.1$ ✗

پاسخ جداکننده در مرحله اول نخواهیم داشت

for $t > t_r$

$$\text{I.C}\begin{cases} u(0.1) = 0.011047 \; (m) \\ \dot{u}(0.1) = 0.304001 \; (\frac{m}{s}) \end{cases}$$

ارتعاش آزاد $u_1(t) = 0.011047 \cos 15.708 (t-0.1) + \frac{0.304}{15.708} \sin 15.708 (t-0.1)$

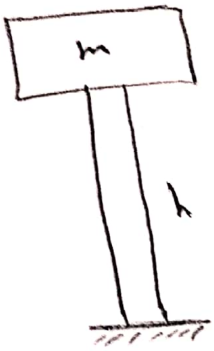
بار پله $u_2(t) = 0.0304 \left(1 - \cos 15.708 (t-0.1)\right)$

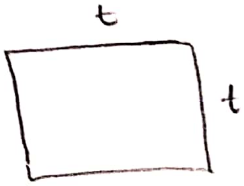
$u_{\text{کل}}(t) = u_1(t) + u_2(t)$

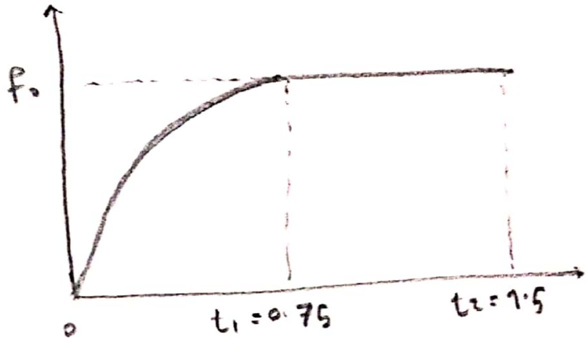
@ $t = 0.25 \, (s) \longrightarrow \boxed{u_{max} = 0.05776 \; (m)}$

$V_{max} = 57 \; (kN)$

مثال : مخزن آبی به ارتفاع h و جرم m مطابق شکل ، تحت اثر بار افزایشی قرار می‌گیرد. مطلوب است حداکثر تنش وارده بر مقطع و جابجایی بیشینه منبع .







مشخصات سازه
$$\begin{cases} \omega_n = \pi \\ \xi = 0 \end{cases}$$

بارگذاری

ناحیه (I) $p(t) = f_0 \sin 2\pi t$ $0 \leq t \leq t_1$ $t_d = 0.75\ (s)$

ناحیه (II) $p(t) = f_0$ $t_1 \leq t \leq t_2$ $t_d = 0.75$

ناحیه (III) $p(t) = 0$ $t_2 \leq t$

حل :

$$\omega_n = \pi \longrightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\ (s)$$

for $0 < t < t_1$ $p(t) = f_0 \sin 2\pi t$

بارگذاری از نوع هارمونیک می‌باشد، هم می‌توان از روابطی که مربوط به ارتعاش تحت بار سازه‌ها می‌باشد استفاده کرد و هم می‌توان از انتگرال دیوهامل استفاده کرد.

استفاده از روابط بار هارمونیک (روش اول)

$$u^{(I)}(t) = u_c + u_p = A\cos\pi t + B\sin\pi t + \frac{f_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} \sin \underbrace{2\pi}_{\text{فرکانس بار}} t$$

$$u^{(I)}(0) = 0 \longrightarrow A = 0 \qquad u(t) = B\sin\pi t + \frac{f_0}{k} \times \frac{1}{1-\beta^2} \sin 2\pi t$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\dot{u}^{(I)}(0) = 0 \longrightarrow \left(-\frac{2 f_0 \pi}{3k} \cos 2\pi t + B\pi \cos \pi t\right) = 0$$

$$\boxed{B = \frac{2 f_0}{3k}}$$

$$u^{(I)}(t) = \frac{2f_0}{3k}\sin\pi t - \frac{f_0}{3k}\sin 2\pi t = \frac{f_0}{3k}\left(2\sin\pi t - \sin 2\pi t\right)$$

می دانیم : $\sin 2\pi t = 2\sin\pi t \cos\pi t$

$$\boxed{u^{(I)}(t) = \frac{2f_0}{3k}\sin\pi t\,(1-\cos\pi t)}$$

روش دوم) انتگرال دیو هامل)

$$u^{(I)}(t) = \frac{1}{m\pi}\int_0^t f_0 \sin 2\pi\tau \cdot \sin\pi(t-\tau)\,d\tau$$

می دانیم : $\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$u^{(I)}(t) = \frac{f_0}{2m\pi}\left[\int_0^t \cos\pi(2\tau - t+\tau)\,d\tau - \int_0^t \cos\pi(2\tau+t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$u^{(I)}(t) = \frac{f_0}{2m\pi}\left[\int_0^t \cos\pi(3\tau - t)\,d\tau - \int_0^t \cos\pi(t+\tau)\,d\tau\right]$$

$$= \frac{f_0}{2m\pi}\left[-\frac{1}{3\pi}\sin\pi(3\tau-t) + \frac{1}{\pi}\sin\pi(t+\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{f_0}{2m\pi^2}\left[+\frac{1}{3}(\sin 2\pi t - \sin(-\pi t) - (\sin 2\pi t - \sin\pi t)\right]$$

$m\omega_n^2 = k$

$$= \frac{f_0}{2k}\left[+\frac{1}{3}(\sin 2\pi t + \sin\pi t) - \sin 2\pi t - \sin\pi t\right]$$

$$= \frac{f_0}{6k}\left[\sin 2\pi t + \sin\pi t - 3\sin 2\pi t + 3\sin\pi t\right]$$

$$= \frac{f_0}{6k}\left[-2\sin 2\pi t + 4\sin\pi t\right] = \frac{f_0}{3k}\left[\underbrace{-\sin 2\pi t}_{-2\sin\pi t\cos\pi t} + 2\sin\pi t\right]$$

$$\boxed{u^{(I)}(t) = \frac{2f_0}{3k}\sin\pi t\,(1-\cos\pi t)}$$

برای یافتن پاسخ حداکثر در مرحله (I) باید مشتق گیری انجام شود :

$$\dot{u}^{(I)}(t) = \frac{2f_0}{3k}\left[\pi \cos\pi t\,(1-\cos\pi t) + \pi \sin\pi t\,(\sin\pi t)\right]$$

$$= \frac{2f_0\pi}{3k}\Big[\cos\pi t \underbrace{- \cos^2\pi t + \sin^2\pi t}_{-\cos 2\pi t}\Big]$$

$$= \frac{2f_0\pi}{3k}\Big[\cos\pi t - \cos 2\pi t\Big] \qquad \cos 2\pi t \to -2\cos^2\pi t + 1$$

$$\dot{u}^{(I)}(t) = 0 \qquad \cos\pi t - 2\cos^2\pi t + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-2\times 1) = 9 \qquad \begin{cases} \cos\pi t = \dfrac{-1+3}{-4} = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\pi t = \dfrac{-1-3}{-4} = +1 \end{cases}$$

$t = 0.6667$ (s) < 0.75 (s) ✓

$$\boxed{u_{max} = 0.867\,\frac{f_0}{k}}$$

for $t_1 < t < t_2$ $\quad P(t) = f_0 \quad t' = t - t_1$

$$u^{(II)}(t') = u_c + u_p = A\cos\pi t' + B\sin\pi t' + \frac{f_0}{k}(1-\cos\pi t')$$

$$\text{I.C}\begin{cases} u(t=0.75) = \dfrac{2f_0}{3k}\times \sin 0.75\pi\,(1-\cos 0.75\pi) = 0.805\,\dfrac{f_0}{k} \\ \dot{u}(t=0.75) = \dfrac{2f_0}{3k}\,\pi\,\big[\cos 0.75\pi - \cos 1.5\pi\big] = -0.47\,\dfrac{f_0\pi}{k} \end{cases}$$

$$B = -0.47\,\frac{f_0}{k} \quad , \quad A = 0.805\,\frac{f_0}{k}$$

$$\boxed{u^{(II)}(t') = -0.195\,\frac{f_0}{k}\cos\pi t - 0.47\,\frac{f_0}{k}\sin\pi t'}$$

$$\dot{u}^{(II)}(t') = +0.195\,\pi\,\frac{f_0}{k}\sin\pi t' - 0.47\,\frac{f_0\pi}{k}\cos\pi t'$$

$$\tan\pi t' = 2.41 \qquad t' = 0.375\ ,\ 1.375, \ldots\ldots$$

$$t' = 0.375\ (s) \qquad \boxed{u^{II} = -0.509\,\frac{f_0}{k}}$$

(2.)

$\text{for} \quad t > t_2 \qquad p(t) = 0$ ارتعاش آزاد

با شرایط اولیه

$t'' = t - t_2 \qquad t'' > 0$

$$u(0) = -0.195\,\frac{f_0}{k}\cos 0.75z - 0.47\,\frac{f_0}{k}\sin 0.75z = -0.194\,\frac{f_0}{k}$$

$$\dot{u}(0) = 0.195\,\frac{f_0 z}{k}\sin 0.75z - 0.47\,\frac{f_0 z}{k}\cos 0.75z = 0.47\,\frac{f_0 z}{k}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A = -0.194\,\dfrac{f_0}{k} \\ B = 0.47\,\dfrac{f_0}{k} \end{cases} \longrightarrow u^{(III)}(t'') = -0.194\,\frac{f_0}{k}\cos z t'' + 0.47\,\frac{f_0}{k}\sin z t''$$

$$u_{max} = \frac{P_0}{k}\sqrt{0.194^2 + 0.47^2} = \boxed{0.508\,\frac{f_0}{k}}$$

$$u_{max} = \max\left\{u^{I}_{max},\ u^{II}_{max},\ u^{III}_{max}\right\} = \boxed{0.867\,\frac{f_0}{k}}$$

یافتن برش و لنگرو تنش حداکثر :

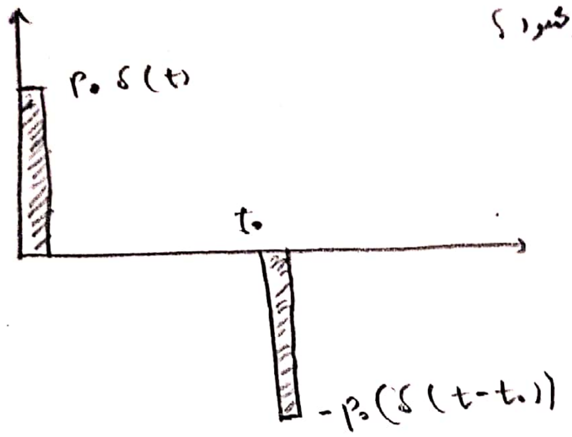
$$V_{max} = k\,u_{max} = k \times \frac{f_0}{k}\,0.867 = 0.867\,f_0$$

$$M_{max} = h \times V = h \times 0.867\,f_0$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{0.867\,f_0 \times \frac{t}{2} \times h}{\frac{1}{12}\,t^4} = \boxed{5.202\,\frac{f_0 h}{t^3}}$$

مثال: - با توجه به بارگذاری رو برو پاسخ سیستم را بیابید.

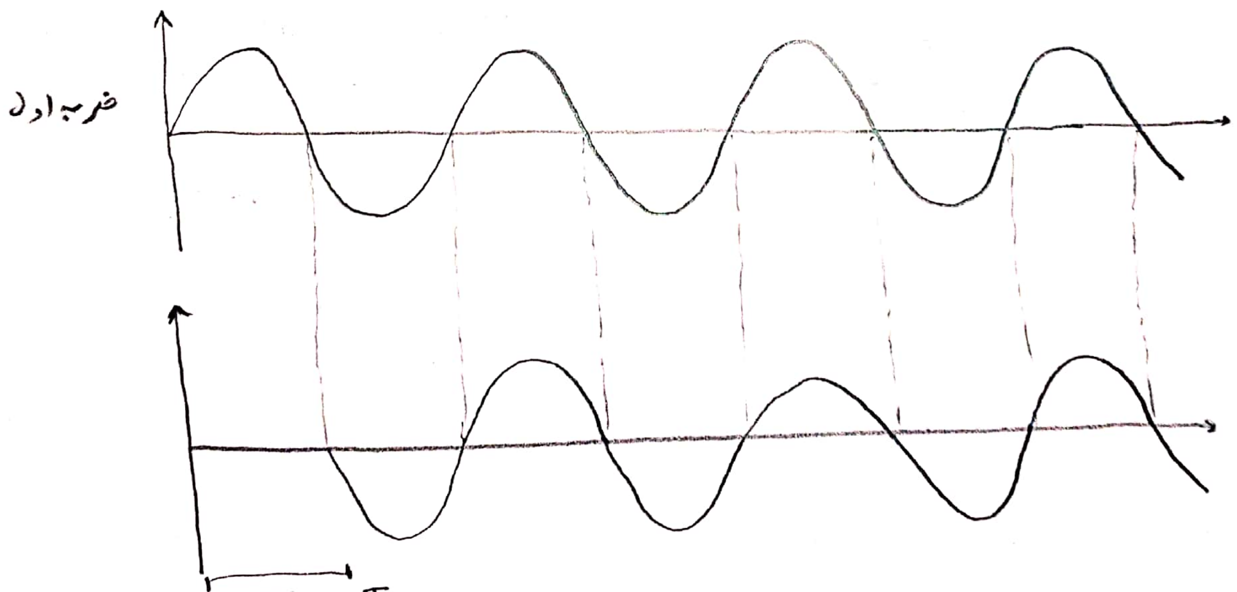
- میزان t_0 چقدر باشد تا پاسخ حداکثر شود؟



for $t < t_0$ $\quad u(t) = \frac{P_0}{m\omega_n} \sin \omega_n (t)$

for $t > t_0$

$$u(t) = \frac{P_0}{m\omega_n} \sin \omega_n (t) - \frac{P_0}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - t_0)$$



$\frac{\pi}{\omega_n} = \frac{T}{2}$

$$\sin x - \underbrace{\sin(x - \pi)}_{-\sin x} = 2 \sin x$$

سیستم‌های چند درجه آزادی :

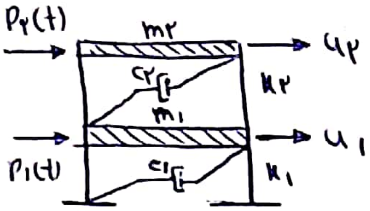
- معادله تعادل تک درجه آزادی : $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=f(t)$

- معادلهٔ تعادل سیستم n درجه آزادی : $\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times 1}{[\ddot{u}]}+\underset{n\times n}{[c]}\underset{n\times 1}{[\dot{u}]}+\underset{n\times n}{[k]}\underset{n\times 1}{[u]}=\underset{n\times 1}{[P]}$

توجه : هر ۳ ماتریس [M] ، [c] و [k] باید متقارن باشند ← به شرطی که جابه‌جایی‌ها ([u]) به صورت نسبی نسبت به زمین در محاسبات وارد شوند

← کنترل صحت محاسبات !

به طور مثال برای یک سازه ۲ طبقه معادله تعادل به این صورت می‌باشد .



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

← ۲ معادلهٔ دیفرانسیلی وابسته

در ادامه نحوه محاسبهٔ ماتریس سختی، میرایی و جرم بیان می‌شود .

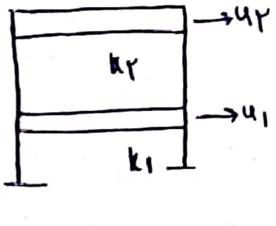
① ماتریس سختی :

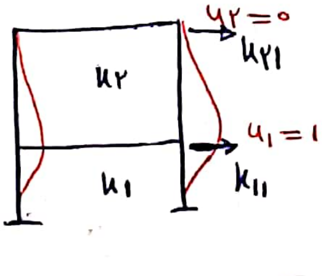
* [K] ← درایه هر ماتریس : K_{ij}

i : سطر ماتریس ⟷ طبقه‌ی متناظر با درجه آزادی سازه

j : ستون ماتریس ⟷ شماره درجه آزادی که در آن تغییرشکل Δ = 1 در نظر گرفته

* نحوه محاسبه‌ی ماتریس سختی به گونه‌ای می‌باشد که ابتدا تغییرشکل واحد Δ = 1 در گره شماره i (i = 1,2,... ,n) وارد می‌کنیم سپس تغییرشکل سایر درجه آزادی‌ها را برابر صفر در نظر می‌گیریم .

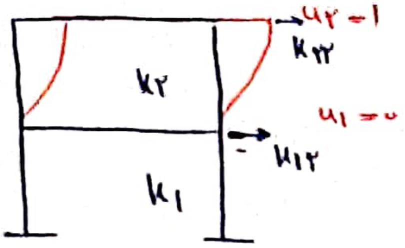




دقت به طور مثال درجه آزادی $u_1=1$ در نظر گرفته حال نیروهای گرهی k_{11} و k_{21} را بر روی طبقات محاسبه می‌کنیم .

از نوشتن تعادل در هر طبقه به دست می‌آید : $k_{11}=k_1+k_2$ $k_{21}=-k_2$

* در واقع نیروهای گرهی k_{11} و k_{21} نیروهایی هستند که اگر به سازه اعمال شوند $u_1=1$ و $u_2=0$ خواهند شد .



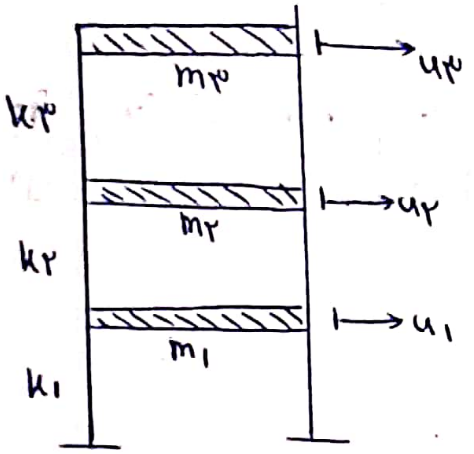
از تعادل : $k_{12} = -k_2$ $\qquad k_{22} = +k_2$

سپس ماتریس سختی را تشکیل می‌دهیم .

$$[k]_{2\times2} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

توجه: حتما سعی شود نامگذاری های درجات آزادی از پایین به بالا انجام شود (طبقه اول معادل u_1 و ......)

به همین ترتیب ماتریس سختی سازه ۳ طبقه :



k_1 ، k_2 و k_3 ← سختی طبقات هستند

$$[k]_{3\times3} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

نکته: قطعا درایه‌های روی قطر اصلی عددی مثبت خواهند بود . چرا ؟

② ماتریس جرم :

* در سازه های ساختمانی (به دلیل این که جرم طبقات به صورت متمرکز روی یک درجه آزادی فرض می‌باشند) همواره ماتریس جرم این نوع سازه ها قطری خواهد بود .

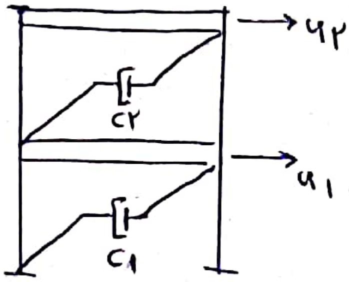
* مقادیر ماتریس جرم از قرار دادن شتاب واحد $\ddot{u}_i = 1$ روی هر طبقه (بقیه شتاب ها در طبقات صفر باشند) از نوشتن تعادل به دست خواهد آمد .

برای سازه ۳ درجه آزادی شکل بالا ماتریس جرم برابر است با :

$$[m]_{3\times3} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

③ ماتریس میرایی :

* نحوه محاسبات ساختن ماتریس میرایی مشابه ماتریس سختی می‌باشد فقط باید از $\dot{u}_i = 1$ بر روی درجه آزادی استفاده نمود و تعادل را در هر طبقه نوشت



$$[C]_{2\times2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

← موج‌های سطحی لاو باعث ایجاد جابه‌جایی می‌شوند

دستگاه معادلات تحت جابه‌جایی زمین :

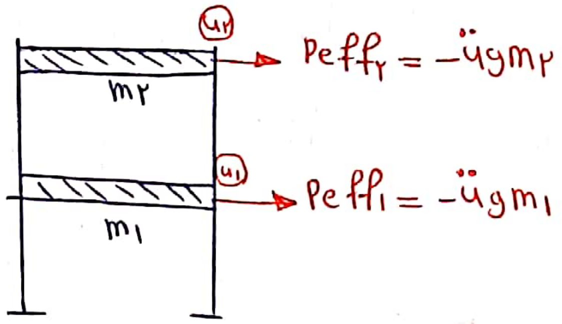
① حالت نسبی : $[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = \underbrace{-\ddot{u}_g [m] \cdot I_r}_{\text{بردار } P_{eff}}$

* اگر تمام جرم‌ها در جهت جابه‌جایی زمین حرکت کنند بردار I_r برابر است با

$$I_r = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{طبقه ۱} \\ \text{طبقه ۲} \\ \vdots \\ \text{طبقه n} \end{array} \end{array}$$

به طور مثال در سازه ۲ طبقه :

$$[P_{eff}]_{2\times1} = -\ddot{u}_g \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{u}_g m_1 \\ -\ddot{u}_g m_2 \end{bmatrix}$$



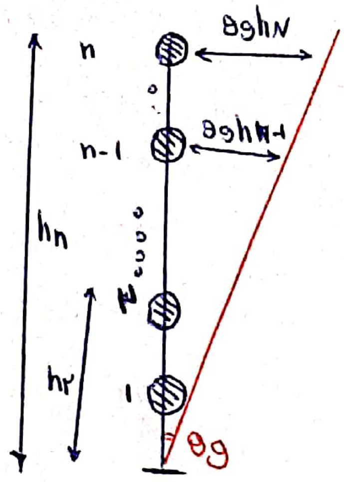
② در حالت جابه‌جایی کل : $[M]\ddot{u}_t + [C]\dot{u}_t + [K]u_t = \underbrace{\left([C]\dot{u}_g + [K]u_g\right)}_{P_{eff}}$

نکته: اگر از حالت ① استفاده کردیم برای حل سوال و صورت سوال به طور مثال شتاب یا جابه‌جایی کل در یک طبقه را بخواهد باید جابه‌جایی یا شتاب حاصل از معادله ① را به ترتیب با u_g و $\ddot{u}_g$ جمع کنیم.

نکته: اگر حرکت u_g را داشته باشیم ممکن است $\ddot{u}_g$ به دلیل عدم پیوستگی تابع مشتق قابل محاسبه نباشد، راه حل جایگزین استفاده از معادله‌ی ② می‌باشد که یک رتبه ($\ddot{u}_g$ ندارد) پایین‌تر از حالت ① می‌باشد.

دستگاه معادلات تحت دوران زمین :

← موج های سطحی رایلی باعث ایجاد دوران در پی سازه می شود.



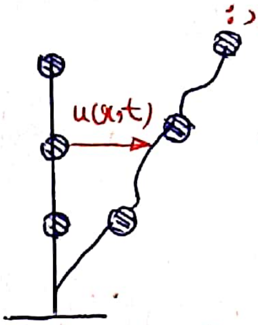
$$u^t = u_{\text{نسبی}} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} \theta_g$$

h_1 ، h_2 ، ... ، h_{n-1} ، h_n : ارتفاع هر طبقه نسبت به زمین

★ با جایگذاری u_t در معادله حرکت می توان P_{eff} را حساب نمود.

تعیین مودها و فرکانس مربوط به هر مود :

$$u = \sum_{i=1}^{\overset{\text{تعداد مود}}{N}} \underbrace{q_i(t)}_{\text{تابع مشارکت مود i در زمان}} \times \underset{\text{شکل مود i}}{\varphi_i}$$



$$\Big(\underbrace{[K]-w_i^2[m]}_{[C]}\Big)\cdot\varphi_i = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ \vdots \\ \varphi_{Ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

شماره مود

طبقه ۱

طبقه ۲

طبقه N

معادلات وابسته خطی باشند پس دترمینان صفر باشد.

$$\Rightarrow \mathrm{Det}\big[[k]-w_i^2[m]\big]=0 \longrightarrow \underset{\text{مقادیر ویژه}}{w_i} \longrightarrow \underset{\text{بردار ویژه}}{\varphi_i}$$

نکته : برای محاسبه ی φ_i ها همواره $\varphi_{1i}=1$ فرض می کنیم (تغییر شکل طبقه اول در تمام مودها برابر ۱ باشد) و سپس بقیه φ_{2i} تا φ_{Ni} را حساب می کنیم.

نکته : مودها را براساس دوره تناوب مرتب می کنیم

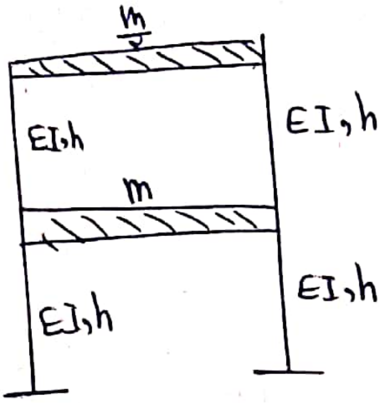
$$w_i = \frac{2\pi}{T_i} \Rightarrow \boxed{T_i = \frac{2\pi}{w_i}} \qquad T_1 > T_2 > \cdots > T_N$$

نکته : اگر $w_i = 0$ در محاسبات حاصل شد نشان دهنده حرکت صلب سازه می باشد ← ناپایداری سازه

مثال ۱: سیستم ۲ درجه آزادی زیر را در حالت ارتعاش آزاد تحلیل کنید.

الف) ماتریس سفتی و جرم این سیستم را بیابید و معادلات حرکت را بنویسید.

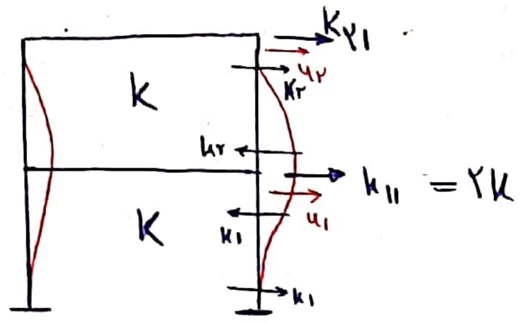
ب) فرکانس های ارتعاشی این سیستم را محاسبه کرده و مودهای ارتعاشی آن را ترسیم کنید.

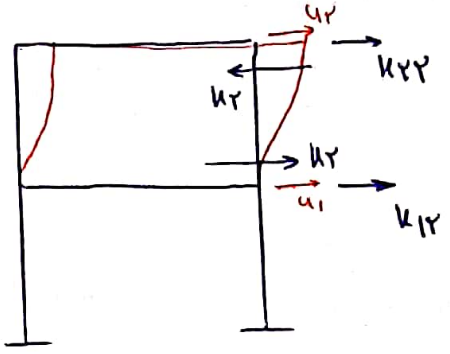


پاسخ مثال ۱:

سختی هر طبقه: $K = ۲ \times \frac{۱۲EI}{h^۳} = \frac{۲۴EI}{h^۳}$

محاسبات سختی:





$u_۱ = ۱ \quad u_۲ = ۰$

$k_{۱۱} = k_۱ + k_۲ = ۲k$

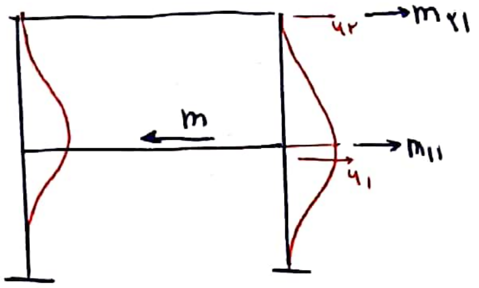
$k_{۲۱} = -k_۲ = -k$

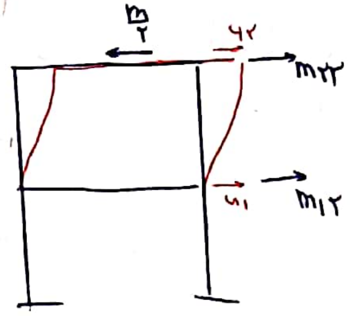
$u_۱ = ۰ \quad u_۲ = ۱$

$k_{۱۲} = -K_۲ = -k$

$k_{۲۲} = k_۲ = K$

محاسبات جرم:





$\ddot{u}_۱ = ۱ \quad \ddot{u}_۲ = ۰$

$m_{۱۱} = m$

$m_{۲۱} = ۰$

$m_{۱۲} = ۰$

$m_{۲۲} = \frac{m}{۲}$

$$[k] = \begin{bmatrix} ۲k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \text{ , } [m] = \begin{bmatrix} m & ۰ \\ ۰ & \frac{m}{۲} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

معادله حرکت: $m \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_۱ \\ \ddot{u}_۲ \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

ب)

$$\det\left[[k]-w_i^۲[m]\right]=۰ \longrightarrow \begin{vmatrix} ۲k-mw_i^۲ & -k \\ -k & k-\frac{mw_i^۲}{۲} \end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow w_i^۲=\frac{k}{m}(۲\pm\sqrt{۲}) \quad \begin{cases} w_۱=۰٫۷۶۵\sqrt{\frac{k}{m}} \\ w_۲=۱٫۸۴۸\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

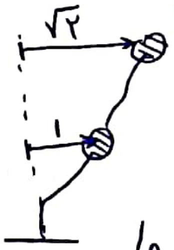
مود۱:

$$w_۱=۰٫۷۶۵\sqrt{\frac{k}{m}} \;:\; \left([k]-w_۱^۲[m]\right)\cdot \underset{\text{mode shape 1}}{\varphi_۱}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲k-m\times\overbrace{(۲-\sqrt{۲})\frac{k}{m}}^{w_۱^۲} & -k \\ -k & k-\frac{m}{۲}(۲-\sqrt{۲})\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{۱۱}\\ \varphi_{۲۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & -۱ \\ -۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{۱۱}\\ \varphi_{۲۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{فرض } \varphi_{۱۱}=۱} \sqrt{۲}\underbrace{\varphi_{۱۱}}_{۱}-\varphi_{۲۱}=۰ \Rightarrow \varphi_{۲۱}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \varphi_۱=\begin{bmatrix}۱\\ \sqrt{۲}\end{bmatrix}$$



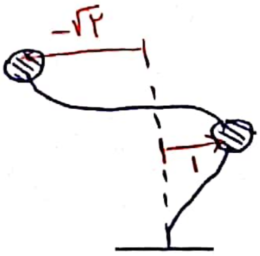
شکل مود اول

مود۲:

$$w_۲=۱٫۸۴۸\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow w_۲^۲=(۲+\sqrt{۲})\frac{k}{m} \Rightarrow \left([k]-w_۲^۲[m]\right)\cdot\varphi_۲=۰$$

$$\Rightarrow k\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} & -۱ \\ -۱ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{۱۲}\\ \varphi_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{فرض } ; \varphi_{۱۲}=۱} -\sqrt{۲}\underbrace{\varphi_{۱۲}}_{۱}-۱\times\varphi_{۲۲}=۰$$

$$\Rightarrow \varphi_{۲۲}=-\sqrt{۲} \qquad \varphi_۲=\begin{bmatrix}۱\\ -\sqrt{۲}\end{bmatrix}$$



شکل مود ۲

خاصیت تعامد مودها:

$$① \quad \varphi_r^T [k] \varphi_m = 0 \qquad r \neq m$$

$$② \quad \varphi_r^T [m] \varphi_m = 0 \qquad r \neq m$$

* جهت کنترل محاسبات می‌توان استفاده کرد

تشکیل ماتریس $[K]$, $[M]$:

$$\Phi = \left[\varphi_1 \;\vdots\; \varphi_2 \;\vdots\; \dots \;\vdots\; \varphi_n \right]$$

Φ : ماتریس n×n می‌باشد که تمام اشکال مودی سازه را در بر دارد.

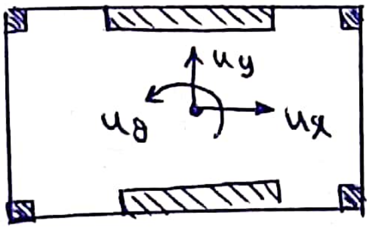
$$① \quad \Phi^T [k] \Phi = [K] \qquad ② \quad \Phi^T [m] \Phi = [M]$$

نکته: ماتریس های $[M]$, $[K]$ باید قطری شوند ← برای این که این اتفاق رخ دهد φ ها را تا ۵ رقم اعشار باید در ماتریس Φ قرار دهیم.

↓ برای کنترل محاسبات استفاده شود!

$$W_i^2 = \frac{K_{ii}}{M_{ii}}$$

معادلات سازه در صفحه: ← ۳ درجه آزادی در هر طبقه ← u_x ، u_y ، u_θ



$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

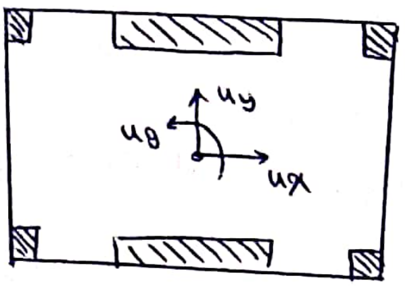
در حالت ارتعاش آزاد:

$$[m]_{\text{۳×۳}} \begin{bmatrix} \ddot u_x \\ \ddot u_y \\ \ddot u_\theta \end{bmatrix} + [k]_{\text{۳×۳}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در حالتی که تحریک همزمان u_{gx} ، u_{gy} و $u_{g\theta}$ وجود داشته باشد:

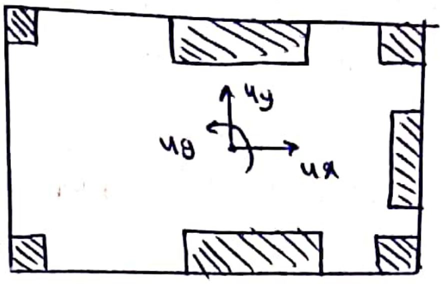
$$[m][\ddot u] + [k][u] = -\begin{bmatrix} m\ddot u_{gx} \\ m\ddot u_{gy} \\ I_0 \ddot u_{g\theta} \end{bmatrix}$$

مثال: ۲ حالت سیستم متقارن در یک جهت و در ۲ جهت را با هم مقایسه می‌کنیم.



①

متقارن در ۲ جهت x و y



②

فقط متقارن در جهت x

پس از تشکیل ماتریس [m] و [K] در حالت منفرد ای بررسی کنیم که آیا هر معادلات حرکت سازه به هم وابسته هستند یا خیر. اگر سختی و جرم در یک جهت با هم متقارن باشند (نسبت به محور x یا y) در آن جهت معادله مستقل از بقیه درجه‌های آزادی خواهد بود.

$$① \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* چون جرم و سختی در هر ۲ جهت متقارن می‌باشند ← هر ۳ معادله‌ی حرکت مستقل از هم خواهند بود و w هر جهت را از معادله در همان جهت می‌توان به دست آورد.

$$w_x = \sqrt{\frac{k_x}{m_x}} \qquad w_y = \sqrt{\frac{k_y}{m_y}} \qquad w_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_0}}$$

حال در سازه ②:

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & k_{y\theta} \\ 0 & k_{\theta y} & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این حالت چون جرم و سختی فقط در راستای x متقارن می‌باشد ← معادله‌ی حرکت سازه در جهت x مستقل خواهد بود و $w_x = \sqrt{\frac{k_x}{m_x}}$ خواهد شد. سپس به دلیل عدم تقارن در جهت y، ۲ درجه آزادی پیچشی و انتقالی در جهت y به هم وابسته می‌باشند.

* حال برای پیدا کردن w_y و w_θ ابتدا معادله حرکت در جهت x را حذف کرده

$$[m] = \begin{bmatrix} m_y & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_y & k_{y\theta} \\ k_{\theta y} & k_\theta \end{bmatrix} \quad \text{Det}\left[[k] - w_i^2 [m]\right] = 0 \longrightarrow w_i \longrightarrow \varphi_i$$

حل معادلات دیفرانسیل سیستم چند درجه آزادی : [بدون حضور میرایی]

$$[m][\ddot{u}] + [k]u = \mathbb{P} \longrightarrow$$ N معادله‌ی دیفرانسیل کوپله

↓

روش حل

① تبدیل لاپلاس [در درس دینامیک سازه] ⟵ روش حل ⟶ ② روش هندسی : تبدیل به N معادله‌ی ا درجه آزادی

$$u = \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i \Rightarrow \sum [m]\ddot{q}_i \varphi_i + \sum [k] q_i \varphi_i = \mathbb{P} \xRightarrow{\times \varphi_r^T}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varphi_r^T [m] \varphi_i}\ \ddot{q}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varphi_r^T [k] \varphi_i}\ q_i = \varphi_r^T \mathbb{P}$$

$$\begin{cases} r \neq i \Rightarrow \varphi_r^T [m] \varphi_i = 0 & \text{(خاصیت تعامد)} \\ r = i \Rightarrow \varphi_r^T [m] \varphi_r = M_{ii} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \neq i \Rightarrow \varphi_r^T [k] \varphi_i = 0 & \text{(خاصیت تعامد)} \\ r = i \Rightarrow \varphi_r^T [k] \varphi_r = K_{ii} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{nn}\ddot{q}_n(t) + K_{nn} q_n(t) = \boxed{\varphi_n^T \mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P} \\ n = 1, 2, 3, \ldots, N \end{cases} \longrightarrow$$ به N معادله‌ی مستقل رسیدیم

حال با توجه به این که در کدام یک از حالت های ① ارتعاش آزاد ② بارهارمونیک بر روی سازه و ③ حرکت تحت شتاب زمین باشیم این معادله را حل خواهیم کرد.

حالت ① : ارتعاش آزاد : $\mathbb{P} = 0$ ① $u(0) = u_0$ ② $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ ⟵ شرایط اولیه ارتعاش

توجه : قبل از شروع به بررسی این که در کدام یک از ۳ حالت بارگذاری قرارداریم باید ابتدا ماتریس $[m]$ و $[k]$ و سپس از رابطه‌ی $\det[[k] - w_i^2 [m]] = 0 \leftarrow w_i$ها و φ_iها پیدا شوند.

★ تبدیل $u(0)$ ، $\dot{u}(0)$ به $q_n(0)$ ، $q'_n(0)$:

$$q_{\underset{\text{شماره مود}}{n}}(0) = \frac{\varphi_n^T [m] u_0}{\underbrace{\varphi_n^T [m] \varphi_n}_{M_{nn}}} \qquad q'_n(0) = \frac{\varphi_n^T [m] u'_0}{\underbrace{\varphi_n^T [m] \varphi_n}_{M_{nn}}}$$

پس از یافتن شرایط اولیه $q_n(0)$ ، $q'_n(0)$ تابع مشارکت مود $q_n(t)$ را برای هر مود پیدا می‌کنیم.

حالت نامیرا : $$q_n(t) = \underbrace{q_n(0)\cos(\omega_n t)}_{\omega_n \text{ فرکانس مود n ام}} + \frac{q'_n(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

حالت میرا : $$q_n(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t}\left(q_n(0)\cos(\omega_{D(n)} t) + \frac{q'_n(0)+\zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{D(n)}}\sin(\omega_{D(n)} t)\right)$$

ζ_n درصد میرایی در مود n ام

ω_D در مود n ام $\omega_{D(n)} = \omega_{n(n)}\sqrt{1-\zeta^{۲}_{(n)}}$

سپس جابجایی هر طبقه بدست می‌آید.

جابجایی طبقه اول u_1

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{۲} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = q_1(t)\,\varphi_1 + q_{۲}(t)\,\varphi_{۲} + \dots + q_n(t)\,\varphi_n$$

به طور مثال جابجایی طبقه‌ی اول :

$$u_1 = q_1(t)\,\varphi_{11} + q_{۲}(t)\,\varphi_{\underset{\text{طبقه اول}}{1}\underset{\text{مود ۲}}{۲}} + q_{۳}(t)\,\varphi_{1۳} + \dots + q_N(t)\,\varphi_{1N}$$

حال اگر بخواهیم حداکثر جابجایی طبقه اول را حساب کنیم ۲ راه وجود دارد

① $u_1 = q_1(t)\,\varphi_{11} + q_{۲}(t)\,\varphi_{1۲} + \dots q_N(t)\,\varphi_{1N}$ $\quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \rightarrow t$ بدست می‌آید

با جایگذاری t در رابطه‌ی u_1 ← $u_{1\max}$ بدست می‌آید

* این راه محاسبات طولانی خواهد داشت بهتر است از روش ② استفاده شود.

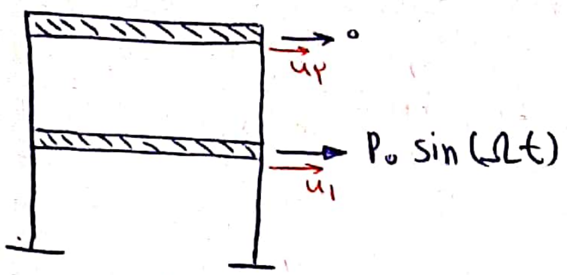
② $$u_{1\max} = \sqrt{(\varphi_{11}\, q_{1\max})^{۲} + (\varphi_{1۲}\, q_{۲\max})^{۲} + \dots + (\varphi_{1N}\, q_{N\max})^{۲}}$$

* چون مودها برهم متعامد بوند به صورت جمع برداری در فضای N بعدی ، $u_{1\max}$ را بدست آوردیم.

* در این روش تک تک $q_i(t)$ ها را max می‌کنیم و در φ ها ضرب قرار می‌دهیم.

در حالت کلی : $$(u_{\underset{\text{طبقه‌ی i}}{i}})_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (\varphi_{ij}\, q_{j\max})^{۲}}$$

② بار هارمونیک بر روی سازه:



نیروی روی درجه آزادی u_1

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_0 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

نیروی روی درجه آزادی u_2

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = \boxed{\varphi_n^T \mathbb{P}} \rightarrow \Gamma P$$

برای هر مود عبارت $\varphi_n^T \mathbb{P}$ را حساب می‌کنیم و با استفاده از پاسخ مانا $q_n(t)$ را پیدا می‌کنیم.

به طور مثال: در مود اول: $\varphi_1^T \mathbb{P} = [\varphi_{11} \quad \varphi_{21}] \begin{bmatrix} P_0 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\varphi_{11}}_{} P_0 \sin(\Omega t)$

طبقه اول را یک فرض می‌کردیم

$$q_n(t) = \frac{\overset{1}{\varphi_{11}} P_0}{K_{nn}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \sin(\Omega t) \longrightarrow$$

چون ΓP بارگذاری سینوسی داشت

* اگر در ΓP بارگذاری cos حاکم بود در معادله $q_n(t)$ ، $\cos(\Omega t)$ قرار می‌گرفت.

$$\text{اگر} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} P_0 \sin(\Omega_0 t) \\ P_1 \cos(\Omega_1 t) \end{bmatrix}$$

در مود اول: $\varphi_1^T \mathbb{P} = [\varphi_{11} \quad \varphi_{21}] \begin{bmatrix} P_0 \sin(\Omega_0 t) \\ P_1 \cos(\Omega_1 t) \end{bmatrix} = \underline{(\overset{1}{\varphi_{11}} P_0)} \sin(\Omega_0 t) + \underline{(\varphi_{21} P_1)} \cos(\Omega_1 t) \uparrow$

حال بار ما ترکیبی از بار sin و cos خواهد بود.

$$q_1(t) = \frac{(\overset{1}{\varphi_{11}} P_0)}{K_{11}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\Omega_0}{\omega_1}\right)^2} \sin(\Omega_0 t) + \frac{(\varphi_{21} P_1)}{K_{11}} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)^2} \cos(\Omega_1 t)$$

حالت ③ : بارگذاری تحت تحریک زمین :

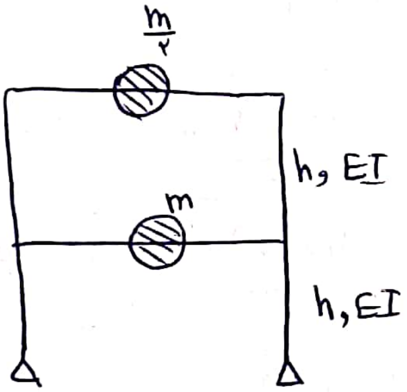
$$[m]\ddot{u}+[k]u=-[m]\cdot 1r\,\ddot{u}_g \xrightarrow[\times \varphi_n^T]{u=\Sigma q_i(t)\varphi_i} M_n\ddot{q}_n(t)+K_n q_n=\boxed{-(\underbrace{\varphi_n^T[m]\cdot 1r}_{L_n})\ddot{u}_g}$$

نیروی معادل گرهی Peff

نیروی ره‌گرهی : $-(\varphi_n^T[m]1r)\ddot{u}_g=L_n\ddot{u}_g$

$$\underset{\div M_n}{\Rightarrow}\ddot{q}_n(t)+W_n^2 q_n(t)=-\overset{\Gamma_n}{\boxed{\frac{L_n}{M_n}}}\ddot{u}_g=-\Gamma_n\ddot{u}_g$$

$$q_n(t)=\frac{-L_n\ddot{u}_g}{K_n}\left(1-\cos(W_n t)\right)$$



مثال ۲ : سیستم ۲ درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید.

① ماتریس سختی و جرم این سازه را تشکیل دهید.

② مودها، فرکانس هر مود را به دست آورده و کنترل‌های لازم را انجام دهید سپس معادله حرکت ارتعاش آزاد سیستم را بنویسید.

③ پاسخ سیستم را تحت $u_0=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ، $\dot{u}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ بیابید.

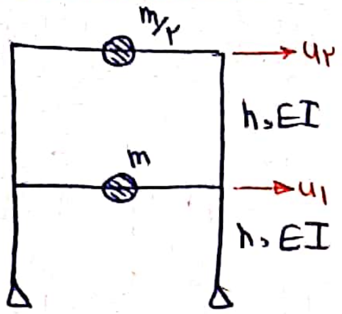
④ پاسخ سیستم را تحت $u_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\dot{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ بیابید.

⑤ پاسخ قسمت ۳،۱ را در حالت با میرایی با $\xi_1=5\%$ (برای مود اول) و $\xi_2=10\%$ (برای مود ۲) به دست آورید.

⑥ پاسخ سازه را تحت بارگذاری $P_1(t)=P_1\cos wt$ برای طبقه‌ی اول و $P_2(t)=P_0+P_2\sin w't$ حساب کنید.

⑦ پاسخ سازه وقتی پایه‌ها تحت حرکت شتابدار باشتاب افقی $\ddot{u}_g=\frac{g}{2}$ قرار گیرند.

حل مثال ۲:



ستون ۲ سرگیردار : $\frac{۱۲EI}{h^۳} = \frac{K}{۲} \rightarrow$ سختی طبقه $= K$

ستون یک‌سرگیردار : $\frac{۳EI}{h^۳} = \frac{K}{۸} \rightarrow$ سختی طبقه $= \frac{K}{۴}$

①

$$[m] = \begin{bmatrix} m & ۰ \\ ۰ & \frac{m}{۲} \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} k+\frac{k}{۴} & -K \\ -K & K \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} \frac{۵}{۴} & -۱ \\ -۱ & +۱ \end{bmatrix}$$

②

$$\det\left[[K]-w^۲[m]\right]=۰ \Rightarrow \det\left(K\begin{bmatrix} \frac{۵}{۴} & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} - w_i^۲ m\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\right) = ۰$$

$$\lambda = \frac{mw^۲}{K} \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} \frac{۵}{۴} & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\right) = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{۵}{۴}-\lambda & -۱ \\ -۱ & ۱-\frac{\lambda}{۲} \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۵}{۴}-\lambda\right)\left(۱-\frac{\lambda}{۲}\right) - (-۱)(-۱) = ۰ \Rightarrow ۰٫۵\lambda^۲ - ۱٫۶۲۵\lambda + ۰٫۲۵ = ۰ \quad \circledast$$

$$\Rightarrow \lambda_۱ = ۰٫۱۶۲ = \frac{mw_۱^۲}{K} \Rightarrow w_۱^۲ = ۰٫۱۶۲\frac{K}{m} \Rightarrow \underline{w_۱ = ۰٫۴۰۲\sqrt{\frac{K}{m}}}$$ فرکانس مود ۱ :

$$\lambda_۲ = ۳٫۰۸۸ \Rightarrow w_۲^۲ = ۳٫۰۸۸\frac{K}{m} \Rightarrow \underline{w_۲ = ۱٫۷۵۷\sqrt{\frac{K}{m}}}$$ فرکانس مود ۲ :

$\varphi_{۱۱} = ۱$ ← فرض

در مود اول : $\lambda = ۰٫۱۶۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری در } \circledast} \begin{bmatrix} \frac{۵}{۴}-۰٫۱۶۲ & -۱ \\ -۱ & ۱-\frac{۰٫۱۶۲}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{۱۱} \\ \varphi_{۱۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

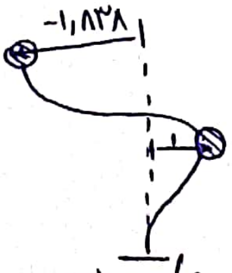
$$\Rightarrow \begin{cases} ۱٫۰۸۸\,\varphi_{۱۱} - \varphi_{۱۲} = ۰ \\ -\varphi_{۱۱} + ۰٫۹۱۹\,\varphi_{۱۲} = ۰ \end{cases} \longrightarrow \varphi_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix}$$

شکل مود اول

★ رسم شکل مود نمره دارد

در مود دوم : $\lambda_۲ = ۳٫۰۸۸ \xrightarrow{\text{جایگذاری در } \circledast} \begin{bmatrix} \frac{۵}{۴}-۳٫۰۸۸ & -۱ \\ -۱ & ۱-\frac{۳٫۰۸۸}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{۲۱} \\ \varphi_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \varphi_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$



شکل مود دوم

انجام کنترل صحت محاسبات:

$$[\Phi] = [\Phi_۱ \vdots \Phi_۲] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱٫۰۸۸ & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = m \begin{bmatrix} ۱ & ۱٫۰۸۸ \\ ۱ & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱٫۰۸۸ & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} ۱٫۵۹۲ & \boxed{۰٫۰۰۰۱۳} \\ ۰٫۰۰۰۱۳ & ۲٫۶۸۹ \end{bmatrix}$$

→ خطای ناشی از این که Φ را تا ۵ رقم اعشار نیاوردیم.

ماتریس قطری ✓

$$[K] = [\Phi^T][k][\Phi] = k \begin{bmatrix} ۱ & ۱٫۰۸۸ \\ ۱ & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵/۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱٫۰۸۸ & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} ۰٫۲۵۸ & \boxed{۰٫۰۰۰۲۶} \\ ۰٫۰۰۰۲۶ & ۸٫۳۰۴ \end{bmatrix} \rightarrow$$ ماتریس قطری ✓

کنترل دوم : $[M]\ddot{u} + [k]u = ۰ \longrightarrow M\ddot{q} + Kq = ۰ \longrightarrow \begin{cases} i=۱ & M_{۱۱}\ddot{q}_۱ + K_{۱۱}q_۱ = ۰ \; ① \\ i=۲ & M_{۲۲}\ddot{q}_۲ + K_{۲۲}q_۲ = ۰ \; ② \end{cases}$

$$\begin{cases} \omega_۱ = \sqrt{\frac{K_{۱۱}}{M_{۱۱}}} = ۰٫۴۰۲\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_۲ = \sqrt{\frac{K_{۱۱}}{M_{۱۱}}} = ۱٫۷۵۷\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

→ با فرکانس هایی که قبلاً حساب کردیم برابر است ✓

① $۱٫۵۹۲\, m\ddot{q}_۱ + ۰٫۲۵۸\, q_۱ = ۰ \longrightarrow q_۱ = A\cos\omega_۱ t + B\sin\omega_۱ t$

② $۲٫۶۸۹\, m\ddot{q}_۲ + ۸٫۳۰۴\, q_۲ = ۰ \longrightarrow q_۲ = C\cos\omega_۲ t + D\sin\omega_۲ t$

چون شرایط اولیه را نداریم ضریب های A، B، C، D را نمی‌توانیم فعلاً به دست بیاوریم.

$$[u] = \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix} = \sum q_i \Phi_i = (A\cos\omega_۱ t + B\sin\omega_۱ t)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + (C\cos\omega_۲ t + D\sin\omega_۲ t)\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cos\omega_۱ t + B\sin\omega_۱ t + C\cos\omega_۲ t + D\sin\omega_۲ t \\ ۱٫۰۸۸A\cos\omega_۲ t + ۱٫۰۸۸B\sin\omega_۲ t - ۱٫۸۳۸C\cos\omega_۲ t - ۱٫۸۳۸D\sin\omega_۲ t \end{bmatrix}$$

③ حالت اول حل ـــ ارتعاش آزاد

$$\begin{cases} q_1(۰) = \dfrac{\varphi_1^T[m]\{u_۰\}}{\varphi_1^T[m]\varphi_1} = \dfrac{[۱ \ ۱٫۰۸۸]\, m \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}}{\underbrace{[۱ \ ۱٫۰۸۸]\, m \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix}}_{M_{11} = ۱٫۵۹۲m}} = ۱٫۳۱۲ \longrightarrow \\ \dot q_1(۰) = ۰ \end{cases}$$

سهم مود اول در جابجایی اولیه

$$\begin{cases} q_2(۰) = \dfrac{\varphi_2^T[m]\{u_۰\}}{M_{22}} = -۰٫۳۱۲ \\ \dot q_2(۰) = ۰ \end{cases}$$

* کنترل درستی محاسبه‌ی $q_2(۰), q_1(۰)$:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = ۱٫۳۱۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + (-۰٫۳۱۲) \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \checkmark$$

در لحظه‌ی ۰

$$[\dot u] = \begin{bmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{bmatrix} = ۰ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + ۰ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \checkmark$$

در لحظه ۰

$$q_1(t) = ۱٫۳۱۲ \cos(w_1 t) + \cancelto{۰}{\frac{\dot q_1(۰)}{w_1} \sin(w_1 t)} = ۱٫۳۱۲ \cos(w_1 t)$$

$$q_2(t) = -۰٫۳۱۲ \cos(w_2 t) + ۰ = -۰٫۳۱۲ \cos(w_2 t)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = ۱٫۳۱۲ \cos(w_1 t) \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} - ۰٫۳۱۲ \cos(w_2 t) \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱٫۳۱۲ \cos(w_1 t) - ۰٫۳۱۲ \cos(w_2 t) \\ ۱٫۴۲۷ \cos(w_1 t) + ۰٫۵۷۳ \cos(w_2 t) \end{bmatrix}$$

④

$$q_1(۰) = ۰ \quad q_2(۰) = ۰ \quad \dot q_1(۰) = ۰٫۲۸۴ \quad \dot q_2(۰) = ۰٫۷۱۴$$

* کنترل صحت محاسبه :

$$\dot u(۰) = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰٫۲۸۴ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + ۰٫۷۱۴ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} \checkmark$$

$$q_1 = \frac{۰٫۲۸۹}{w_1} \sin w_1 t \qquad q_۲(t) = \frac{۰٫۷۱۴}{w_۲} \sin w_۲ t$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_۲ \end{bmatrix} = \frac{۰٫۲۸۹}{w_1} \sin w_1 t \begin{bmatrix} 1 \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + \frac{۰٫۷۱۴}{w_۲} \sin w_۲ t \begin{bmatrix} 1 \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

⑤

$$q_1(۰) = ۱٫۳۱۲ \quad \dot{q}_1(۰) = ۰ \quad q_1(t) = e^{-۰٫۰۵ w_1 t} \left(۱٫۳۱۲ \cos \underbrace{w_{1D}}_{\to ۰٫۹۹۹ w_1} t + ۰٫۰۶۶ \sin w_{1D} t \right)$$

$$q_۲(۰) = -۰٫۳۱۲ \quad \dot{q}_۲(۰) = ۰ \quad q_۲(t) = e^{-۰٫۱ w_۲ t} \left(-۰٫۳۱۲ \cos \underbrace{w_{۲D}}_{\to ۰٫۹۹۵ w_۲} t - ۰٫۰۳۱۴ \sin w_{۲D} t \right)$$

$$\Rightarrow [u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_۲ \end{bmatrix} = q_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + q_۲(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

⑥

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_1 \cos wt \\ P_۰ + P_۲ \sin w' t \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}_1 = \varphi_1^T P = \begin{bmatrix} 1 & ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \cos wt \\ P_۰ + P_۲ \sin w' t \end{Bmatrix} = P_1 \cos wt + ۱٫۰۸۸ (P_۰ + P_۲ \sin w' t)$$

$$\mathbb{P}_۲ = \varphi_۲^T P = \begin{bmatrix} 1 & -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \cos wt \\ P_۰ + P_۲ \sin w' t \end{bmatrix} = P_1 \cos wt - ۱٫۸۳۸ (P_۰ + P_۲ \sin w' t)$$

$$q_1(t) = \frac{P_1}{K_{11}} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_1}\right)^۲} \cos wt + \frac{۱٫۰۸۸ P_۰}{K_{11}} \times (1 - \cos w_1 t) + \frac{۱٫۰۸۸ P_۲}{K_{11}} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{w'}{w_1}\right)^۲} \sin w' t$$

$$q_۲(t) = \frac{P_1}{K_{۲۲}} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_۲}\right)^۲} \cos wt - \frac{۱٫۸۳۸ P_۰}{K_{11}} (1 - \cos w_۲ t) - \frac{۱٫۸۳۸ P_۲}{K_{۲۲}} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{w'}{w_۲}\right)^۲} \sin w' t$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_۲ \end{bmatrix} = q_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ ۱٫۰۸۸ \end{bmatrix} + q_۲(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -۱٫۸۳۸ \end{bmatrix}$$

حال اگر حداکثر پاسخ سازه ($u_{۱max}$ و $u_{۲max}$) را بخواهیم پیدا کنیم.

$$\max q_۱ ، q_۲ \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_۱ = ۰ \longrightarrow t_a \longrightarrow q_{۱max} = q_۱(t_a) \\ \dot{q}_۲ = ۰ \longrightarrow t'_a \longrightarrow q_{۲max} = q(t'_a) \end{cases}$$

$$u_{۱max} = \sqrt{(\varphi_{۱۱} q_{۱max})^۲ + (\varphi_{۱۲} q_{۲max})^۲}$$

$$u_{۲max} = \sqrt{(\varphi_{۲۱} q_{۱max})^۲ + (\varphi_{۲۲} q_{۲max})^۲}$$

(۷)

$\iota = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \longrightarrow$ جابجایی جز در راستای جابجایی زمین است

$$L_n \rightarrow L_۱ = \varphi_۱^T [m]\, \iota = [۱ \quad ۱٫۰۸۸] m \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱٫۱۵۴۴m$$

$$\Rightarrow P_{eff_۱} = -L_۱ \ddot{u}_g = -۱٫۱۵۴۴ m \frac{g}{۲} = \underline{-۰٫۷۷۲ mg}$$

$$P_{eff_۲} = -L_۲ \ddot{u}_g = \underline{-۰٫۰۴۱ mg}$$

$$\begin{cases} q_۱(t) = \dfrac{-۰٫۷۷۲mg}{K_{۱۱}} (۱ - \cos w_۱ t) \xrightarrow{max} = \dfrac{۱٫۱۵۴۴mg}{۰٫۲۵۸K} \\ q_۲(t) = \dfrac{-۰٫۰۴۱mg}{K_{۲۲}} (۱ - \cos w_۲ t) \xrightarrow{max} = \dfrac{۰٫۰۸۹mg}{۸٫۳۰۴K} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{۱max} = \sqrt{(\varphi_{۱۱} q_{۱max})^۲ + (\varphi_{۱۲} q_{۲max})^۲} \\ u_{۲max} = \sqrt{(\varphi_{۲۱} q_{۱max})^۲ + (\varphi_{۲۲} q_{۲max})^۲} \end{cases}$$

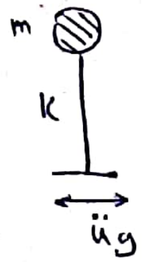
طیف : ← ① سازه یک درجه آزادی ② سازه چند درجه آزادی

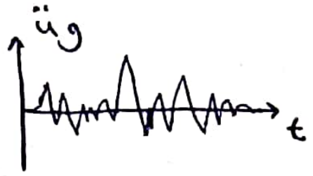
* سیستم یک درجه آزادی :

$$\ddot{u} + ۲\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^{۲}u = -\underbrace{\ddot{u}_g}$$

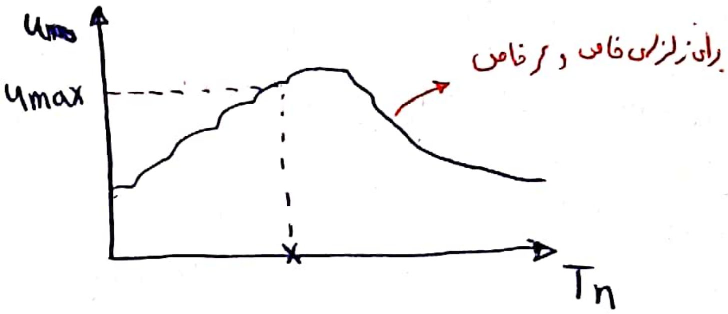
رکورد ثبت شده از شتاب نگاشت

$$\omega_n = \frac{۲\pi}{T_n}$$





پاسخ سازه $u(t) : u(t, T_n, \zeta_n, \ddot{u}_g)$

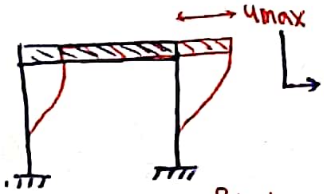


برای زلزله‌ی خاص و ζ خاص

منحنی طیف برای یک زلزله خاص و برای درصد میرایی مشخص رسم می‌شود سپس با داشتن دوره تناوب اصلی سازه (T_n)

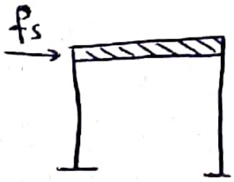
حداکثر جابجایی ، سرعت و شتاب سازه یک درجه آزادی را حساب نمود.
① ② ③

حال با داشتن u_{max} در سازه می‌توان نیروهای موجود در سازه به ازای حداکثر جابجایی رخ داده را محاسبه نمود.



از طیف محاسبه شده است

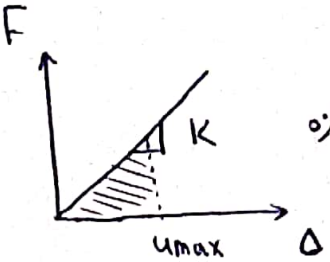
محاسبه نیروهای موجود در سازه
→ شیب انت
→ تاریخی
→ نیروی استاتیکی معادل ← چه نیروی استاتیکی قرار دهیم تا سازه به اندازه u_{max} جابجا باشد.



$$f_s = K u_{max} \Rightarrow f_s = (\underbrace{\omega_n^{۲} u_{max}}_{A})m \Rightarrow \boxed{f_s = W\left(\frac{A}{g}\right)}$$

شبه شتاب : A

* با شبه شتاب می‌توان نیروهای درون سازه را محاسبه نمود



انرژی ذخیره شده در سازه $U = \frac{۱}{۲} K u_{max}^{۲} = \frac{۱}{۲} m (\underbrace{\omega_n u_{max}}_{v})^{۲} = \frac{۱}{۲} m v^{۲}$

شبه سرعت : v

* با شبه سرعت می‌توان انرژی را در سازه محاسبه نمود

$$\left[A = \omega_n V = \omega_n^{۲} D \right]$$

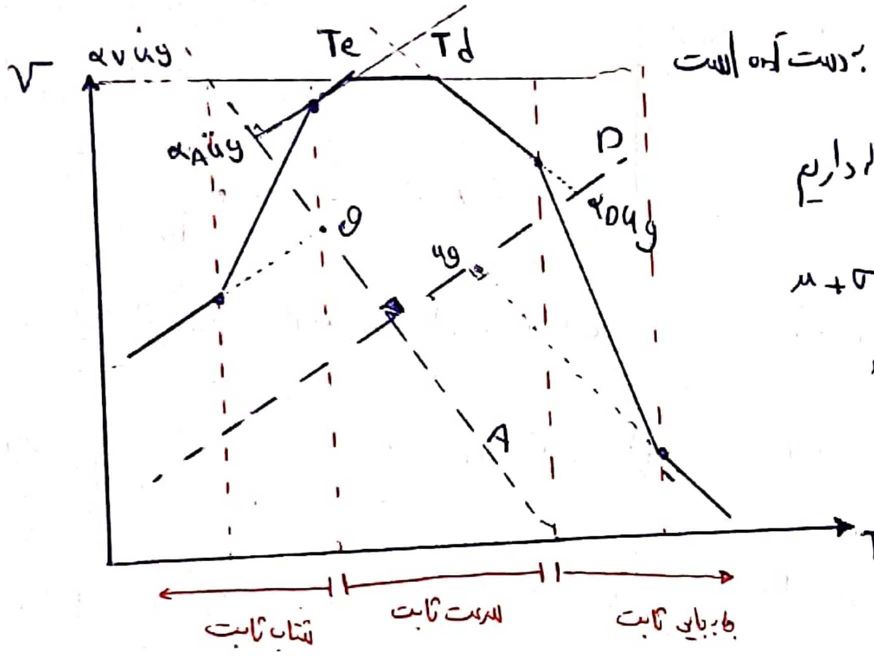
تفاوت طیف طراحی با طیف پاسخ چیست؟

طیف طراحی از میانگین طیف زلزله های مختلف با در نظر گرفتن یک انحراف از معیار (σ) به دست می آید.

برای ساخت نیروگاه $\longrightarrow$ $\mu+\alpha\sigma$ ، $\alpha \downarrow$ ۳ یا ۴

سازه‌های معمولی : $\mu+\alpha\sigma$ ، $\alpha \downarrow$ ۱ یا ۲

ساخت طیف پاسخ (الاستیک) :



① T_a ، T_b ، T_e ، T_f از اطلاعات آماری به دست آمده است

② مقادیر u_g ، $\dot{u}_g$ و $\ddot{u}_g$ را از زلزله داریم

③ با توجه به ξ (میرایی) ، و انتخاب حالت μ یا $\mu+\sigma$ مقادیر تشدید α_D و α_v و α_A حساب می‌شوند (طبق جدول زیر)

④ سپس T_e ، T_d حساب می‌شوند.

* ضرایب تشدید :

① حالت گسسته : ← نیومارک

	μ			$\mu+\sigma$		
ξ	α_A	α_v	α_D	α_A	α_v	α_D
۱	۳٫۲۱	۲٫۳۱	۱٫۸۲	۴٫۳۸	۳٫۳۸	۲٫۷۳
۲	۲٫۷۴	۲٫۰۳	۱٫۶۳	۳٫۶۶	۲٫۹۲	۲٫۴۲
۵	۲٫۱۲	۱٫۶۵	۱٫۳۹	۲٫۷۱	۲٫۳۰	۲٫۰۱
۱۰	۱٫۶۴	۱٫۳۷	۱٫۲۰	۱٫۹۹	۱٫۸۴	۱٫۶۹
۲۰	۱٫۱۷	۱٫۰۸	۱٫۰۱	۱٫۲۶	۱٫۳۷	۱٫۳۸

② حالت پیوسته :

	μ	$\mu+\sigma$
α_A	۳٫۲۱ − ۰٫۶۸ Ln ξ	۴٫۳۸ − ۱٫۰۴ Ln ξ
α_v	۲٫۳۱ − ۰٫۴۱ Ln ξ	۳٫۳۸ − ۰٫۶۷ Ln ξ
α_D	۱٫۸۲ − ۰٫۲۷ Ln ξ	۲٫۷۳ − ۰٫۴۵ Ln ξ

* در زمین های سفت ← برای محاسبه‌ی $\dot{u}_g$ و u_g از روی $\ddot{u}_g$ از این روابط استفاده می‌کنیم.

① $\dfrac{\dot{u}_{g0}}{\boxed{\ddot{u}_{g0}}} =$ ۴۸ in/sec/g

→ $\ddot{u}_g = 1g$ را عدد یک جاگذاری می‌کنیم نه عبارت ۳۸۶ in/s^2

② $\dfrac{\boxed{\ddot{u}_{g0}} \times u_{g0}}{(\dot{u}_g)^2} =$ ۶

→ برای $\ddot{u}_g = g$ عدد ۳۸۶ in/s^2 را جاگذاری می‌کنیم

نکته مهم: طیف $1g = \ddot{u}g$ را در حالت کلی می‌سازیم و چون نرمال کردیم طیف الاستیک است اگر $cg = \ddot{u}$ باشد تمام پارامترهای طیف را در c ضرب می‌کنیم.

* ② استفاده از طیف برای سیستم چند درجه آزادی:

یک درجه آزادی: $\ddot{D} + w_n^2 D = -\ddot{u}g$

چند درجه آزادی: $\ddot{q}_n(t) + w_n^2 q(t) = -\boxed{\Gamma_n}\ddot{u}g$

$$\frac{L_n}{M_n} = \frac{\varphi_n^T[m]1r}{M_n}$$

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$

پاسخ‌ها Γ_n برابر سیستم تک درجه آزادی می‌باشند.

$$[u(t)] = \underbrace{\Gamma_1 D_1(t)}_{q_1(t)}\varphi_1 + \underbrace{\Gamma_2 D_2(t)}_{q_2(t)}\varphi_2 + \cdots + \underbrace{\Gamma_n D_n(t)}_{q_n(t)}\varphi_n$$

از رابطه بالا معلوم می‌شود که برای یک سیستم n درجه آزادی n بار باید از طیف استفاده کرد

$D_1 = u_{1max}$ از روی طیف $\longleftarrow T_1$: مود اول

$D_2 = u_{2max}$ از روی طیف $\longleftarrow T_2$: مود دوم

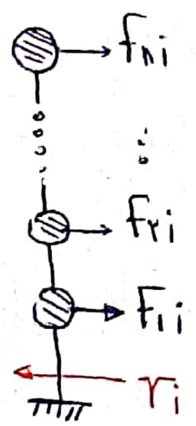
⋮

$D_n = u_{nmax}$ از روی طیف $\longleftarrow T_n$: مود n ام

یافتن حداکثر جابجایی سازه:

$$\begin{bmatrix} u_{1max} \\ u_{2max} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left((\Gamma_1 D_1 \varphi_{11})^2 + (\Gamma_2 D_2 \varphi_{21})^2 + \cdots (\Gamma_n D_n \varphi_{2n})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left((\Gamma_1 D_1 \varphi_{12})^2 + (\Gamma_2 D_2 \varphi_{22})^2 + \cdots (\Gamma_n D_n \varphi_{2n})^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

تعیین نیروهای داخلی:



نیروی گرهی ناشی از مود i $= f_i = [k]u_i = (\underbrace{\Gamma_i[m]\varphi_i}_{S_i = \text{جرم مودی}})(\underbrace{w_i^2 D_i}_{A_i : \text{شتاب مودی}}) = \boxed{S_i A_i}$

└ توزیع نیروی استاتیکی در طبقات برای مود i

* در ۲ حالت می‌توان A_i را محاسبه کرد ← اگر در سوال طیف یک زلزله داده شود برای هر مود سازه با داشتن T_i می‌توان A_i را حساب کرد اما اگر طیف داده نشد، در صورت سوال گفته شد زمین با شتاب $\alpha g = \ddot{u}$ حرکت می‌کند آنگاه برای تمام مود ها شتاب مودی A_i برابر $\alpha g = \ddot{u}$ خواهد بود.

نحوه‌ی محاسبه‌ی برش پایه:

V_i = جمع نیروی طبقات $= f_{1i}+f_{2i}+\dots+f_{ni}$

برش پایه مود i

$[F_i]_{n\times1}=[S_i]_{n\times1}A_i$

$$\Rightarrow V=\sum_{j=1}^{n}(S_i)_j\,A_i=A_i\boxed{\sum S_i}$$

جمع درایه‌های ماتریس S_i ←

$$\begin{bmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ \vdots \\ S_{ni} \end{bmatrix}$$

به جمع S_i ها در مود i، M_i^* آن مود می‌نامند.

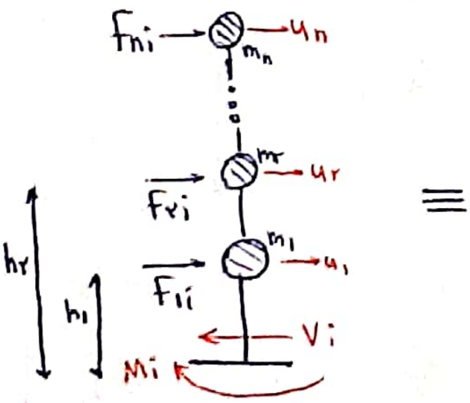
$\sum(s_i)_j=m_i^*=$ جرم مودی مود i ام

① از روابط داریم: $m_i^*=\frac{L_i^2}{M_{ii}}=\Gamma_i L_i$

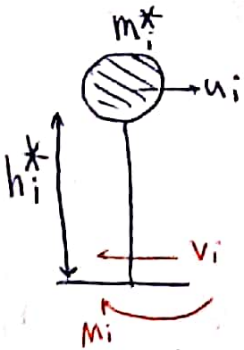
② $V_i=\underbrace{(\Gamma_i L_i)}_{m_i^*}A_i=\underbrace{\left(\frac{L_i^2}{M_{ii}}\right)}_{m_i^*}A_i$ ⟵ [روابط مورد استفاده در امتحان]

دقت شود!: در محاسبه‌ی روابط ① فرض شده است تمام درجات آزادی موازی حرکت زمین حرکت کنند به عبارت دیگر ماتریس ستونی [۱۲] تمام مقادیرش ۱ باشد. ⟵ محدوده‌ی استفاده از روابط ① و ②

جهت کنترل محاسبات: $\underline{\sum m}=\sum m^*$ ← مجموع جرم طبقات



[مود i ام]



[معادل سیستم یک درجه آزادی برای مود i ام]

$M_i=\sum(f_{ji})h_j=m_i^*\times A_i\times h_i^*$ ←

از برابر قرار دادن لنگر در ۲ سیستم مقدار h_i^* محاسبه می‌شود.

① از برابری لنگرها h^* حساب می‌شود

② از برابری برش پایه‌ها m^* محاسبه می‌شود.

* نکته‌ای از ۲۸۰۰: طبق آیین نامه ۲۸۰۰ در تحلیل مودال، تعداد مودهای مورد نظر برای این تحلیل باید به گونه‌ای باشد که مجموع m^*های مودها برابر حداقل ۰٫۹ مجموع جرم ساختمان باشند [منظور از جرم، جرم لرزه‌ای می‌باشد: D+۰٫۲L ← ساختمان مسکونی]

نامعلوم $\sum_{i=1}^{\bigcirc}m^*\geqslant 0.9\sum_{i=1}^{N}m_i$

* هرچه در مودهای بالاتر می‌رویم مقدار h^* و m^* کمتر می‌شوند چرا؟

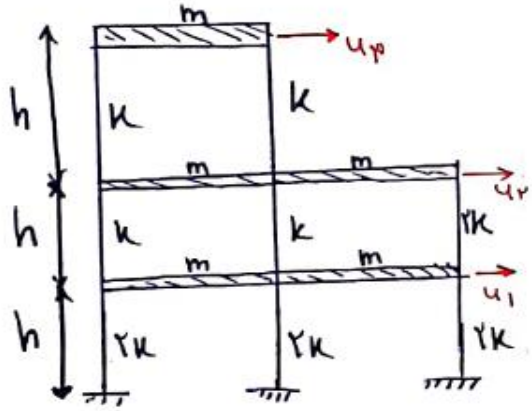
نکته مهم: ابتدا برش پایه را برای هر مود حساب می‌کنیم و سپس برای یافتن Vmax مجذور مربعات برش پایه‌ها را برای مودهای مختلف باهم جمع می‌کنیم.

$$V_{max} = \sqrt{(m_1^* A_1)^2 + (m_2^* A_2)^2 + \ldots + (m_n^* A_n)^2} \quad (RSS)$$

* در این روش مقدار برش کمی بیشتر از مقدار واقعی به دست می‌آید چرا؟ [← کم شدن جهت برش]

* درصد مشارکت مود i ام: درصد مشارکت مود i = $\frac{m_i^*}{\sum m^*}$

مثال: سازه مقابل را تحت زلزله‌ی El centro تحلیل کنید.



h = ۱۰ ft

m = ۱۰۰ kips/g

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi$

۱) تعیین [m] , [k]

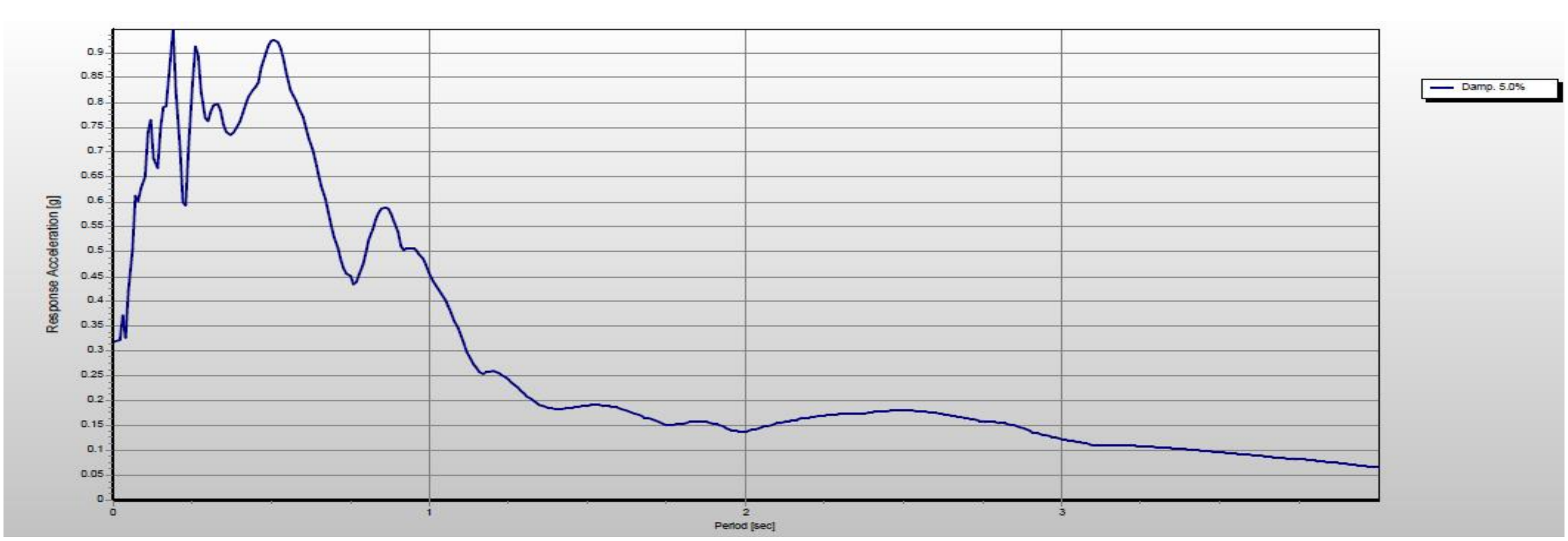
۲) تعیین w_i ها، φ_i ها و ترسیم مودها

۳) تعیین Peff هر مود و معادله‌ی حرکت

۴) تعیین حداکثر برش پایه

۵) تعیین m^*, h^* هر مود

۶) تعیین حداکثر جابجایی طبقه‌ی سوم



حل سوال:

الف
۱) $[k] = \begin{bmatrix} ۶k+۴k & -۴k & ۰ \\ -۴k & ۴k+۲k & -۲k \\ ۰ & -۲k & ۲k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} ۱۰ & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۶ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ $\quad [m] = m\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $\left(\lambda = \frac{m\omega^۲}{k}\right)$ $\begin{vmatrix} ۱۰-۲\lambda & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۶-۲\lambda & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۲-\lambda \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (۱۰-۲\lambda)\left[(۶-۲\lambda)(۲-\lambda)-۴\right]+۴\left[(-۴)(۲-\lambda)\right] = ۰$

$\Rightarrow \lambda^۳ - ۱۰\lambda^۲ + ۲۵\lambda - ۱۲ = ۰ \longrightarrow \lambda_۱ = ۰٫۶۲۷۷ \quad \lambda_۲ = ۳ \quad \lambda_۳ = ۶٫۳۷۲۳$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \omega_۱ = ۰٫۷۹۲۳\sqrt{\frac{k}{m}} = ۴٫۹۷۸\ \text{rad/s} \longrightarrow T_۱ = ۱٫۲۶\ s \\ \omega_۲ = ۱٫۷۳۲۱\sqrt{\frac{k}{m}} = ۱۰٫۸۸۳\ \text{rad/s} \longrightarrow T_۲ = ۰٫۵۸\ s \\ \omega_۳ = ۲٫۵۲۴۳\sqrt{\frac{k}{m}} = ۱۵٫۸۶۱\ \text{rad/s} \longrightarrow T_۳ = ۰٫۳۹۶\ s \end{cases}$$

for $\omega = \omega_۱ \quad \left([k] - \omega_۱^۲[m]\right).\varphi_۱ = \{۰\}$

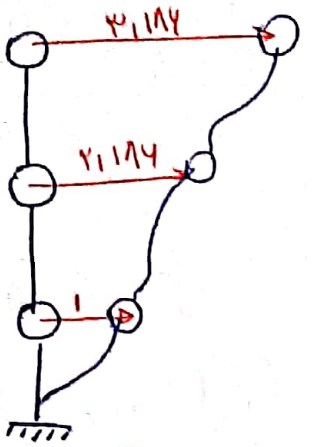
$\lambda_۱ = ۰٫۶۲۷۷ \quad \begin{bmatrix} ۸٫۷۴۴۶ & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۴٫۷۴۴۶ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۱٫۳۷۲۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{۱۱} \\ \varphi_{۲۱} \\ \varphi_{۳۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_{۱۱}=۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲٫۱۸۶ \\ ۳٫۱۸۶ \end{bmatrix}$:مود اول

for $\omega = \omega_۲ : \lambda = ۳$

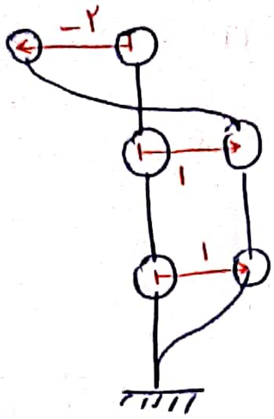
$\begin{bmatrix} ۴ & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{۱۲} \\ \varphi_{۲۲} \\ \varphi_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_{۱۲}=۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ مود دوم

for $\omega = \omega_۳ : \lambda = ۶٫۳۷۲۳$

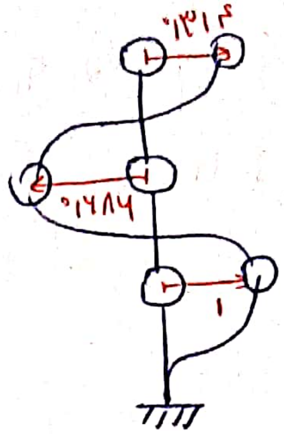
$\begin{bmatrix} -۲٫۷۴۴۶ & -۴ & ۰ \\ -۴ & -۶٫۷۴۴۶ & -۲ \\ ۰ & -۲ & -۴٫۳۷۲۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{۱۳} \\ \varphi_{۲۳} \\ \varphi_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_{۱۳}=۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۰٫۶۸۶ \\ ۰٫۳۱۴ \end{bmatrix}$ مود سوم



[مود اول]



[مود دوم]



[مود سوم]

$$[M]=[\Phi^T][m][\Phi]=m\begin{bmatrix}۱ & ۲٫۱۸۶ & ۳٫۱۸۶\\ ۱ & ۱ & -۲\\ ۱ & -۰٫۶۸۶ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲٫۱۸۶ & ۱ & -۰٫۶۸۶\\ ۳٫۱۸۶ & -۲ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}$$

$$=m\begin{bmatrix}۱ & ۲٫۱۸۶ & ۳٫۱۸۶\\ ۱ & ۱ & -۲\\ ۱ & -۰٫۶۸۶ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۲\\ ۴٫۳۷۲ & ۲ & -۱٫۳۷۲\\ ۳٫۱۸۶ & -۲ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}۲۱٫۷۱ & ۰ & \overset{\approx ۰}{۰٫۰۰۱}\\ ۰ & ۸ & ۰\\ ۰٫۰۰۱ & ۰ & ۳٫۰۴\end{bmatrix}$$ تعامدی ✓

$$[K]=[\Phi^T][K][\Phi]=۲K\begin{bmatrix}۱ & ۲٫۱۸۶ & ۳٫۱۸۶\\ ۱ & ۱ & -۲\\ ۱ & -۰٫۶۸۶ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & -۲ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۱\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۲٫۱۸۶ & ۱ & -۰٫۶۸۶\\ ۳٫۱۸۶ & -۲ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}$$

$$=۲K\begin{bmatrix}۱ & ۲٫۱۸۶ & ۳٫۱۸۶\\ ۱ & ۱ & -۲\\ ۱ & -۰٫۶۸۶ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰٫۶۲۸ & ۳ & ۶٫۳۷۲\\ ۱٫۳۷۲ & ۳ & -۴٫۳۷۲\\ ۱ & -۳ & ۱\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}۱۳٫۶۲ & ۰ & ۰٫۰۰۱\\ ۰ & ۱۲۴ & ۰\\ \underset{\approx ۰}{۰٫۰۰۱} & ۰ & ۱۹٫۳۶\end{bmatrix}$$

تعامدی ✓

۳) نیروی معادل گرهی $= P_{eff} \Rightarrow L_n=[\varphi_n]^T[m]\{\iota\}$ $\iota=\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}$

$\Downarrow$

Ln وزن

$$\begin{cases}L_۱=m\begin{bmatrix}۱ & ۲٫۱۸۶ & ۳٫۱۸۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=۹٫۵۶m\\ L_۲=m\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=۲m\\ L_۳=m\begin{bmatrix}۱ & -۰٫۶۸۶ & ۰٫۳۱۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=۰٫۹۴m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Gamma_۱=\frac{L_۱}{M_{۱۱}}=۰٫۴۴\\ \Gamma_۲=\frac{L_۲}{M_{۲۲}}=۰٫۲۵\\ \Gamma_۳=\frac{L_۳}{M_{۳۳}}=۰٫۳۱\end{cases}$$

(کنترل ← $۰٫۴۴+۰٫۲۵+۰٫۳۱=۱$ ✓)

حال معادلات حرکت را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \ddot{q}_۱(t) + w_۱^۲ q_۱(t) = -\Gamma_۱ \ddot{u}_g \\ \ddot{q}_۲(t) + w_۲^۲ q_۲(t) = -\Gamma_۲ \ddot{u}_g \\ \ddot{q}_۳(t) + w_۳^۲ q_۳(t) = -\Gamma_۳ \ddot{u}_g \end{cases}$$

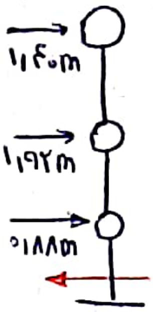
* در حل مسائل طیف این معادلات را حل نمی‌کنیم.

در طیف: $\ddot{D}_i + w_i^۲ D = -\ddot{u}_g \longrightarrow (q_{i\max}) = \Gamma_i D_{i\max}$

ب) برای درک بهتر این قسمت، الف را از ۲ راه حل می‌کنیم

$$S_i = \Gamma_i [m][\varphi_i]$$

$$S_۱ = ۰٫۴۴\,m \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲٫۱۸۶ \\ ۳٫۱۸۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۸۸\,m \\ ۱٫۹۲\,m \\ ۱٫۴۰\,m \end{bmatrix}$$



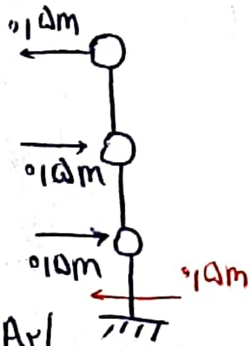
$۴٫۲m =$ مجموع S_iها

روش ۱: $V_۱ = \sum S \times A_۱ = (۰٫۸۸m + ۱٫۹۲m + ۱٫۴۰m)A_۱ = \underline{۴٫۲m\,A_۱}$

درحقیقت ۳ جرم حساب کرده

روش ۲: $V_۱ = m_۱^* A_۱ = (\Gamma_۱ L_۱)A_۱ = (\underbrace{۰٫۴۴ \times ۹٫۵۴m}_{m^*})A_۱ = \underline{۴٫۲m\,A_۱}$

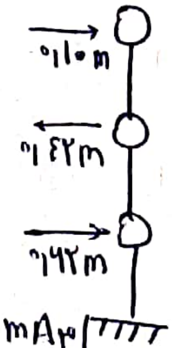
$$S_۲ = ۰٫۲۵\,m \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۵\,m \\ ۰٫۵\,m \\ -۰٫۵\,m \end{bmatrix}$$



روش ۱: $V_۲ = \sum S \times A_۲ = (۰٫۵m + ۰٫۵m - ۰٫۵m)A_۲ = \underline{۰٫۵m\,A_۲}$

روش ۲: $V_۲ = m_۲^* A_۲ = (\Gamma_۲ L_۲)A_۲ = (۰٫۲۵ \times ۲m)A_۲ = \underline{۰٫۵m\,A_۲}$

$$S_۳ = ۰٫۳۱\,m \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۰٫۶۸۶ \\ ۰٫۳۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰٫۶۲\,m \\ -۰٫۴۲\,m \\ +۰٫۱۰\,m \end{bmatrix}$$



روش ۱: $V_۳ = \sum S \times A_۳ = (۰٫۶۲m - ۰٫۴۲m + ۰٫۱۰m)A_۳ = \underline{۰٫۳m\,A_۳}$

روش ۲: $V_۳ = m_۳^* A_۳ = (\Gamma_۳ L_۳)A_۳ = (۰٫۳۱ \times ۰٫۹۴m) \simeq \underline{۰٫۳۰m\,A_۳}$

$m^*_۱ + m^*_۲ + m^*_۳ = ۴٫۲m + ۰٫۵m + ۰٫۳m = ۵m = \sum m =$ جرم کل سازه ✓

درصد مشارکت مودها:

مود اول: $\frac{m^*_1}{\Sigma m^*} = \frac{۴٫۲m}{۵m} = ۸۴\%$ مود دوم = $\frac{m^*_۲}{\Sigma m_*} = \frac{۰٫۵m}{۵m} = ۱۰\%$

مود سوم: $\frac{m^*_۳}{\Sigma m^*} = \frac{۰٫۳m}{۵m} = ۶\%$

چون از نظر ۲۸۰۰ چون جمع درصد مشارکت مود ۱ و ۲ جمعاً برابر ۸۴+۱۰ = ۹۴٪ می باشد پس با دو مود می توان سازه را تحلیل کرد

(در نرم افزار ETabs یا Sap)

* در حل دستی حتماً" تمام مودها حساب شوند برای محاسبه ی برش پایه !!!

حال در کت طیف مقدار A_1 ، $A_۲$ ، $A_۳$ را بدست می آوریم.

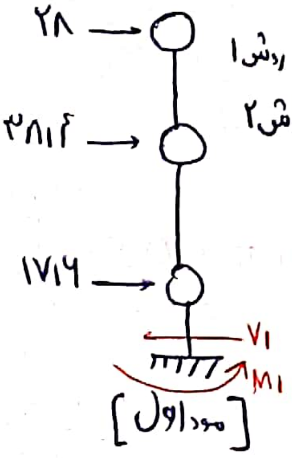
$$T_1 = ۱٫۲۶۲\,s \longrightarrow A_1 = ۰٫۱۲g \longrightarrow \cancel{D_1 = A_1 \omega_1^۲ = ۰٫۱۲g} \; D_1 = \frac{A_1}{\omega_1^۲} = \frac{۰٫۱۲\times۳۸۶}{(۴٫۹۷۸)^۲} = ۳٫۱\,in$$

$$T_۲ = ۰٫۵۷۷s \longrightarrow A_۲ = ۰٫۱۸g \longrightarrow D_۲ = \frac{A_۲}{\omega_۲^۲} = \frac{۰٫۱۸\times۳۸۶}{(۱۰٫۸۸۳)^۲} = ۲٫۶\,in$$

$$T_۳ = ۰٫۳۹۶\,s \longrightarrow A_۳ = ۰٫۱۷۸g \longrightarrow D_۳ = \frac{۰٫۱۷۸\times۳۸۶}{(۱۵٫۸۶۱)^۲} = ۱٫۲\,in$$

$(mg = ۱۰۰\,kips) \rightarrow$ صورت سوال

$$F_1 = S_1 \times A_1 = \begin{bmatrix} ۰٫۱۸۸m \\ ۱٫۱۹۲m \\ ۱٫۱۴۰m \end{bmatrix} \times (۰٫۱۲g) = \begin{bmatrix} ۱۷٫۶ \\ ۳۸٫۴ \\ ۲۸ \end{bmatrix} kips$$

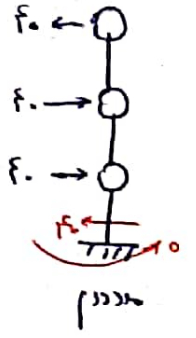


روش ۱، $V_1 = (۱۷٫۶+۳۸٫۴+۲۸) = \underline{۸۴\,kips}$ ✓

روش ۲، $V_1 = m_1^* A_1 = (۴٫۲m)(۰٫۱۲g) = \underline{۸۴\,kips}$ ✓

$$M_1 = ۱۷۸۴\,kips.ft$$

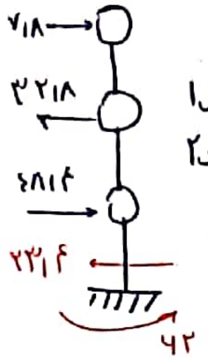
$$F_۲ = S_۲ \times A_۲ = \begin{bmatrix} ۰٫۵m \\ ۰٫۵m \\ -۰٫۵m \end{bmatrix} \times (۰٫۱۸g) = \begin{bmatrix} ۴۰ \\ ۴۰ \\ -۴۰ \end{bmatrix} kips$$



$V_۲ = ۰$

$M_۲ = ۰$

$$F_{s۳} = S_۳ \times A_۳ = \begin{bmatrix} ۰٫۶۲m \\ -۰٫۴۲m \\ ۰٫۱۰m \end{bmatrix} (۰٫۷۸g) = \begin{bmatrix} ۴۸٫۴ \\ ۳۲٫۸ \\ ۷٫۸ \end{bmatrix} \text{kips}$$



برش ۱ : $V_۳ = \Sigma S_۳ A_۳ = ۲۳٫۴ \text{ kips}$

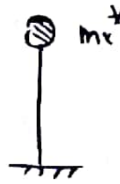
برش ۲ $V_۳ = m_۳^* A_۳ = ۲۳٫۴ \text{ kips}$

برش جمع مودها $= V_T = \sqrt{۸۴^۲ + ۰^۲ + ۲۳٫۴^۲} = \sqrt{\sum_{i=۱}^{۳} V_i^۲} = \underline{۹۹ \text{ kips}}$

۵)

$m_۱^* = ۴٫۲m$

$$h_۱^* = \frac{M_۱}{m_۱^*} = \frac{۸۹٫۲m}{۴٫۲m} = ۲۱٫۲۴ \text{ ft}$$



$m_۲^* = ۰٫۵m$

$$h_۲^* = \frac{M_۲}{m_۲^*} = ۰$$

$m_۳^* = ۰٫۳m$

$$h_۳ = \frac{M_۳}{m_۳} = \frac{۰٫۸m}{۰٫۳m} = ۲٫۶۷ \text{ ft}$$

$M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ لنگرهای استاتیکی پایه هستند.

۶) $u_{۳max} = \sqrt{(\varphi_{۳۱}\Gamma_۱ P_۱)^۲ + (\varphi_{۳۲}\Gamma_۲ D_۲)^۲ + (\varphi_{۳۳}\Gamma_۳ D_۳)^۲} =$

$$\Rightarrow u_{۳max} = \sqrt{(۳٫۱۸۹ \times ۰٫۴۴ \times ۳٫۱(\text{in}))^۲ + (-۲ \times ۰٫۲۵ \times ۲٫۹)^۲ + (۰٫۳۱۴ \times ۰٫۳۱ \times ۱٫۲)^۲}$$

$= \underline{۴٫۵۳۹ \text{ in}}$

خلاصه فرمول های درس مهندسی زلزله:

سختی:

① دوسر گیردار

$k=\frac{۱۲EI}{h^۳}$

② یک سر گیردار یک سر مفصل $k=\frac{۳EI}{h^۳}$

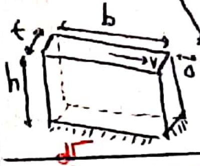
③ مهاربند $K_h=\frac{EA}{L}\cos^{۲}\theta$ طول مایل — زاویه مهاربند با افق

نیروی در بادبند $=F=\frac{EA}{L}\cos\theta$

نکته: بادبند در حالت فشاری کمانش می کند ولی اگر بصورت کششی باشد کمانش نداریم و سختی آن لحاظ می‌شود

④ دیوار برشی → یکسر آزاد یکسر گیردار → $k=\frac{۳EI}{h^۳}\times\frac{1}{1+\boxed{۰٫۵}(\frac{b}{h})^۲(1+\nu)}$

دوسر گیردار $k=\frac{1}{\frac{h^۳}{۱۲EI}+\frac{h}{A'G}}$ $A'=\frac{۵}{۶}A\rightarrow\boxed{۰٫۶}$ ✓ $A=A'$



معادله کلی ارتعاش:

$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=f(t)\rightarrow$ نیروی خارجی

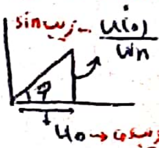
نسبی

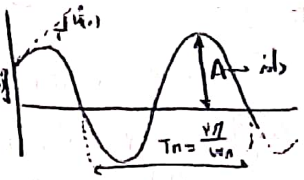
$\xi=\frac{c}{c_{cr}}$ → تابع جرم

ارتعاش آزاد نامیرا:

① $u(t)=u(0)\cos(\omega_n t)+\frac{\dot u(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$ $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}$

② $u(t)=A\cos(\omega_n t-\varphi)$ $A=\sqrt{u(0)^۲+(\frac{\dot u(0)}{\omega_n})^۲}$





نکته: اگر سختی برحسب kgf بود m را تقسیم بر g می کنیم ← $۹٫۸۱\ m/s^۲$ یا $۳۸۹٫۲۲\ in/s^۲$

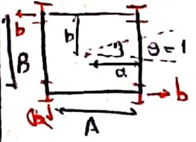
اگر سختی برحسب lbf بود m را بر g تقسیم می کنیم، Wn را حساب می کنیم، Ccr هم همین طور.

★ $\dot u_{max}=A\omega$ $\ddot u_{max}=A\omega^۲$

ارتعاش پیچشی:

$M_I+M_S=0\Rightarrow I_0\ddot u_\theta+K_\theta u_\theta=0$ $\omega_n=\sqrt{\frac{K_\theta}{I_0}}$

K_θ: لنگر ناشی از دوران واحد



$I_0=\frac{m}{۱۲}(A^۲+B^۲)+\sum m_i r_i^۲$ → جرم متمرکز شده روی دیافراگم (نصف ارتفاع)

★ I_0 هم باید تقسیم بر g شود اگر kg برحسب kgf باشد.

تبدیل واحدها:

① $1lb=۰٫۴۵kg$ ② $g=۳۸۹٫۲۲\ \frac{in}{s^۲}=۳۲٫۱۷۴\ ft/s^۲$

③ $1slug=1\frac{lb\cdot s^۲}{ft}$ $1slug=۳۲٫۱۷\ lbm$ $1slug=۱۴٫۵۹kg$

④ $1lbf=۴٫۴۴۸N$

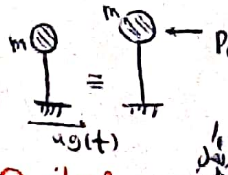
معادلات ارتعاش تحت انواع تحریک زمین:

① پایه‌ای: (انتقال پیش رونده)

→ براساس جابجایی نسبی: $m\ddot u(t)+c\dot u(t)+ku(t)=-m\ddot u_g(t)$

→ براساس جابجایی کل: $m\ddot u^t(t)+c\dot u^t(t)+ku^t(t)=c\dot u_g+ku_g(t)$

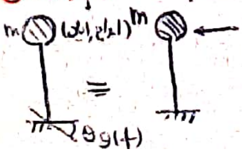
در اینحالت با جابجایی نسبی داریم $f_s(t)=k(u^t(t)-u_g(t))$



$P_{eff}(t)=-m\ddot u_g(t)$

② دورانی: → براساس جابجایی نسبی: $m\ddot u+ku=-mh\ddot\theta_g(t)$ تنزل

(انتقال زاویه)



$P_{eff}(t)=-mh\ddot\theta_g(t)$

③ پیچشی → براساس نسبی: $I_0\ddot u_\theta+K_\theta u_\theta=\underline{-I_0\ddot\theta_g}$

(انتقال پیچشی)

اثرات وزن در سختی (P-Δ) اثرات ثانوی:

$\underbrace{(mL^۲)}_{m^*}\ddot\theta+\underbrace{(k_\theta-WL)}_{k^*}\theta=0\Rightarrow m^*\ddot\theta+k^*\theta=0$

$k^*=k_\theta-W_{cr}L=0$

ترکیب سری و موازی:

۱- سری: نیرو ثابت - جابجایی متفاوت

۲- موازی: جابجایی ثابت - نیرو متفاوت

$\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\Rightarrow k_{eq}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

$k_{eq}=k_1+k_2+\dots+k_n$

نکته: در بررسی ها و دستگاه‌های متصل به فنر ارتعاش حول تعادل استاتیکی رخ می‌دهد، اثر وزن در معادلات حذف می‌شود.

فرمول های پایه ریاضی:

① $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

② $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

③ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

④ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ، $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

⑤ $i^۲=-1$

ارتعاش آزاد سیستم میرا:

① $u(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left(u_0\cos(\omega_D t)+\left(\frac{\dot u_0+\xi\omega_n u_0}{\omega_D}\right)\sin(\omega_D t)\right)$

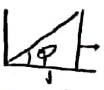
$\omega_D=\omega_n\sqrt{1-\xi^۲}$

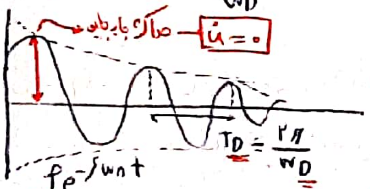
ارتعاش داریم ← $\xi<1$ ، $\xi=\frac{c}{c_{cr}}$

$C_{cr}=۲\sqrt{mk}=۲m\omega_n$

② $u(t)=e^{-\xi\omega_n t}\rho\cos(\omega_D t\mp\varphi)$

$\rho=\sqrt{u_0^۲+\left(\frac{\dot u_0+\xi\omega_n u_0}{\omega_D}\right)^۲}$





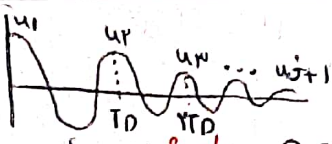
★ در مواقع $\xi<<1$ ← $\omega_D\simeq\omega_n$

$T_D\simeq T_n$

$T_D=T_n\times\frac{1}{\sqrt{1-\xi^۲}}$

نکته: در تمام فرمول‌های ارتعاش اگر ω بر حسب $\frac{rad}{s}$ باشد پس ماشین حساب در حالت رادیان باید باشد.

پیدا کردن ξ سیستم میرا از طریق ایجاد ارتعاش آزاد.



① $\delta=\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right)=\frac{۲\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^۲}}$

② اگر $\xi<۰٫۲$ $\Longrightarrow\delta=۲\pi\xi$

③ $e^\delta=\frac{u_i}{u_{i+1}}$ [illegible] ارتعاش

$\delta=\frac{1}{j}\ln\left(\frac{u_1}{u_{1+j}}\right)\simeq۲\pi\xi$

$\xi=\frac{1}{۲\pi j}\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+j}}\right)$

$\xi=\frac{1}{۲\pi j}\ln\left(\frac{\ddot u_i}{\ddot u_{i+j}}\right)$

$\xi/۱۱\%$ $j=۱۰$ $i=1$ — توجه: تعداد ارتعاش ۱۱

نکته: c در یک سازه ثابت است ولی با عوض شدن جرم سازه Ccr عوض می‌شود.

نکته: اگر سختی برحسب kgf بود برای محاسبه $C_{cr}=۲m\omega_n$ باید m بر g تقسیم شود $(\frac{kg}{m}\cdot s^۲)$

ارتعاش سیستم یک درجه آزادی نامیرا تحت بار هارمونیک:

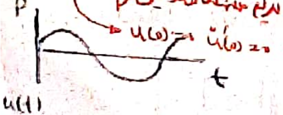
$m\ddot u+c\dot u+ku=P_0\sin\omega t$

$u(t)=\left[u_0\cos\omega_n t+\left(\frac{\dot u_0}{\omega_n}-\frac{P_0}{k}\times\frac{\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^۲}\right)\sin\omega_n t\right]+\underbrace{\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^۲}\sin\omega t}_{\text{پاسخ حالت ماندگار}}$

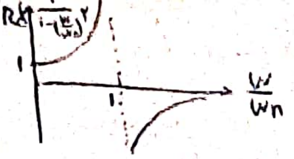
ω بارگذاری

حل گذرا ← اگر شرایط اولیه نداشته باشیم [illegible]

$u(0)=0,\ \dot u(0)=0\Rightarrow u(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-\beta^۲}(\sin\omega t-\beta\sin\omega_n t)$



ممان اینرسی حلقه: $\frac{\pi}{۴}(R_۲^۴-R_۱^۴)$



* معادل نمودار دل با نارا، تحلیل کنیم:

① $\lim \frac{w}{w_n}\to 0 \Rightarrow R_d=1$ بارگذاری شبه استاتیکی

② $0<\frac{w}{w_n}<1 \Rightarrow R_d>0 \to$ بارگذاری و پاسخ هم فاز

③ $\frac{w}{w_n}=1 \to R_d=+\infty,-\infty$ ناحیه تشدید

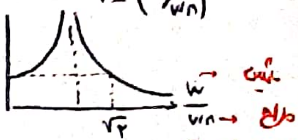
④ $\frac{w}{w_n}>1 \to R_d<0$ بار و پاسخ به اندازه π اختلاف فاز دارند

⑤ $\frac{w}{w_n}\to\infty \Rightarrow R_d=0$

⑥ برای رسیدن به حداکثر دامنه، یا اختلاف فاز بین بار و پاسخ چند سیکل باید در این نرخ دهد تا دفعتاً ایجاد نمی‌شود.

$$u_p(t)=(u_{st})_0 R_d \sin(wt-\varphi) \qquad R_d=\frac{1}{1-(w/w_n)^2}$$

$$\varphi=0\to\frac{w}{w_n}<1 \qquad \pi\to\frac{w}{w_n}>1$$



کنترل ارتعاش:

① $\frac{w}{w_n}<<1 \to$ ماندگار $=\frac{P_0}{K} \to$ سختی کنترل کننده است

② $\frac{w}{w_n}>>1 \to$ " $u=\frac{P_0}{m}\times\frac{1}{w^2}\to$ جرم کنترل کننده است

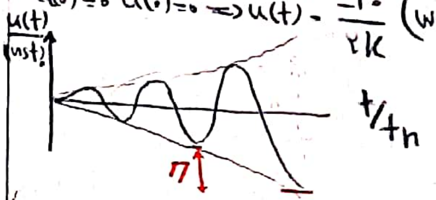
③ $\frac{w}{w_n}=1 \to \longrightarrow$ Rd تا بینهایت میرود میرایی کنترل کننده میشود ولی چون سیستم میرا نیست

پاسخ سیستم نامیرا به بارگذاری هارمونیک با رزونانس کامل:

$$u(t)=\left[u(0)\cos w_nt+\left(\frac{\dot u_0}{w_n}+\frac{P_0}{2K}\right)\sin w_nt\right]-\frac{P_0}{2K}w_nt\cos w_nt$$

↳ در حالت داشتن شرایط اولیه

$$u(0)=0\quad \dot u(0)=0 \Rightarrow u(t)=\frac{-P_0}{2K}(w_nt\cos w_nt-\sin w_nt)$$



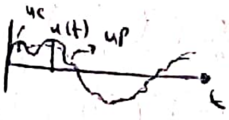
(* پاسخ دفعتاً ∞ نمی‌شود) ←

ارتعاش سیستم یک درجه آزادی میرا تحت بار هارمونیک:

$$u(t)=e^{-\zeta w_nt}(A\cos w_Dt+B\sin w_Dt)+\underbrace{(C\sin wt+D\cos wt)}_{\text{حل خاص}}$$

$$C=\frac{P_0}{K}\times\frac{1-\beta^2}{[(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2]^2} \qquad D=\frac{P_0}{K}\times\frac{-2\zeta\beta}{[(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2]^2} \qquad \beta=\frac{w}{w_n}$$

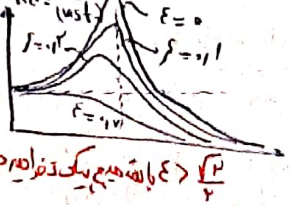
$$ICS\ \ u(0)=u_0\quad \dot u(0)=\dot u_0 \to A,B\ ✓$$

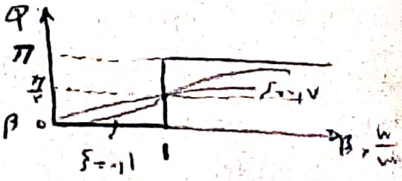


سوال از ما مقدار ماندگار را خواهد: $(u_{st})_0=\frac{P_0}{K}$

$$u_p(t)=(u_{st})_0 R_d\sin(wt-\varphi)$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right) \qquad R_d=\frac{1}{[(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2]^{1/2}}$$





($\xi<\frac{\sqrt2}{2}$ باشد هیچ پیکی در نمودار ندارد

$$\left(\frac{w}{w_n}\right)_{\text{تشدید}}=\sqrt{1-2\zeta^2}\ )$$

$$R_{d\,\text{تشدید}}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta\ \text{فرض کوچک} \Rightarrow R_{d\,\text{تشدید}}=\frac{1}{2\zeta}$$

نکات: رزونانس ≠ تشدید. رزونانس w = wn میباشد.

نکات مهم:

① $\frac{w}{w_n}<<1 \to$ پاسخ و بارگذاری هم فازند $R_d=1 \quad (u_p)_{max}=u_{st}=\frac{P_0}{k}\to$ سختی کنترل کننده

② $\frac{w}{w_n}>>1 \to$ بارگذاری و پاسخ π اختلاف فاز $\quad u_{pmax}=\frac{P_0}{m}\times\frac{1}{w^2}\to$ جرم کنترل کننده

↳ پاسخ دینامیکی کمتر از استاتیکی است

③ $\frac{w}{w_n}\approx1 \Rightarrow R_d=\frac{1}{2\zeta} \quad u_{pmax}=\frac{P_0}{w_n}\times\frac{1}{c}\to$ میرایی کنترل کننده است

* اختلاف فازها نیاز به چند سیکل به وجود می‌آیند.

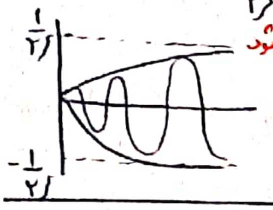
حداکثر نیرو: $f_I+f_D+f_S=0\Rightarrow|f_I|=|f_D+f_S|\Rightarrow$ حداکثر نیرو $=(m\ddot u)_{max}$

حداکثر نیرو فنر $=W$ وزن $+(m\ddot u)_{max}$ – دینامیکی

پاسخ سیستم میرا تحت بارگذاری هارمونیک در حالت تشدید: if $u(0)=0\ \dot u(0)=0\ w=w_n$

$$u(t)=(u_{st})_0\frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta w_nt}\left(\cos w_Dt+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin w_Dt\right)-\cos w_nt\right]$$

$$t\to\infty \quad u(t)=-\frac{1}{2\zeta}(u_{st})_0\cos w_nt \qquad \underset{\text{دینامیکی}}{u_{max}}=(u_{st})\frac{1}{2\zeta}$$



* هر چه میرایی بیشتر، زودتر پوش کامل میشود

ضربه: $\int_{t_1}^{t_2}P(t)dt \to$ تعریف ضربه تابع دلتا دیراک $\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$

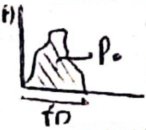
ویژگی دلتا دیراک: ① $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)dx=1$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$

کاربرد ← ① تعریف بار متمرکز $=f(x)=P_0\delta(x-x_0)$ بار متمرکز ② بار در حرکت $F(x,t)=P_0\delta(x-vt)$

پاسخ سیستم به ضربه واحد:

① نامیرا: $h(t)=\frac{1}{mw_n}\sin w_nt$ ② میرا: $h(t)=\frac{1}{mw_D}e^{-\zeta w_nt}\sin w_Dt$

$h(t-\tau)$ ← اگر ضربه در لحظه τ باشد ← * روابط بالا در حالتی که ضربه در t=0 باشد



$\boxed{T'_D<\frac{T_n}{4}}$ → اگر برقرار باشد با تقریب خوبی میتوان پاسخ سیستم را بدست آورد

$$u(t)=\begin{cases}P_0h(t-T'_D) & t>T'_D\\ 0 & t<T'_D\end{cases}$$

↳ مساحت زیر نمودار

انتگرال پیچش دوهامل

روش انتگرال دوهامل:

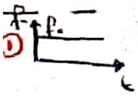
$$u(t)=f*h=h*f=\int f(\tau)h(t-\tau)d\tau=\begin{cases}\xrightarrow{\text{نامیرا}} u(t)=\frac{1}{mw_n}\int_0^t f(\tau)\sin(w_n(t-\tau))d\tau\\ \xrightarrow{\text{میرا}} u(t)=\frac{1}{mw_D}\int_0^t f(\tau)e^{-\zeta w_n(t-\tau)}\sin(w_D(t-\tau))d\tau\end{cases}$$

↳ ICS: $u(0)=0\ \ \dot u(0)=0$ //

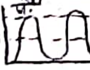
اگر شرایط اولیه داشتیم:

$$u(t)=\left(u(0)\cos w_nt+\frac{\dot u(0)}{w_n}\sin w_nt\right)+f*h$$

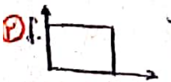
پاسخ سیستم تحت انواع بارها:



① $u(t)=\frac{f_0}{k}(1-\cos w_nt)$

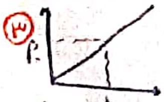


۱) $\frac{u_{dmax}}{u_{st}}=2$ ۲) نسبت بالا بیش از $2u_{st}$ ... در کل نقطه

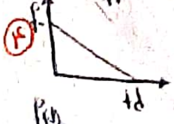


② الف) $t<t_0$ ↑

ب) $t>t_0\to u(t)=\frac{f_0}{k}\left(\cos(w_n(t-t_0))-\cos w_nt\right)$



③ $u(t)=\frac{f_0}{k}\left(\frac{t}{t_0}-\frac{\sin w_nt}{w_nt_0}\right)$

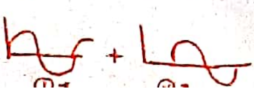


④ الف) $t<t_d\quad u(t)=\frac{f_0}{k}\left(1-\frac{t}{t_d}-\cos w_nt+\frac{\sin w_nt}{w_nt_d}\right)$

ب) $t>t_d\quad u(t)=\frac{P_0}{k}\left(-\cos w_nt-\frac{\sin w_n(t-t_d)-\sin w_nt}{w_nt_d}\right)$

⑤ الف) $t<t_d:\ u(t)=\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-(\frac{w}{w_n})^2}\sin wt$

ب) $t>t_d:\ u(t)=\underset{①}{\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-(\frac{w}{w_n})^2}\sin wt}-\underset{②}{\frac{P_0}{k}\times\frac{1}{1-(\frac{w}{w_n})^2}\sin w(t-t_d)}$



فرمول های پایان ترم درس زلزله:

$[m]$، $[c]$، $[k]$ باید مستقل باشند.
$$[m]\ddot{u}+[c]\dot{u}+[k]u=[1P]$$

← به شرطی که u نسبت به زمین باشد.

* $[c] \rightarrow \alpha[k]+\beta[m] \rightarrow$ برای اینکه معادلات مستقل حل بشند ، میرایی کلاسیک

* $[k] \rightarrow k_{ij}$: i ← سطر (طبقه) ، j ← ستون ماتریس (درجه آزادی) که Δ=1 قرار دادیم

* $[m] \rightarrow$ ماتریس قطری ← بدلیل لحاظ نکردن جرم ها

* اگر جرم گسترده باشد باید جرم متمرکز را پیدا کنیم.

* در حالت جرم متمرکز هم باید سختی معادل را که جرم متمرکز را پیدا کنیم.

ناهمگامی درجه آزادی ها:

$$[m]\begin{pmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\vdots\\\ddot{u}_N\end{pmatrix}+[k]\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_N\end{pmatrix}+[c]\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\\\vdots\\\dot{u}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\\vdots\\P_N\end{pmatrix}$$

معادله طبقه 1

معادله طبقه N

دستگاه معادلات تحت جابجایی زمین:

① حالت نسبی : $[m]\ddot{u}+[c]\dot{u}+[k]u=\underbrace{-\ddot{u}_g[m]\cdot 1r}_{P_{eff}}$ ← بردار $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

② جابجایی کل : $[m]\ddot{u}+[c]\dot{u}+[k]u=([c]\dot{u}_g+[k]u_g)$

نکته: اگر با حالت ① حل کردیم و سوال شتاب و یا جابجایی در یک طبقه را بخواهد باید شتاب و جابجایی نسبی بدست آمده را با $\ddot{u}_g$ و u_g ناشی از زلزله جمع کنیم تا شتاب و جابجایی کل حاصل شود.

دستگاه معادلات تحت دوران زمین:

$$u^t=u+\underbrace{\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_N\end{pmatrix}}_{1r}\theta_g(t)$$

$h_1,\dots,h_N$ ارتفاع هر طبقه ، در حالت دوران

با جایگذاری u^t در معادله اصلی معادله حرکت حاصل می‌شود.

در حالت جابجایی زمین ، $1r=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ برای حالتی می‌باشد که تمام درجه آزادی ها موازی حرکت زمین باشد در غیر این صورت درایه ها 1 نمی‌شوند.

---

② $u(x,t)=\varphi(x)q(t)$ $\quad u=\sum_{i=1}^{N} q_i(t)\times\varphi_i$

تعداد مود ، تابع مشارکت مود در زمان ، شکل مود i ، شماره طبقه ، شماره مود

$$\underbrace{([k]-w_i^2[m])}_{[c]}\cdot\varphi_i=0 \qquad \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots\\c_{21}&c_{22}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_{1i}\\\varphi_{2i}\\\vdots\\\varphi_{ni}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

معادله همگن ، det = 0

$$\Rightarrow \mathrm{Det}[[k]-w_i^2[m]]=0 \rightarrow w_i \rightarrow \varphi_i$$

بردار ویژه : $([m]^{-1}[k])\varphi_i=w^2\varphi_i \quad (A\cdot X=\lambda X)$

بردار ویژه ، مقدار ویژه

نکته مهم: برای محاسبه φ_i همواره $\varphi_{1i}=1$ فرض کنیم (طبقه اول را نسبت به ما برابر ۱) و سپس بقیه φ ها را محاسبه کنیم.

* مود ها را براساس دوره تناوب مرتب می‌کنیم ← $T_1>T_2>\dots>T_N$

⑤ در این معادلات اگر جواب طلب نباشد ، و اگر لزوماً داشته باشد باید یک معادله دیگر انتخاب کرد و در حالت طلب حل کرد فرض $w=0$ ← یک معادله اضافی تر نسبت به حالت قبل

خاصیت تعامد مودها:

① $\varphi_r^T[k]\varphi_m=0 \quad r\neq m$

② $\varphi_r^T[m]\varphi_m=0 \quad r\neq m$

تشکیل ماتریس [M] و [K]:

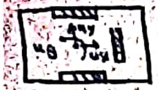
$$\Phi=(\varphi_1\,|\,\varphi_2\,|\,\dots\,|\,\varphi_n)$$

قطری

① $\Phi^T[k]\varphi=[K]$ ② $\Phi^T[m]\varphi=[M]$

* $w_1^2=\dfrac{k_{ii}}{M_{ii}}$ به دلیل اینکه ماتریس M و K قطری شده φ ها تاثیر ... استفاده از ماتریس ها امکان کند.

معادلات سازه در صفحه: ← ۳ درجه آزادی در هر طبقه ← u_x ، u_y و u_θ:



* ارتعاش آزاد: $[m]=\begin{bmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&I_o\end{bmatrix}$ $\quad [m]\begin{pmatrix}\ddot{u}_x\\\ddot{u}_y\\\ddot{u}_\theta\end{pmatrix}+[k]\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

* در زمان تحت تحریک $\ddot{u}_{gx}$ ، $\ddot{u}_{gy}$ و $\ddot{u}_{g\theta}$ باشد ،

$$[m]\ddot{u}+[k]u=-\begin{pmatrix}m\ddot{u}_{gx}\\m\ddot{u}_{gy}\\I_o\ddot{u}_{g\theta}\end{pmatrix}$$

* ⑭: پس از تشکیل ماتریس [m] و [k] بررسی کنیم که آیا معادلات وابسته هستند یا خیر. اگر جرم و سختی در یک جهت با هم متقارن باشند ، آن جهت معادله مستقل از بقیه درجه های آزادی است.

* مثلاً در این شکل سختی و جرم در راستای x متقارن است ، در راستای x مستقل هست و ماتریس 3×3 به 2×2 تبدیل می‌شود و از دترمینان $\det[[k]-w_i^2[m]]$ بقیه معادلات وابسته را حل می‌کنند.

حل معادلات سیستم چند درجه آزادی:

$[m]\ddot{u}+[k]u=1P \rightarrow$ N معادله دیفرانسیل کوپله

N معادله یک درجه آزادی ، روش حل: ② مودها ← ① تبدیل لاپلاس

$$u=\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i \Rightarrow \begin{cases}M_n\ddot{q}_n(t)+K_n q_n(t)=\boxed{\varphi_n^T 1P}\rightarrow 1P\\ n=1,2,\dots,N\end{cases}$$

حال با توجه به این که در کدام یک از حالت های ① ارتعاش آزاد ② بارهارمونیک ③ تحت شتاب زمین باشیم این معادله را حل می‌کنیم.

① ارتعاش آزاد: $P=0 \quad u(0)=u_0 \quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$

$$q_n(0)=\frac{\varphi_n^T[m]u_0}{\underbrace{\varphi_n^T[m]\varphi_n}_{M_{nn}}} \qquad \dot{q}_n(0)=\frac{\varphi_n^T[m]\dot{u}_0}{\underbrace{\varphi_n^T[m]\varphi_n}_{M_{nn}}}$$

n مود ، n مود

⇒ در نهایت $q_n(t)=q_n(0)\cos(w_n t)+\dfrac{\dot{q}_n(0)}{w_n}\sin w_n(t)$ تابع زمانی مود n ام

در نهایت: ← جایگذاری در بیان u

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_N\end{pmatrix}=q_1(t)\varphi_1+q_2(t)\varphi_2+\dots q_n(t)\varphi_n$$

② بارهارمونیک: $1P\begin{pmatrix}P_0\sin\Omega t\\0\end{pmatrix}$ ، $\cos\Omega t$

$$M_n\ddot{q}_n(t)+K_n q_n(t)=\boxed{\varphi_n^T 1P}$$

با در نظر گرفتن ⊕ و جواب هم که جنس بالا هست ، از پاسخ خاص $q_n(t)$ را پیدا می‌کنیم.

$$q_n(t)=\frac{P_0}{K_{nn}}\times\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{w_n}\right)^2}\ \begin{matrix}\sin\Omega t\ ①\\\cos\Omega t\ ②\end{matrix}$$

③ تحت تحریک زمین $\ddot{u}_g$: ضریب مشارکت ⑭

$$[m]\ddot{u}+[k]u=-[m]\cdot 1r\ddot{u}_g \Rightarrow M_n\ddot{q}_n(t)+k_nq_n=-(\underbrace{\varphi_n^T[m]\cdot 1r}_{L_n})\ddot{u}_g$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_n(t)+w_n^2q_n(t)=-\frac{L_n}{M_n}\ddot{u}_g \quad \Gamma_n \Rightarrow q_n(t)=\frac{P_0 \rightarrow -\Gamma_n\ddot{u}_g}{K_n}(1-\cos w_n t)$$

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N} q_n(t)\varphi_n \rightarrow \begin{matrix}u_{1max}\ ?\\u_{2max}\ ?\\\vdots\\u_{Nmax}\ ?\end{matrix} \rightarrow$$ ۲ راه وجود دارد

① $u_{max}=q_1\varphi_{11}+q_2\varphi_{21}+\dots q_n\varphi_n \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial t}=0 \rightarrow t_r \rightarrow u_{max\,r}$ ← دقیق

② $u_{1max}=\sqrt{(\varphi_1q_{1max})^2+(\varphi_{12}q_{2max})^2+\dots+(\varphi_{1N}q_{nmax})^2}$ → جمع برداری (اگر جهت بردارها متفاوت بودند)

حالت کلی $(u_i)_{max}=\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\varphi_{ij}(q_j)_{max})^2}$

طیف:

① سیستم یک درجه آزادی: $\ddot{u}+2\zeta w_n\dot{u}+w_n^2u=-\ddot{u}_g \rightarrow u(t)=u(t,T_n,\zeta)$

شبه شتاب: $f_s=k\,u_{max} \quad w_n^2=\frac{k}{m} \rightarrow f_s=m\underbrace{(w_n^2u_{max})}_{A} - \frac{A}{g}w$ ← ضریب زلزله

$A=w_n^2u_{max}$ ← شبه شتاب بیان از زمان است ، در نتیجه ... محاسبه شود.

* شبه سرعت:
انرژی سازه

$U=\frac{1}{2}Ku_{max}^2=\frac{1}{2}m(\underbrace{w_nu_{max}}_{\text{شبه سرعت }(V)})^2\to\frac{1}{2}mV^2$

$U=\int\frac{1}{2}\sigma\epsilon\, dv$

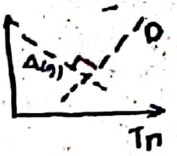
$*A=w_nV=w_n^2D$

اثرات زلزله حوزه نزدیک: ۱- داشتن انرژی زیاد در مدت زمان کم ۲- سازه اجازه p مانند نمی‌تواند ۳- زلزله قائم داریم ← ستون‌ها از منحنی اندرکنش P-M سریع‌تر خارج شوند. ۴- امواج زلزله بالا ← داشتن زمان‌های تناوب بالا به سازه کز زمان تناوب طبیعی کم دارد ← جابجایی نوک ۲ برابر می‌شود ۵- غالب بودن مودهای بالاتر ارتعاش

منحنی طیف:

$V=w_nD=\frac{2\pi}{T_n}D\to\log V=\log 2\pi-\log T_n+\log D$

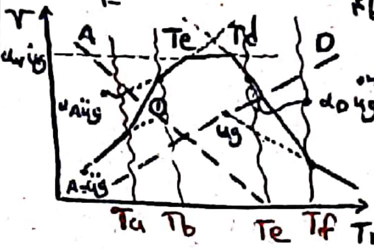
$V=\frac{A}{w_n}=\frac{T_n}{2\pi}A\to\log V=\log T_n-\log 2\pi+\log A$



طیف پاسخ: از میانگین‌گیری از طیف زلزله‌های مختلف و با در نظر گرفتن یک σ به دست می‌آید

$\mu+\alpha\sigma$ → سازه معمولی (۵۰٪) $\mu+\alpha\sigma$ → سازه نیروگاه (۸۴٪)

ساخت طیف پاسخ: (الاستیک)



Ta Tb Te Tf از اطلاعات آماری به دست آمده و u_g $\dot{u}_g$ و $\ddot{u}_g$ را از زلزله داریم.

با توجه به میرایی و انتخاب حالت μ یا μ+σ مقادیر α_D α_V α_A محاسبه می‌شوند
سپس Te و Td محاسبه می‌شوند

ضرایب تقویت ① حالت گسسته ← جداول

ζ	μ			μ+σ		
	α_A	α_V	α_D	α_A	α_V	α_D
۱	۳٫۲۱	۲٫۳۱	۱٫۸۲	۴٫۳۸	۳٫۳۸	۲٫۷۳
۲	۲٫۷۴	۲٫۰۳	۱٫۶۳	۳٫۶۶	۲٫۹۲	۲٫۴۲
۵	۲٫۱۲	۱٫۶۵	۱٫۳۹	۲٫۷۱	۲٫۳۰	۲٫۰۱
۱۰	۱٫۶۴	۱٫۳۷	۱٫۲۰	۱٫۹۹	۱٫۸۴	۱٫۶۹
۲۰	۱٫۱۷	۱٫۰۸	۱٫۰۱	۱٫۲۶	۱٫۳۷	۱٫۳۸

② حالت پیوسته:

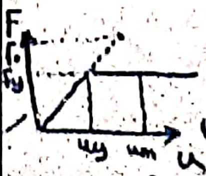
	μ	μ+σ
α_A	۳٫۲۱ − ۰٫۶۸ Ln ζ	۴٫۳۸ − ۱٫۰۴ Ln ζ
α_V	۲٫۳۱ − ۰٫۴۱ Ln ζ	۳٫۳۸ − ۰٫۶۷ Ln ζ
α_D	۱٫۸۲ − ۰٫۲۷ Ln ζ	۲٫۷۳ − ۰٫۴۵ Ln ζ

برای زمین سفت ← با داشتن $\dot{u}_g$ و u_g از روی $\ddot{u}_g$

① $\frac{\dot{u}_{g0}}{(\ddot{u}_g)}$ = ۴۸ in/sec (g)   (۳۰)   ③ g واحد آمریکایی برابر ۳۸۶

② $\frac{(\ddot{u}_g)\times u_{g0}}{(\dot{u}_g)^2}=6$ ④ واحد g را ۳۸۶ باید در نظر بگیریم

* طیف ۱ - فقط الاستیک است چون زمین کاملا الاستیک است اگر $\ddot{u}=\ddot{u}_g$ باشد تمام ... را در نظر بگیریم.



* زمین آبرفتی ۲۸ و طیف ζ=۵٪ در نظر باشد.

$R=\frac{f_0}{f_y}$ ضریب رفتار ، $\frac{u_m}{u_y}$ = ضریب شکل‌پذیری (μ)

جابجایی ... ضریب رفتار ... الاستیک و بدون ... R ... باید یکی باشد.

---

② استفاده از طیف برای سیستم چند درجه آزادی:

$\ddot{D}+w_n^2D=\ddot{u}_g$ → یک درجه آزادی

$\ddot{q}_n(t)+w_n^2D=-\Gamma_n\ddot{u}_g$ → چند درجه آزادی

زلزله یکسان

$\Rightarrow q_n(t)=\Gamma_nD(t)$ → پاسخ‌ها Γ_n برابر سیستم یک درجه آزادی می‌باشند.

$u(t)=\overbrace{\Gamma_1D_1(t)}^{q_1(t)}\varphi_1+\overbrace{\Gamma_2D_2(t)}^{q_2(t)}\varphi_2+\dots+\Gamma_nD_n(t)\varphi_N$ → N بار از طیف استفاده می‌کنیم

$T_1\to$ طیف $\to D_1$

$$\begin{pmatrix}u_{1max}\\u_{2max}\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left((\Gamma_1D_1\varphi_{11})^2+(\Gamma_2\varphi_{12}D_2)^2+\dots(\Gamma_n\varphi_{1N}D_N)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\\left((\Gamma_2\varphi_{21}D_2)^2+(\Gamma_2\varphi_{22}D_2)^2+\dots(\Gamma_n\varphi_{2N}D_N)^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

آی طبقه ام   جابجایی مد ۲ از طیف با توجه به

تعیین برش دینامیکی:

$F_i=[K]u_i=(\underbrace{\Gamma_i[m]\varphi_i}_{S_i=\text{جرم مودی}})(\underbrace{w_i^2D_i}_{A_i})$ $V_i=(\sum S_i)\times A_i$

L_i زیر مجموعه‌ای از مود i

A_i: (شبه شتاب) (شتاب مود i)

به کار روش استفاده می‌شود اگر از طیف استفاده کنیم شتاب زمین برابر A_i خواهد در ... دلیل
اگر از طیف استفاده کنیم با داشتن مودها باید T_i را پیدا کنیم سپس D_i و A_i پیدا می‌شود

$m^*_i=\sum S_i$ جمع S_i ها یک عدد مشخص ... m^* آن مود را مشخص می‌کند

$V_i=A_i\Gamma_iL_i=(\boxed{\Gamma_iL_i})A_i=\boxed{\frac{(L_i)^2}{M_{ii}}}A_i$

$\boxed{\Gamma_iL_i}\to m^*_i$ $\frac{(L_i)^2}{M_{ii}}\to m^*_i$

$*$ جرم مودی $=\Gamma_iL_i=\frac{L_i^2}{M_{ii}}$ $*\ \sum_{i=1}^{N}m_i=\sum_{i=1}^{N}m^*_i$

* مجموع این محاسبات برای حالتی است که درجه‌های آزادی دارای حرکت زمین باشند

$M_i=\sum(f_i)_jh_j$

$M_i=m^*_ih^*_iA_i$

① از روابط برش پایه‌ها ← m^* محاسبه می‌شود

② از روابط لنگرها ← h^* محاسبه می‌شود

(حداقل)
معمول

$\sum_{i=1}^{O}=0{,}9\sum_{i=1}^{N}m_i$ → باید یک تعداد N طبقه‌ای مودها را حساب می‌کنیم
تعداد مودهایی را حساب می‌کنیم که جمع جرم‌هایشان ۰٫۹ کل جرم بشود.

* هر چه مود بالاتر می‌رود مقدار h^* کمتر می‌شود به دلیل ... امواج

نکته مهم: ابتدا برش پایه را برای هر مود حساب می‌کنیم سپس برای یافتن V_{max} مجذور مربعات برش پایه‌ها، مودهای مختلف را با هم جمع می‌کنیم (RSS)

$V_{max}=\sqrt{(m^*_1A_1)^2+(m^*_2A_2)^2+\dots(m^*_nA_n)^2}$

* چرا این کار جبر برش کمتر شود ← ... مستقل‌اند

* به اثبات زمان‌های تناوب را (RSS) ... نیز ... زیاد می‌شود.

* درصد مشارکت مود i ام:

$\frac{m^*_i}{\sum m^*}=$ درصد مشارکت مود i