



پاسخنامه تشریحی 

سؤالات تحلیل سازه‌ها

کنکور کارشناسی ارشد

مهندسی عمران ۱۴۰۲

پیمان رجاییان

اسفندماه ۱۴۰۱



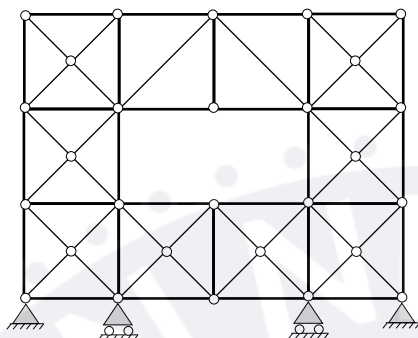
۵۱- تعداد درجه نامعینی خرپای زیر کدام است؟

12 (۱)

13 (۲)

14 (۳)

15 (۴)



حل: گزینه «۳» صحیح است. مبحث درجه نامعینی خرپا - سطح سؤال: بسیار ساده

- درجه نامعینی خرپای مسطح: اگر تعداد اعضای خرپا برابر M ، تعداد کل گره‌ها برابر N و تعداد عکس-العمل‌های تکیه‌گاهی برابر R باشد، درجه نامعینی خرپا از رابطه زیر به دست می‌آید:

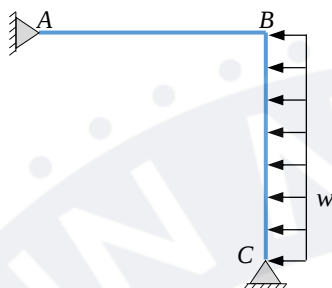
$$D.I. = M + R - 2N$$

$$\begin{cases} M = 64 \\ R = 6 \\ N = 28 \end{cases} \rightarrow D.I. = 64 + 6 - 2(28) = 14$$

یادآوری: برای محاسبه درجه نامعینی خرپای فضایی، با توجه به اینکه در هر عضو خرپا یک نیروی مجهول داریم و در هر گره خرپا می‌توان سه معادله تعادل نیرو نوشت، درجه نامعینی خرپا از رابطه زیر به دست می‌آید:

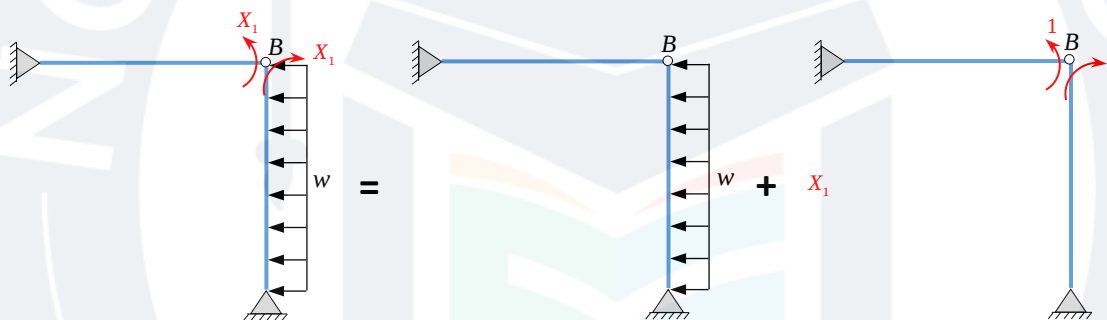
$$D.I. = M + R - 3N$$

۵۲- برای حل سازه نامعین زیر به روش نرمی، گره B مفصل کرده‌ایم- ضریب نرمی مربوطه چه ضریبی از $\frac{L}{EI}$ است؟ (طول هر دو عضو و صلبیت خمشی آنها به ترتیب L و EI است)

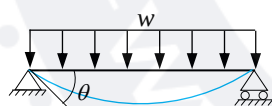


- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) 1
(۴) 2

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است. مبحث تحلیل سازه‌های نامعین (روش نرمی) - سطح سؤال: متوسط
با توجه به اینکه سازه یک درجه نامعین است، لنگر خمشی داخلی اتصال B را به عنوان مجهول اضافی^۱ در نظر گرفته و سازه را به روش نیرو (نرمی) تحلیل می‌کنیم.



✓ یادآوری روابط تیرهای پایه مورد نیاز در حل تست:



$$\theta = \frac{wL^3}{24EI}$$



$$\theta = \frac{ML}{3EI}$$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0$$

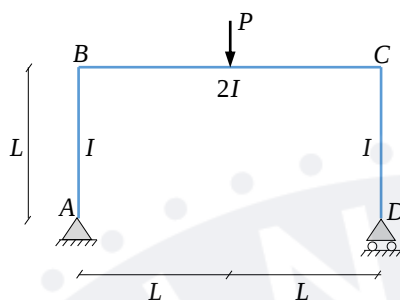
$$\Delta'_1 = (\Delta\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{m_1^2 dx}{EI} = (\Delta\theta_B)_2 = \frac{L}{3EI} - \left(-\frac{L}{3EI}\right) = \frac{2L}{3EI} \rightarrow \delta_{11} = \frac{2L}{3EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta'_1}{\delta_{11}} = -\frac{wL^3}{24EI} \times \frac{3EI}{2L} = -\frac{wL^2}{16}$$

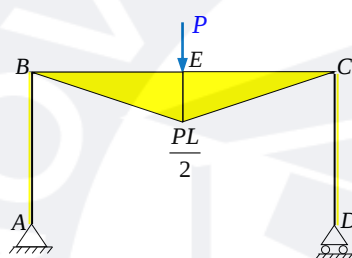
¹ Redundancy

۵۳- نقطه محل اثر بار P پس از بارگذاری به چه ضریبی از $\frac{PL^3}{EI}$ به تکیه‌گاه D نزدیک یا از آن دور می‌شود؟

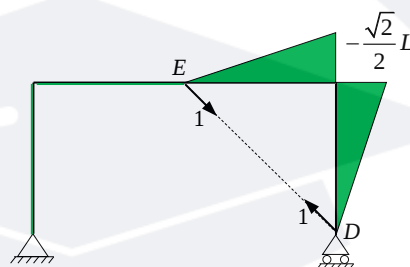


- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{12}$
 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{24}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{48}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{96}$

حل: گزینه «۳» صحیح است. مبحث کار مجازی قاب - سطح سؤال: ساده



سازه تحت بارگذاری حقیقی



سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

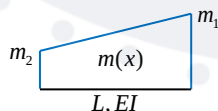
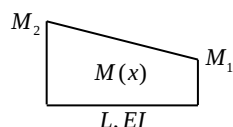
$$1 \times \delta_{E/D} = \int_L \frac{mMdx}{EI} = \frac{PL}{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} L \right) \times L \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2EI} = -\frac{\sqrt{2}}{48} \frac{PL^3}{EI}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نقاط E و D از یکدیگر دور می‌شود.

📖 درسنامه:

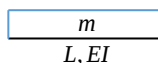
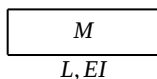
در محاسبه $\int_L \frac{M(x)m(x)dx}{EI(x)}$ در صورتی که نمودارهای لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی و بارگذاری مجازی هر دو به صورت خطی باشند و صلبیت خمشی در طول عضو ثابت باشد، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود که توصیه می‌شود دانشجویان آن را حفظ کنند چون همه حالات خطی را پوشش می‌دهد.

$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{L}{6EI} [2M_1m_1 + 2M_2m_2 + M_1m_2 + M_2m_1]$$



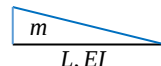
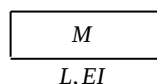
☑ حالات خاص:

- ضرب مستطیل در مستطیل:



$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{EI}$$

- ضرب مستطیل در مثلث:



$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{2EI}$$

- ضرب مثلث در مثلث (حالت هم فاز):



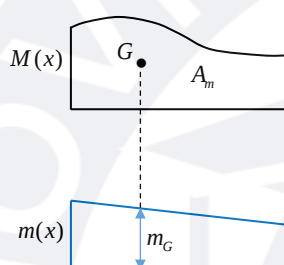
$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{3EI}$$

- ضرب مثلث در مثلث (حالت غیر هم فاز):



$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{MmL}{6EI}$$

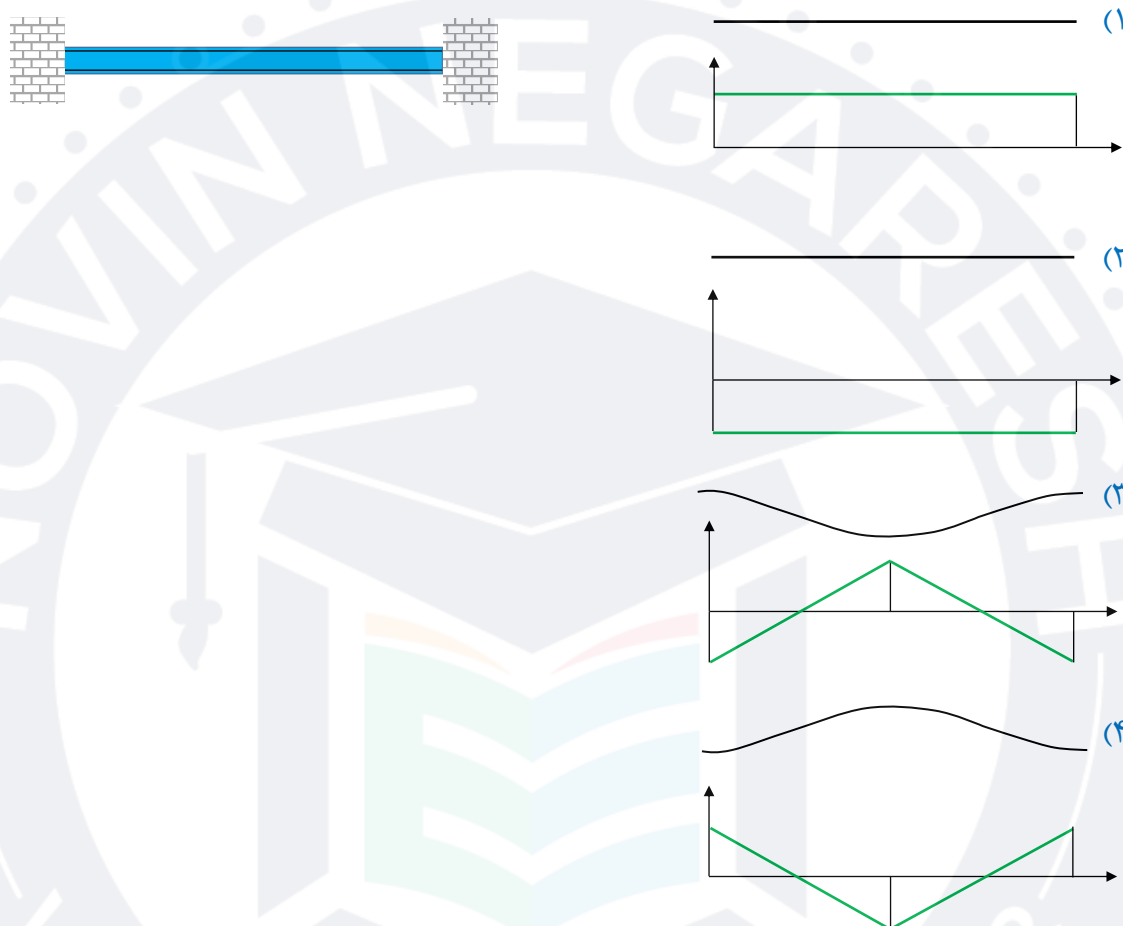
در حالت کلی در تیرهای با مقطع ثابت، نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی هر شکلی می‌تواند داشته باشد ولی دیاگرام لنگر خمشی ناشی از بارگذاری مجازی حداکثر می‌تواند از دو قطعه خط مستقیم تشکیل شود. در این حالت از فرمول زیر که به **فرمول مور** معروف است استفاده می‌نماییم.



$$\int_0^L \frac{M(x)m(x)dx}{EI} = \frac{A_m \times m_G}{EI}$$

در این رابطه A_m مساحت زیر نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی و m_G عرض نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری واحد مجازی در محل مرکز سطح نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی است.

۵۴- تیری مطابق شکل بین دو تکیه‌گاه گیردار قرار گرفته است- دمای سطح فوقانی آن افزایش و همزمان دمای سطح تحتانی آن به همان میزان کاهش می‌یابد. منحنی تغییر شکل و نمودار لنگر خمشی ایجاد شده در تیر تحت بارگذاری حرارتی به ترتیب کدام است؟ (اگر تقعر تیر به سمت بالا باشد، لنگر خمشی مثبت خواهد بود)

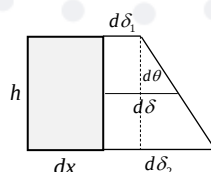
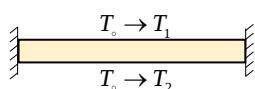


حل: تست ابهام دارد. طراح محترم می‌بایست عنوان می‌کرد که میزان افزایش و کاهش دمای تارهای بالا و پایین مقطع یکسان است. با اصلاح صورت تست به حل آن می‌پردازیم.

📖 درسنامه:

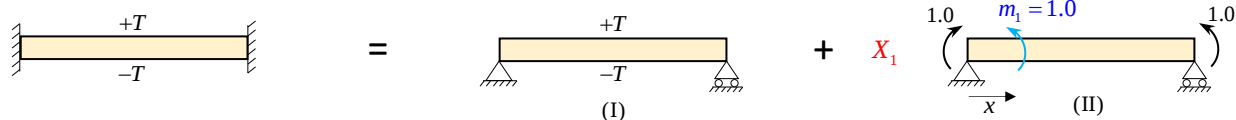
رابطه عمومی کار مجازی در تیرها:

$$W_E = W_I \rightarrow 1 \times \Delta + W_R = \int_L n d\delta + m d\theta + v d\lambda + t d\phi$$



$$d\delta = \frac{d\delta_1 + d\delta_2}{2} = \alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right)$$

$$\begin{cases} d\delta_1 = \alpha(T_1 - T_0)dx \\ d\delta_2 = \alpha(T_2 - T_0)dx \end{cases} \rightarrow d\theta = \frac{d\delta_2 - d\delta_1}{h} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx \rightarrow d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx$$



$$y = y_I + y_{II}$$

$$(I) \rightarrow d\theta = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} dx \xrightarrow{T_1 = +T, T_2 = -T} d\theta = \frac{\alpha(-T - T)}{h} dx = -\frac{2\alpha T}{h} dx$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = y_I'' = -\frac{2\alpha T}{h}$$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta'_1 = \int_L m d\theta = \int_0^L \frac{m_1 \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} = -\frac{2\alpha TL}{h}$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{m_1^2 dx}{EI} = \frac{L}{EI} \rightarrow X_1 = -\frac{\Delta'_1}{\delta_{11}} = \frac{2\alpha TEI}{h} = M = EI y_{II}'' \rightarrow y_{II}'' = \frac{2\alpha T}{h}$$

$$y'' = y_I'' + y_{II}'' = -\frac{2\alpha T}{h} + \frac{2\alpha T}{h} = 0$$

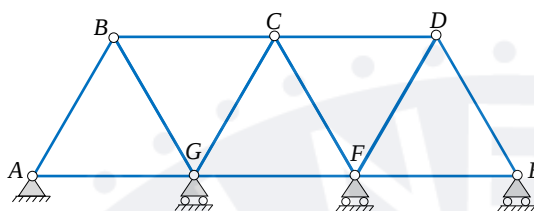
$$y' = A \rightarrow y = Ax + B$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$M = \frac{2\alpha TEI}{h} = \text{Const.}$$

نتیجه می‌گیریم که تیر تحت این بارگذاری حرارتی، تغییر شکل نداشته (انحنای آن صفر است) و لنگر خمشی در طول آن ثابت و مقدار آن مثبت است. بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

۵۵- در خرپای زیر می‌دانیم که تکیه‌گاههای F و G هر یک به میزان Δ نشست کرده‌اند- طول و صلبیت محوری تمامی اعضای این خرپا به ترتیب با L و EA است- اندازه نیروی محوری ایجاد شده در عضو AB تحت تأثیر چنین نشستی بر حسب $\frac{EA\Delta}{L}$ کدام است؟



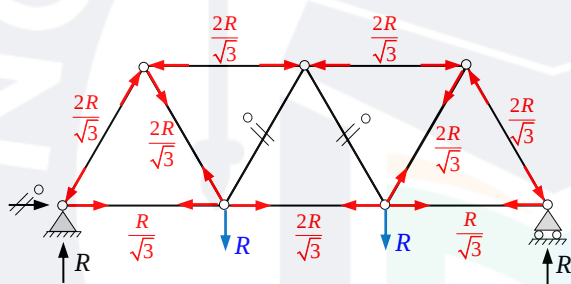
(۱) $\frac{2\sqrt{3}}{13}$

(۲) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{13}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث روشهای انرژی - سطح سؤال: متوسط
مسئله را می‌توان به روش‌های مختلف تحلیل سازه‌ها حل نمود. در اینجا از روش کار حقیقی که روشی سریع و کارآمد به نظر می‌رسد استفاده می‌نماییم.

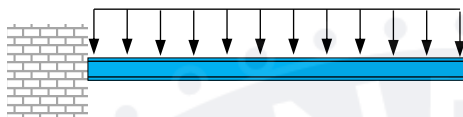


$$W_E = W_I$$

$$\frac{1}{2} R\Delta_0 + \frac{1}{2} R\Delta_0 = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2E_i A_i} \rightarrow R\Delta_0 = \frac{L}{2EA} \left[7 \left(\frac{2R}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \left(\frac{R}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{30R^2 L}{6EA} \rightarrow R = \frac{EA\Delta_0}{5L}$$

$$F_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{EA\Delta_0}{5L} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \frac{EA\Delta_0}{L}$$

۵۶- تیر شکل زیر دارای مقطع مستطیل شکل است- طول این تیر ۱۰ برابر ارتفاع مقطع آن است و از مصالحی دارای نسبت پواسون $\nu = 0.25$ ساخته شده است- نسبت سهم تغییرشکل برشی به تغییرشکل خمشی در تغییرمکان عمودی پدید آمده در انتهای آزاد تیر کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{250}$
 (۲) $\frac{1}{144}$
 (۳) $\frac{1}{120}$
 (۴) $\frac{1}{100}$

حل: گزینه «۴» صحیح است. مبحث تغییر شکل سازه‌ها - سطح سؤال: ساده
 برای حل تست از روش کار مجازی (بار واحد) استفاده می‌نماییم.

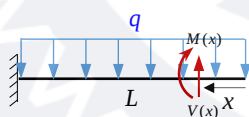
$$1 \times \Delta = \int_L \frac{mMdx}{EI} + \int_L \frac{f_s v V dx}{GA}$$

$$f_s = 1.2$$

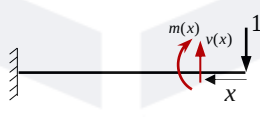
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0.25)} = 0.4E$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{(-x)(-qx^2/2)dx}{EI} + \int_0^L \frac{1.2 \times 1.0 \times qx dx}{GA} = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{3qL^2}{5GA}$$

$$\xrightarrow{L=10h} \Delta = \frac{q(10h)^4}{8EI} + \frac{3q(10h)^2}{5GA} \xrightarrow{\substack{I=\frac{bh^3}{12} \\ G=0.4E}} \Delta = \frac{3q \times 10^4 \times h}{2Eb} + \frac{150qh}{Eb} \rightarrow \frac{\Delta_s}{\Delta_b} = \frac{1}{100}$$



سازه تحت بارگذاری حقیقی

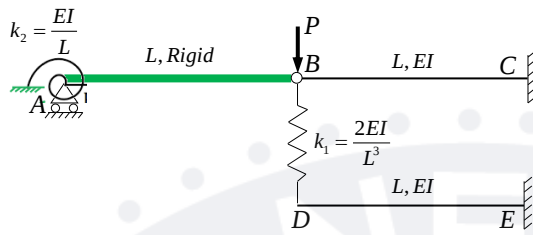


سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

$$\begin{cases} M(x) = -\frac{qx^2}{2} \\ V(x) = qx \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(x) = -x \\ v(x) = 1 \end{cases}$$

۵۷- در سازه شکل زیر، تغییر مکان گره B چه ضربی از $\frac{PL^3}{EI}$ است؟ (قطعه AB صلب است)

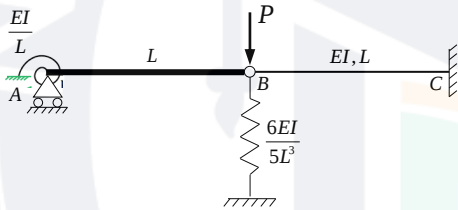


- (۱) $\frac{5}{26}$
 (۲) $\frac{6}{23}$
 (۳) $\frac{15}{23}$
 (۴) $\frac{6}{5}$

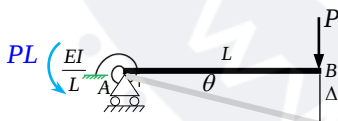
حل: گزینه «۱» صحیح است. مبحث مدلسازی با فنر - سطح سؤال: متوسط

از آنجا که نیروی فنر خطی با نیروی اعمالی به تیر الاستیک DE در نقطه D برابر است نتیجه می گیریم که فنر معادل تیر DE و فنر خطی به صورت سری رفتار می کنند. سختی فنر معادل آنها به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L^3}{2EI} \rightarrow k_{eq} = \frac{6EI}{5L^3}$$



جابجایی قائم میله صلب AB، فنر خطی و تیر الاستیک BC در نقطه یکسان بوده و بنابراین به صورت فنرهای موازی رفتار می کنند و نیروی P به نسبت سختی بین آنها توزیع می شود. برای ادامه حل، ابتدا سختی میله صلب AB در نقطه B و در راستای قائم را با توجه به تعریف سختی (نیرو لازم برای جابجایی واحد) محاسبه می نماییم.

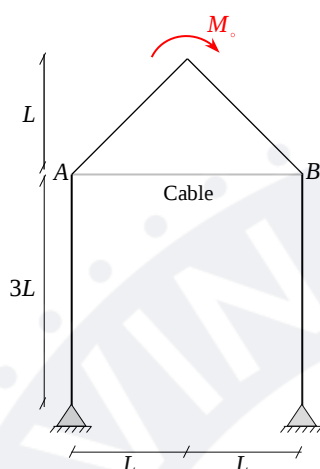


$$\begin{cases} \theta = \frac{M}{k_\theta} = \frac{PL^2}{EI} \\ \Delta = L\theta = \frac{PL^3}{EI} \xrightarrow[\substack{\Delta=1 \\ P=k}]{k} k = \frac{EI}{L^3} \end{cases}$$

$$(k_{eq})_t = \frac{EI}{L^3} + \frac{6EI}{5L^3} + \frac{3EI}{L^3} = \frac{26EI}{5L^3}$$

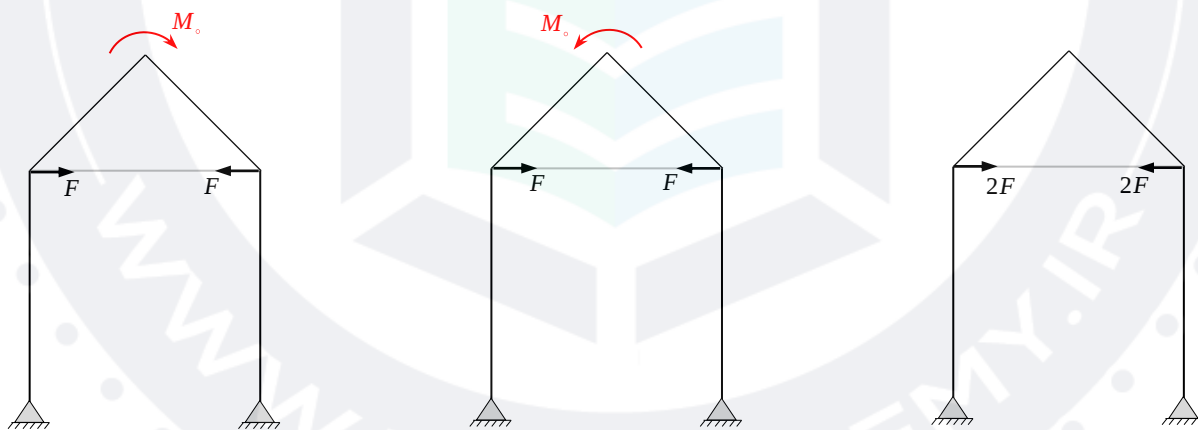
$$\Delta_B = \frac{P}{k_{eq}} = \frac{5PL^3}{26EI}$$

۵۸- در قاب زیر دوران محل اعمال لنگر M_0 بر حسب $\frac{M_0 L}{EI}$ کدام است؟ (عضو AB کابل به صلبیت محوری EA و سایر اعضاء دارای صلبیت خمشی EI هستند به طوری که $I = AL^2$)



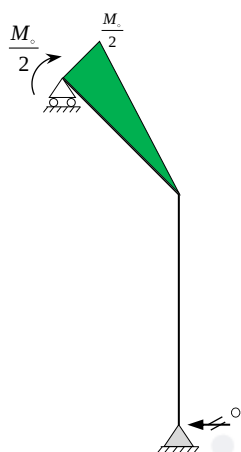
- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
(۳) $\frac{1}{12}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث کار مجازی و تقارن و پادتقارنی بارگذاری - سطح سؤال: متوسط
با توجه به اینکه سازه متقارن و بارگذاری متقارن معکوس (پادمتقارن) است نتیجه می گیریم که نیروی کابل صفر است. این موضوع را می توان به صورت زیر اثبات نمود.
فرض کنیم نیروی کابل برابر F باشد، چنانچه از پشت صفحه به سازه نگاه کنیم سازه (۲) را خواهیم داشت که اگر با سازه (۱) جمع آثار شود به سازه (۳) با بارگذاری صفر می رسیم در حالی که در آن نیروی کابل برابر $2F$ است که این ممکن نیست. بنابراین نیروی کابل باید صفر باشد.

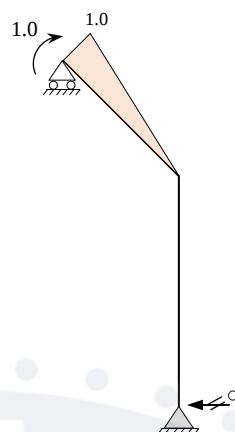


$$2F = 0 \rightarrow F = 0$$

بنابراین کابل را حذف کرده و نصف سازه را با شرایط مرزی مناسب در نظر گرفته و از روش کار مجازی استفاده می نماییم.



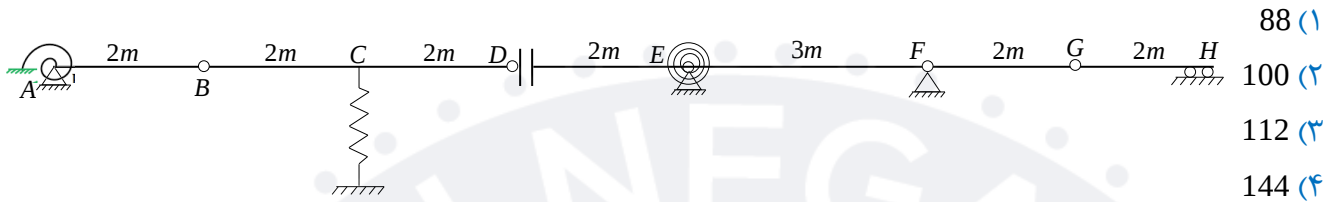
سازه تحت بارگذاری حقیقی



سازه تحت بارگذاری واحد مجازی

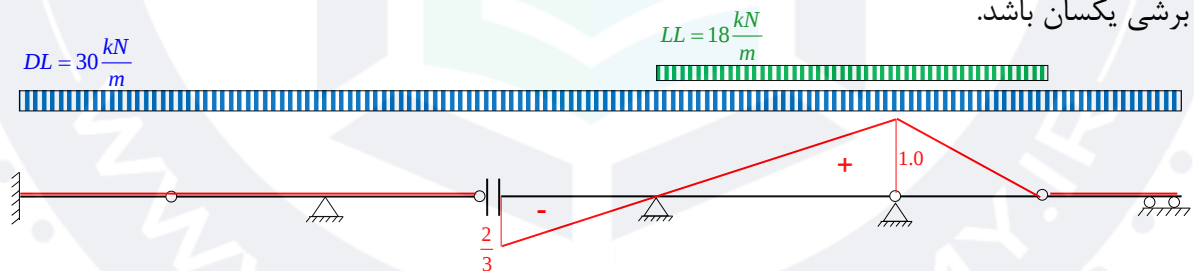
$$1 \times \theta = \int_L \frac{mMdx}{EI} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{M_o}{2} \times 1.0 \times \sqrt{2}L \right) = \frac{\sqrt{2}M_o L}{6EI}$$

۵۹- در تیر زیر حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه F بر حسب kN تحت بار مرده در سراسر طول تیر به شدت $30 \frac{kN}{m}$ و بار زنده دارای طول دلخواه به شدت $18 \frac{kN}{m}$ کدام است؟ (فتر پیچشی در گره E به تیرهای سمت چپ و راست خود متصل است)



حل: گزینه «۲» صحیح است. مبحث خط تأثیر - سطح سؤال: متوسط

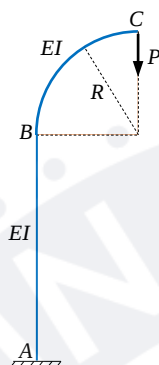
با توجه به اینکه تیر معین است، سختی فنرهای خطی و دورانی در محاسبه تلاش‌های داخلی نقشی نداشته و می‌توان آنها را در حالت حدی در نظر گرفت. بدین ترتیب که اگر سختی فتر خطی به سمت بینهایت میل کند می‌توان آن را با تکیه‌گاه غلتکی (مفصلی) در نقطه C جایگزین نمود. چنانچه سختی فتر دورانی در تکیه‌گاه A به سمت بینهایت میل کند، مقدار شیب در این تکیه‌گاه برابر صفر شده و می‌توان آن را به صورت تکیه‌گاه گیردار مدل نمود. همچنین اگر سختی فتر دورانی در تکیه‌گاه E که مطابق صورت تست به تیرهای سمت چپ و راست خود متصل است به سمت بینهایت میل کند، اختلاف شیب در دو طرف مفصل خمشی E برابر صفر شده و بدین معنی است که تیر به صورت پیوسته از روی تکیه‌گاه E عبور کرده است. پس از رسم خط تأثیر، برای بارگذاری می‌بایست به این نکته توجه داشته باشیم که بار مرده (دائمی) در سراسر تیر حضور دارد ولی بار زنده باید در دهانه‌هایی قرار گیرد که کمیت مورد نظر ماکزیمم شود. نکته مهم در رسم خط تأثیر این مسأله آن است که در سمت چپ مفصل برشی، یک مفصل خمشی قرار دارد که سبب می‌شود کار انجام شده توسط لنگر خمشی صفر شود. بنابراین در این حالت لزومی ندارد که شیب دو طرف مفصل برشی یکسان باشد.



$$(R_F)_{\max} = \frac{1 \times 5}{2} (30) - \frac{2}{3} (30) + 18 \times \frac{5}{2} = 100 kN$$

۶۰- تغییر مکان قائم نقطه C تحت اثر بار P کدام است؟ (طول عضو AB برابر 2R است- ربع دایره و

ارتفاع مقطع تیر در مقایسه با R بسیار کوچک است)



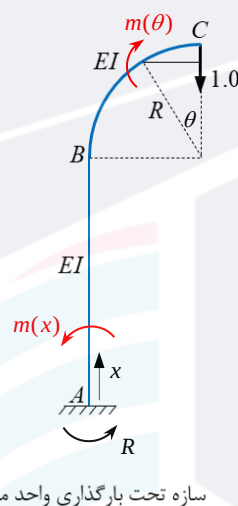
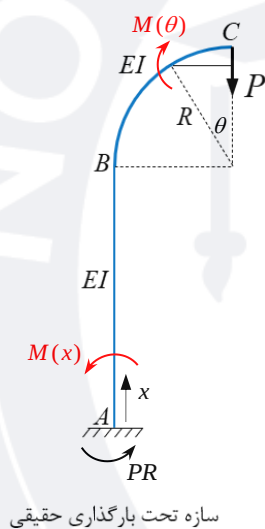
$$\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \frac{PR^3}{EI} \quad (۱)$$

$$(\pi - 1) \frac{PR^3}{EI} \quad (۲)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \frac{PR^3}{EI} \quad (۳)$$

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) \frac{PR^3}{EI} \quad (۴)$$

کحل: گزینه «۴» صحیح است. مبحث کار مجازی قاب - سطح سؤال: ساده



$$\begin{cases} M(x) = -PR \\ m(x) = -R \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\theta) = -PR \sin \theta \\ m(\theta) = -R \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 \times \delta_{VC} &= \int_0^L \frac{m(x)M(x)dx}{EI} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m(\theta)M(\theta)ds}{EI} \\ &= \int_0^{2R} \frac{(-R)(-PR)dx}{EI} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-R \sin \theta)(-PR \sin \theta)Rd\theta}{EI} \\ &= \frac{2PR^3}{EI} + \frac{PR^3}{EI} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} + 2\right) \frac{PR^3}{EI} \end{aligned}$$

با احترام و آرزوی توفیق روز افزون

پیمان رجاییان

نیمه شعبان ۱۴۰۱

به نوبه خود و ستم غریزم در کوه نمکینک جلالت (آقای مندرس سامعچی و آقای مندرس رشید)

بابت زحمت و تلاش بی نظیر و وقف در طول یک سال کشت و قدر طریغ نمایم.