

آزمایشگاه مقاومت مصالح

گزارش آزمایش شماره ۱

خمش تیرهای مستقیم

۹۴/۸/۲۷

G2 گروه

اعضای گروه:

- ۱- علی آماده
- ۲- حسین باشی
- ۳- سروش حبیبی
- ۴- یاسین ساقیان

نیمسال اول ۹۴-۹۵

دانشکده مهندسی مکانیک

پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

برگه آزمایش

شماره آزمایش	1	نام آزمایش	خمش لیزهای مستقیم - تحقیق اصل دو طرفه ماکسول
تاریخ انجام آزمایش	۱۷, ۸, ۱۴	تعداد جانسیرین	۲
نام و نام خانوادگی	میزان ناخبر (دقیقه)	نام و نام خانوادگی	میزان ناخبر (دقیقه)
نام و نام خانوادگی		نام و نام خانوادگی	

جنس لیز	m(kg)	$\delta_1(0.01mm)$ در دو انتهای لیز	$\delta_2(0.01mm)$ در فاصله 1/3 از دو سر تکیه گاهها	$\delta_{12}(0.01mm)$ در 120م از یک تکیه گاه - آزمایش ماکسول	$\delta_{21}(0.01mm)$ در وسط لیز - آزمایش ماکسول	$\delta_{12}(mm)$ (توری) در 120م از یک تکیه گاه	$\delta_{21}(mm)$ (توری) در وسط لیز
AL	0.5						
	1						
	1.5						
	2						
	2.5						
	3						
	3.5						
	4						
	4.5						
	5						
BRASS	0.5						
	1						
	1.5						
	2						
	2.5						
	3						
	3.5						
	4						
	4.5						
	5						
CUPPER	0.5	18	5	5	5		
	1	35	11	11	11		
	1.5	50	17	17	17		
	2	72	24	24	24		
	2.5	87	29	29	29		
	3	99	34	34	34		
	3.5	110	39	39	39		
	4	121	44	44	44		
	4.5	138	51	51	51		
	5	150	59	59	59		
STEEL	0.5	50	11	11	11		
	1	100	22	22	22		
	1.5	150	33	33	33		
	2	200	44	44	44		
	2.5	250	55	55	55		
	3	300	66	66	66		
	3.5	350	77	77	77		
	4	400	88	88	88		
	4.5	450	99	99	99		
	5	500	110	110	110		

موارد مورد نیاز دیگر جهت اندازه گیری: 1- طول لیز 2- فاصله بین دو تکیه گاه 3- عرض اویزها و عرض بست ها بر این گیر کردن طول کل لیز از دو عرض بست یک عرض اویز در حالت بار گذاری در دو انتها 4- اندازه گیری فاصله 120 میلیمتری از یکی از تکیه گاه ها برای فرامیادین وساخت و اویز در آزمایش های ماکسول 5- دقت کولیس 6- تعداد سطح مقطع لیزها

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۸/۱۷
محل مهر: _____

گزارش مختصر

آزمایشگاه مقاومت مصالح

دانشکده مهندسی مکانیک

نام آزمایش: خمش تیرهای مستقیم

تاریخ: ۹۴، ۱، ۲۷ شماره گروه:

شماره گروه:

۱. شرح دستاوردهای مهم آزمایش

[illegible]

2. منابع احتمالی خطا

[illegible]

3. چه روشی را برای سنجش عملی شیب در یک نقطه پیشنهاد می دهید؟

استوار عالی که در این مقام بود و به واسطه آنکه در این مقام بود و به واسطه آنکه در این مقام بود

4. اصل دو طرفه ماکسول چیست و چگونه می توان آن را در عمل تحقیق نمود؟

[illegible]

در واقع از جایش درم که با استفاده از نوسان و تقسیم علی اندازه گیریم بر جایش (میزان) نقطه A از اندازه گیرنده (میزان) اصل به واسطه از جایش تحقیق شد.

برگه نمره

آزمایش شماره ۱

خمش تیرهای مستقیم

سرپرست آزمایش:

ریز نمرات

شرح موضوع	نمره خام	حداکثر نمره
مقدمه		۳
تئوری		۲
شرح آزمایش		۱۰
نتایج آزمایش		۲۰
بحث و بررسی نتایج آزمایش		۲۵
جمع بندی و نتیجه گیری		۵
مراجع و ضمائم		۱۰
گزارش مختصر		۲۵
جمع کل		۱۰۰

نمره گزارش

نمره خام	ضریب تصحیح	نمره

نمره افراد

نام	تاخیر	نمره نهایی
۱ علی آماده	-	
۲ حسین باشی	-	
۳ سروش حبیبی	-	
۴ یاسین ساقیان	-	

امضا سرپرست آزمایش

فهرست مطالب

۱- مقدمه.....	۷
۲- تئوری.....	۸
۱-۲- تئوری خمش ساده.....	۸
۲-۲- اصل دوطرفه‌ی ماکسول.....	۹
۳- شرح آزمایش.....	۱۰
۱-۳- وسایل مورد استفاده در آزمایش.....	۱۰
۲-۳- نحوه‌ی انجام آزمایش.....	۱۲
۱-۲-۳- بارگذاری در دو انتهای تیر.....	۱۳
۲-۲-۳- بارگذاری به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌ها.....	۱۳
۳-۲-۳- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول.....	۱۴
۳-۳- منابع خطا.....	۱۴
۴- نتایج آزمایش.....	۱۵
۱-۴- تیر مسی.....	۱۵
۱-۱-۴- بارگذاری در دو انتهای تیر.....	۱۵
۲-۱-۴- بارگذاری بین دو تکیه‌گاه.....	۱۹
۳-۱-۴- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول.....	۲۲
۲-۴- تیر فولادی.....	۲۳
۱-۲-۴- بارگذاری در دو انتهای تیر.....	۲۳
۲-۲-۴- بارگذاری بین دو تکیه‌گاه.....	۲۶
۳-۲-۴- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول.....	۲۹
۵- بحث و بررسی نتایج آزمایش.....	۳۰
۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری.....	۳۳
۷- مراجع.....	۳۴
۸- ضمائم.....	۳۵

فهرست اشکال

- شکل ۱: تغییر شکل تیر در اثر اعمال گشتاور خمشی..... ۸
- شکل ۲: بارگذاری در دو انتهای تیر..... ۹
- شکل ۳: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌های تیر..... ۹
- شکل ۴: تحقیق اصل دو طرفه‌ی ماکسول در تیر تحت خمش خالص..... ۹
- شکل ۵: فونداسیون دستگاه انجام آزمایش..... ۱۰
- شکل ۶: ساعت موجود بر روی فونداسیون دستگاه انجام آزمایش برای تعیین میزان جابجایی وسط تیر..... ۱۰
- شکل ۷: تیرهای موجود برای انجام آزمایش بر روی آن‌ها..... ۱۱
- شکل ۸: ساعت مورد استفاده برای تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول..... ۱۱
- شکل ۹: آویز اعمال بار و بست مورد استفاده برای تثبیت آن..... ۱۲
- شکل ۱۰: نحوه‌ی بارگذاری در دو انتهای تیر..... ۱۳
- شکل ۱۱: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از هر تکیه‌گاه..... ۱۳
- شکل ۱۲: تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول به وسیله‌ی آزمایش..... ۱۴
- شکل ۱۳: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی..... ۱۷
- شکل ۱۴: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی به همراه خطوط اعتماد..... ۱۸
- شکل ۱۵: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی..... ۲۰
- شکل ۱۶: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی به همراه خطوط اعتماد..... ۲۱
- شکل ۱۷: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی..... ۲۴
- شکل ۱۸: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی به همراه خطوط اعتماد..... ۲۵
- شکل ۱۹: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی..... ۲۷
- شکل ۲۰: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی به همراه خطوط اعتماد..... ۲۸
- شکل ۲۱: بارگذاری در دو انتهای تیر..... ۳۵
- شکل ۲۲: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌های تیر..... ۳۶
- شکل ۲۳: اصل دوطرفه‌ی ماکسول در تیر نشان داده شده..... ۳۷
- شکل ۲۴: نمودار نیروی F_1 برحسب جابجایی نقطه‌ی اول..... ۳۷

فهرست جداول

جدول ۱: مقادیر اندازه‌گیری شده برای برخی از وسایل مورد استفاده در آزمایش.....	۱۵
جدول ۲: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی.....	۱۵
جدول ۳: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی.....	۱۶
جدول ۴: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در بین دو تکیه‌گاه تیر مسی.....	۱۹
جدول ۵: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی.....	۲۰
جدول ۶: نتایج حاصل از آزمایش تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول برای تیر مسی.....	۲۲
جدول ۷: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی.....	۲۳
جدول ۸: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی.....	۲۳
جدول ۹: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی.....	۲۶
جدول ۱۰: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی.....	۲۶
جدول ۱۱: نتایج حاصل از آزمایش تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول برای تیر فولادی.....	۲۹
جدول ۱۲: ضرایب همبستگی (r^2) محاسبه شده برای تیر مسی.....	۳۰
جدول ۱۳: ضرایب همبستگی (r^2) محاسبه شده برای تیر فولادی.....	۳۰
جدول ۱۴: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر.....	۳۰
جدول ۱۵: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها.....	۳۰
جدول ۱۶: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر فولادی هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر.....	۳۱
جدول ۱۷: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها.....	۳۱
جدول ۱۸: مقایسه‌ی مدول الاستیسیته‌ی به دست آمده از آزمایش و مدول الاستیسیته‌ی تئوری برای تیر مسی.....	۳۱
جدول ۱۹: مقایسه‌ی مدول الاستیسیته‌ی به دست آمده از آزمایش و مدول الاستیسیته‌ی تئوری برای تیر فولادی.....	۳۱

۱- مقدمه

در مهندسی، به میزان جابجایی یک عضو سازه‌ای تحت اثر بار، خیز گفته می‌شود که ممکن است به یک زاویه یا یک طول نسبت داده شود. اندازه‌ی خیز یک عضو در زیر بار، رابطه‌ی مستقیمی با شیب جسم تغییر شکل یافته تحت اثر آن بار دارد. این اندازه را می‌توان با انتگرال‌گیری از تابعی که شیب جسم بارگذاری شده را به صورت ریاضی توصیف می‌کند، حساب کرد. خیز به وسیله‌ی رابطه‌ی استاندارد (که تنها خیز تیرهای رایج تحت اثر بارگذاری‌های جداگانه را به دست می‌دهد) و یا به وسیله‌ی روش‌هایی همچون کار مجازی، انتگرال‌گیری مستقیم، روش کاستیگلیانو، روش مکالی، روش سختی مستقیم، روش لنگر- سطح، روش جمع آثار، روش تیر مزدوج و... به دست می‌آید. خیز یک تیر معمولاً با استفاده از رابطه‌ی تیر اولر- برنولی و خیز یک عضو صفحه‌ای یا پوسته‌ای نیز به وسیله‌ی نظریه‌ی صفحه یا پوسته محاسبه می‌شود. یکی از کاربردهای خیز، در ساختمان‌سازی است. معماران و مهندسان، مصالح را برای کارکردهای مختلفی انتخاب می‌کنند. جنس و مصالح تیرهای اسکلت ساختمان، بر اساس خیز و عوامل دیگر انتخاب می‌شوند. در این آزمایش به بررسی خمش تیرهای مستقیم می‌پردازیم تا چگونگی تغییر مکان ناشی از خمش این تیرها مشاهده شده و دیدی مهندسی از آن‌ها به دست آورد زیرا این کار باعث کمک به ما در امر طراحی می‌شود؛ درحقیقت هدف از انجام این آزمایش در ابتدا تحقیق خطی بودن تغییرات خیز تیر برحسب بار اعمالی به آن و همچنین تحقیق روابط کلاسیک خیز تیر با توجه به شکل سطح مقطع است؛ هدف دیگر از انجام این آزمایش یافتن مدول ارتجاعی تیر و تحقیق ثابت بودن آن می‌باشد؛ آخرین هدف از انجام این آزمایش نیز تحقیق درستی اصل دو طرفه‌ی ماکسول است. مراجع اصلی مورد استفاده در این آزمایش ابتدا دستور کار آزمایشگاه مقاومت مصالح و سپس کتاب‌های مقاومت مصالح نوشته‌ی بیر- جانسون و دکتر محمد حسن نایی می‌باشند.

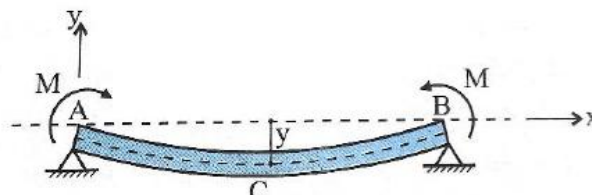
در ادامه‌ی این گزارش و در بخش دوم ابتدا در مورد چگونگی استخراج روابط مربوط به خیز تیر تحت خمش خالص توضیح داده می‌شود و پس از آن توضیحاتی در مورد اصل دوطرفه‌ی ماکسول آورده خواهد شد؛ در بخش سوم توضیحاتی در مورد چگونگی انجام آزمایش بر روی دو تیر مسی و فولادی و همچنین وسایل اندازه‌گیری مورد استفاده در انجام این آزمایش آورده می‌شود و منابع احتمالی خطا به طور خلاصه توضیح داده خواهند شد؛ در بخش چهارم به بررسی رابطه‌ی بین میزان خیز تیر و نیروی اعمالی پرداخته می‌شود و پس از آن میزان مدول الاستیسیته‌ی تیر و میزان خطای آن محاسبه خواهد شد؛ در بخش پنجم نتایج آزمایش مورد بحث و بررسی بیشتر قرار می‌گیرند و در مورد علل اختلاف بین مدول‌های الاستیسیته‌ی محاسبه شده با استفاده از دو آزمایش انجام شده و همچنین اختلاف بین آن‌ها با مدول الاستیسیته‌ی مندرج در جداول معتبره همان عوامل ایجاد کننده‌ی خطا در آزمایش می‌باشند، توضیحاتی ارائه خواهد شد.

لغات کلیدی: خیز، شیب، بار، رابطه‌ی تیر اولر- برنولی، تیر مستقیم، مدول الاستیسیته، اصل دوطرفه‌ی ماکسول.

۲- تئوری

۱-۲- تئوری خمش ساده

اگر تیری مستقیم را در نظر بگیریم که تحت گشتاور خمشی قرار گرفته باشد، در اثر خمش در تیر انحنا به وجود می‌آید که باعث تغییر مکان تیر می‌گردد. منظور از تغییر مکان تیر جابجایی جانبی محور مرکزی تیر در جهت عمود بر وضعیت اولیه‌ی آن می‌باشد. شکل زیر مقدار تغییر مکان نقطه‌ی C (y) از تیر AB را نشان می‌دهد:



شکل ۱: تغییر شکل تیر در اثر اعمال گشتاور خمشی

برای به دست آوردن تغییر مکان تیرها ابتدا معادله‌ی تغییر مکان تیر را به دست می‌آوریم. با استفاده از رابطه‌ی بین شعاع انحنا و گشتاور خمشی داریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{M(x)}{EI}$$

با به کارگیری فرمول ریاضی موجود برای انحنای تابع y داریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{y'''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

با صرف نظر کردن از y'^2 به علت کوچک بودن شیب تیر و مقایسه‌ی روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$EIy''' = M(x)$$

برای تیری که تحت بار گسترده‌ی w بر واحد طول قرار گرفته است رابطه‌ی بین نیروی برشی V و بار گسترده همان گونه که از استاتیک می‌دانیم به صورت $\frac{dV}{dx} = -w(x)$ و رابطه‌ی بین گشتاور خمشی و نیروی برشی به صورت $\frac{dM}{dx} = V(x)$ می‌باشد. از این روابط و رابطه‌ی بالا به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}(EIy''') = V(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EIy''') = -w(x)$$

در صورتیکه EI ثابت باشد داریم:

$$EIy'''' = V(x)$$

$$EIy'''' = -w(x)$$

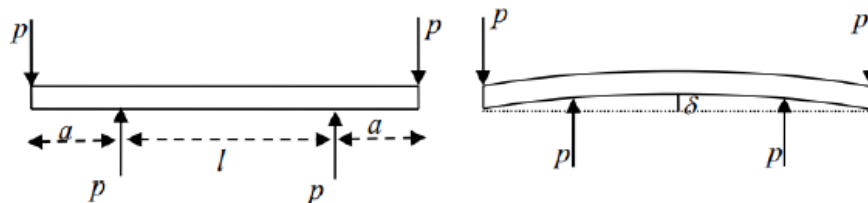
عموماً از معادلات بالا برای تعیین تغییر مکان تیرها استفاده می‌شود.

اگر بارگذاری در دو انتهای تیر انجام شود، رابطه‌ی بین میزان جابجایی نقطه‌ی وسط تیر بر حسب بار اعمالی را می‌توان به صورت زیر نوشت (اثبات این رابطه در بخش ضمايم آورده شده است):

$$y = \frac{Pal^2}{8EI}$$

در رابطه‌ی بالا P نیروی اعمال شده به تیر، a فاصله‌ی هریک از دو تکیه‌گاه از سر آزاد نزدیک به آن، l فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه، E مدول الاستیسیته‌ی تیر و I ممان اینرسی سطح مقطع تیر است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

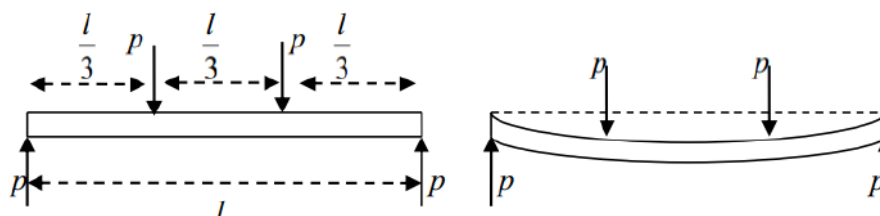
$$I = \frac{1}{12} ab^3$$



شکل ۲: بارگذاری در دو انتهای تیر

اگر بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو تکیه‌گاه تیر انجام شود رابطه‌ی بین میزان جابجایی نقطه‌ی وسط تیر بر حسب بار اعمالی را می‌توان به صورت زیر نوشت (اثبات این رابطه در بخش ضمائم آورده شده است):

$$y = \frac{23Pal^3}{648EI}$$

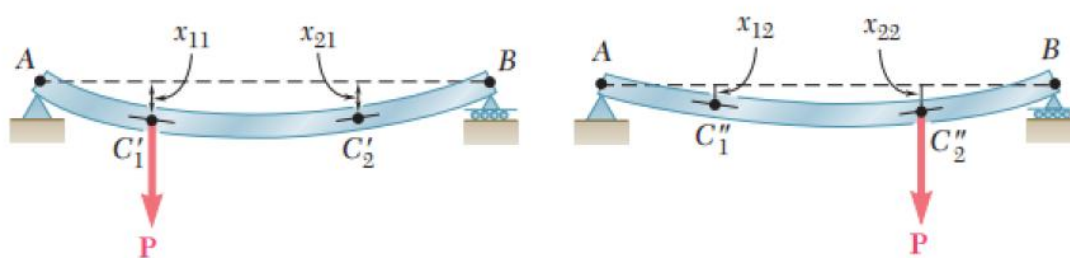


شکل ۳: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌های تیر

۲-۲- اصل دوطرفه‌ی ماکسول

بر طبق این اصل، جابجایی نقطه‌ی C'_2 در شکل زیر بر اثر بار اعمال شده به تیر در نقطه‌ی C'_1 برابر جابجایی نقطه‌ی C''_1 بر اثر بار اعمال شده به تیر در نقطه‌ی C''_2 می‌باشد، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$x_{21} = x_{12}$$



شکل ۴: تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول در تیر تحت خمش خالص

این اصل به افتخار جیمز کلارک ماکسول دانشمند سرشناس انگلیسی به نام وی نام‌گذاری شده است (اثبات این قضیه در بخش ضمائم آورده شده است).

۳- شرح آزمایش

۳-۱- وسایل مورد استفاده در آزمایش

- فونداسیون آزمایش

دستگاه دارای یک بدنه است که روی آن دوپایه‌ی متحرک قرار دارد به‌گونه‌ای که می‌توان آن‌ها را جابه‌جا کرد و سپس به کمک پیچ آن‌ها را مقید کرده و به این ترتیب فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه را تنظیم نمود. روی هر یک از این دوپایه‌ها، تکیه‌گاه‌هایی به‌صورت مثلثی شکل قرار گرفته است که نقش تکیه‌گاه ساده را دارند.

در وسط دستگاه یک میله وجود دارد که روی آن محور یک ساعت اندازه‌گیری نصب می‌گردد که دارای دقت اندازه‌گیری $0/01$ میلی‌متر است (این ساعت به ۱۰۰ قسمت تقسیم شده است و هر دور ساعت برابر با یک میلی‌متر هست)، این ساعت را می‌توان به کمک یک پیچ بر روی میله بالا و پایین برد و به این ترتیب ارتفاع آن را برای اندازه‌گیری خیز وسط تیر تنظیم کرد، پیچ دیگری نیز وجود دارد که به کمک آن می‌توان زاویه‌ی قرار گرفتن ساعت را مشخص کرد؛ به کمک این دو پیچ ساعت را عمود بر تیر قرار می‌دهیم.



شکل ۵: فونداسیون دستگاه انجام آزمایش



شکل ۶: ساعت موجود بر روی فونداسیون دستگاه انجام آزمایش برای تعیین میزان جابجایی وسط تیر

- تیرهای مورد آزمایش

در این آزمایش تیرهای مسی و فولادی به عنوان تیر مورد آزمایش انتخاب شده‌اند.



شکل ۷: تیرهای موجود برای انجام آزمایش بر روی آنها

- ساعت اندازه‌گیری مورد استفاده در آزمایش تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول

ساعت اندازه‌گیری دیگری نیز بر روی یک پایه قرار دارد که زیر تیر قرار می‌گیرد و دقت این ساعت نیز 0.1 میلی‌متر است و همانند ساعت قبل دارای دوپیچ برای تنظیم کردن ساعت و عمود کردن آن بر تیر می‌باشد.



شکل ۸: ساعت مورد استفاده برای تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول

- آویز اعمال بار

این آویز برای بارگذاری بر روی تیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

- بست

برای تثبیت وزنه‌ها بر روی تیر از دو بست استفاده می‌شود.



شکل ۹: آویز اعمال بار و بست مورد استفاده برای تثبیت آن

- وزنه‌ها

برای بارگذاری بر روی تیر از ۹ وزنه‌ی ۵۰۰ گرمی (برای تیر مسی) و ۶ وزنه‌ی ۲۰۰ گرمی (برای تیر فولادی) استفاده می‌شود.

- کولیس

برای اندازه‌گیری ابعاد سطح مقطع تیر و ضخامت آویزها و بست‌ها از کولیس استفاده می‌شود که دقت آن برابر 0.02 میلی‌متر است.

- متر

برای اندازه‌گیری طول تیرها، فاصله‌ی بین تکیه‌گاه‌ها و... از متر استفاده می‌شود که دقت آن برابر ۱ میلی‌متر است.

۳-۲- نحوه‌ی انجام آزمایش

ابتدا طول تیر را کمک متر اندازه‌گیری کرده و برحسب میلی‌متر ثبت می‌کنیم، سپس به کمک متر فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه اندازه‌گیری می‌شود؛ ضمناً وسط تیر و هم‌چنین محل قرار گرفتن تیر بر روی تکیه‌گاه علامت زده می‌شود (به‌گونه‌ای که تیر به‌صورت متقارن بر روی تکیه‌گاه‌ها قرار گیرد). سطح مقطع تیر نیز در این مرحله به وسیله‌ی کولیس اندازه‌گیری می‌شود. تیر بر روی تکیه‌گاه‌ها قرار داده می‌شود و سپس روی تیر سوار می‌شوند و بعد از آن بست هرکدام از آویزها پشت آویز مربوطه قرار گرفته و به کمک پیچ محکم می‌گردد. ساعت بالای تیر به‌صورت عمود (هم از روبه‌رو و هم از طرفین) بر وسط تیر قرار می‌گیرد.

۳-۲-۱- بارگذاری در دو انتهای تیر

در مرحله‌ی اول آزمایش محل قرارگیری آویزها در دو انتهای تیر است، وقتی به دو سر تیر نیرو وارد می‌شود جابه‌جایی وسط تیر به سمت بالا خواهد بود، به همین دلیل در هنگام قرار دادن ساعت، پراب آن باید تا انتها بیرون باشد تا در هنگام جابه‌جایی وسط تیر به بالا میزان جابه‌جایی مشخص گردد. ساعت روی صفر تنظیم می‌شود؛ بارگذاری به صورت متقارن با قرار دادن وزنه‌های ۵۰۰ گرمی در هر طرف تیر آغاز می‌شود و با قدم‌های ۵۰۰ گرمی وزنه به طرفین اضافه می‌گردد و در هر مرحله جابه‌جایی نقطه‌ی مانی تیر ثبت می‌گردد.



شکل ۱۰: نحوه‌ی بارگذاری در دو انتهای تیر

۳-۲-۲- بارگذاری به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌ها

در مرحله‌ی اول آزمایش محل قرارگیری آویزها در دو انتهای تیر است، وقتی به دو سر تیر نیرو وارد می‌شود جابه‌جایی وسط تیر به سمت بالا خواهد بود، به همین دلیل در هنگام قرار دادن ساعت، پراب آن باید تا انتها بیرون باشد تا در هنگام جابه‌جایی وسط تیر به بالا میزان جابه‌جایی مشخص گردد. ساعت روی صفر تنظیم می‌شود؛ بارگذاری به صورت متقارن با قرار دادن وزنه‌های ۵۰۰ گرمی در هر طرف تیر آغاز می‌شود و با قدم‌های ۵۰۰ گرمی وزنه به طرفین اضافه می‌گردد و در هر مرحله جابه‌جایی نقطه‌ی مانی تیر ثبت می‌گردد.



شکل ۱۱: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از هر تکیه‌گاه

۳-۲-۳- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول

در مرحله‌ی اول این قسمت از آزمایش تیر به کمک علامت‌های موجود بر روی آن، روی تکیه‌گاه قرار می‌گیرد؛ ساعت بالایی بار دیگر مانند قسمت دوم بر تیر عمود می‌شود، یکی از آویزها در فاصله‌ی ۱۲۰ میلی‌متری از تکیه‌گاه قرار می‌گیرد و سپس با وزنه‌های ۵۰۰ گرمی بارگذاری را آغاز کرده و با قدم‌های ۵۰۰ گرم پیش رفته و در هر مرحله میزان جابه‌جایی وسط تیر به کمک ساعت بالایی ثبت می‌گردد.

در مرحله‌ی دوم، ساعت اول را از روی تیر برداشته و آویز را در وسط تیر و ساعتی را که دارای پایه است زیر تیر در محل بارگذاری مرحله‌ی قبل به‌صورت عمود بر تیر قرار می‌دهیم. بارگذاری را با وزنه‌های ۵۰۰ گرمی آغاز کرده و با قدم‌های ۵۰۰ گرمی ادامه می‌دهیم و در هر مرحله، جابه‌جایی در فاصله‌ی ۱۲۰ میلی‌متری از تکیه‌گاه به کمک ساعت پایه‌دار ثبت می‌گردد.



شکل ۱۲: تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول به وسیله‌ی آزمایش

۳-۳- منابع خطا

۱- پراب ساعت حتماً در هنگام آزمایش می‌بایست بر سطح تیر عمود باشد و در غیر این صورت خطای زیادی در نتایج به دست آمده از آزمایش ایجاد می‌شود.

۲- تعیین محل بارگذاری به دلیل آنکه به وسیله‌ی ابزارآلات دقیق انجام نمی‌شود دارای خطاست.

۳- وزن آویز اعمال بار در محاسبات وارد نمی‌شود اگرچه باعث اعمال نیروی اضافی (از مقدار مورد نظر ما) بر روی تیر می‌شود.

۴- نوسان آونگ گونه‌ی آویز اعمال بار در نتایج تأثیرگذار است.

۵- جرم وزنه‌های مورد استفاده در آزمایش ممکن است دقیقاً برابر جرم نامی آن‌ها نباشد که سبب ایجاد خطا در بار اعمال شده به تیر می‌شود.

۴- نتایج آزمایش

در ابتدای آزمایش نیاز است تا مقادیر فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه، عرض آویزها و عرض بست‌های موجود اندازه‌گیری شوند. نتایج حاصل شده در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱: مقادیر اندازه‌گیری شده برای برخی از وسایل مورد استفاده در آزمایش

۴۵۲mm	فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه
۱۲/۳۰mm	عرض آویز
۱۲/۴۰mm	عرض بست

۴-۱- تیر مسی

۴-۱-۱- بارگذاری در دو انتهای تیر

در این قسمت از آزمایش بارگذاری در دو انتهای تیر انجام شده و مقدار خیز تیر در وسط آن به وسیله‌ی ساعت قرائت می‌شوند. داده‌های حاصل از آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۲: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی

m(kg)	$\delta(0.01mm)$
۰/۵	۱۸
۱	۳۴
۱/۵	۵۰
۲	۶۶
۲/۵	۸۳
۳	۹۹
۳/۵	۱۱۵
۴	۱۳۲
۴/۵	۱۴۸

ابعاد سطح مقطع تیر که به وسیله‌ی کولیس اندازه‌گیری می‌شوند، عبارتند از (دقت کولیس برابر ۰/۰۲mm است):

$$a = 29.60mm$$

$$b = 9.78mm$$

بنابراین با استفاده از اطلاعات ابعاد سطح مقطع تیر می‌توانیم، مقدار ممان اینرسی تیر (I) را از رابطه‌ی زیر محاسبه کنیم:

$$I = \frac{1}{12} ab^3 = \frac{1}{12} \times 29.60 \times 9.78^3 = 2307.42 mm^4$$

طول تیر (L) به وسیله‌ی متر اندازه‌گیری می‌شود و عبارت است از (دقت متر برابر ۱mm است):

$$L = 1238mm$$

فاصله‌ی تکیه‌گاه تا محل بارگذاری (a) برابر است با:

$$a = \frac{1}{2}(1238 - 2 \times 12.40 - 12.30 - 452) = 374.45mm$$

از طرفی با توجه به تئوری مطرح شده می‌دانیم که میزان خیز تیر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{Pal^2}{8EI}$$

بنابراین اگر نمودار میزان خیز تیر (δ) برحسب بار اعمال شده (P) رسم شود می‌توان مقدار ضریب الاستیسیته (E) را از روی شیب منحنی به دست آورد؛ برای انجام این کار نیاز به استفاده از روابط مربوط به خط رگرسیون هستیم که در زیر اجمالاً به بررسی این روابط می‌پردازیم:

از آنجایی که طبق روابط مربوط به خیز تیر، نمودار تغییرات خیز برحسب بار اعمالی خطی است، از این رو شیب خط رگرسیون آن برابر است با:

$$a = \frac{[XY]}{[XX]}$$

که در رابطه‌ی بالا X متناظر با بار اعمالی و Y متناظر با میزان خیز تیر است؛ هم‌چنین علامت $[]$ نشان دهنده‌ی حاصل جمع است.

مقدار ضریب رگرسیون (r^2) که دقت خط مورد نظر را بیان می‌کند نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$r^2 = \frac{[XY]^2}{[XX][YY]}$$

برای محاسبه‌ی خطای ضریب a نیز می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

$$\alpha^2 = \frac{[dd]}{N-2}$$

در رابطه‌ی فوق N برابر تعداد داده‌های آزمایش و d مقدار اختلاف بین مقدار به دست آمده از آزمایش و مقدار به دست آمده از خط رگرسیون است، یعنی:

$$d = aX - Y$$

در نهایت مقدار خطای ضریب a از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\alpha_a^2}{N} = \frac{\alpha^2}{\Delta}$$

در رابطه‌ی بالا Δ برابرست با:

$$\Delta = \begin{vmatrix} [XX] & [X] \\ [X] & N \end{vmatrix}$$

حال می‌توان با استفاده از روابط بالا مقدار مدول الاستیسیته‌ی تیر و مقدار خطای آن را با استفاده از روابط مربوط به جابجایی وسط تیر محاسبه کرد.

مقدار نیروی اعمالی (P) برابر نیروی وزن وزنه‌ها می‌باشد و با در نظر گرفتن شتاب جاذبه‌ی زمین (g) برابر 9.81 m/s^2 از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P = mg$$

اطلاعات لازم برای محاسبه‌ی مدول الاستیسیته با استفاده از بارگذاری در دو انتهای تیر در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۳: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی

	m(kg)	P(N)	$\delta(0.01 \text{ mm})$	PP(N ²)	P δ (0.01N.mm)	δ^2 (10 ⁻⁴ mm ²)	d(0.01mm)	dd (10 ⁻⁴ mm ²)
	۰/۵	۴/۹۰۵	۱۸	۲۴/۰۵۹۰	۸۸/۲۹	۳۲۴	-۱/۵۰۱۵	۲/۲۵۴۵
	۱	۹/۸۱	۳۴	۹۶/۲۳۶۱	۳۳۳/۵۴	۱۱۵۶	-۱/۰۰۳۱	۱/۰۰۶۲
	۱/۵	۱۴/۷۱۵	۵۰	۲۱۶/۵۳۱۲	۷۳۵/۷۵	۲۵۰۰	-۰/۵۰۴۶	۰/۲۵۴۶
	۲	۱۹/۶۲	۶۶	۳۸۴/۹۴۴۴	۱۲۹۴/۹۲	۴۳۵۶	-۰/۰۰۶۱۶۸	۰/۰۰۰۰۳۸۰۴
	۲/۵	۲۴/۵۲۵	۸۳	۶۰۱/۴۷۵۶	۲۰۳۵/۵۷۵	۶۸۸۹	-۰/۵۰۷۷	۰/۲۵۷۸
	۳	۲۹/۴۳	۹۹	۸۶۶/۱۲۴۹	۲۹۱۳/۵۷	۹۸۰۱	-۰/۰۰۹۲۵۲	۰/۰۰۰۰۸۵۶۰
	۳/۵	۳۴/۳۳۵	۱۱۵	۱۱۷۸/۸۹۲۲	۳۹۴۸/۵۲۵	۱۳۲۲۵	۰/۴۸۵۸	۰/۲۳۶۰
	۴	۳۹/۲۴	۱۳۲	۱۵۳۹/۷۷۷۶	۵۱۷۹/۶۸	۱۷۴۲۴	-۰/۰۱۲۳۴	۰/۰۰۰۱۵۲۳
	۴/۵	۴۴/۱۴۵	۱۴۸	۱۹۴۸/۷۸۱۰	۶۵۳۳/۴۶	۲۱۹۰۴	۰/۴۸۶۱	۰/۲۳۶۳
مجموع	۲۲/۵	۲۲۰/۷۲۵	۷۴۵	۶۸۵۶/۸۲۲۱	۲۳۰۶۳/۳۱	۷۷۵۷۹	-۲/۵۷۲۸	۴/۲۴۵۷

مقدار شیب خط رگرسیون برابرست با:

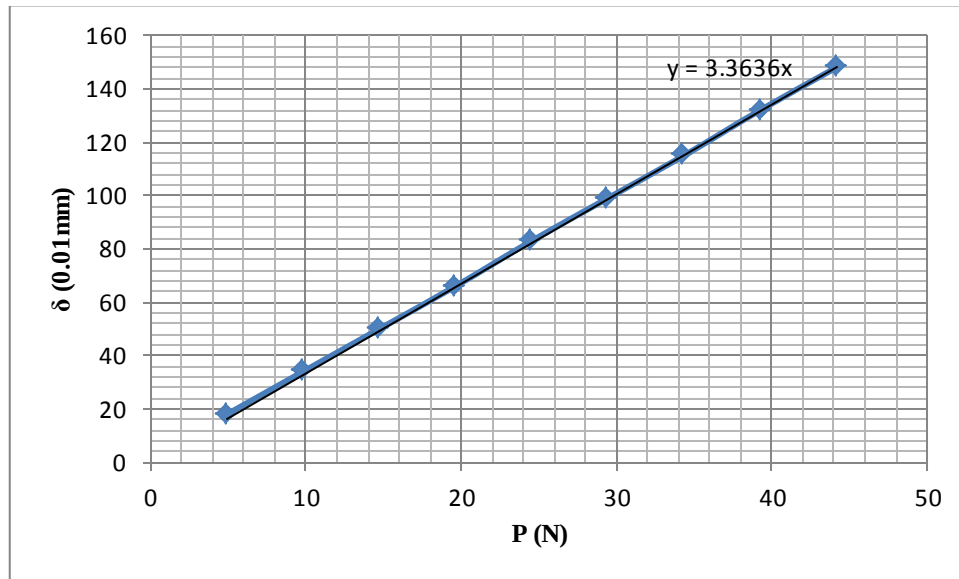
$$a' = \frac{[P\delta]}{[PP]} = \frac{23063.31}{6856.8221} = 3.3636 \frac{0.01mm}{N}$$

و مقدار ضریب همبستگی (r^2) برابرست با:

$$r^2 = \frac{[P\delta]^2}{[PP][\delta\delta]} = \frac{23063.31^2}{6856.8221 \times 77579} = 0.9999$$

نزدیک بودن مقدار ضریب همبستگی به ۱ نشانگر این است که آزمایش از دقت خوبی برخوردار است.

نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۱۳: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی

با توجه به رابطه‌ی خیز تیر برحسب بار اعمالی داریم:

$$a' = \frac{al^2}{8EI} \rightarrow E = \frac{al^2}{8a'I}$$

$$\rightarrow E = \frac{(374.45 \times 10^{-3}) \times (452 \times 10^{-3})^2}{8 \times (3.3636 \times 10^{-5}) \times (2307.42 \times 10^{-12})} = 1.2321 \times 10^{11} Pa = 123.2111 GPa$$

حال برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول الاستیسیته می‌بایست ابتدا میزان خطای شیب خط رگرسیون را به دست آوریم:

$$\alpha^2 = \frac{[dd]}{N-2} = \frac{4.2457}{9-2} = 0.6065 (10^{-4} mm^2)$$

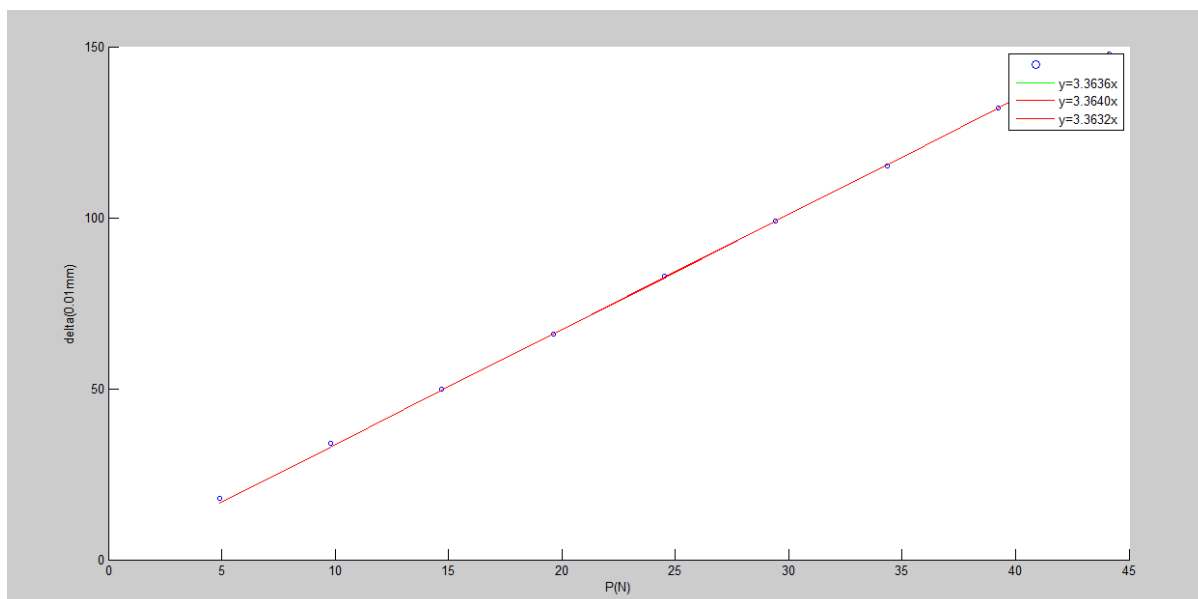
$$\Delta = \begin{vmatrix} [PP] & [P] \\ [P] & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6856.8221 & 220.725 \\ 220.725 & 9 \end{vmatrix} = 12991.8733 (N^2)$$

$$\frac{\alpha_a^2}{N} = \frac{\alpha^2}{\Delta} \rightarrow \frac{\alpha_a^2}{9} = \frac{0.6065}{12991.8733} \rightarrow \alpha_a = 4.2015 \times 10^{-4} \frac{0.01mm}{N}$$

با به دست آمدن خطای شیب خط رگرسیون، می‌توان معادله‌ی خطوط اعتماد را به شکل زیر نوشت:

$$\delta = (3.3636 \pm 0.00042015)P$$

خطوط اعتماد در شکل زیر آورده شده‌اند:



شکل ۱۴: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) بر حسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر مسی به همراه خطوط اعتماد

برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول ینگ تیر، طبق فرمول موجود برای خیز وسط تیر داریم:

$$\delta = \frac{Pal^2}{8EI} \rightarrow a' = \frac{al^2}{8EI} \rightarrow E = \frac{al^2}{8a'I}$$

حال از دو طرف معادله دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم:

$$\log(E) = \log(a) + 2 \log(l) - \log(8) - \log(a') - \log(I)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{E} = \frac{da}{a} + 2 \frac{dl}{l} - \frac{da'}{a'} - \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{a} \Delta a + \frac{2}{l} \Delta l + \frac{1}{a'} \Delta a' + \frac{1}{I} \Delta I$$

حال می‌بایست میزان خطای موجود برای هر یک از پارامترها را محاسبه کنیم:

$$\Delta a = \frac{1}{2} (2 \times 0.5 + 3 \times 0.01) = 0.515 \text{ mm}$$

$$\Delta l = \frac{1}{2} \text{ mm} = 0.5 \text{ mm}$$

$$\Delta a' = \alpha_a = 4.2015 \times 10^{-4} \frac{0.01 \text{ mm}}{N}$$

$$I = \frac{1}{12} ab^3 \rightarrow \log(I) = \log\left(\frac{1}{12}\right) + \log(a) + 3 \log(b)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{da}{a} + 3 \frac{db}{b} \rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta a = \Delta b = \frac{0.02}{2} \text{ mm} = 0.01 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.01}{29.60} + 3 \times \frac{0.01}{9.78} = 0.003405$$

$$\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{374.45} \times 0.515 + \frac{2}{452} \times 0.5 + \frac{1}{3.3636} \times 4.2015 \times 10^{-4} + 0.003405 = 0.007118$$

$$\rightarrow \Delta E = 0.8770 \text{ GPa}$$

بنابراین با توجه به مقدار خطای محاسبه شده می‌توان ضریب الاستیسیته‌ی تیر را پس از اعمال تصحیح ارقام به شکل زیر نوشت:

$$E = (123.2 \pm 0.9) \text{ GPa}$$

۴-۱-۲- بارگذاری بین دو تکیه‌گاه

در این قسمت از آزمایش بارگذاری به فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها و مقدار خیز تیر در وسط آن به وسیله‌ی ساعت قرائت می‌شود. داده‌های حاصل از آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۴: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در بین دو تکیه‌گاه تیر مسی

$m(kg)$	$\delta(0.01mm)$
۰/۵	۵
۱	۱۱
۱/۵	۱۷
۲	۲۲
۲/۵	۲۸
۳	۳۳
۳/۵	۳۹
۴	۴۵
۴/۵	۵۱

ابعاد سطح مقطع تیر که به وسیله‌ی کولیس اندازه‌گیری می‌شوند، عبارتند از (دقت کولیس برابر $0.2mm$ است):

$$a = 29.60mm$$

$$b = 9.78mm$$

بنابراین با استفاده از اطلاعات ابعاد سطح مقطع تیر می‌توانیم، مقدار ممان اینرسی تیر (I) را از رابطه‌ی زیر محاسبه کنیم:

$$I = \frac{1}{12} ab^3 = \frac{1}{12} \times 29.60 \times 9.78^3 = 2307.42 \text{ mm}^4$$

طول تیر (L) به وسیله‌ی متر اندازه‌گیری می‌شود و عبارت است از (دقت متر برابر $1mm$ است):

$$L = 1238mm$$

از طرفی با توجه به تئوری مطرح شده می‌دانیم که میزان خیز تیر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{23Pl^3}{648EI}$$

بنابراین اگر نمودار میزان خیز تیر (δ) برحسب بار اعمال شده (P) رسم شود می‌توان مقدار ضریب الاستیسیته (E) را از روی شیب منحنی به دست آورد.

مقدار نیروی اعمالی (P) برابر نیروی وزن وزنه‌ها می‌باشد و با در نظر گرفتن شتاب جاذبه‌ی زمین (g) برابر $9.81m/s^2$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P = mg$$

اطلاعات لازم برای محاسبه‌ی مدول الاستیسیته با استفاده از بارگذاری در دو انتهای تیر در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۵: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی

	m(kg)	P(N)	$\delta(0.01\text{mm})$	PP(N ²)	P δ (0.01N.mm)	δ^2 (10 ⁻⁴ mm ²)	d(0.01mm)	dd (10 ⁻⁴ mm ²)
	۰/۵	۴/۹۰۵	۵	۲۴/۰۵۹۰	۲۴/۵۲۵	۲۵	۰/۶۰۰۰	۰/۳۶۰۰
	۱	۹/۸۱	۱۱	۹۶/۲۳۶۱	۱۰۷/۹۱	۱۲۱	۰/۲۰۰۱	۰/۴۰۰۴
	۱/۵	۱۴/۷۱۵	۱۷	۲۱۶/۵۳۱۲	۲۵۰/۱۵۵	۲۸۹	-۰/۱۹۹۹	۰/۰۳۹۹۶
	۲	۱۹/۶۲	۲۲	۳۸۴/۹۴۴۴	۴۳۱/۶۴	۴۸۴	۰/۴۰۰۲	۰/۱۶۰۲
	۲/۵	۲۴/۵۲۵	۲۸	۶۰۱/۴۷۵۶	۶۸۶/۷	۷۸۴	۰/۰۰۱۹۲۵	۳/۷۰۵۶E ^{-۸}
	۳	۲۹/۴۳	۳۳	۸۶۶/۱۲۴۹	۹۷۱/۱۹	۱۰۸۹	۰/۶۰۰۲	۰/۳۶۰۲
	۳/۵	۳۴/۳۳۵	۳۹	۱۱۷۸/۸۹۲۲	۱۳۳۹/۰۶۵	۱۵۲۱	۰/۲۰۰۳	۰/۴۰۱۲
	۴	۳۹/۲۴	۴۵	۱۵۳۹/۷۷۷۶	۱۷۶۵/۸	۲۰۲۵	-۰/۱۹۹۷	۰/۰۳۹۹۸
	۴/۵	۴۴/۱۴۵	۵۱	۱۹۴۸/۷۸۱۰	۲۲۵۱/۳۹۵	۲۶۰۱	-۰/۵۹۹۷	۰/۳۵۹۶
مجموع	۲۲/۵	۲۲۰/۷۲۵	۲۵۱	۶۸۵۶/۸۲۲۱	۷۸۲۸/۳۸	۸۹۳۹	۱/۰۰۱۷	۱/۴۰۰۱

مقدار شیب خط رگرسیون برابرست با:

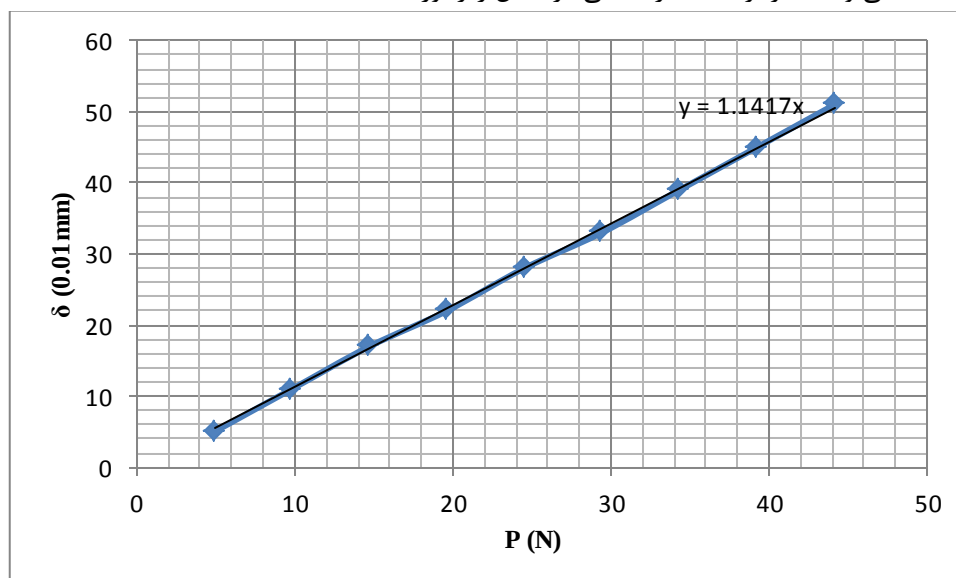
$$a = \frac{[P\delta]}{[PP]} = \frac{7828.38}{6856.8221} = 1.1417 \frac{0.01\text{mm}}{N}$$

و مقدار ضریب همبستگی (r^2) برابرست با:

$$r^2 = \frac{[P\delta]^2}{[PP][\delta\delta]} = \frac{7828.38^2}{6856.8221 \times 8939} = 0.9998$$

نزدیک بودن مقدار ضریب همبستگی به ۱ نشانگر این است که آزمایش از دقت خوبی برخوردار است.

نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۱۵: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی

با توجه به رابطه‌ی خیز تیر برحسب بار اعمالی داریم:

$$a = \frac{23l^3}{648EI} \rightarrow E = \frac{23l^3}{648al}$$

$$\rightarrow E = \frac{23 \times (452 \times 10^{-3})^3}{648 \times (1.1417 \times 10^{-5}) \times (2307.42 \times 10^{-12})} = 1.2442 \times 10^{11} Pa = 124.4198 GPa$$

حال برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول الاستیسیته می‌بایست ابتدا میزان خطای شیب خط رگرسیون را به دست آوریم:

$$\alpha^2 = \frac{[dd]}{N-2} = \frac{1.4001}{9-2} = 0.2000 (10^{-4} mm^2)$$

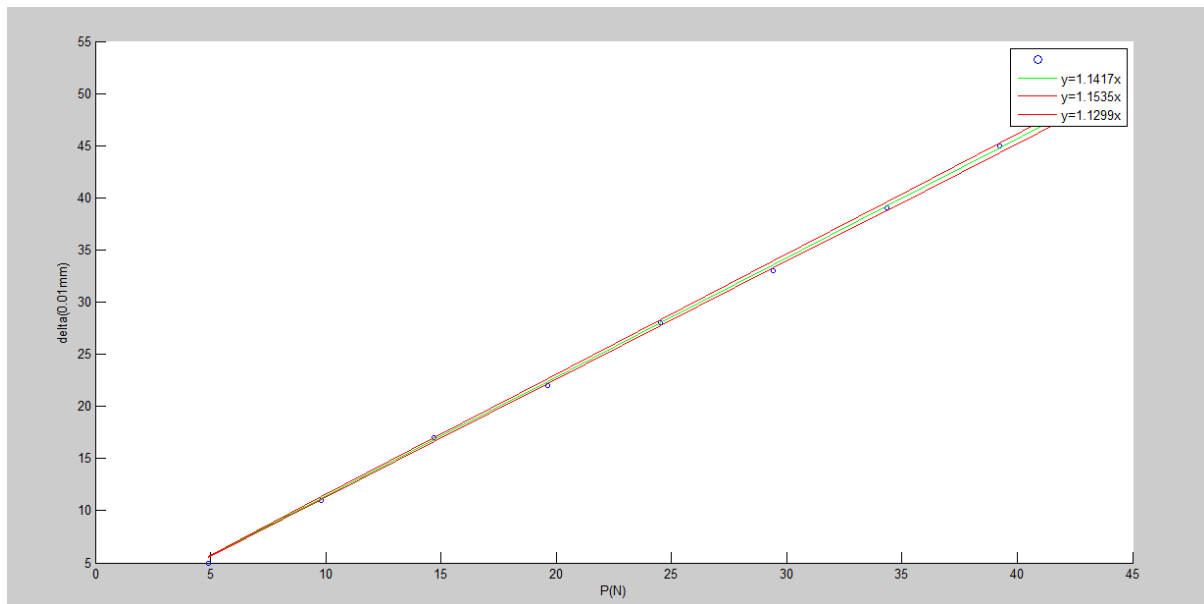
$$\Delta = \begin{vmatrix} [PP] & [P] \\ [P] & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6856.8221 & 220.725 \\ 220.725 & 9 \end{vmatrix} = 12991.8733 (N^2)$$

$$\frac{\alpha_a^2}{N} = \frac{\alpha^2}{\Delta} \rightarrow \frac{\alpha_a^2}{9} = \frac{0.2000}{12991.8733} \rightarrow \alpha_a = 0.01177 \frac{0.01mm}{N}$$

با به دست آمدن خطای شیب خط رگرسیون، می‌توان معادله‌ی خطوط اعتماد را به شکل زیر نوشت:

$$\delta = (1.1417 \pm 0.01177)P$$

خطوط اعتماد در شکل زیر آورده شده‌اند:



شکل ۱۶: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) بر حسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر مسی به همراه خطوط اعتماد

برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول یانگ تیر، طبق فرمول موجود برای خیز وسط تیر داریم:

$$\delta = \frac{23Pl^3}{648EI} \rightarrow a = \frac{23l^3}{648EI} \rightarrow E = \frac{23l^3}{648aI}$$

حال از دو طرف معادله دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم:

$$\log(E) = \log(23) + 3\log(l) - \log(648) - \log(a) - \log(I)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{E} = 3\frac{dl}{l} - \frac{da}{a} - \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta I}{I}$$

حال می‌بایست میزان خطای موجود برای هر یک از پارامترها را محاسبه کنیم:

$$\Delta l = \frac{1}{2} mm = 0.5 mm$$

$$\Delta a = \alpha_a = 0.01177 \frac{0.01mm}{N}$$

$$I = \frac{1}{12} ab^3 \rightarrow \log(I) = \log\left(\frac{1}{12}\right) + \log(a) + 3\log(b)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{da}{a} + 3\frac{db}{b} \rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta a = \Delta b = \frac{0.02}{2} mm = 0.01 mm$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.01}{29.60} + 3 \times \frac{0.01}{9.78} = 0.003405$$

$$\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{452} \times 0.5 + \frac{1}{1.1417} \times 0.01177 + 0.003405 = 0.01703$$

$$\rightarrow \Delta E = 2.1192 GPa$$

بنابراین با توجه به مقدار خطای محاسبه شده می‌توان ضریب الاستیسیته‌ی تیر را پس از اعمال تصحیح ارقام به شکل زیر نوشت:

$$E = (124 \pm 3) GPa$$

۴-۱-۳- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول

برای به دست آوردن جابجایی ناشی از بارگذاری در این آزمایش نیازمند در دست داشتن مدول الاستیسیته‌ی تیر هستیم که می‌توان آن را با استفاده از میانگین‌گیری از نتایج حاصل از دو آزمایش قبل به دست آورد، یعنی:

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{123.2111 + 124.4198}{2} = 123.8155 GPa$$

نتایج حاصل از این آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۶: نتایج حاصل از آزمایش تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول برای تیر مسی

m(kg)	P(N)	$\delta_{12}(0.01mm)$ در ۱۲۰mm از یک تکیه‌گاه	$\delta_{21}(0.01mm)$ در وسط تیر	$\delta_{12}(0.01mm)$ در ۱۲۰mm از یک تکیه‌گاه (تئوری)	$\delta_{21}(0.01mm)$ در وسط تیر (تئوری)	درصد خطای آزمایش برای δ_{12}	درصد خطای آزمایش برای δ_{21}
۰/۵	۴/۹۰۵	۲	۲	۲/۰۸۵۳	۲/۰۸۵۳	۴/۰۹۰۵	۴/۰۹۰۵
۱	۹/۸۱	۵	۴	۴/۱۷۰۵	۴/۱۷۰۵	۱۹/۸۶۱۰	۴/۰۸۸۲
۱/۵	۱۴/۷۱۵	۷	۶	۶/۲۵۵۹	۶/۲۵۵۹	۱۱/۸۹۴۴	۴/۰۹۰۵
۲	۱۹/۶۲	۹	۹	۸/۳۴۱۲	۸/۳۴۱۲	۷/۸۹۸۱	۷/۸۹۸۱
۲/۵	۲۴/۵۲۵	۱۲	۱۱	۱۰/۴۲۶۵	۱۰/۴۲۶۵	۱۵/۰۹۱۴	۵/۵۰۰۴
۳	۲۹/۴۳	۱۴	۱۴	۱۲/۵۱۱۸	۱۲/۵۱۱۸	۱۱/۸۹۴۴	۱۱/۸۹۴۴
۳/۵	۳۴/۳۳۵	۱۶	۱۶	۱۴/۵۹۷۱	۱۴/۵۹۷۱	۹/۶۱۰۸	۹/۶۱۰۸
۴	۳۹/۲۴	۱۹	۱۸	۱۶/۶۸۲۴	۱۶/۶۸۲۴	۱۳/۸۹۲۴	۷/۸۹۸۱
۴/۵	۴۴/۱۴۵	۲۱	۲۱	۱۸/۷۶۷۷	۱۸/۷۶۷۷	۱۱/۸۹۴۴	۱۱/۸۹۴۴

۴-۲- تیر فولادی

۴-۲-۱- بارگذاری در دو انتهای تیر

در این قسمت از آزمایش بارگذاری در دو انتهای تیر انجام شده و مقدار خیز تیر در وسط آن به وسیله ساعت قرائت می‌شوند. داده‌های حاصل از آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۷: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی

m(kg)	$\delta(0.01mm)$
۰/۲	۵۵
۰/۴	۱۰۸
۰/۶	۱۶۱
۰/۸	۲۱۵
۱	۲۶۸
۱/۲	۳۲۲

ابعاد سطح مقطع تیر که به وسیله کولیس اندازه‌گیری می‌شوند، عبارتند از (دقت کولیس برابر ۰/۰۲mm است):

$$a = 24.92mm$$

$$b = 4.88mm$$

بنابراین با استفاده از اطلاعات ابعاد سطح مقطع تیر می‌توانیم، مقدار ممان اینرسی تیر (I) را از رابطه‌ی زیر محاسبه کنیم:

$$I = \frac{1}{12} ab^3 = \frac{1}{12} \times 24.92 \times 4.88^3 = 241.34 mm^4$$

طول تیر (L) به وسیله متر اندازه‌گیری می‌شود و عبارت است از (دقت متر برابر ۱mm است):

$$L = 1704mm$$

فاصله‌ی تکیه‌گاه تا محل بارگذاری (a) برابر است با:

$$a = \frac{1}{2}(1704 - 2 \times 12.40 - 12.30 - 452) = 607.45mm$$

از طرفی با توجه به تئوری مطرح شده می‌دانیم که میزان خیز تیر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{Pal^2}{8EI}$$

بنابراین اگر نمودار میزان خیز تیر (δ) برحسب بار اعمال شده (P) رسم شود می‌توان مقدار ضریب الاستیسیته (E) را از روی شیب منحنی به دست آورد.

مقدار نیروی اعمالی (P) برابر نیروی وزن وزنه‌ها می‌باشد و با در نظر گرفتن شتاب جاذبه‌ی زمین (g) برابر $9.81m/s^2$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P = mg$$

اطلاعات لازم برای محاسبه‌ی مدول الاستیسیته با استفاده از بارگذاری در دو انتهای تیر در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۸: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی

	m(kg)	P(N)	$\delta(0.01mm)$	PP(N ²)	P δ (0.01N.mm)	δ^2 (10 ⁻⁴ mm ²)	d(0.01mm)	dd (10 ⁻⁴ mm ²)
	۰/۲	۱/۹۶۲	۵۵	۳/۸۴۹۴	۱۰۷/۹۱	۳۰۲۵	-۱/۳۰۷۷	۱/۷۱۰۱
	۰/۴	۳/۹۲۴	۱۰۸	۱۵/۳۹۷۸	۴۲۳/۷۹۲	۱۱۶۶۴	-۰/۶۱۵۴	۰/۳۷۸۷
	۰/۶	۵/۸۸۶	۱۶۱	۳۴/۶۴۵۰	۹۴۷/۶۴۶	۲۵۹۲۱	۰/۰۷۶۸۶	۰/۰۰۵۹۰۷
	۰/۸	۷/۸۴۸	۲۱۵	۶۱/۵۹۱۱	۱۶۸۷/۳۲	۴۶۲۲۵	-۰/۲۳۰۸	۰/۰۵۳۲۷
	۱	۹/۸۱	۲۶۸	۹۶/۲۳۶۱	۲۶۲۹/۰۸	۷۱۸۲۴	۰/۴۶۱۴	۰/۲۱۲۹
	۱/۲	۱۱/۷۷۲	۳۲۲	۱۳۸/۵۸۰۰	۳۷۹۰/۵۸۴	۱۰۳۶۸۴	۰/۱۵۳۷	۰/۰۲۳۶۲
مجموع	۴/۲	۴۱/۲۰۲	۱۱۲۹	۳۵۰/۲۹۹۴	۹۵۸۶/۳۳۲	۲۶۲۳۴۳	-۱/۴۶۱۹	۲/۳۸۴۵

مقدار شیب خط رگرسیون برابرست با:

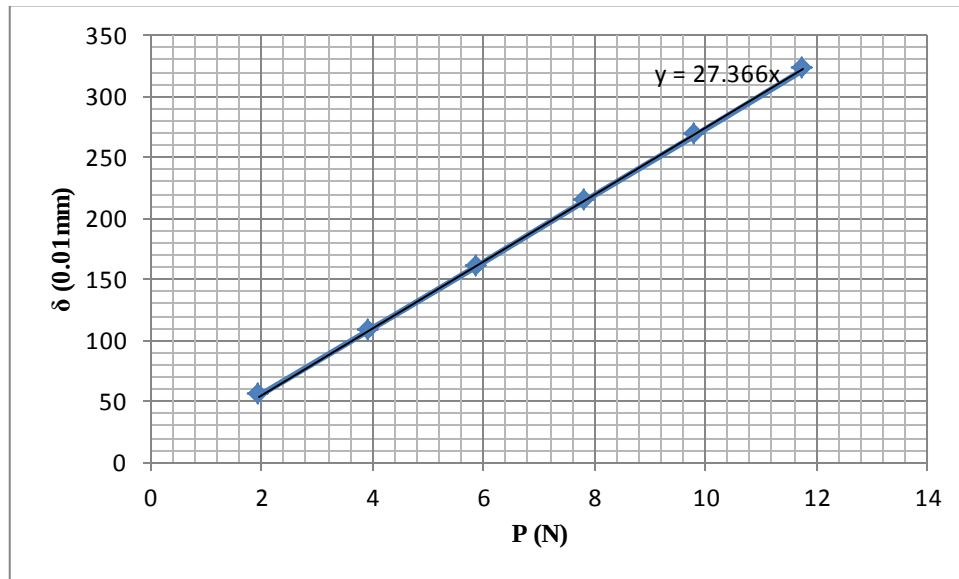
$$a' = \frac{[P\delta]}{[PP]} = \frac{9586.332}{350.2994} = 27.3661 \frac{0.01mm}{N}$$

و مقدار ضریب همبستگی (r^2) برابرست با:

$$r^2 = \frac{[P\delta]^2}{[PP][\delta\delta]} = \frac{9586.332^2}{350.2994 \times 262343} \approx 1$$

نزدیک بودن مقدار ضریب همبستگی به ۱ نشانگر این است که آزمایش از دقت خوبی برخوردار است.

نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۱۷: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی

با توجه به رابطه‌ی خیز تیر برحسب بار اعمالی داریم:

$$a' = \frac{al^2}{8EI} \rightarrow E = \frac{al^2}{8a'I}$$

$$\rightarrow E = \frac{(607.45 \times 10^{-3}) \times (452 \times 10^{-3})^2}{8 \times (27.3661 \times 10^{-5}) \times (241.34 \times 10^{-12})} = 2.3488 \times 10^{11} Pa = 234.8850 Gpa$$

حال برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول الاستیسیته می‌بایست ابتدا میزان خطای شیب خط رگرسیون را به دست آوریم:

$$\alpha^2 = \frac{[dd]}{N-2} = \frac{2.3845}{6-2} = 0.5961 (10^{-4} mm^2)$$

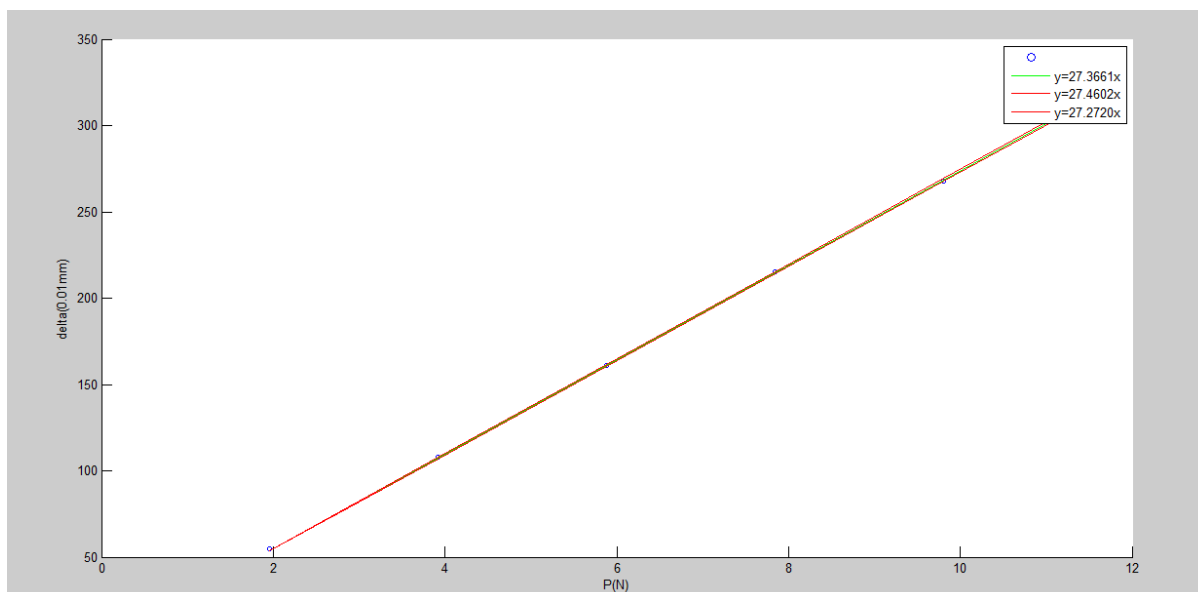
$$\Delta = \begin{vmatrix} [PP] & [P] \\ [P] & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 350.2994 & 41.202 \\ 41.202 & 6 \end{vmatrix} = 404.1916 (N^2)$$

$$\frac{\alpha_a^2}{N} = \frac{\alpha^2}{\Delta} \rightarrow \frac{\alpha_a^2}{6} = \frac{0.5961}{404.1916} \rightarrow \alpha_a = 0.09407 \frac{0.01mm}{N}$$

با به دست آمدن خطای شیب خط رگرسیون، می‌توان معادله‌ی خطوط اعتماد را به شکل زیر نوشت:

$$\delta = (27.3661 \pm 0.09407)P$$

خطوط اعتماد در شکل زیر آورده شده‌اند:



شکل ۱۸: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) بر حسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری در دو انتهای تیر فولادی به همراه خطوط اعتماد

برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول ینگ تیر، طبق فرمول موجود برای خیز وسط تیر داریم:

$$\delta = \frac{Pal^2}{8EI} \rightarrow a' = \frac{al^2}{8EI} \rightarrow E = \frac{al^2}{8a'I}$$

حال از دو طرف معادله دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم:

$$\log(E) = \log(a) + 2 \log(l) - \log(8) - \log(a') - \log(I)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{E} = \frac{da}{a} + 2 \frac{dl}{l} - \frac{da'}{a'} - \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{a} \Delta a + \frac{2}{l} \Delta l + \frac{1}{a'} \Delta a' + \frac{1}{I} \Delta I$$

حال می‌بایست میزان خطای موجود برای هر یک از پارامترها را محاسبه کنیم:

$$\Delta a = \frac{1}{2} (2 \times 0.5 + 3 \times 0.01) = 0.515 \text{ mm}$$

$$\Delta l = \frac{1}{2} \text{ mm} = 0.5 \text{ mm}$$

$$\Delta a' = \alpha_a = 0.09407 \frac{0.01 \text{ mm}}{N}$$

$$I = \frac{1}{12} ab^3 \rightarrow \log(I) = \log\left(\frac{1}{12}\right) + \log(a) + 3 \log(b)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{da}{a} + 3 \frac{db}{b} \rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta a = \Delta b = \frac{0.02}{2} \text{ mm} = 0.01 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.01}{24.92} + 3 \times \frac{0.01}{4.88} = 0.006549$$

$$\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{607.45} \times 0.515 + \frac{2}{452} \times 0.5 + \frac{1}{27.3661} \times 0.09407 + 0.006549 = 0.01305$$

$$\rightarrow \Delta E = 3.0645 \text{ GPa}$$

بنابراین با توجه به مقدار خطای محاسبه شده می‌توان ضریب الاستیسیته‌ی تیر را پس از اعمال تصحیح ارقام به شکل زیر

نوشت:

$$E = (235 \pm 4) \text{ GPa}$$

۴-۲-۲- بارگذاری بین دو تکیه‌گاه

در این قسمت از آزمایش بارگذاری به فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها انجام شده و مقدار خیز تیر در وسط آن به وسیله‌ی ساعت قرائت می‌شود. داده‌های حاصل از آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۹: داده‌های حاصل از آزمایش در حالت بارگذاری در بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی

m(kg)	$\delta(0.01mm)$
۰/۲	۱۱
۰/۴	۲۲
۰/۶	۳۳
۰/۸	۴۴
۱	۵۶
۱/۲	۶۷

ابعاد سطح مقطع تیر که به وسیله‌ی کولیس اندازه‌گیری می‌شوند، عبارتند از (دقت کولیس برابر ۰/۰۲mm است):

$$a = 24.92mm$$

$$b = 4.88mm$$

بنابراین با استفاده از اطلاعات ابعاد سطح مقطع تیر می‌توانیم، مقدار ممان اینرسی تیر (I) را از رابطه‌ی زیر محاسبه کنیم:

$$I = \frac{1}{12} ab^3 = \frac{1}{12} \times 24.92 \times 4.88^3 = 241.34 mm^4$$

طول تیر (L) به وسیله‌ی متر اندازه‌گیری می‌شود و عبارت است از (دقت متر برابر ۱mm است):

$$L = 1704mm$$

از طرفی با توجه به تئوری مطرح شده می‌دانیم که میزان خیز تیر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{23Pl^3}{648EI}$$

بنابراین اگر نمودار میزان خیز تیر (δ) برحسب بار اعمال شده (P) رسم شود می‌توان مقدار ضریب الاستیسیته (E) را از روی شیب منحنی به دست آورد.

مقدار نیروی اعمالی (P) برابر نیروی وزن وزنه‌ها می‌باشد و با در نظر گرفتن شتاب جاذبه‌ی زمین (g) برابر $9.81m/s^2$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$P = mg$$

اطلاعات لازم برای محاسبه‌ی مدول الاستیسیته با استفاده از بارگذاری در دو انتهای تیر در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱۰: اطلاعات مورد نیاز برای محاسبات در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی

	m(kg)	P(N)	$\delta(0.01mm)$	PP(N ²)	P δ (0.01N.mm)	δ^2 (10 ⁻⁴ mm ²)	d(0.01mm)	dd (10 ⁻⁴ mm ²)
	۰/۲	۱/۹۶۲	۱۱	۳/۸۴۹۴	۲۱/۵۸۲	۱۲۱	۰/۱۲۰۸	۰/۰۱۴۵۹
	۰/۴	۳/۹۲۴	۲۲	۱۵/۳۹۷۸	۸۶/۳۲۸	۴۸۴	۰/۲۴۱۶	۰/۰۵۸۳۷
	۰/۶	۵/۸۸۶	۳۳	۳۴/۶۴۵۰	۱۹۴/۲۳۸	۱۰۸۹	۰/۳۶۲۴	۰/۱۳۱۳
	۰/۸	۷/۸۴۸	۴۴	۶۱/۵۹۱۱	۳۴۵/۳۱۲	۱۹۳۶	۰/۴۸۳۲	۰/۲۳۳۵
	۱	۹/۸۱	۵۶	۹۶/۲۳۶۱	۵۴۹/۳۶	۳۱۳۶	-۰/۳۹۵۹	۰/۱۵۶۷
	۱/۲	۱۱/۷۷۲	۶۷	۱۳۸/۵۸۰۰	۷۸۸/۷۲۴	۴۴۸۹	-۰/۲۷۵۱	۰/۰۷۵۶۸
مجموع	۲۲/۵	۲۲۰/۷۲۵	۲۳۳	۳۵۰/۲۹۹۴	۱۹۸۵/۵۴۴	۱۱۲۵۵	۰/۵۳۷	۰/۶۷۰۱

مقدار شیب خط رگرسیون برابرست با:

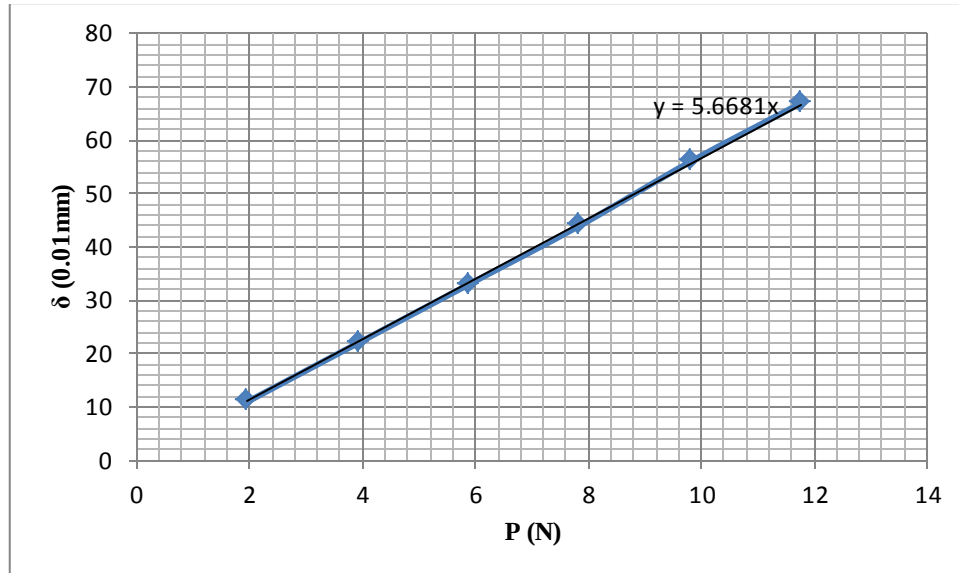
$$a = \frac{[P\delta]}{[PP]} = \frac{1985.544}{350.2994} = 5.6681 \frac{0.01mm}{N}$$

و مقدار ضریب همبستگی (r^2) برابرست با:

$$r^2 = \frac{[P\delta]^2}{[PP][\delta\delta]} = \frac{1985.544^2}{350.2994 \times 11255} = 0.9999$$

نزدیک بودن مقدار ضریب همبستگی به ۱ نشانگر این است که آزمایش از دقت خوبی برخوردار است.

نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۱۹: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) برحسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی

با توجه به رابطه‌ی خیز تیر برحسب بار اعمالی داریم:

$$a = \frac{23l^3}{648EI} \rightarrow E = \frac{23l^3}{648al}$$

$$\rightarrow E = \frac{23 \times (452 \times 10^{-3})^3}{648 \times (5.6681 \times 10^{-5}) \times (241.34 \times 10^{-12})} = 2.3961 \times 10^{11} Pa = 239.6080 GPa$$

حال برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول الاستیسیته می‌بایست ابتدا میزان خطای شیب خط رگرسیون را به دست آوریم:

$$\alpha^2 = \frac{[dd]}{N-2} = \frac{0.6701}{6-2} = 0.1675 (10^{-4} mm^2)$$

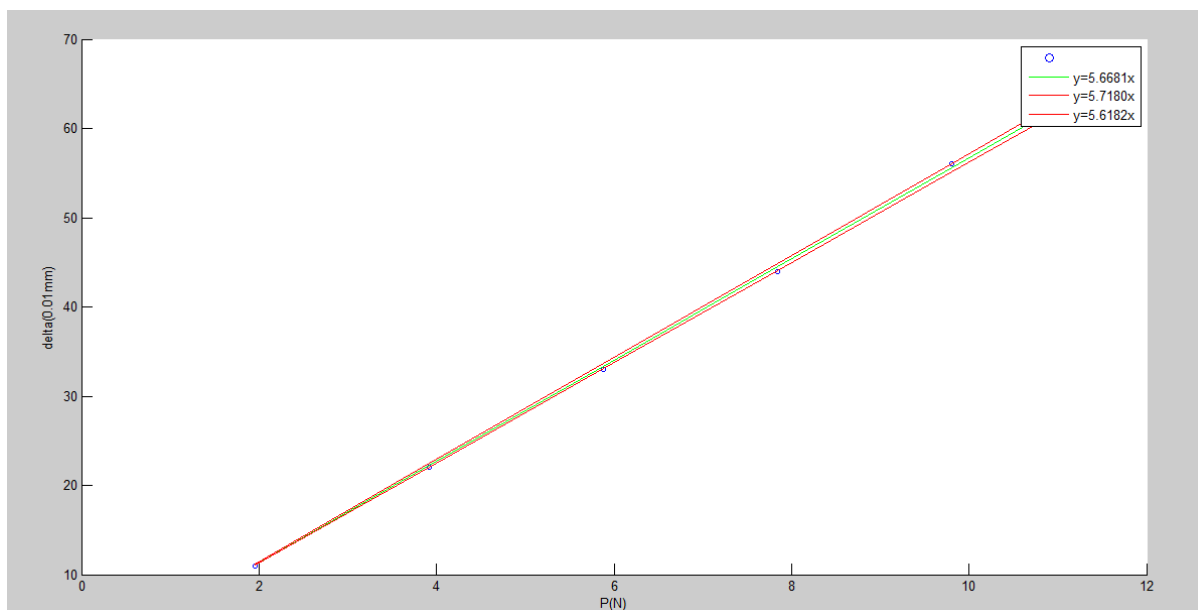
$$\Delta = \begin{vmatrix} [PP] & [P] \\ [P] & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 350.2994 & 41.202 \\ 41.202 & 6 \end{vmatrix} = 404.1916 (N^2)$$

$$\frac{\alpha_a^2}{N} = \frac{\alpha^2}{\Delta} \rightarrow \frac{\alpha_a^2}{6} = \frac{0.1675}{404.1916} \rightarrow \alpha_a = 0.04986 \frac{0.01mm}{N}$$

با به دست آمدن خطای شیب خط رگرسیون، می‌توان معادله‌ی خطوط اعتماد را به شکل زیر نوشت:

$$\delta = (5.6681 \pm 0.04986)P$$

خطوط اعتماد در شکل زیر آورده شده‌اند:



شکل ۲۰: نمودار تغییرات جابجایی وسط تیر (δ) بر حسب بار اعمالی (P) در حالت بارگذاری بین دو تکیه‌گاه تیر فولادی به همراه خطوط اعتماد برای محاسبه‌ی میزان خطای مدول ینگ تیر، طبق فرمول موجود برای خیز وسط تیر داریم:

$$\delta = \frac{23Pl^3}{648EI} \rightarrow a = \frac{23l^3}{648EI} \rightarrow E = \frac{23l^3}{648aI}$$

حال از دو طرف معادله دیفرانسیل لگاریتمی می‌گیریم:

$$\log(E) = \log(23) + 3\log(l) - \log(648) - \log(a) - \log(I)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{E} = 3 \frac{dl}{l} - \frac{da}{a} - \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{l} \Delta l + \frac{1}{a} \Delta a + \frac{1}{I} \Delta I$$

حال می‌بایست میزان خطای موجود برای هر یک از پارامترها را محاسبه کنیم:

$$\Delta l = \frac{1}{2} mm = 0.5 mm$$

$$\Delta a = \alpha_a = 0.04986 \frac{0.01 mm}{N}$$

$$I = \frac{1}{12} ab^3 \rightarrow \log(I) = \log\left(\frac{1}{12}\right) + \log(a) + 3\log(b)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{da}{a} + 3 \frac{db}{b} \rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3 \frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta a = \Delta b = \frac{0.02}{2} mm = 0.01 mm$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{0.01}{24.92} + 3 \times \frac{0.01}{4.88} = 0.006549$$

$$\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{452} \times 0.5 + \frac{1}{5.6681} \times 0.04986 + 0.006549 = 0.01866$$

$$\rightarrow \Delta E = 4.4721 GPa$$

بنابراین با توجه به مقدار خطای محاسبه شده می‌توان ضریب الاستیسیته‌ی تیر را پس از اعمال تصحیح ارقام به شکل زیر نوشت:

$$E = (240 \pm 5) GPa$$

۴-۲-۳- تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول

برای به دست آوردن جابجایی ناشی از بارگذاری در این آزمایش نیازمند در درست داشتن مدول الاستیسیته‌ی تیر هستیم که می‌توان آن را با استفاده از میانگین‌گیری از نتایج حاصل از دو آزمایش قبل به دست آورد، یعنی:

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{234.8850 + 239.6080}{2} = 237.2465 \text{ GPa}$$

نتایج حاصل از این آزمایش در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱۱: نتایج حاصل از آزمایش تحقیق اصل دوطرفه‌ی ماکسول برای تیر فولادی

m(kg)	P(N)	$\delta_{12}(0.01\text{mm})$ در ۱۲۰mm از یک تکیه‌گاه	$\delta_{21}(0.01\text{mm})$ در وسط تیر	$\delta_{12}(0.01\text{mm})$ در ۱۲۰mm از یک تکیه‌گاه (تثوری)	$\delta_{21}(0.01\text{mm})$ در وسط تیر (تثوری)	درصد خطای آزمایش برای δ_{12}	درصد خطای آزمایش برای δ_{21}
۰/۲	۴/۹۰۵	۵	۵	۴/۳۷۵۷	۴/۳۷۵۷	۱۴/۲۶۷۴	۱۴/۲۶۷۴
۰/۴	۹/۸۱	۹	۱۰	۸/۷۵۱۴	۸/۷۵۱۴	۲/۸۴۰۷	۱۴/۲۶۷۴
۰/۶	۱۴/۷۱۵	۱۴	۱۵	۱۳/۱۲۷۱	۱۳/۱۲۷۱	۶/۶۴۹۶	۱۴/۲۶۷۴
۰/۸	۱۹/۶۲	۱۹	۱۹	۱۷/۵۰۲۸	۱۷/۵۰۲۸	۸/۵۵۴۱	۸/۵۵۴۱
۱	۲۴/۵۲۵	۲۴	۲۴	۲۱/۸۷۸۵	۲۱/۸۷۸۵	۹/۶۹۶۷	۹/۶۹۶۷
۱/۲	۲۹/۴۳	۲۹	۲۹	۲۶/۲۵۴۳	۲۶/۲۵۴۳	۱۰/۴۵۸۱	۱۰/۴۵۸۱

۵- بحث و بررسی نتایج آزمایش

در این آزمایش هدف بررسی تغییر مکان تیرهای مستقیم تحت اثر بار اعمال شده به آن‌ها می‌باشد، همان‌گونه که از روابط تئوری می‌دانیم تغییرات تغییر مکان تیر برحسب نیروی اعمالی به صورت خطی است که می‌توان صحت این موضوع را با استفاده از آزمایش تحقیق کرد؛ ضمناً با استفاده از این آزمایش می‌توان به تحقیق روابط کلاسیک خیز تیر با توجه به شکل سطح مقطع پرداخت؛ همچنین با استفاده از روابط مربوط به خط رگرسیون و فرمول‌های مربوط به خیز تیرهای مستقیم، می‌توانیم مقدار مدول الاستیسیته‌ی هر تیر را به دو روش محاسبه و آن‌ها را با یکدیگر و با مقادیر درج شده در مراجع معتبر مقایسه کنیم. در ادامه‌ی این بخش توضیحاتی در این زمینه ارائه خواهد شد و در مورد علل اختلاف نتایج به دست آمده از آزمایش با نتایج مورد انتظار از روابط تئوری موجود بحث می‌شود.

همان‌طور که در بخش نتایج آزمایش محاسبه شد، میان خیز تیر (δ) و نیروی اعمالی (P) با دقت خوبی همبستگی خطی وجود دارد (نزدیک بودن ضریب همبستگی (r^2) به یک مؤید این موضوع است)، همچنین از روابط مربوط به خیز تیر که در بخش تئوری آورده شده است ملاحظه می‌شود که میان خیز تیر و نیروی اعمالی رابطه‌ای خطی وجود دارد بنابراین نتایج حاصل از آزمایش با نتایج مورد انتظار از روابط تئوری مطابقت دارند. میزان ضریب همبستگی محاسبه شده براساس جابجایی‌های نقطه‌ای میانی هر یک از دو تیر مسی و فولادی در دو حالت بارگذاری مورد آزمایش در جداول زیر آورده شده است:

جدول ۱۲: ضرایب همبستگی (r^2) محاسبه شده برای تیر مسی

ضریب همبستگی محاسبه شده هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها	ضریب همبستگی محاسبه شده هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر
۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹

جدول ۱۳: ضرایب همبستگی (r^2) محاسبه شده برای تیر فولادی

ضریب همبستگی محاسبه شده هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها	ضریب همبستگی محاسبه شده هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر
۰/۹۹۹۹	۱

کار دیگری که در بخش نتایج آزمایش انجام شد محاسبه‌ی مدول الاستیسیته (E) برای هر دو تیر مسی و فولادی با استفاده از روابط تئوری موجود برای خیز تیر بود که با استفاده از شیب به دست آمده از روابط رگرسیون و برابر قراردادن این شیب با شیب منحنی تغییرات خیز بر حسب بار اعمالی محاسبه می‌شود. میزان مدول الاستیسیته‌ی محاسبه شده برای هر دو تیر در جداول زیر آورده شده است:

جدول ۱۴: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر

محدوده‌ی به دست آمده برای مدول الاستیسیته پس از تصحیح ارقام (GPa)	ΔE (GPa)	E (GPa)
$123/2 \pm 0/9$	۰/۸۷۷۰	۱۲۳/۲۱۱۱

جدول ۱۵: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها

محدوده‌ی به دست آمده برای مدول الاستیسیته پس از تصحیح ارقام (GPa)	ΔE (GPa)	E (GPa)
124 ± 3	۲/۱۱۹۲	۱۲۴/۴۱۹۸

جدول ۱۶: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر فولادی هنگام بارگذاری در دو انتهای تیر

محدوده‌ی به دست آمده برای مدول الاستیسیته پس از تصحیح ارقام (GPa)	$\Delta E(\text{GPa})$	$E(\text{GPa})$
235 ± 4	$3/0.645$	$234/885.0$

جدول ۱۷: نتایج به دست آمده برای مدول الاستیسیته‌ی تیر مسی هنگام بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو سر تکیه‌گاه‌ها

محدوده‌ی به دست آمده برای مدول الاستیسیته پس از تصحیح ارقام (GPa)	$\Delta E(\text{GPa})$	$E(\text{GPa})$
240 ± 5	$4/4721$	$239/608.0$

از آنجایی که مدول الاستیسیته‌ی هر تیر تابع جنس آن است بنابراین می‌بایست مقدار مدول الاستیسیته‌ی محاسبه شده از هر دو روش مقداری مساوی باشد که تقریباً این طور نیز هست و علت اختلاف اندک مدول‌های محاسبه شده با استفاده از آزمایش را می‌توان به عوامل ایجادکننده‌ی خطا مرتبط کرد که در ادامه آورده خواهند شد. از طرف دیگر می‌توان میانگین مدول‌های الاستیسیته‌ی به دست آمده از طریق دو آزمایش انجام شده را با مدول‌های الاستیسیته‌ی موجود برای مس و فولاد که در مراجع معتبر آورده شده‌اند مقایسه کرد و درصد خطای موجود در آزمایش را به دست آورد. نتایج حاصل در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱۸: مقایسه‌ی مدول الاستیسیته‌ی به دست آمده از آزمایش و مدول الاستیسیته‌ی تئوری برای تیر مسی

درصد خطای آزمایش	$E_t(\text{GPa})$	$E_e(\text{GPa})$
$3/1796$	120	$123/8155$

جدول ۱۹: مقایسه‌ی مدول الاستیسیته‌ی به دست آمده از آزمایش و مدول الاستیسیته‌ی تئوری برای تیر فولادی

درصد خطای آزمایش	$E_t(\text{GPa})$	$E_e(\text{GPa})$
$18/6233$	200	$237/2465$

از نتایج جدول بالا مشخص است که نتایج به دست آمده برای تیر مسی از دقت بسیار بالایی برخوردار است و نتایج به دست آمده برای تیر فولادی نیز دقت قابل قبولی دارند. علل اختلاف بین نتایج حاصل از آزمایش و نتایج مندرج در جداول استاندارد را می‌توان در عوامل ایجادکننده‌ی خطا جستجو کرد که در ادامه آورده خواهند شد.

قسمت آخر بخش نتایج آزمایش به تحقیق درستی اصل دو طرفه‌ی ماکسول در دو تیر مورد آزمایش اختصاص داشت و از آنجا که میزان جابجایی نقطه‌ی میانی تیر هنگام بارگذاری در فاصله‌ی 120 mm از تکیه‌گاه با میزان جابجایی این نقطه در هنگام بارگذاری در وسط تیر تقریباً برابر بود، می‌توان صحت این اصل را با استفاده از آزمایش تأیید کرد و عدم برابری کامل این دو جابجایی را می‌توان به عوامل ایجادکننده‌ی خطا در آزمایش مرتبط کرد که در زیر آورده شده‌اند.

علل خطا در این آزمایش عبارتند از:

۱- پراب ساعت حتماً در هنگام آزمایش می‌بایست بر سطح تیر عمود باشد و در غیر این صورت خطای زیادی در نتایج به دست آمده از آزمایش ایجاد می‌شود چرا که خیز عمده‌ی نقطه‌ی میانی تیر به وسیله‌ی ساعت اندازه‌گیری نمی‌شود و بنابراین مدول الاستیسیته‌ی تیر نیز که از روی شیب منحنی تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی به دست می‌آید نیز دچار خطا خواهد بود.

- ۲- تعیین محل بارگذاری به دلیل آنکه به وسیله‌ی ابزارآلات دقیق انجام نمی‌شود دارای خطاست و بنابراین استفاده از روابطی که در بخش تئوری ذکر شده‌اند برای تعیین خیز نقطه‌ی میانی تیر دارای مقداری خطا خواهد بود و بنابراین مدول الاستیسیته‌ی محاسبه شده با استفاده از این روابط نیز دارای خطاست.
- ۳- وزن آویز اعمال بار در محاسبات وارد نمی‌شود اگرچه باعث اعمال نیروی اضافی (از مقدار مورد نظر ما) بر روی تیر می‌شود بنابراین شیب منحنی تغییرات جابجایی وسط تیر برحسب بار اعمالی بیشتر از مقدار واقعی در نظر گرفته می‌شود و مقدار مدول الاستیسیته‌ی به دست آمده کمتر از مقدار واقعی خواهد بود.
- ۴- نوسان آونگ گونه‌ی آویز اعمال بار در نتایج تأثیرگذار است چرا که باعث می‌شود تا مقدار بار مورد انتظار ما بر تیر وارد نشود و در نتیجه نتایج به دست آمده از آزمایش (مانند مدول الاستیسیته) دارای خطا باشند.
- ۵- جرم وزنه‌های مورد استفاده در آزمایش ممکن است دقیقاً برابر جرم نامی آن‌ها نباشد که سبب ایجاد خطا در بار اعمال شده به تیر و در نتیجه‌ی آن مدول الاستیسیته‌ی حاصله خواهد شد.

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

هدف از انجام این آزمایش در ابتدا تحقیق خطی بودن تغییرات خیز تیر برحسب بار اعمالی به آن و همچنین تحقیق روابط کلاسیک خیز تیر با توجه به شکل سطح مقطع است؛ هدف دیگر از انجام این آزمایش یافتن مدول ارتجاعی تیر و تحقیق ثابت بودن آن می‌باشد؛ آخرین هدف از انجام این آزمایش نیز تحقیق درستی اصل دو طرفه‌ی ماکسول است.

در بخش اول این گزارش مقدمه‌ای در مورد خیز تیر و همچنین تیرهای خمیده آورده شده است و روش‌های موجود برای تحلیل تیرهای خمیده مورد بررسی قرار گرفته است؛ در ادامه‌ی این بخش نیز جهت‌گیری گزارش ذکر شده است. در بخش دوم ابتدا در مورد چگونگی استخراج روابط مربوط به خیز تیر تحت خمش خالص توضیح داده شده است و پس از آن توضیحاتی در مورد اصل دو طرفه‌ی ماکسول آورده شده است.

در بخش سوم توضیحاتی در مورد چگونگی انجام آزمایش بر روی دو تیر مسی و فولادی و همچنین وسایل اندازه‌گیری مورد استفاده در انجام این آزمایش آورده شده است و منابع احتمالی خطا به طور خلاصه توضیح داده شده اند.

در بخش چهارم با استفاده از اطلاعات به دست آمده از آزمایش و همچنین روابط خط رگرسیون به بررسی رابطه‌ی بین میزان خیز تیر و نیروی اعمالی پرداخته شد و پس از آن میزان مدول الاستیسیته‌ی تیر و میزان خطای آن محاسبه گردید. در این بخش مشاهده شد که بین مقدار خیز نقطه‌ی میانی تیر و میزان بار وارده به تیر همبستگی خطی با دقت قابل قبولی برقرار است (با توجه به ضریب همبستگی نزدیک ۱) که با فرمول‌های موجود مطابقت دارد، همچنین در ادامه‌ی این بخش با مساوی قرار دادن شیب خط رگرسیون با شیب منحنی خیز تیر بر حسب بار اعمالی (که از فرمول‌های موجود در بخش تئوری به دست می‌آید) مدول الاستیسیته‌ی هر دو تیر به دو روش محاسبه شد و با توجه به روابط خطای رگرسیون میزان خطای آن نیز به دست آمد؛ در انتهای این بخش نیز صحت اصل دو طرفه‌ی ماکسول با استفاده از نتایج به دست آمده از آزمایش مورد بررسی قرار گرفت.

در بخش پنجم نتایج آزمایش مورد بحث و بررسی بیشتر قرار گرفتند و در مورد علل اختلاف بین مدول‌های الاستیسیته‌ی محاسبه شده با استفاده از دو آزمایش انجام شده و همچنین اختلاف بین آن‌ها با مدول الاستیسیته‌ی مندرج در جداول معتبر که همان عوامل ایجاد کننده‌ی خطا در آزمایش می‌باشند، توضیحاتی ارائه شد. نتایج کلی آزمایش در زیر به صورت خلاصه آورده شده است:

- بین مقدار خیز نقطه‌ی میانی تیر و میزان بار اعمالی در هر دو تیر مسی و فولادی همبستگی خطی با دقت قابل قبولی وجود دارد، همان گونه که فرمول‌های موجود مؤید این موضوع هستند. مقادیر ضریب همبستگی محاسبه شده عبارتند از:

برای تیر مسی تحت بار اعمال شده به دو انتهای آن: $r^2 = 0.9999$

برای تیر مسی تحت بار اعمال شده به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه: $r^2 = 0.9999$

برای تیر فولادی تحت بار اعمال شده به دو انتهای آن: $r^2 = 1$

برای تیر فولادی تحت بار اعمال شده به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه: $r^2 = 0.9999$

- مقدار مدول الاستیسیته‌ی محاسبه شده با استفاده از شیب خط رگرسیون به کمک دو آزمایش انجام شده برای هر دو تیر مسی و فولادی با دقت بسیار خوبی با یکدیگر برابرند و علل اختلاف بین نتایج حاصله ناشی از علل ایجاد خطا در آزمایش هستند که در بخش ۵ به طور کامل توضیح داده شده‌اند. مقادیر ضرایب الاستیسیته با در نظر گرفتن خطای آن را می‌توان به صورت زیر گزارش کرد:

برای تیر مسی تحت بار اعمال شده به دو انتهای آن: $E = (123.2 \pm 0.9)GPa$

برای تیر مسی تحت بار اعمال شده به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه: $E = (124 \pm 3)GPa$

برای تیر فولادی تحت بار اعمال شده به دو انتهای آن: $E = (235 \pm 4)GPa$

برای تیر فولادی تحت بار اعمال شده به فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه: $E = (240 \pm 5)GPa$

از آنجا که مدول الاستیسیته‌ی مس برابر $120GPa$ و مدول الاستیسیته‌ی فولاد برابر $200GPa$ است، مقدار خطای مدول میانگین محاسبه شده به وسیله‌ی آزمایش برای تیر مسی حدود $3/18$ درصد و برای تیر فولادی حدود $18/62$ درصد است.

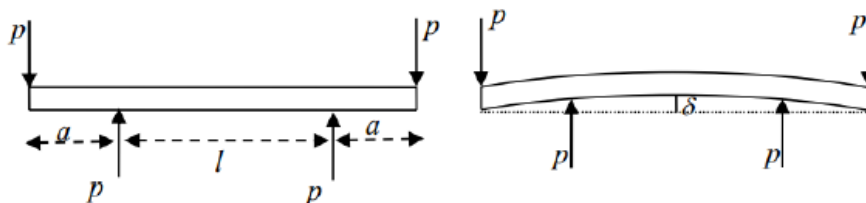
- صحت اصل دوطرفه‌ی ماکسول با استفاده از نتایج آزمایش در هر دو تیر قابل تأیید است.

۷- مراجع

- [۱] دستور کار آزمایشگاه مقاومت مصالح
- [۲] بی‌یر، فردیناند؛ جانستون، راسل؛ دی‌ولف، جان؛ زارع‌پور، غلامرضا؛ **مقاومت مصالح**، انتشارات دانش‌نگار، تهران، ویرایش ششم، ۱۳۹۱.
- [۳] نایی، محمد حسن؛ **مقاومت مصالح**، انتشارات پوران پژوهش، تهران، ویرایش دوم، ۱۳۹۲.

۸- ضمايم

به دست آوردن خيز نقطه‌ی میانی تير هنگام اعمال بارگذاري در دو انتهای تير:
اگر نیروی P در دو انتهای میله‌ای با طول L که فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه آن برابر l و فاصله‌ی هر تکیه‌گاه از سر آزاد نزدیک آن برابر a است وارد شود (مانند شکل زیر) وارد شود، برای تعیین نیروهای تکیه‌گاهی می‌توان نوشت:



شکل ۲۱: بارگذاري در دو انتهای تير

$$\sum M_A = 0 \rightarrow Pa + F_B l - P(l + a) = 0 \rightarrow F_B = P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A + F_B - 2P = 0 \rightarrow F_A = P$$

حال گشتاور خمشی ($M(x)$) در هر نقطه از تير را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$M(x) = EIy'' = -Px + P \langle x - a \rangle + P \langle x - a - l \rangle$$

با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$EIy' = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{\langle x - a \rangle^2}{2} + P\frac{\langle x - a - l \rangle^2}{2} + C_1$$

با انتگرال‌گیری دوباره از رابطه‌ی به دست آمده می‌توان نوشت:

$$EIy = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{\langle x - a \rangle^3}{6} + P\frac{\langle x - a - l \rangle^3}{6} + C_1x + C_2$$

ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند:

$$x = a, y = 0 \rightarrow -P\frac{a^3}{6} + C_1a + C_2 = 0 \rightarrow C_1a + C_2 = P\frac{a^3}{6}$$

$$x = a + l, y = 0 \rightarrow -P\frac{(a+l)^3}{6} + P\frac{l^3}{6} + C_1(a+l) + C_2 = 0 \rightarrow C_1(a+l) + C_2 = P\frac{(a+l)^3}{6} - P\frac{l^3}{6}$$

$$C_1 = \frac{Pa(a+l)}{2}, C_2 = -P\frac{a^3}{3} - P\frac{a^2l}{2} = -Pa^2\left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2}\right)$$

بنابراین:

$$EIy = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{\langle x - a \rangle^3}{6} + P\frac{\langle x - a - l \rangle^3}{6} + \frac{Pa(a+l)}{2}x - Pa^2\left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2}\right)$$

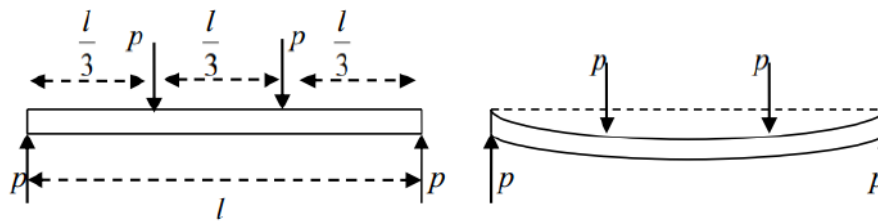
با جایگذاری مختصات وسط تير در فرمول بالا داریم:

$$x = a + l/2$$

$$EIy = -P\frac{\left(a + \frac{l}{2}\right)^3}{6} + P\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{Pa(a+l)}{2}\left(a + \frac{l}{2}\right) - Pa^2\left(\frac{a}{3} + \frac{l}{2}\right) = \frac{Pal^2}{8}$$

$$\rightarrow y = \frac{Pal^2}{8EI}$$

به دست آوردن خیز نقطه‌ی میانی تیر هنگام اعمال بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از دو تکیه‌گاه تیر: اگر نیروی P در فاصله‌ی یک سوم از دو تکیه‌گاه تیری با طول L که فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه آن برابر l و فاصله‌ی هر تکیه‌گاه از سر آزاد نزدیک آن برابر a است وارد شود (مانند شکل زیر)، برای تعیین نیروهای تکیه‌گاهی می‌توان نوشت:



شکل ۲۲: بارگذاری در فاصله‌ی یک سوم از تکیه‌گاه‌های تیر

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -P \frac{l}{3} - P \frac{2l}{3} + F_B l = 0 \rightarrow F_B = P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A + F_B - 2P = 0 \rightarrow F_A = P$$

حال گشتاور خمشی ($M(x)$) در هر نقطه از تیر را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$M(x) = EIy'' = Px - P < x - \frac{l}{3} > - P < x - \frac{2l}{3} >$$

با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$EIy' = P \frac{x^2}{2} - P \frac{< x - \frac{l}{3} >^2}{2} - P \frac{< x - \frac{2l}{3} >^2}{2} + C_1$$

با انتگرال‌گیری دوباره از رابطه‌ی به دست آمده می‌توان نوشت:

$$EIy = P \frac{x^3}{6} - P \frac{< x - \frac{l}{3} >^3}{6} - P \frac{< x - \frac{2l}{3} >^3}{6} + C_1 x + C_2$$

ضرایب C_1 و C_2 از شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند:

$$x = 0, y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x = l, y = 0 \rightarrow P \frac{l^3}{6} - P \frac{(\frac{2l}{3})^3}{6} - P \frac{(\frac{l}{3})^3}{6} + C_1 l = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{9}$$

بنابراین:

$$EIy = P \frac{x^3}{6} - P \frac{< x - \frac{l}{3} >^3}{6} - P \frac{< x - \frac{2l}{3} >^3}{6} - \frac{Pl^2}{9} x$$

با جایگذاری مختصات وسط تیر در فرمول بالا داریم:

$$x = l/2$$

$$EIy = P \frac{(\frac{l}{2})^3}{6} - P \frac{(\frac{l}{6})^3}{6} - \frac{Pl^2}{9} \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{-23Pl^3}{648}$$

$$\rightarrow y = \frac{-23Pal^3}{648EI}$$

اثبات اصل دوطرفه‌ی ماکسول:

اصل دوطرفه‌ی ماکسول به شرح زیر است:

اگر نیروی واحد در نقطه‌ی A از سازه اثر کند و تغییر مکان نقطه‌ی B برابر Δ باشد، چنانچه نیروی واحد در نقطه B از همان سازه اثر کند، تغییر مکان نقطه A همان Δ خواهد بود.

$$F_i \Delta_{ij} = F_j \Delta_{ji}$$



شکل ۲۳: اصل دوطرفه‌ی ماکسول در تیر نشان داده شده

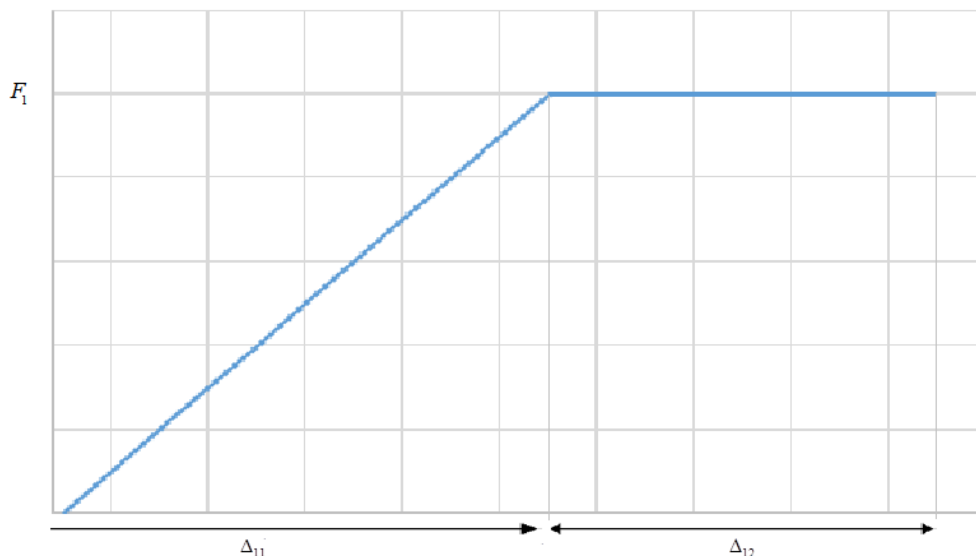
برای اثبات این قضیه کافی است، یک تیر با دو بار در نظر گرفته شود، در ابتدا بار F_1 به تیر اعمال می‌شود، جابجایی در محل اعمال بار Δ_{11} و در محل بار دوم Δ_{12} است. انرژی کرنشی سیستم بر اثر این بارگذاری برابرست با:

$$U_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$$

نیروی دوم در نقطه‌ی دوم در حالی اعمال می‌شود که بار F_1 در جای خود قرار دارد، در این حالت مقدار انرژی کرنشی سیستم برابرست با:

$$U_1 = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12}$$

علت این که در رابطه‌ی بالا برای عبارت دوم ضریب ۱ قرار داده شده است، ثابت بودن نیرو می‌باشد. همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، سطح زیر نمودار نشان دهنده‌ی انرژی کرنشی ناشی از جابجایی نقطه اول می‌باشد:



شکل ۲۴: نمودار نیروی F_1 بر حسب جابجایی نقطه‌ی اول

انرژی کرنشی کل برابر با عبارت زیر می‌باشد.

$$U = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12}$$

حال اگر بارگذاری با نقطه‌ی ۲ شروع شود، طبق روش ذکر شده، انرژی کرنشی به صورت زیر درمی‌آید:

$$U = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_2 \Delta_{21}$$

با مساوی قرار دادن دو عبارت به دست آمده، اصل دوطرفه‌ی ماکسول اثبات می‌شود.