



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

فهرست مطالب

- بیان مسئله و معادله حرکت
- ارتعاش آزاد
- پاسخ سیستم یک درجه آزاد به تحریک هارمونیک و تصادفی
- پاسخ به تحریک دلخواه، پله ای و ضربه
- روش های عددی برای تحلیل دینامیکی
- پاسخ سیستم خطی در برابر زلزله
- سیستم یکدرجه آزاد خطی
- سیستم چند درجه آزاد
- ارتعاش آزاد سیستم چند درجه آزاد

➤ میراثی در سازه ها

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

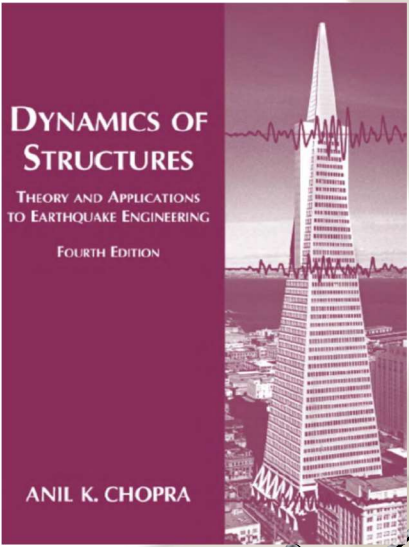
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مراجع:

1. Chopra, A.N. 2012. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th ed., Prentice-Hall, New York.
2. Clough, R.W. and Penzien, J. 2003. Dynamics of Structures, 3rd ed, Computers & Structures, Inc
3. Paz, M, William. L. 2003. "Structural dynamics" 5th Edition, Kluwer Academic Publishers

۴ - مهدی علیرضایی ، علی محمدپور، شبیه سازی دینامیک سازه‌های و ارتعاشات توسط ANSYS و MATLAB



Version: 1.1

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۳

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

فصل اول

بیان مسئله و معادله حرکت

$u(x)$

=

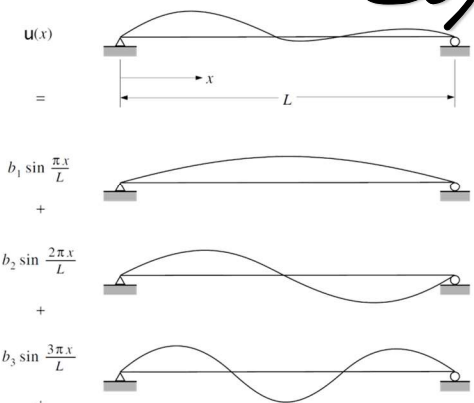
$b_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

+

$b_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$

+

$b_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$



Version: 1.1

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۴

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

انواع تحلیل سازه
- تعریف سیستم یک درجه آزاد و تعریف درجه آزادی دینامیکی
- انواع فنر
- اجزای اصلی در یک سیستم دینامیکی
- معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد



Version: 1.1
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مروری بر واحدهای اندازه گیری

۱- طول:

متریک: متر، سانتیمتر، میلیمتر
آمریکایی: فوت، اینچ

$1 \text{ foot} = 1' = 1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm} = 0.3048 \text{ m}$
 $1 \text{ foot} = 12 \text{ inch} = 12''$
 $1'' = 2.54 \text{ cm}$

۲- وزن:

متریک: تن، کیلوگرم
آمریکایی: پوند، کیلوپوند = ۱۰۰۰ پوند

$1 \text{ ton} = 1000 \text{ kg}$
 $1 \text{ kips} = 1000 \text{ lb}$

Version: 1.1
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

۳- شتاب گرانشی زمین، g

متریک: متر (یا سانتیمتر) بر مجذور ثانیه آمریکایی: فوت (یا اینچ) بر مجذور ثانیه

$$g = 9.81 \text{ m/sec}^2 = 981 \text{ cm/sec}^2 = 32.2 \text{ ft/sec}^2 = 386.4 \text{ in/sec}^2$$

۴- جرم:

$$m = \frac{W}{g} \rightarrow \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}} \quad \text{or} \quad \frac{\text{lb} \cdot \text{sec}^2}{\text{in}}$$

«در بکار بردن جرم و وزن دقت نمایید»

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

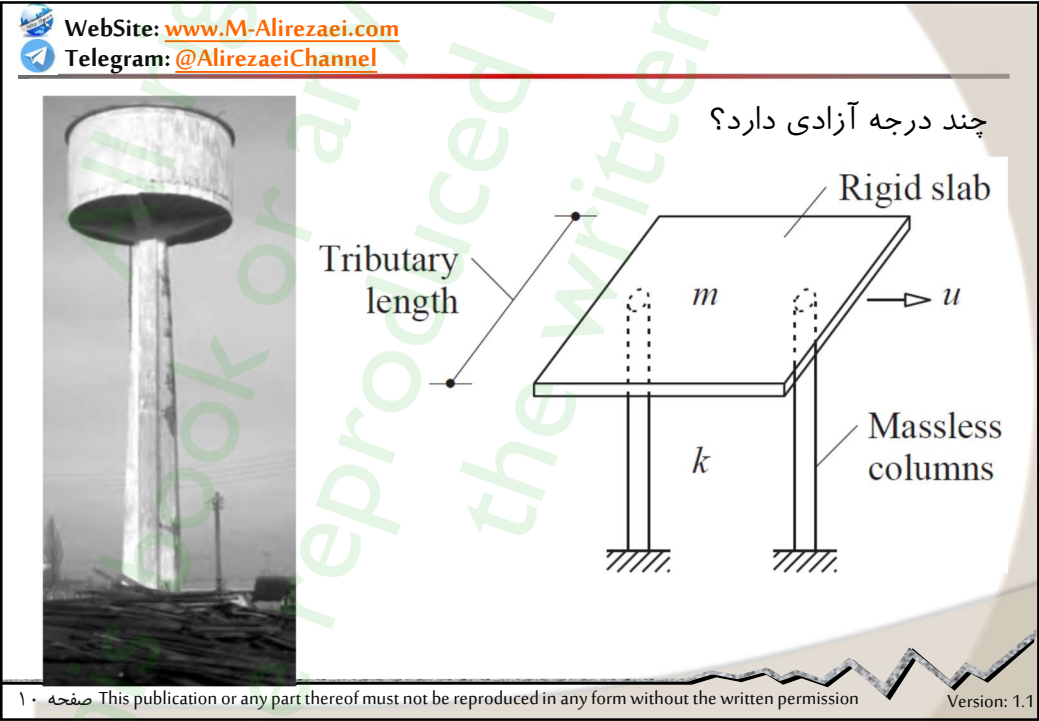
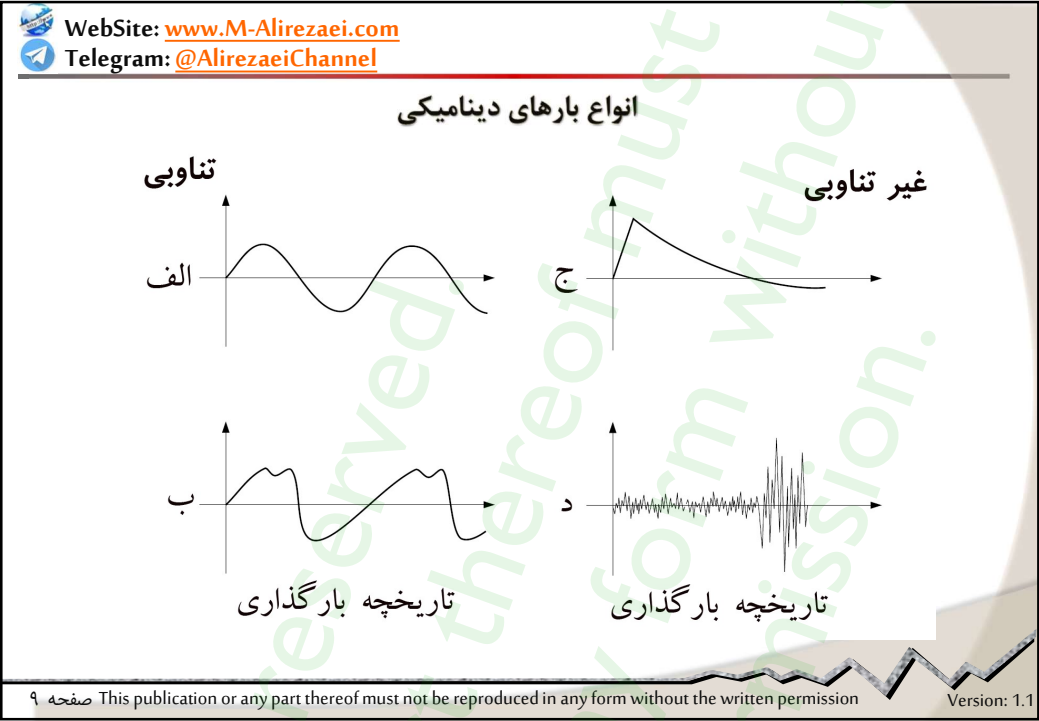
درجات آزادی سازه‌ها

تعداد مولفه‌های مستقل تغییر مکانی لازم برای تعریف وضعیت تغییر مکانی تمام جرم‌ها نسبت به وضعیت اولیه‌شان را تعداد درجات آزادی (DOF) می‌گویند.

قرارداد: از این به بعد ...

$u(t)$	جابجایی
$\frac{du}{dt} \approx \dot{u}(t)$	سرعت
$\frac{d^2u}{dt^2} \approx \ddot{u}(t)$	شتاب

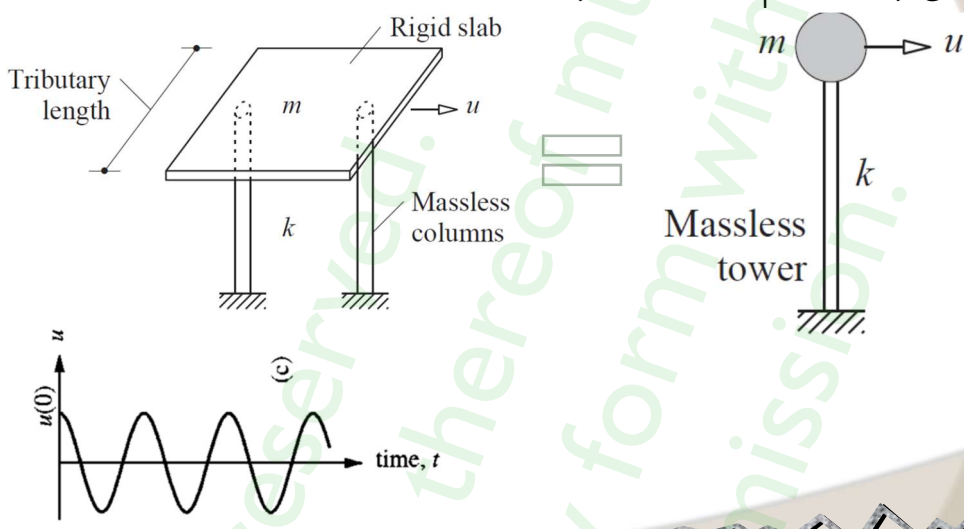
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

می توان سیستم را ایده آل نمود.



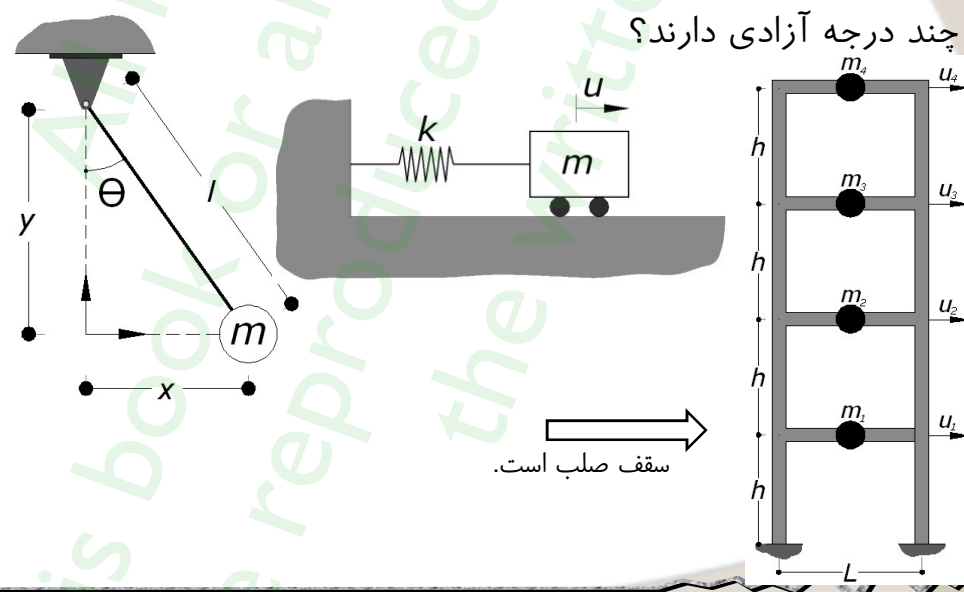
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

چند درجه آزادی دارند؟



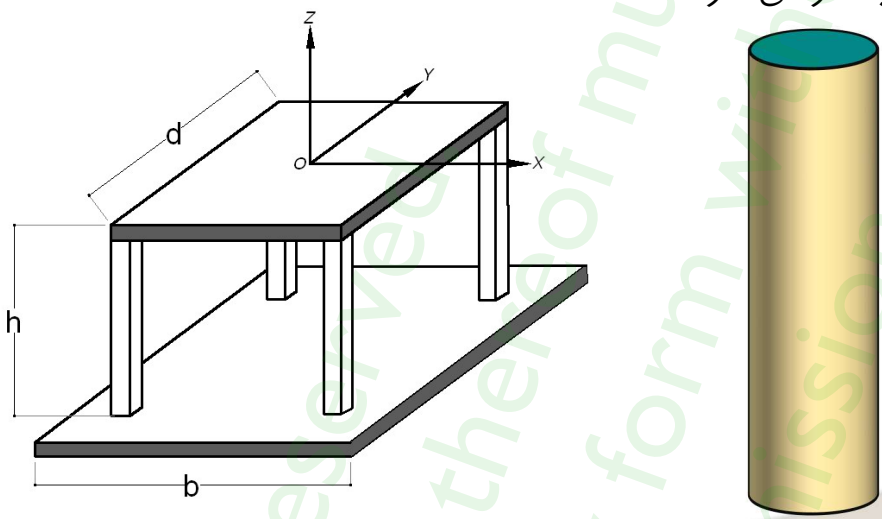
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

چند درجه آزادی دارد؟



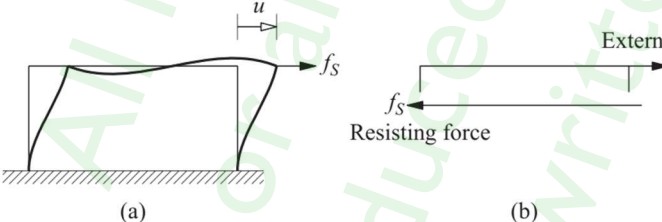
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



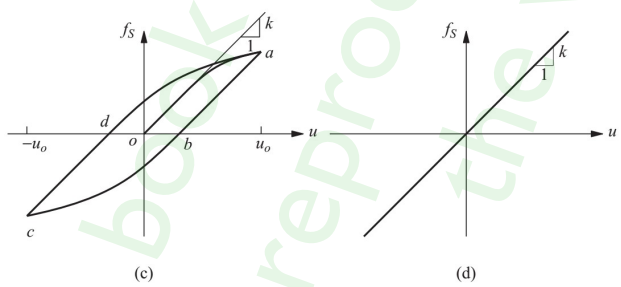
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

رابطه نیرو و جابجایی:



رفتار سازه تحت بار جانبی F_s در دو حالت خطی و غیرخطی در شکل زیر نشان داده شده است.

مشخصه رفتار غیرخطی چیست؟



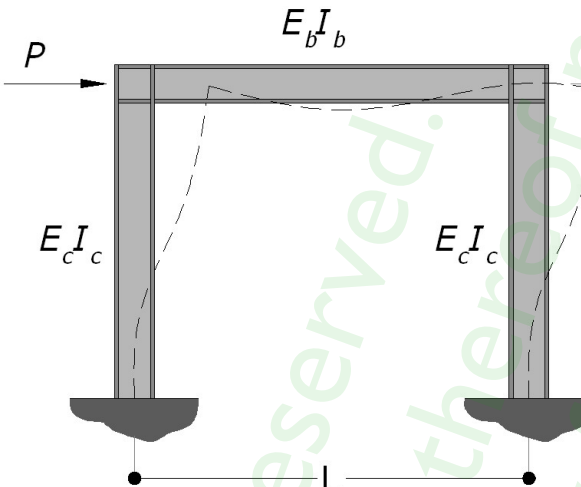
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

چند درجه آزادی دارد؟ سقف صلب نیست.

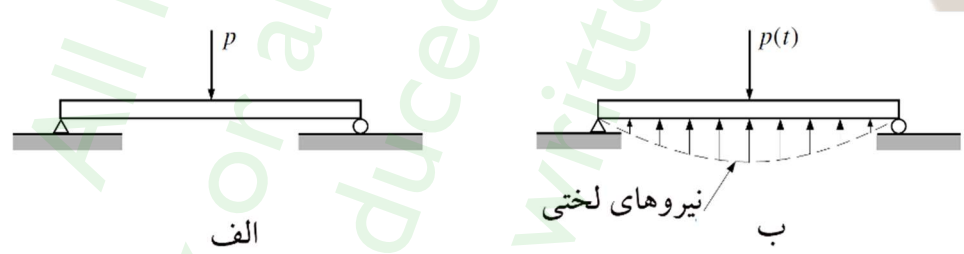


Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مشخصه اساسی مسائل دینامیکی



الف

ب

نیروهای لختی

۱- نیروهای لختی

۲- داشتن پاسخ در هر لحظه

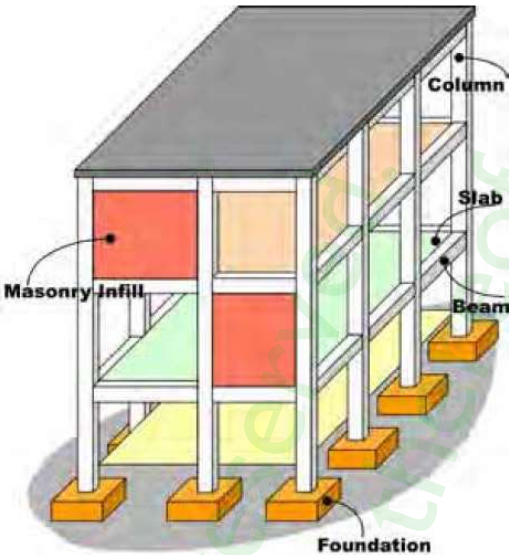
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

اجزای اصلی یک سیستم دینامیکی

۱- جرم



منبع جرم در سازه کجاست؟

$$F_I = ma = m\ddot{u}(t)$$
نیروی اینرسی:

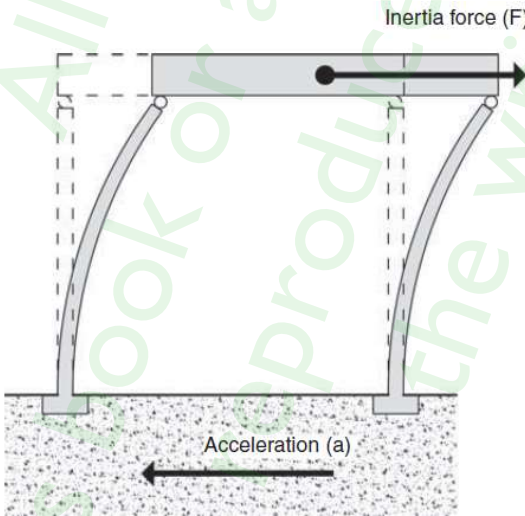
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در صورتی که سقف صلب باشد میتوان کل نیروی اینرسی را در مرکز جرم متمرکز نمود.



ایجاد نیروی اینرسی در جرم سازه

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$F_{Ix} = m\ddot{u}_x$$

نیروی اینرسی در جهت X:

$$F_{Iy} = m\ddot{u}_y$$

نیروی اینرسی در جهت Y:

که در آن m جرم کل سقف همراه با اجزای سازه‌ای است. $\ddot{u}_x$ و $\ddot{u}_y$ نیز به ترتیب شتاب‌های «حرکت انتقالی» سازه در راستای x و y هستند.

$$F_{Io} = I_o \ddot{\theta}$$

نیروی اینرسی برای دوران حول محور قائم:

که در آن I_o ممان اینرسی جرمی دورانی حول مرکز جرم و $\ddot{\theta}$ شتاب دورانی سازه حول محور Z است.

$$I_o = mr^2 = \text{mass moment of inertia}$$

ممان اینرسی جرمی در واقع مقدار جرم هر ذره در فاصله آن تا مرکز جرم است. بنابراین:

$$I_o = \int r^2 dm$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

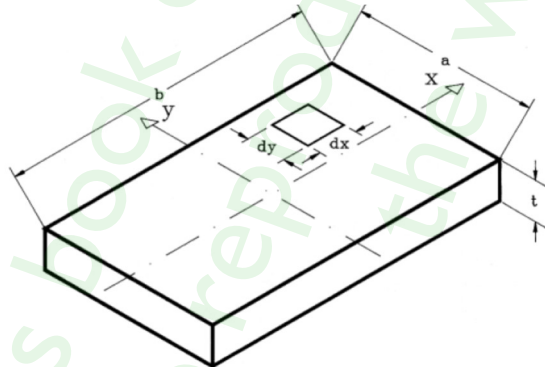
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) برای سطح مستطیل نشان داده شده در شکل زیر، مقدار ممان اینرسی جرمی را تعیین نمایید.

$$I_o = \int r^2 dm \rightarrow r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow I_o = 4\rho t \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} (x^2 + y^2) dx dy = 4\rho t \frac{b^3 a + a^3 b}{48} = \rho abt \frac{b^2 + a^2}{12} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

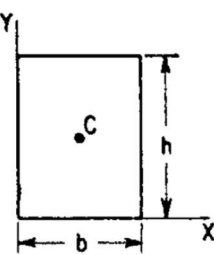


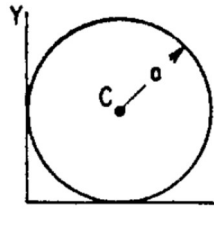
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ممان اینرسی جرمی برای چند شکل مختلف در شکل‌های زیر داده شده است:



$$I_o = \frac{m}{12}(h^2 + b^2)$$


$$I_o = \frac{m}{2}r^2$$

صفحه ۲۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

۲- سختی



سیستم دیوار بنایی

نیروی فنر: $F_s = k\Delta = ku(t)$

صفحه ۲۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com



Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



سیستم دیوار برشی فولادی

صفحه ۲۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

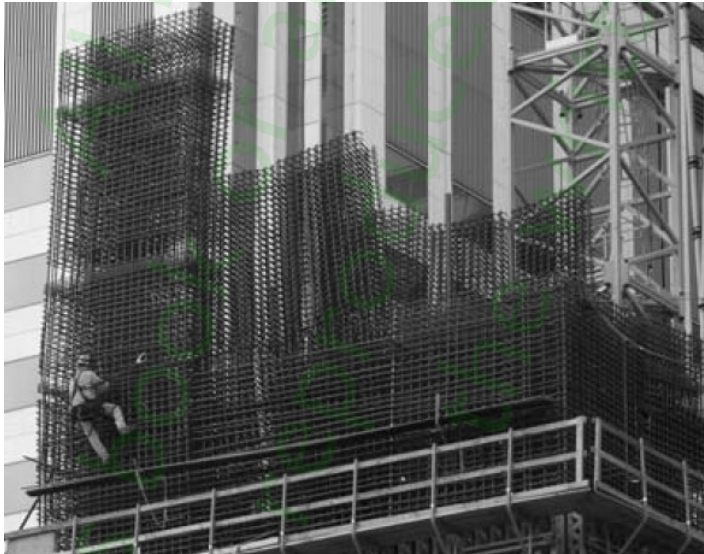
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com



Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



سیستم دیوار برشی بتنی

صفحه ۲۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com



Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



سیستم قاب مهاربندی شده

۲۵ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com



Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



سیستم قاب خمشی

۲۶ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$f_s = ku = k\Delta$$

انواع فنر

فنر موازی

فنر سری

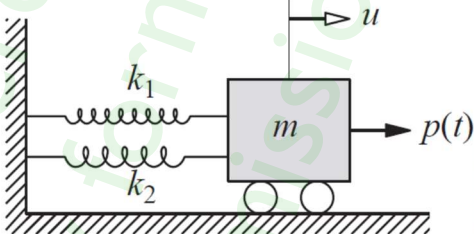
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots$$
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots$$

- تعریف سختی چیست؟

- چگونه سختی یک سازه را میتوان محاسبه نمود؟

- سختی را میتوان با فنر معادل نمود.

در سیستم یک درجه آزاد زیر سختی معادل؟



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1



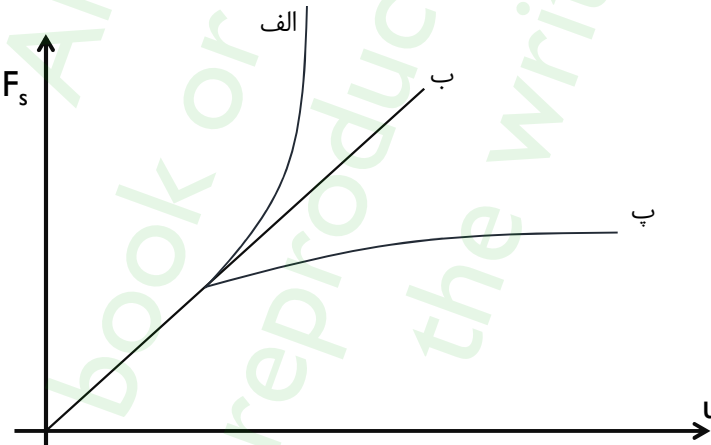
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

سه حالت مختلف برای فنر ممکن است، ایجاد شود:

الف) سخت شونده

ب) فنر خطی

پ) نرم شونده

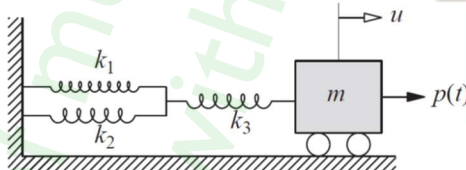
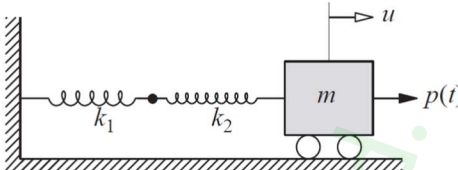


This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

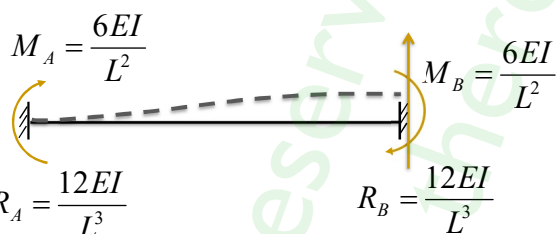


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در سیستم یک درجه آزاد زیر سختی معادل؟



برای راحتی در محاسبه سختی المان‌ها، روابط زیر را به خاطر بسپارید: (مهم)



دو سرگیردار یک واحد جابجا شود

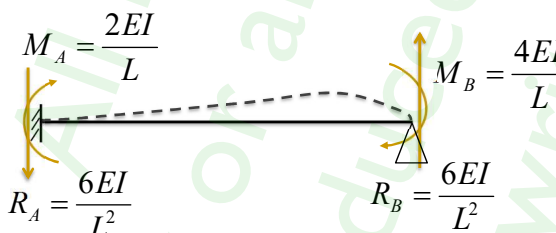
$M_A = \frac{6EI}{L^2}$
 $M_B = \frac{6EI}{L^2}$
 $R_A = \frac{12EI}{L^3}$
 $R_B = \frac{12EI}{L^3}$

صفحه ۲۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

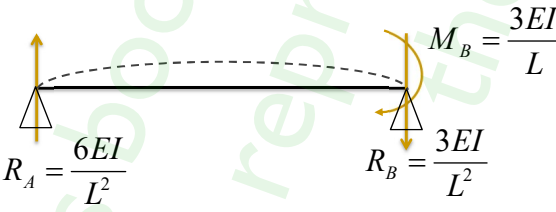


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

دو یک سرگیردار یک سر مفصل در محل تکیه‌گاه مفصلی یک واحد دوران داده شود.



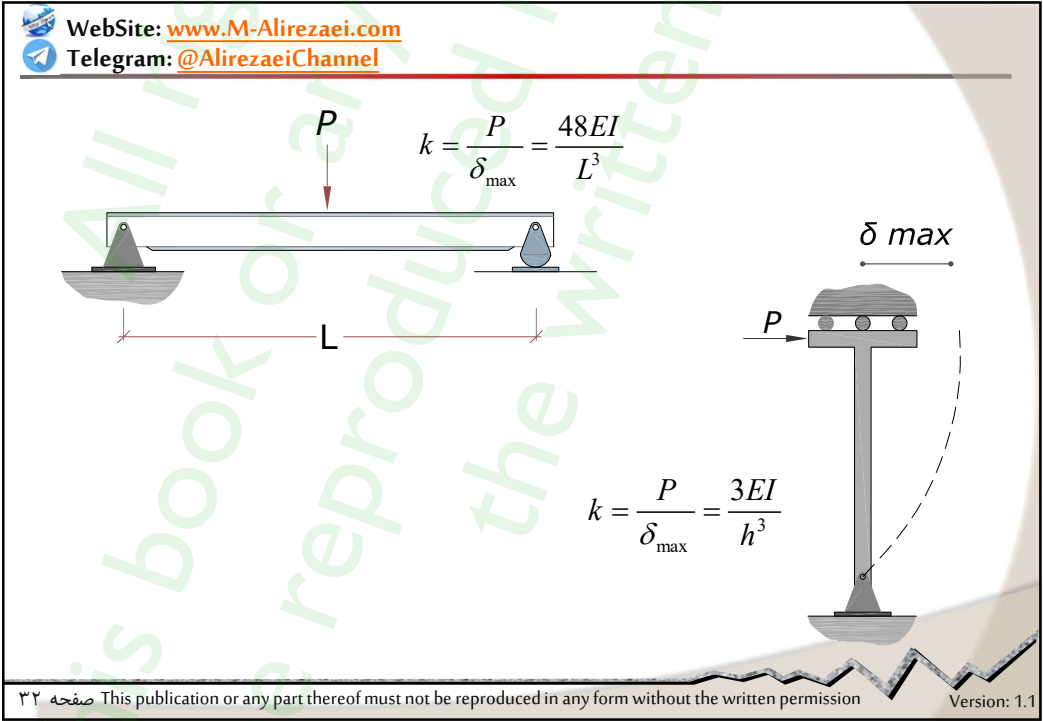
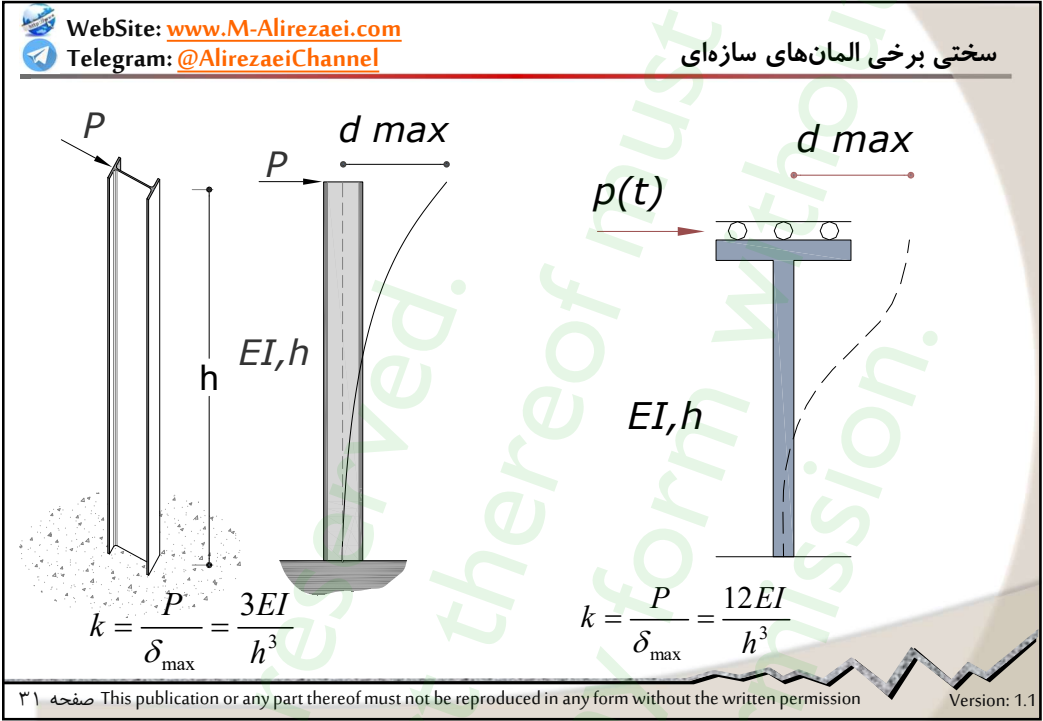
تیر دو سر مفصل از یک سمت به میزان واحد دوران داده شود و از سمت دیگر آزاد است.

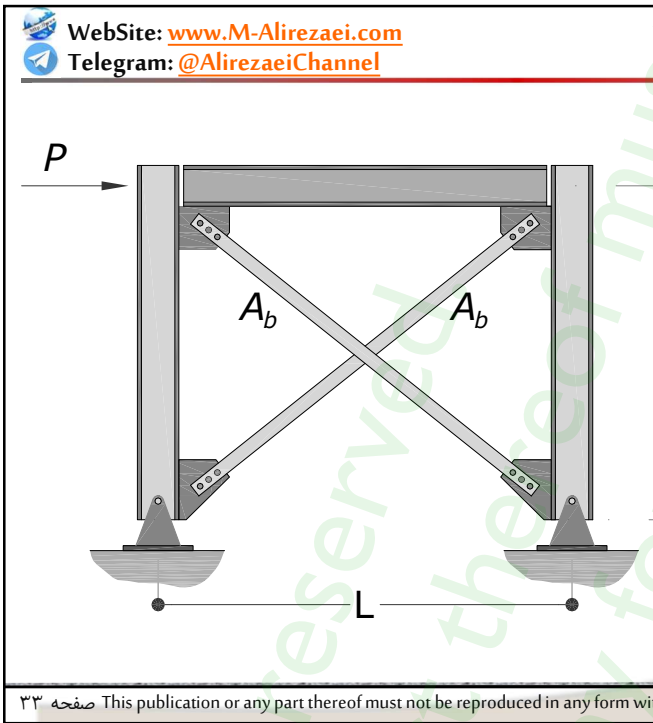


$M_A = \frac{2EI}{L}$
 $M_B = \frac{4EI}{L}$
 $R_A = \frac{6EI}{L^2}$
 $R_B = \frac{6EI}{L^2}$

$M_A = \frac{3EI}{L}$
 $M_B = \frac{3EI}{L}$
 $R_A = \frac{6EI}{L^2}$
 $R_B = \frac{3EI}{L^2}$

صفحه ۳۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



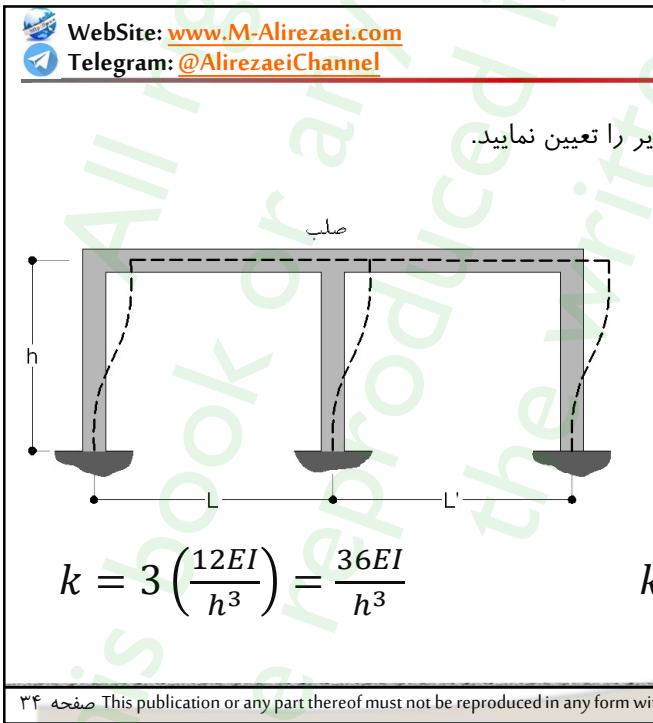


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

اگر عضو فشاری کماتش کند:
$$k = \frac{EL^2 A_b}{(L^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر عضو فشاری کماتش نکند:
$$k = 2 \frac{EL^2 A_b}{(L^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سختی هر یک از سازه‌های زیر را تعیین نمایید.

صلب

$$k = 3 \left(\frac{12EI}{h^3} \right) = \frac{36EI}{h^3}$$

صلب

$$k = 2 \left(\frac{12EI}{h^3} \right) = \frac{24EI}{h^3}$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سختی جانبی سازه زیر را تعیین نمایید.

$$k_{tot} = \frac{12EI}{h^3} + 3 \frac{2EI}{h^3} + \frac{12EI}{(1.5h)^3} = 21.56 \frac{EI}{h^3}$$

صفحه ۳۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال: در شکل زیر، در صورتی که $E_b I_b = \infty$ و $E_b I_b = 0$ مقدار سختی جانبی قاب را تعیین نماید.

If the beam is rigid [i.e., flexural rigidity $E I_b = \infty$]

$$k = \sum_{column} \frac{12E_c I_c}{h^3} = \frac{24E_c I_c}{h^3}$$

On the other hand, for a beam with no stiffness [i.e., $E I_b = 0$]

$$k = \sum_{columns} \frac{3E_c I_c}{h^3} = \frac{6E_c I_c}{h^3}$$

صفحه ۳۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

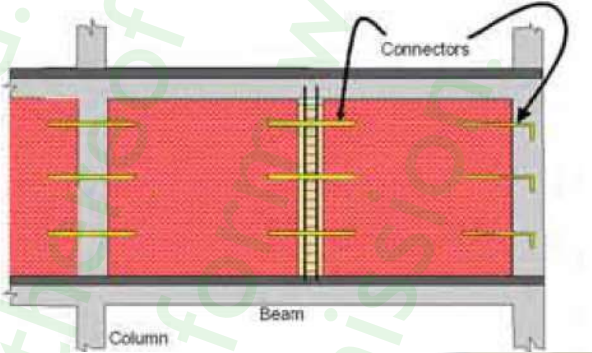


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

۳- میرایی

میرایی عامل اتلاف انرژی است.

نیروی میرایی $F_D = c\dot{u}(t)$

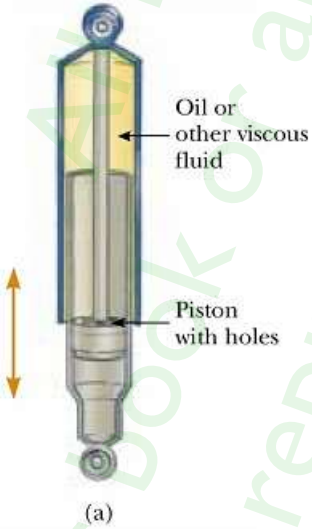


Version: 1.1

صفحه ۳۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



(a)

(b)

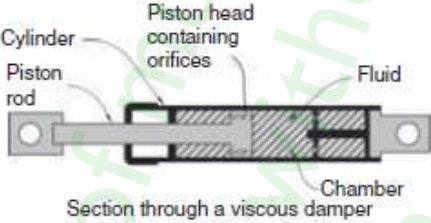
Version: 1.1

صفحه ۳۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)





Section through a viscous damper

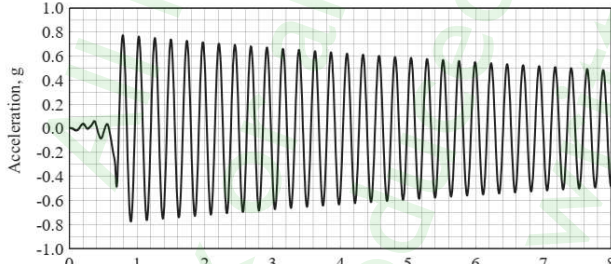


Section through a lead-extrusion damper

صفحه ۳۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



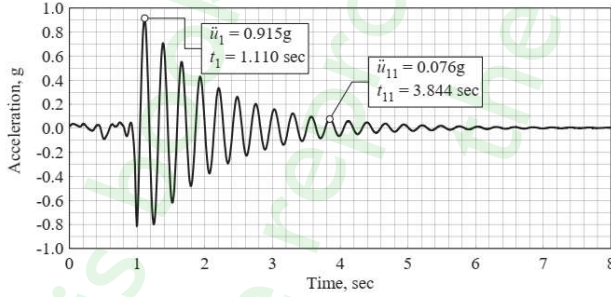
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



Acceleration, g

Time, sec

در شکل روبرو نمودار شتاب در برابر زمان برای ارتعاش یک سیستم یک درجه آزاد نشان داده شده است، میرایی کدام بیشتر است؟



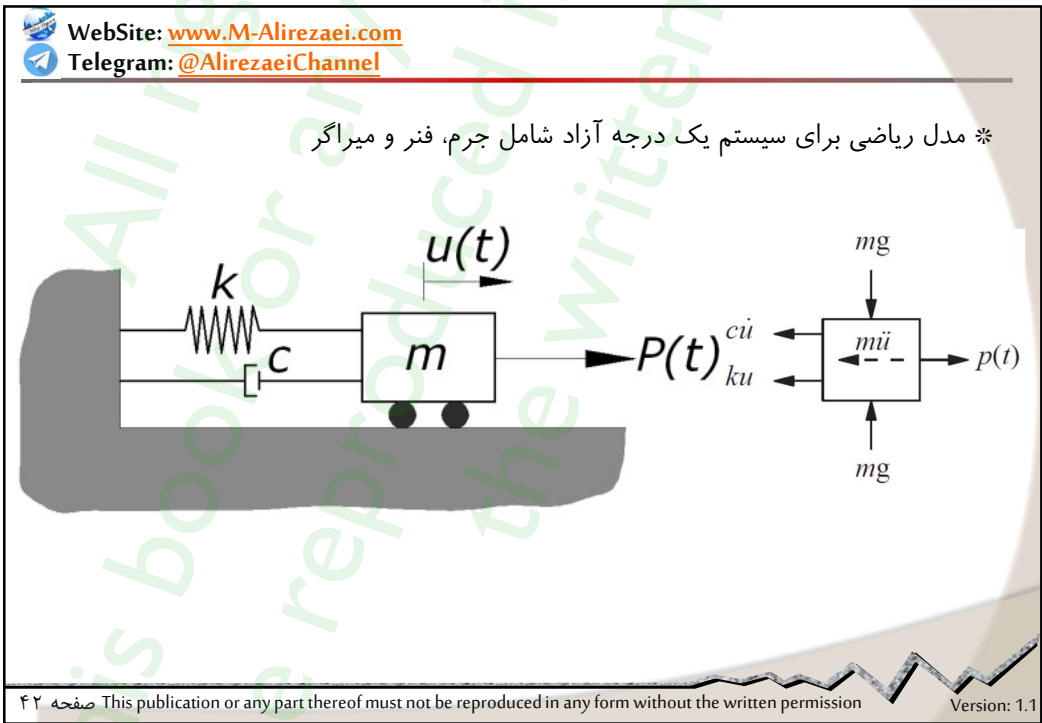
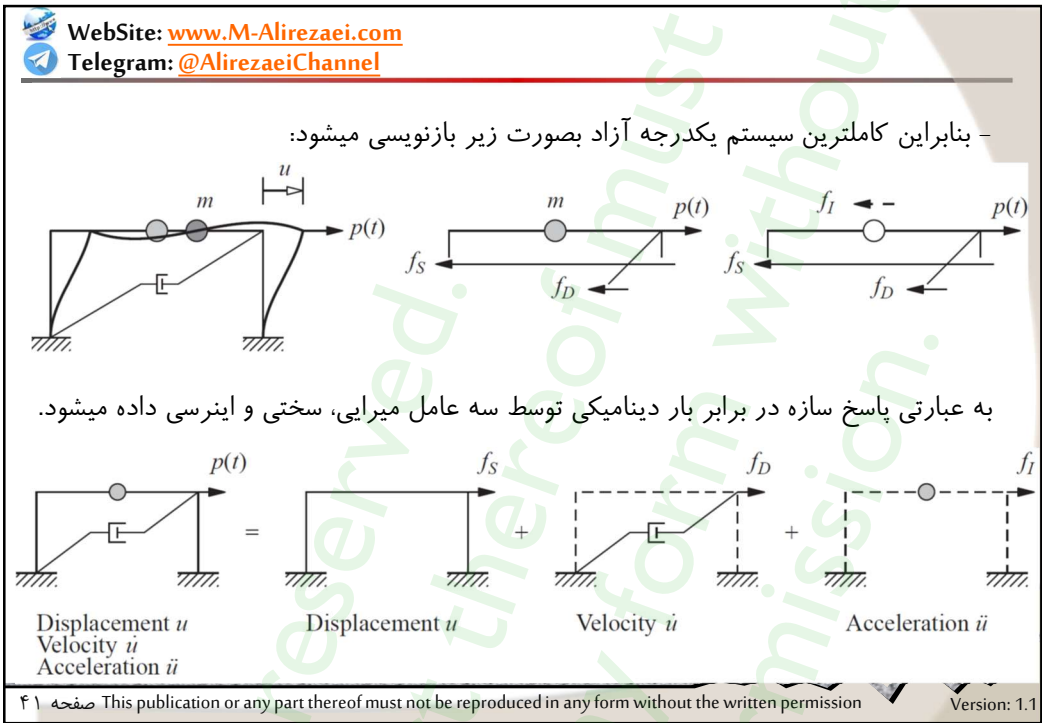
Acceleration, g

Time, sec

$\ddot{u}_1 = 0.915g$
 $t_1 = 1.110 \text{ sec}$

$\ddot{u}_{11} = 0.076g$
 $t_{11} = 3.844 \text{ sec}$

صفحه ۴۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

معادله حرکت سیستم یک درجه آزاد

الف

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

ب

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t)$$

$$f_D(t) = c\dot{u}(t)$$

$$f_S(t) = ku(t)$$

صفحه ۴۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

اثر نیروی ثقلی بر معادله حرکت

الف

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + W$$

$$f_S = ku(t) = k\Delta_{st} + k\bar{u}(t)$$

ب

ج

تغییر مکان
استاتیکی

$$u(t) = \Delta_{st} + \bar{u}(t)$$

صفحه ۴۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

معادله حرکت در اثر زلزله (مولفه انتقالی)

الف

ب

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \equiv p_{eff}(t)$$

صفحه ۴۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

معادله حرکت در اثر زلزله (مولفه دورانی)

حرکت دورانی زمین در عمل اندازه گیری نمی شود ولی می توان از روی حرکت های انتقالی آنها را تخمین زد. مطابق شکل روبرو فرض کنید سازه تحت شتاب دورانی زمین قرار دارد.

جابجایی کلی شامل دو بخش است:

(a) (b)

$$u^t(t) = u(t) + h\theta_g(t) \rightarrow \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + h\ddot{\theta}_g(t)$$

$$m\ddot{u}^t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$\rightarrow m[\ddot{u}(t) + h\ddot{\theta}_g(t)] + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -mh\ddot{\theta}_g(t) = P_{eff}(t)$$

Stationary base

صفحه ۴۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سازه صنعتی زیر را در نظر بگیرید. شکل a پلان، شکل b نمای شرقی و شکل c نمای شمالی را نشان می‌دهد. وزن سازه 30 lb/ft^2 است. سقف صلب فرض شود. سازه در جهت شمال جنوب دارای قاب خمشی و در جهت شرقی غربی دارای مهاربند است. ممان اینرسی ستونها حول محور قوی برابر 82.8 in^4 و حول محور ضعیف 18.3 in^4 است. ضریب ارتجاعی فولاد 29000 ksi فرض شود. قطر بادبند یک اینچ است. معادله حرکت سازه با فرض نامیرا بودن در هر دو جهت را تعیین نمایید.

Horizontal bracing

Roof truss

Vertical bracing

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

حل) جرم کل سقف:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{30 \times 30 \times 20}{386} = 46.63 \frac{\text{lb} \cdot \text{sec}^2}{\text{in}} = 0.04663 \frac{\text{kip} \cdot \text{sec}^2}{\text{in}}$$

سختی در جهت شمال جنوب:

$$k_{N-S} = 4 \left(\frac{12EI_x}{h^3} \right) = 4 \frac{12 \times 29000 \times 82.8}{(12 \times 12)^3} = 38.58 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$$

* معادله حرکت در جهت شمال جنوب

$$m\ddot{u} + (k_{N-S})u = 0$$

سختی در جهت شرقی - غربی:

$$k_{brace} = \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{20}{\sqrt{12^2 + 20^2}} = 0.8575$$

$$A = \frac{\pi \times 1^2}{4} = 0.785 \text{ in}^2 \Rightarrow k_{brace} = \frac{0.785 \times 29000}{23.3 \times 12} (0.8575)^2 = 59.8 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$$

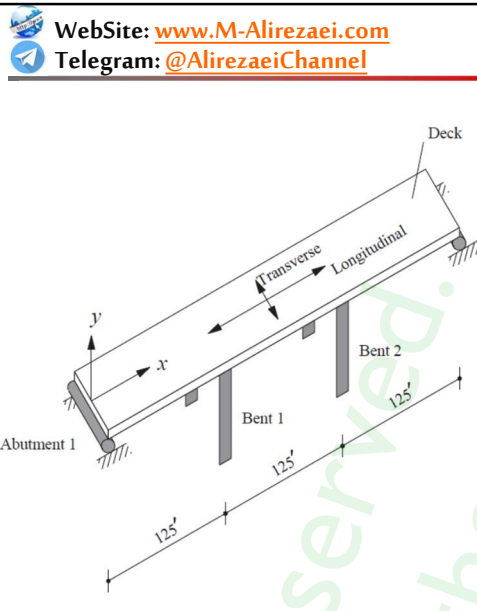
* معادله حرکت در جهت شرقی - غربی:

$$k_{E-W} = 2 \times 59.8 = 119.6 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$$

$$m\ddot{u} + (k_{E-W})u = 0$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



مثال) پل روبرو به طول ۳۷۵ فوت، هر پایه دارای ۳ ستون بوده که ارتفاع هر ستون آن ۲۵ فوت است. سطح مقطع عرشه ۱۲۳ فوت مربع است. ممان اینرسی هر ستون ۱۳ فوت به توان چهار است. ضریب ارتجاعی بتن 3000 ksi فرض شود. معادله حرکت را تعیین نمایید. چگالی بتن ۱۵۰ پوند بر فوت مکعب است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

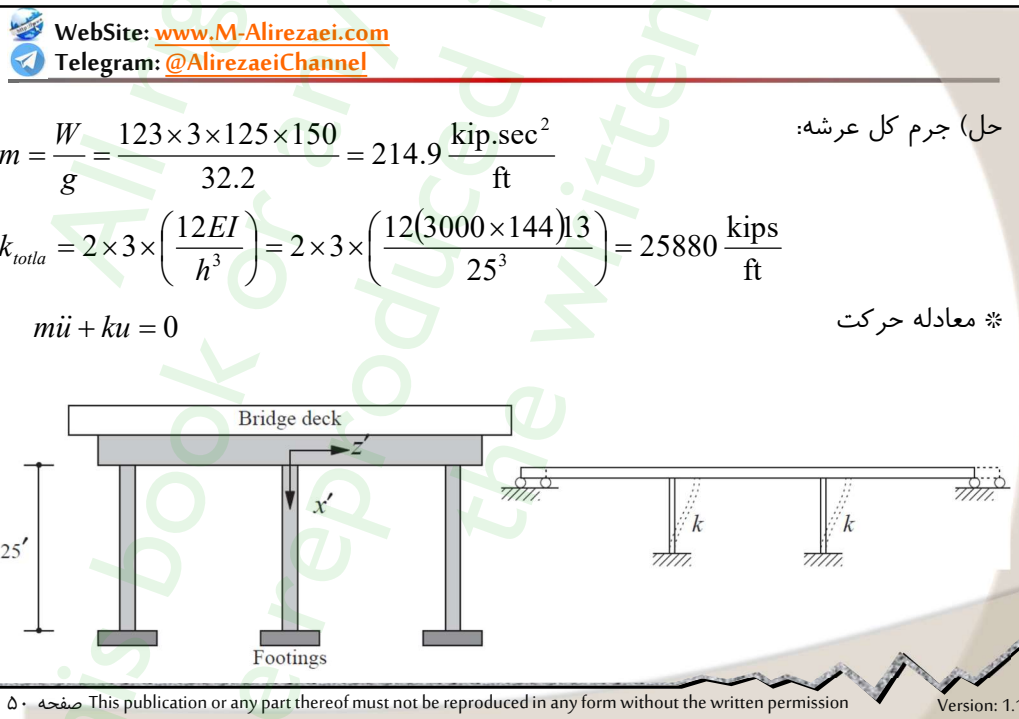
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

حل) جرم کل عرشه:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{123 \times 3 \times 125 \times 150}{32.2} = 214.9 \frac{\text{kip} \cdot \text{sec}^2}{\text{ft}}$$

* معادله حرکت

$$k_{\text{total}} = 2 \times 3 \times \left(\frac{12EI}{h^3} \right) = 2 \times 3 \times \left(\frac{12(3000 \times 144)13}{25^3} \right) = 25880 \frac{\text{kips}}{\text{ft}}$$

$$m\ddot{u} + ku = 0$$


This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

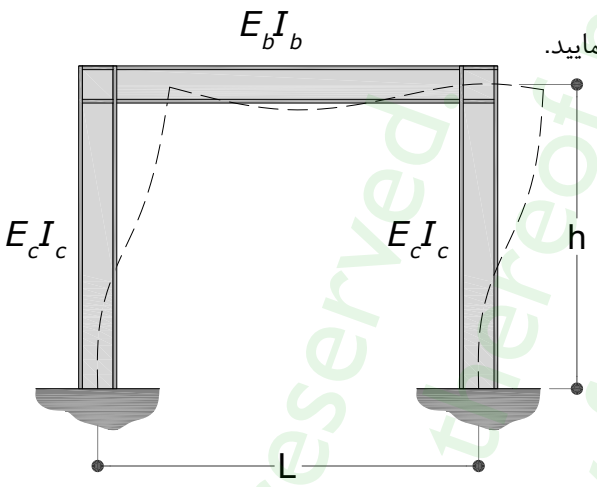


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ماتریس سختی

سختی یک سیستم چند درجه آزاد را نمیتوان با یک عدد بیان نمود. در اینجا بایستی از ماتریس سختی استفاده کرد.

مثال) ماتریس سختی سازه زیر را تعیین نمایید.



$E_b I_b$

$E_c I_c$

$E_c I_c$

h

L

$E_b = E_c = E$
 $I_b = I_c = I$ $L = 2h$

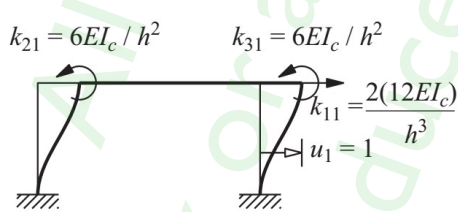
$$k = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & h^2 \\ 6h & h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}$$

صفحه ۵۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

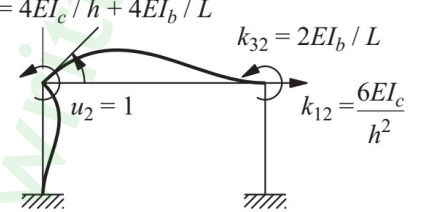


WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$k_{21} = 6EI_c / h^2$ $k_{31} = 6EI_c / h^2$ $k_{11} = \frac{2(12EI_c)}{h^3}$ $k_{22} = 4EI_c / h + 4EI_b / L$ $k_{32} = 2EI_b / L$



$u_1 = 1$



$u_2 = 1$

$k_{12} = \frac{6EI_c}{h^2}$

(b) (c)

صفحه ۵۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد نشان داده شده در زیر را تعیین نمایید. مقدار $E=29000$ ksi فرض شود.

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

- معادله حرکت:

$$m\ddot{u} + k_e \bar{u} = w + p(t)$$

$$\bar{u} = \delta_{st} + u \Rightarrow \ddot{\bar{u}} = \ddot{u} \Rightarrow \ddot{\bar{u}} = \ddot{u}$$

$$k_{beam} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 29000 \times \left(\frac{\pi \times 1^2}{4}\right)}{(10 \times 12)^3} = 39.54 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{39.54 \frac{\text{lb}}{\text{in}}} + \frac{1}{20 \frac{\text{lb}}{\text{in}}} \Rightarrow k_e = 13.39 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

Version: 1.1

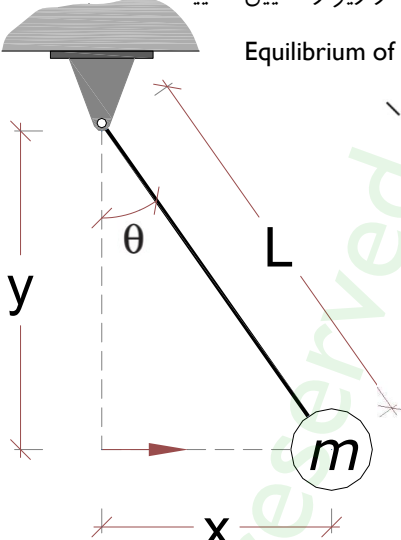
WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال ۴) معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد نشان داده شده در زیر را تعیین نمایید.

Equilibrium of the moments of forces about O gives

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0$$

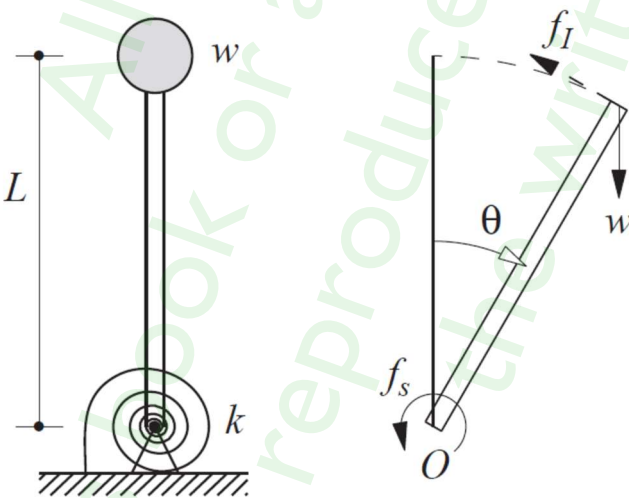
For small rotations, $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$


Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد نشان داده شده در زیر را تعیین نمایید. مقدار وزن بحرانی چقدر است؟



$$\frac{w}{g}L^2\ddot{\theta} + k\theta = wL \sin \theta$$

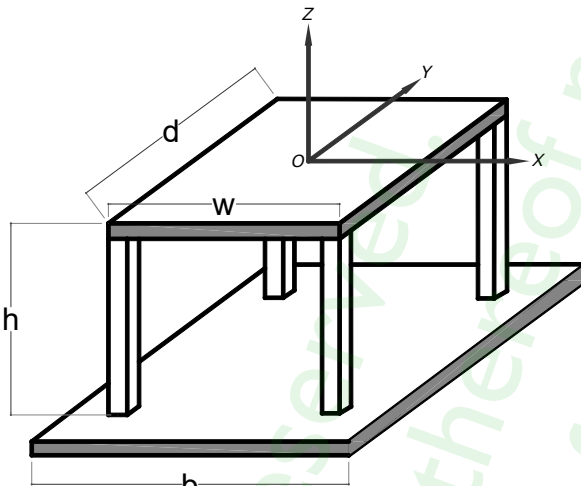
$$\Rightarrow \frac{w}{g}L^2\ddot{\theta} + (k - wL)\theta = 0$$

$$\Rightarrow w_{cr} = \frac{k}{L}$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد نشان داده شده در زیر را تعیین نمایید. سازه تحت حرکت دورانی زمین قرار دارد.



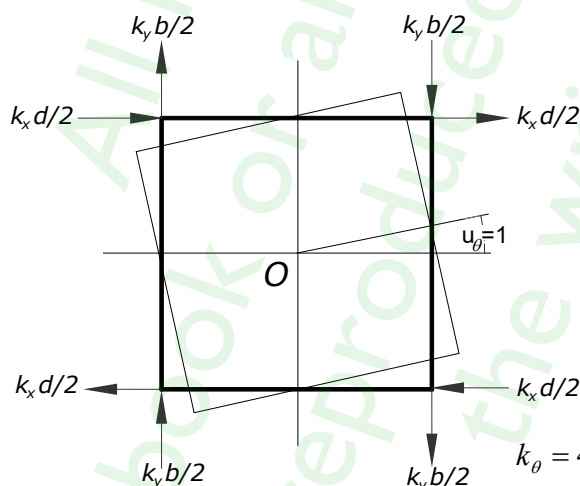
$$u_{\theta}^t(t) = u_{\theta}(t) + u_{g\theta}(t)$$

$$I_o \ddot{u}_{\theta}^t(t) + k_{\theta} u_{\theta} = 0$$

$$I_o = \frac{m}{12} (b^2 + d^2)$$

صفحه ۵۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

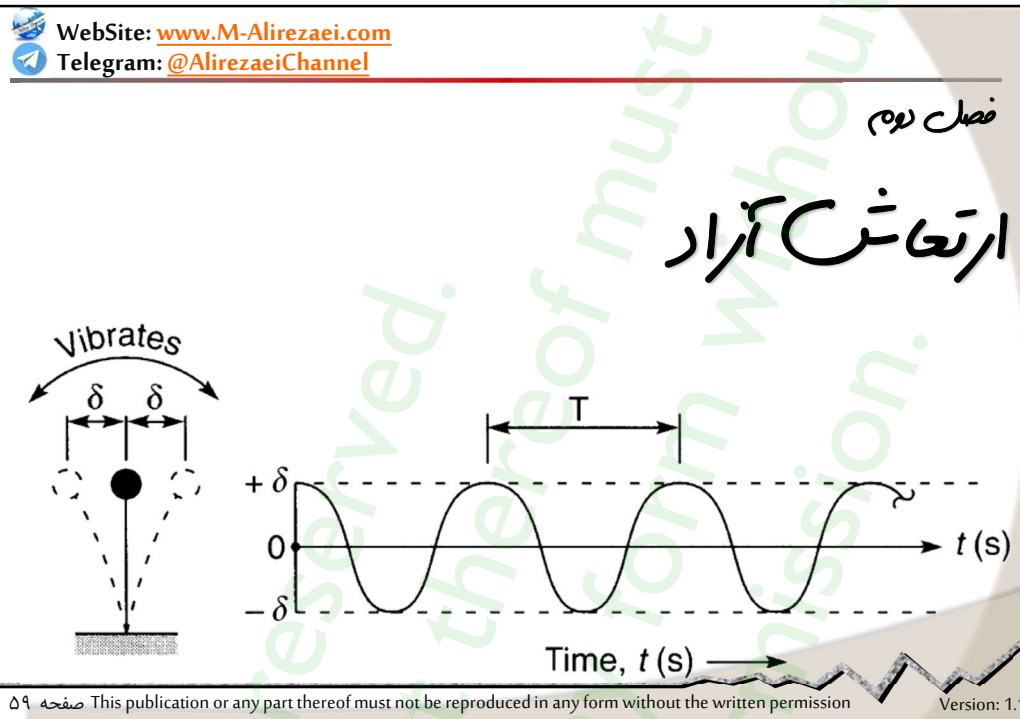
WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



$$k_{\theta} = 4 \left(k_x \frac{d}{2} \frac{d}{2} \right) + 4 \left(k_y \frac{b}{2} \frac{b}{2} \right) = k_x d^2 + k_y b^2$$

$$\Rightarrow I_o \ddot{u}_{\theta}^t(t) + (k_x d^2 + k_y b^2) u_{\theta} = -I_o \ddot{u}_{g\theta}^t$$

صفحه ۵۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- ارتعاش آزاد چیست؟
- حل معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد میرا و نامیرا
- تعیین دوره تناوب سازه به چه صورت است؟
- اثر میرایی بر ارتعاش و پاسخ دینامیکی
- تعیین میرایی سازه

Version: 1.1



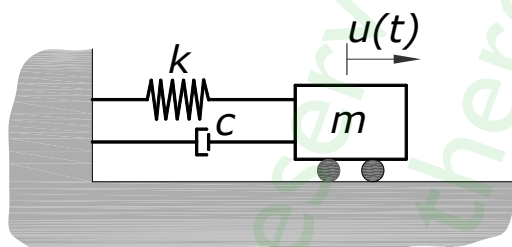
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

معرفی ارتعاش آزاد

در این نوع ارتعاش، سازه تحت شرایط اولیه‌ی تحریک‌شده و در نتیجه سازه به ارتعاش واداشته می‌شود. در طول مدت زمان ارتعاش هیچ نیرویی به سازه اعمال نمی‌شود و علت آزاد بودن ارتعاش نیز همین مسئله است.

هرگاه سازه‌ای از حالت تعادل استاتیکی خود تحریک شده و سپس بدون اعمال هرگونه تحریک دینامیکی خارجی به آن اجازه‌ی ارتعاش داده شود، گوئیم سازه در شرایط «ارتعاش آزاد» قرار دارد.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = 0$$



صفحه ۶۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ارتعاش آزاد نامیرا

ابتدا حالتی از ارتعاش آزاد را در نظر می‌گیریم که در آن سیستم فاقد میرایی است. ($c = 0$)

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

معادله‌ی فوق، یک معادله‌ی دیفرانسیل همگن مرتبه‌ی دوم خطی با ضرایب ثابت است. برای به دست آوردن پاسخ معادله‌ی فوق لازم است شرایط اولیه‌ای برای مسأله تعیین شود. فرض کنید جابجایی اولیه‌ی سازه در لحظه‌ی شروع ارتعاش آزاد $u(0)$ و سرعت اولیه‌ی آن در همین لحظه $\dot{u}(0)$ باشد.

* برای حل رابطه فوق مروری بر روش حل معادله دیفرانسیل داشته باشیم:

$$\text{Second order differential equations of the form : } a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

ابتدا معادله را بصورت زیر بازنویسی کنید:

$$\text{Rewrite the differential equation : } aD^2 + bD + c = 0$$

صفحه ۶۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ریشه‌های D را تعیین نمایید. فرض نمایید، α و β ریشه‌های این معادله باشند. سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) هر دو ریشه حقیقی و مختلف باشند:
real and different, then the general solution is: $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$

ب) هر دو ریشه حقیقی و برابر باشند:
real and equal, general solution is: $y = (Ax + B)e^{\alpha x}$

پ) ریشه‌ها مختلط باشند:
complex, general solution is: $y = e^{\alpha x}\{A \cos \beta x + B \sin \beta x\}$

حال میتوان رابطه دیفرانسیل قبل را حل نمود:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \Rightarrow mD^2 + k = 0 \Rightarrow D = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = i \sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega$$

بنابراین حال «پ» رخ داده است.

$\Rightarrow u(t) = e^{0 \times t} \{A \cos \omega t + B \sin \omega t\} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

بنابراین

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \Rightarrow \dot{u}(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t$$

جابجایی اولیه‌ی سازه در لحظه‌ی شروع ارتعاش آزاد $u(0)$ و سرعت اولیه‌ی آن در همین لحظه $\dot{u}(0)$ بود.

$$\Rightarrow u(0) = A \cos(\omega \times 0) + B \sin(\omega \times 0) = A \Rightarrow A = u(0)$$

$$\Rightarrow \dot{u}(0) = -A \omega \sin(\omega \times 0) + B \omega \cos(\omega \times 0) \Rightarrow B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega}$$

بنابراین:

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t$$

پارامتر $\sqrt{\frac{k}{m}}$ را «فرکانس طبیعی زاویه‌ای» با واحد رادیان بر ثانیه می‌نامیم و آن را به صورت

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

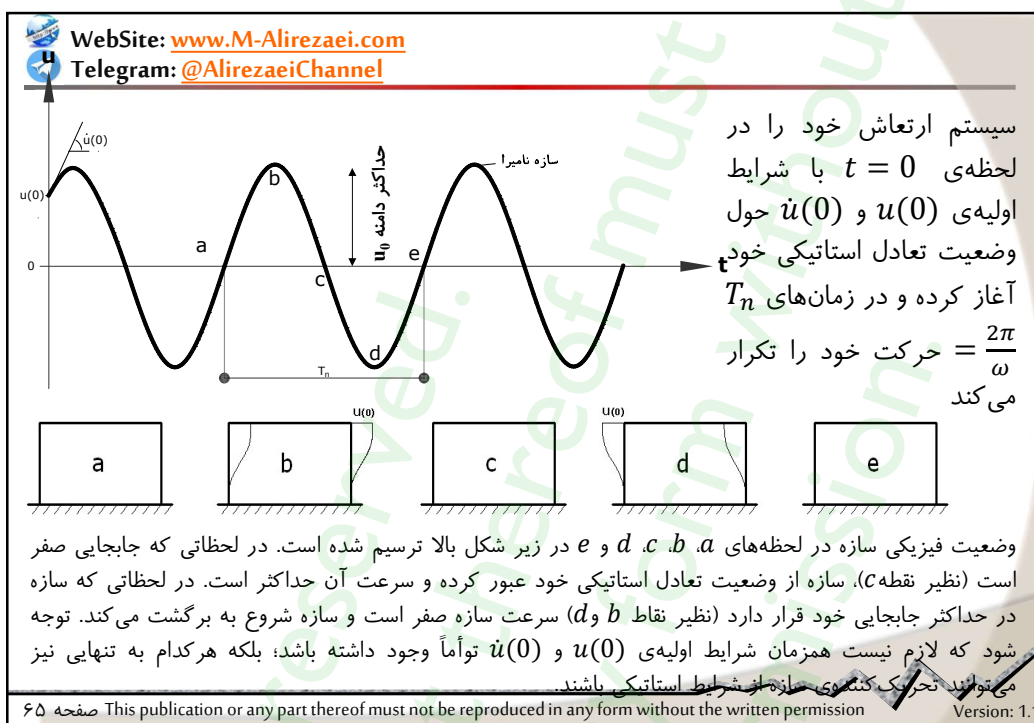
زیر نمایش می‌دهیم:

دیده می‌شود که جذر نسبت سختی به جرم سیستم، فرکانس طبیعی آن است.

«پریود» یا «زمان تناوب طبیعی سازه» به صورت روبرو قابل تعریف است:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

گاهی فرکانس بر حسب دور بر ثانیه و یا هرتز نیز بیان می‌شود. در این حالت، فرکانس دورانی (f) بر حسب هرتز برابر است با:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega}{2\pi}$$

توجه کنید که به علت عدم وجود میرایی، انرژی سازه مستهلک نشده و تا ابد با دامنه‌ی ثابت سازه ارتعاش خواهد نمود. این دامنه که در شکل با u_0 نشان داده شده و برابر است با:

$$u_0 = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2}$$

* دوره تناوب و سختی چه رابطه‌ای با هم دارند؟

* دوره تناوب و جرم چه رابطه‌ای با هم دارند؟

* مفهوم فیزیکی دوره تناوب و فرکانس؟

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تعیین فرکانس طبیعی سیستم:

$$u = A \cos \omega t$$

فرض کنید:

$$u = B \sin \omega t$$

یا

که در آن A و B ثابت هستند. از طرفی برای رابطه حرکت داریم:

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

با قرار دادن رابطه اول در رابطه روبرو داریم:

$$(-m\omega^2 + k)A \cos \omega t = 0$$

برای اقیاناع رابطه اخیر، عبارت داخل پرانتز باید صفر شود. به عبارتی

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تعیین دامنه ارتعاش:

معادله حرکت را میتوان بصورت زیر بازنویسی نمود:

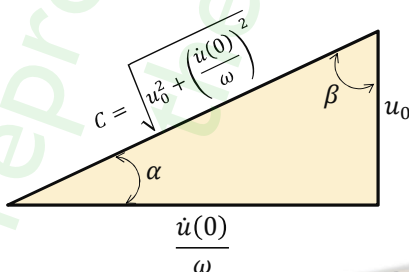
$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t = C \sin(\omega t + \alpha)$$

یا

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t = C \cos(\omega t - \beta)$$

که در آن

$$C = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2}$$



مثلت زیر را تصور کنید:

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با ضرب و تقسیم رابطه حرکت بر C داریم:

$$u(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t = C\left(\frac{u(0)}{C}\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)/\omega}{C}\sin\omega t\right)$$

با استفاده از مثلث نشان داده شده در قبل داریم:

$$\sin\alpha = \frac{u(0)}{C} \quad \cos\alpha = \frac{\dot{u}(0)/\omega}{C}$$

با نوشتن دو رابطه اخیر با رابطه بدست آمده در ابتدای این اسلاید داریم:

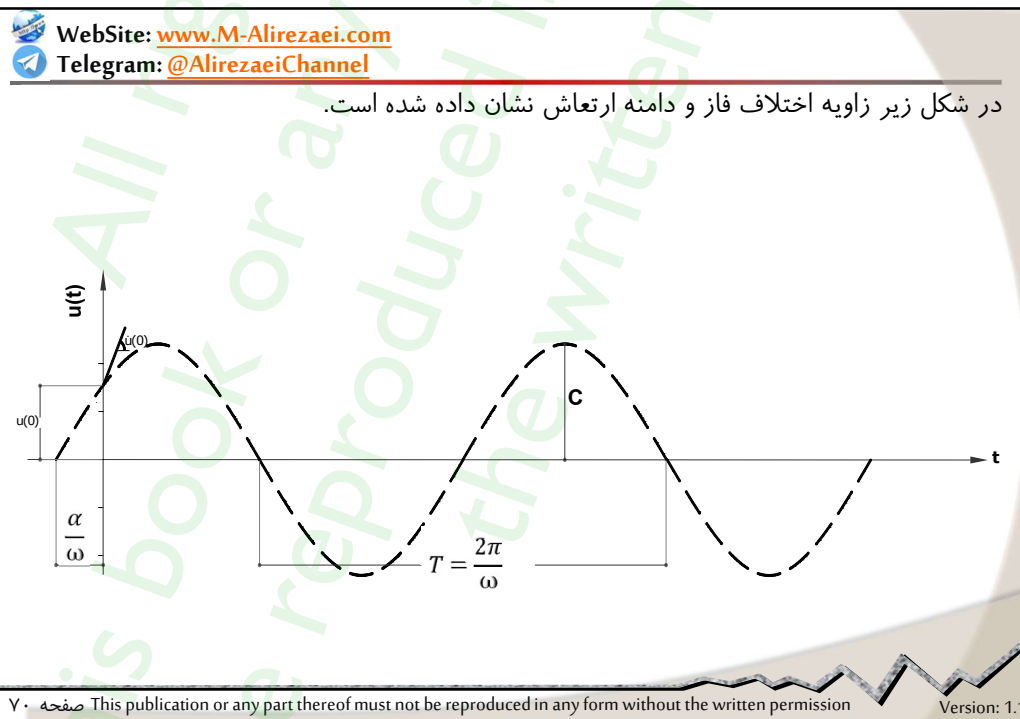
$$u(t) = C\left(\frac{u(0)}{C}\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)/\omega}{C}\sin\omega t\right) = C(\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t)$$

$$u(t) = C(\sin(\omega t + \alpha))$$

همانطور که دیده میشود، رابطه اول بدست آمد. مقدار C دامنه ارتعاش و زوایای α و β زاویه فاز هستند.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

دو برج انرژی هسته‌ای که دوره تناوب آنها با پای ثابت 0.15 ثانیه و با در نظر گرفتن اثر خاک برابر 0.5 ثانیه اندزه گیری شده است.



صفحه ۷۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پل گلدن گیت:



دوره تناوب عرضی آن 18.2 ثانیه، دوره تناوب قائم آن 10.9 ثانیه و دوره تناوب طولی آن 3.81 ثانیه و دوره تناوب پیچشی آن 4.43 ثانیه است.

Golden Gate Bridge, San Francisco, California.

صفحه ۷۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

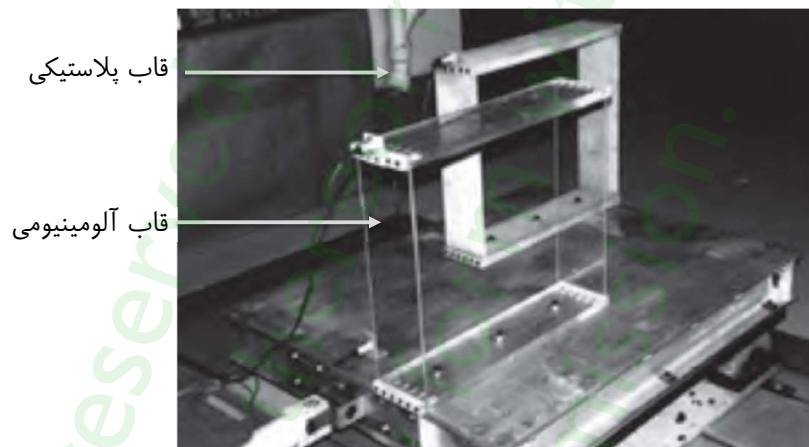
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) یک قاب آلومینیومی و یک قاب پلاستیکی، تحت ارتعاش قرار گرفته‌اند، نمودار شتاب شتاب قاب در برابر زمان برای هر یک از آنها ترسیم شده است، در مورد اختلاف ارتعاش آنها بحث کنید. دوره تناوب قاب پلاستیکی چقدر است؟



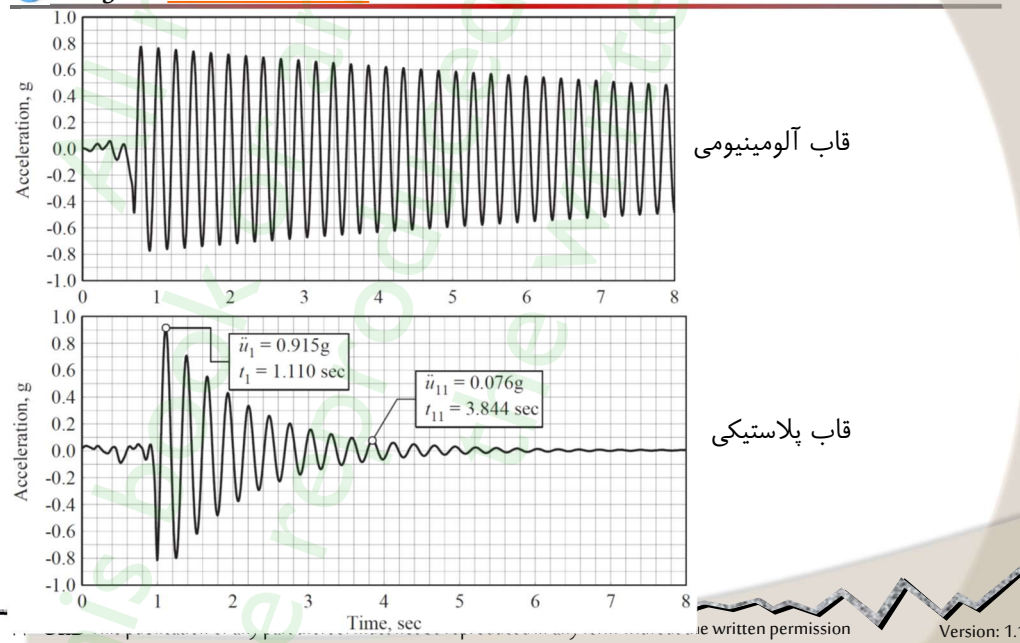
صفحه ۷۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

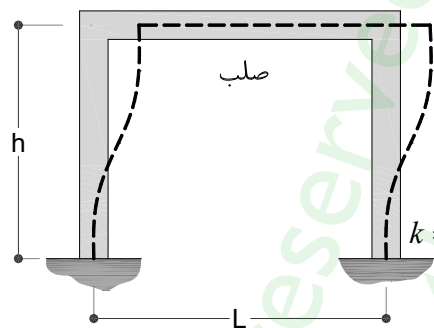


the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب خمشی بتنی با سقف صلب را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن سقف برابر 20 ton است. ابعاد ستون‌های مربعی 40×40 سانتی‌متر و ابعاد تیرها 40×50 سانتی‌متر است. (ارتفاع تیرها 50 سانتی‌متر است). اگر مدول الاستیسیته‌ی آن 200000 کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع باشد، مطلوب است تشکیل معادله‌ی حاکم بر ارتعاش آزاد قاب و محاسبه‌ی تغییر مکان و سرعت سازه ۲ ثانیه پس از شروع ارتعاش آزاد و نیز دامنه‌ی نوسان با فرض آنکه سازه دارای جابجایی اولیه‌ای معادل ۳ سانتی‌متر به سمت راست باشد. میرایی سازه را صفر فرض کنید.



ارتفاع سازه $h = 4 \text{ m}$ و طول دهانه $L = 5 \text{ m}$ است.

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}}$$

$$k = 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 2 \left(\frac{12 \times 2 \times 10^5 \times \frac{40^4}{12}}{400^3} \right) = 16000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بنابراین فرکانس طبیعی و پریود طبیعی سازه برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16000}{20.4}} = 28 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28} = 0.22 \text{ sec}$$

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad u(0) = +3 \text{ cm}$$

$$u(t) = (3) \cos 28t + \frac{0}{28} \sin \omega t = 3 \cos(28t)$$

تغییر مکان در لحظه‌ی $t = 2 \text{ sec}$ برابر است با:

$$u(2) = 3 \cos(28 \times 2) = +2.56 \text{ cm}$$

توجه شود، ماشین حساب در حالت رادیان باشد.

$$\dot{u}(t) = -u(0)\omega \sin \omega_n t + \dot{u}(0) \cos \omega t$$

$$\dot{u}(2) = (-3)(28) \sin(28 \times 2) = 43 \text{ cm/sec}$$

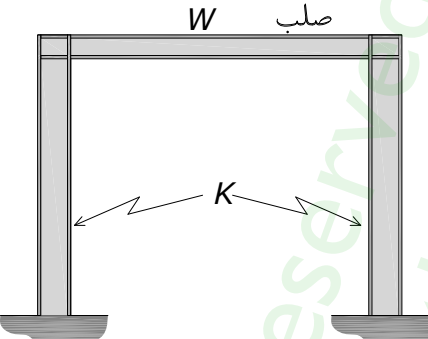
$$u_0 = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega} \right]^2} = u(0) = 3 \text{ cm}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) در قاب فولادی شکل زیر، پای ستون ها گیردار بوده و مقدار دوره تناوب آن بصورت تجربی برابر 0.1 sec بدست آمده است. اضافه وزن و سختی مورد نیاز برای افزایش و کاهش دوره تناوب به میزان 20% را تعیین نمایید. مقدار وزن $W=1000 \text{ lb}$ در نظر گرفته شود.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{kg}{W}} \rightarrow \frac{2\pi}{0.1} = \sqrt{\frac{kg}{1000}} \quad (g = 386 \frac{\text{in}}{\text{sec}^2})$$


$$k = 10228 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

الف) افزایش دوره تناوب به میزان 20% :

$$T_L = 1.2 \times 0.1 = 0.12 \text{ sec}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.12} = \sqrt{\frac{10228 \times 386}{1000 + \Delta W}} \rightarrow \Delta W = 440 \text{ lb}$$

ب) کاهش دوره تناوب به میزان 20% :

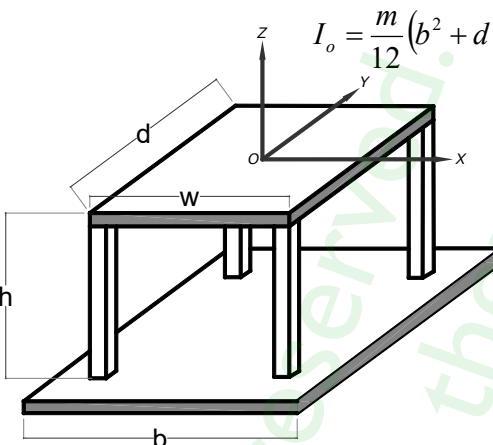
$$T_S = 0.8 \times 0.1 = 0.08 \text{ sec}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.08} = \sqrt{\frac{(10228 + \Delta k) \times 386}{1000}} \rightarrow \Delta k = 5753 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

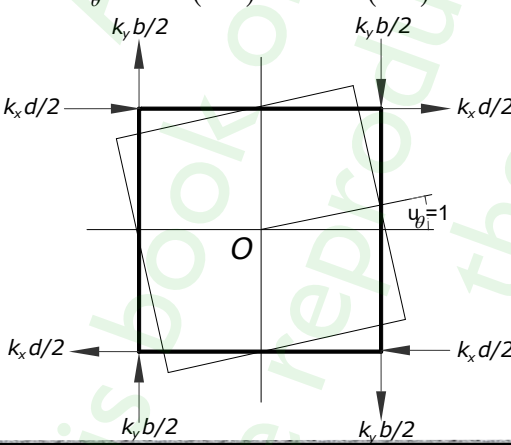
مثال) در سازه نشان داده شده در شکل زیر، دوره تناوب و فرکانس پیچشی سیستم را تعیین نمایید. مقدار $b=9\text{ m}$, $d=6\text{ m}$, $h=3.6\text{ m}$ وزن دال 0.5 ton/m^2 است. سختی ستون‌ها در امتداد محوره‌های x و y به ترتیب برابر 0.27 ton/cm و 0.18 ton/cm است.

$$I_o = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) = \frac{0.5 \times 9 \times 6}{9.81} \left(\frac{9^2 + 6^2}{12} \right) = 26.84 \frac{\text{ton} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}$$


صفحه ۷۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$k_\theta = 4 \left(k_x \frac{d}{2} \frac{d}{2} \right) + 4 \left(k_y \frac{b}{2} \frac{b}{2} \right) = k_x d^2 + k_y b^2$$

$$\Rightarrow k_\theta = 0.27(100)6^2 + 0.18(100)9^2 = 2430 \frac{\text{ton} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$


$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_o}} = \sqrt{\frac{2430}{26.84}} = 9.52 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = 1.51 \text{ Hz}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{1.51} = 0.66 \text{ sec}$$

صفحه ۸۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ارتعاش آزاد میرا

* عامل اتلاف انرژی است. مکانیزم‌های ایجاد میرایی در یک سازه واقعی کدامند؟

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

معادله‌ی حاکم بر این نوع ارتعاش به صورت زیر است:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0$$

با تقسیم رابطه فوق بر m داریم:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{c_{cr}}$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ قبلاً تعریف شد و

ξ «نسبت میرایی» سازه نام دارد. همچنین c_{cr} ضریب میرایی بحرانی تعریف شده و می‌توان آن را

$$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega}$$

به صورت زیر هم نوشت:

ضریب میرایی c پارامتری است که اساساً نمایانگر انرژی تلف‌شده در هر سیکل از ارتعاش آزاد (هر رفت و برگشت کامل در زمان T_n را یک سیکل می‌نامیم) و یا انرژی تلف‌شده در هر سیکل از ارتعاش اجباری هارمونیک است؛ در حالیکه نسبت میرایی ξ پارامتری بدون بعد بوده که به سختی و

جرم نیز وابستگی دارد.

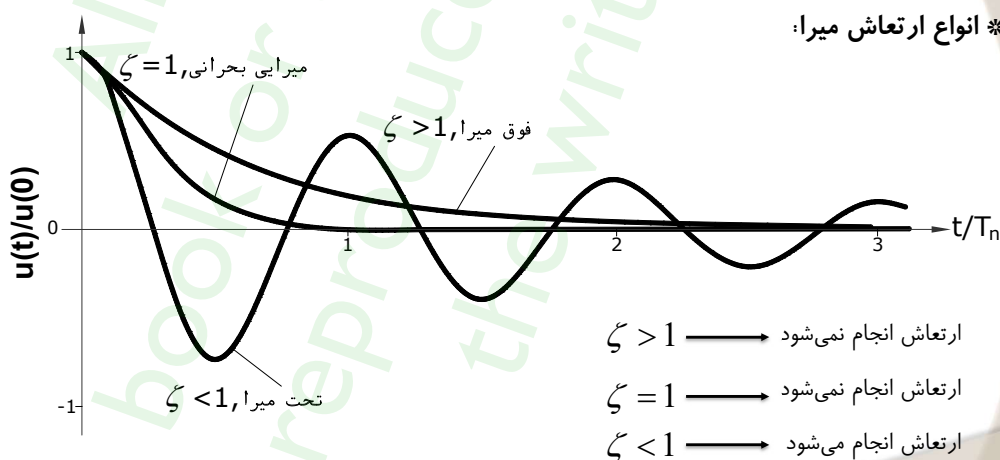
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

* در سازه بتنی، میزان نسبت میرایی در حدود ۵ تا ۷٪ و در سازه فولادی این مقدار ۳ تا ۵٪ است.

* انواع ارتعاش میرا:



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

Damped Free Vibration Systems

File Next Previous All Go Stop Fast Slow

overdamped critical damped underdamped

صفحه ۸۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) اگر شما مهندس طراحی یک اتومبیل بودین، سیستم کمک فنر و میراگر چرخ آن را به چه صورت در نظر می‌گرفتید؟

An automotive suspension system consists of a combination of springs and shock absorbers, as shown in the figure below. If you were an automotive engineer, would you design a suspension system that was

- (a) underdamped
- (b) critically damped
- (c) overdamped

صفحه ۸۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

* حل معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد میرا:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

با توجه به روش حل معادله شرح داده شده داریم:

$$D^2 + 2\zeta\omega D + \omega^2 \Rightarrow D = \frac{-2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

برای نسبت میرایی با مقدار کمتر از ۱ داریم:

$$D = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{-1}\sqrt{1-\zeta^2} = \underbrace{-\zeta\omega}_{\alpha} \pm \underbrace{i\omega\sqrt{1-\zeta^2}}_{\beta}$$

پاسخ معادله‌ی فوق، در شرایط تحت میرا ($\zeta < 1$) و با شرایط اولیه‌ی $u(0)$ و $\dot{u}(0)$ به صورت زیر است:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

که در آن ω_D «فرکانس زاویه‌ای میرا» نامیده شده و برابر است با:

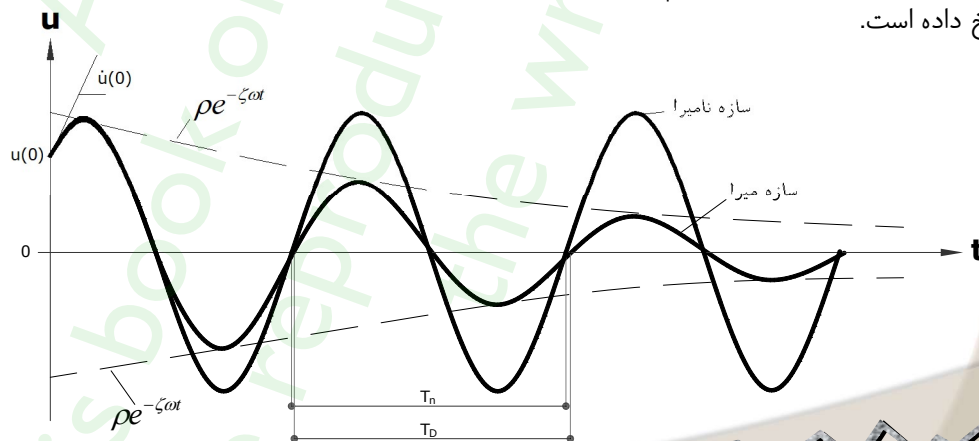
$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

در شکل زیر معادله‌ی اثبات شده، برای پاسخ ارتعاش آزاد سازه‌ی یک‌درجه آزاد با میرایی ۰/۰۵ ترسیم شده است. همچنین جهت مقایسه‌ی پاسخ سیستم مشابه اما بدون میرایی نیز ترسیم شده است. ارتعاش آزاد هر دو سیستم به علت جابجایی اولیه‌ی $u(0)$ و سرعت اولیه‌ی $\dot{u}(0)$ یکسان رخ داده است.



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

«پریود طبیعی ارتعاش میرا» (T_D) برابر است با $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$ و می‌توان آن را به پریود طبیعی نامیرا (T) مرتبط ساخت:

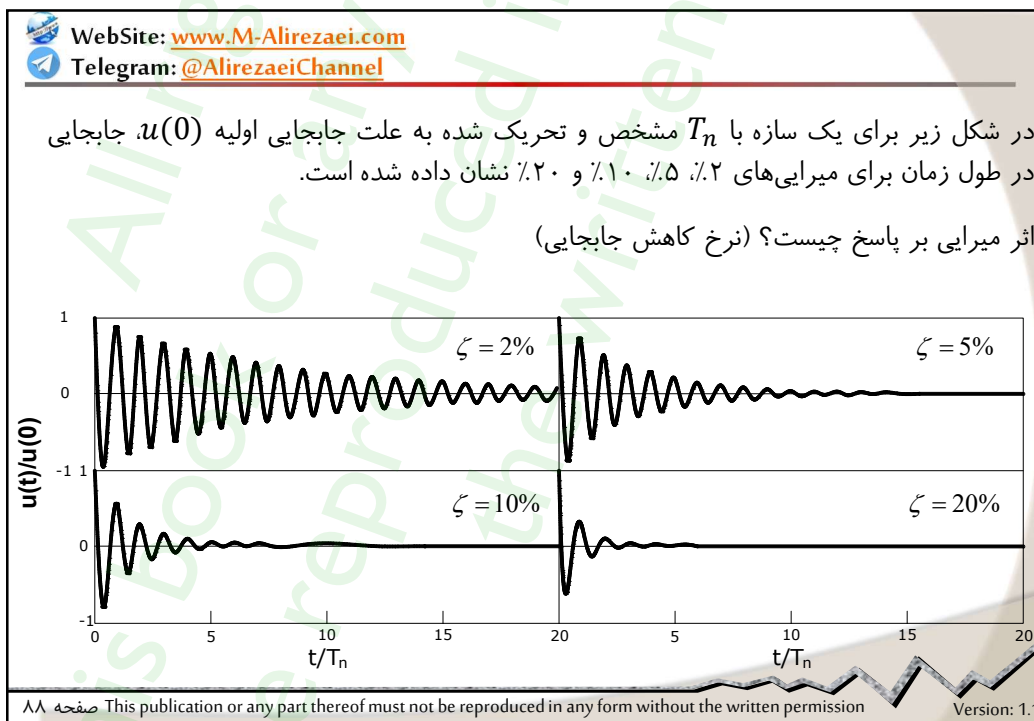
$$T_D = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

کاهش دامنه‌ی جابجایی با زمان رابطه‌ی لگاریتمی دارد. در واقع دو منحنی پوش نقاط دامنه را به هم متصل می‌کنند. این دو منحنی با خط‌چین نشان داده شده است. معادله‌ی این منحنی پوش $\pm \rho e^{-\xi \omega_n t}$ بوده و پارامتر ρ برابر است با:

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi \omega u(0)}{\omega} \right]^2}$$

اثر میرایی کاهش فرکانس طبیعی از ω_D به ω و افزایش پریود طبیعی از T به T_D است. این اثرات برای میرایی‌های زیر ۲۰٪ که محدوده‌ی معمول میرایی برای سازه‌های متعارف مهندسی است، قابل صرف‌نظر کردن است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

استهلاک انرژی

در این بخش رابطه‌ای به دست می‌آید که به کمک آن نسبت دو دامنه‌ی متوالی حرکت ارتعاش آزاد میرا محاسبه می‌شود. به علاوه به کمک این نسبت می‌توان نسبت میرایی ξ را محاسبه نمود. کاربرد این روابط در آزمایش‌های عملی ارتعاش سازه‌ها و به دست آوردن مشخصات میرایی آنها از طریق آزمایش است. نسبت جابجایی در زمان t به مقدار جابجایی در زمان $t + T_D$ مستقل از t است. این نسبت عبارت است از:

$$\frac{u(t)}{u(t + T_D)} = e^{\xi\omega T_D} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

این رابطه در واقع نسبت u_i/u_{i+1} که مربوط به نسبت جابجایی سیکل i ام و سیکل $i+1$ ام است را می‌دهد:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

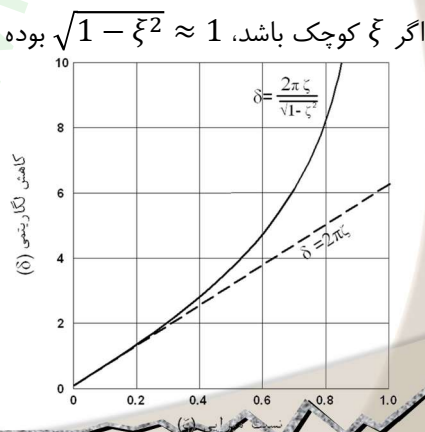
لگاریتم طبیعی این نسبت با δ نمایش داده شده و «کاهش لگاریتمی» نام دارد:

$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

اگر ξ کوچک باشد، $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$ بوده و رابطه‌ی تقریبی اما ساده‌تر زیر به دست می‌آید:

$$\delta \cong 2\pi\xi$$

شکل روبرو رابطه‌ی تقریبی را با رابطه‌ی دقیق مقایسه می‌کند. دیده می‌شود که برای میرایی‌های کمتر از ۲۰٪ عملاً هر دو رابطه یکسانند.



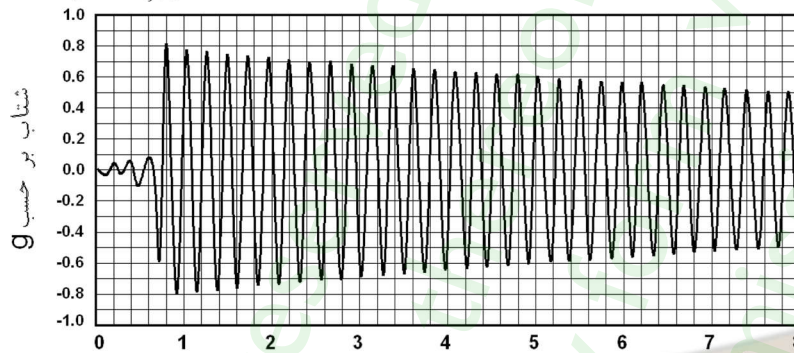
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

شکل زیر نمودار پاسخ ارتعاش آزاد میرای سازه‌ی یک‌درجه آزاد آلومینیومی (با میرایی کم) را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که اختلاف در دامنه‌ی متوالی در دو سیکل کوچک بوده و اندازه‌گیری اختلاف، دقت زیادی لازم دارد. برای حل این شکل، معمولاً نسبت دامنه‌های دو سیکل اول و j -ام را در نظر می‌گیرند. در چنین شرایطی j -سیکل دلخواه بین دامنه‌ها اختلاف بوده و برای این حالت، رابطه‌ی کاهش لگاریتمی (δ) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta = \left(\frac{1}{j}\right) \ln\left(\frac{u_1}{u_{j+1}}\right) \cong 2\pi\xi$$



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\xi = \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}}$$

بنابراین:

به جای جابجایی سازه می‌توان در رابطه‌ی فوق از شتاب نیز استفاده نمود.

مثال) در صورتی که میرایی یک سیستم یک درجه آزاد، ۷٪ باشد، تعداد سیکل‌های لازم که به ازای آن ۵۰٪ کاهش در دامنه رخ می‌دهد را تعیین نمایید: $j = 1.57$ $\Rightarrow \frac{1}{2\pi \times j} \ln 2 = 0.07$

مثال) در منبع آب نشان داده شده در اسلاید بعد، آزمایش ارتعاش آزاد انجام شد. کابلی که به مخزن متصل بود، نیروی افقی معادل 7.5 ton و تغییر مکان 5 cm به آن اعمال نمود. این کابل دفعاتاً قطع و ارتعاش آزاد منبع ثبت گردید. در انتهای دور چهارم ارتعاش، زمان ۲ ثانیه و مقدار تغییر مکان 2.5 cm بود. مطلوبست: الف) نسبت میرایی ب) زمان تناوب سیستم نامیرا، پ) صلبیت موثر ت) وزن موثر، ث) ضریب میرایی ج) تعداد دور لازم برای کاهش دامنه به 0.5 cm چقدر است؟

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با فرض میرایی کم:

$$j_{50\%} = \frac{0.11}{\zeta} \rightarrow \zeta = \frac{0.11}{4} = 0.0275 = 2.75\%$$

$$T_D = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ sec} \rightarrow T_n \cong T_D = 0.5 \text{ sec}$$


$$k = \frac{7.5}{5} = 1.5 \frac{\text{ton}}{\text{cm}} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_n} = 12.75 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{1.5}{12.75^2} = 0.00949 \frac{\text{ton} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}}$$

$$W = 0.00949 \times 981 = 9.3 \text{ ton}$$

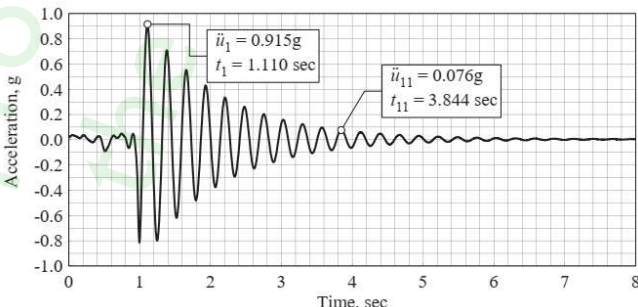
$$c = \zeta(2\sqrt{km}) = 0.0275(2\sqrt{1.5 \times 0.00949}) = 0.00656 \frac{\text{ton} \cdot \text{sec}}{\text{cm}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\eta} \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} \Rightarrow j = \frac{1}{2\pi \times 0.0275} \ln \frac{5}{0.5} = 13.3$$

صفحه ۹۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) در یک قاب یک طبقه دو بعدی، که تحت ارتعاش آزاد می‌باشد، نمودار شتاب در برابر زمان برای آن در شکل زیر نشان داده شده است. با توجه مقادیر پیک یکم و یازدهم شتاب در شکل، دوره تناوب و نسبت میرایی سیستم را تعیین نمایید.

$$T_D = \frac{3.844 - 1.110}{10} = 0.273 \text{ sec} \quad \zeta = \frac{1}{2\pi \times 10} \ln \frac{0.915g}{0.076g} = 0.0396 = 3.96\%$$


Peak	Time, t_i (sec)	Peak, $\ddot{u}_i$ (g)
1	1.110	0.915
11	3.844	0.076

صفحه ۹۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) یک دال سنگین، متکی بر چهار ستون فولادی است. زمان تناوب طبیعی آن در ارتعاش جانبی برابر 0.5 sec است. وقتی یک وزنه 50 lb به آن اضافه می‌شود، زمان تناوب طبیعی آن به 0.75 sec افزایش می‌یابد. وزن دال و سختی جانبی موثر ستون‌ها را تعیین نمایید.

۹۵ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.5 \text{ sec} \quad , \quad T'_n = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{50}{g}}{k}} = 0.75 \text{ sec}$$

$$\left(\frac{T'_n}{T_n}\right)^2 = \frac{m + \frac{50}{g}}{m} \Rightarrow 1 + \frac{50}{mg} = \left(\frac{0.75}{0.5}\right)^2 = 2.25$$

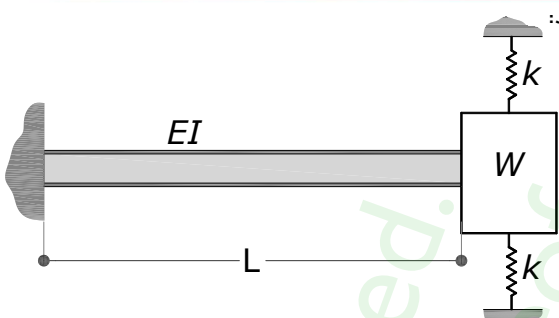
$$\Rightarrow mg = \frac{50}{1.25} = 40 \text{ lb}$$

$$k = 16\pi^2 m = 16\pi^2 \left(\frac{40}{386}\right) = 16.4 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

۹۶ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) دوره تناوب سیستم زیر را تعیین نمایید:



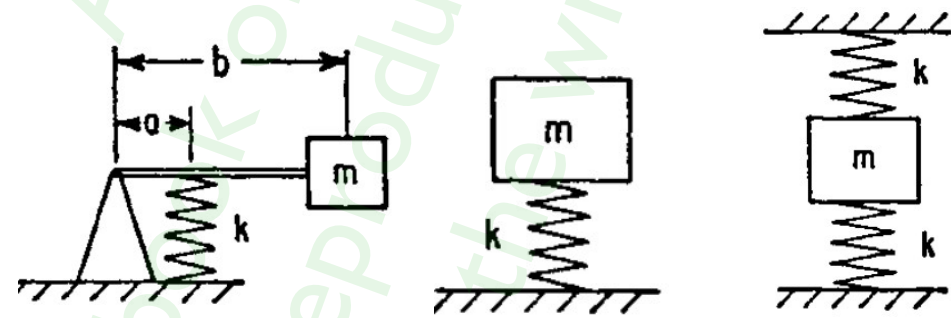
مثال) مسئله قبل را با مقادیر $k=2000 \text{ lb/in}$ و $W=3000 \text{ lb}$ ، $EI=10^8 \text{ lb.in}^2$ ، $L=100 \text{ in}$ حل نمایید. اگر در صورتی که جابجایی اولیه برابر 1 in و سرعت اولیه برابر 20 in/sec باشد، مقدار جابجایی جرم را یک ثانیه بعد از ارتعاش، تعیین نمایید.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) فرکانس زاویه‌ای سیستم‌های نامبرای زیر را تعیین نمایید.



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

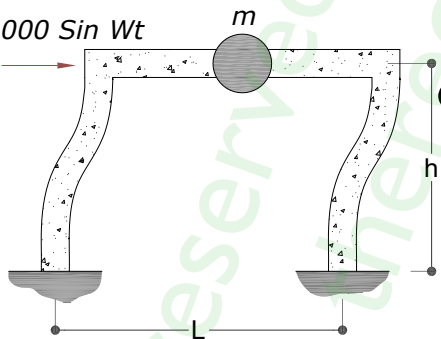
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

فصل سوم

پاسخ سیستم یک درجه آزاد به تحریک هارمونیک و تناوبی

$p(t) = 2000 \sin Wt$



صفحه ۹۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- معادله حرکت تحت تحریک هارمونیک
- حالت تشدید و اثر میرایی بر حالت تشدید
- ضریب پاسخ دینامیکی
- سیستم تحت تحریک هارمونیک با و بدون میرایی



صفحه ۱۰۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

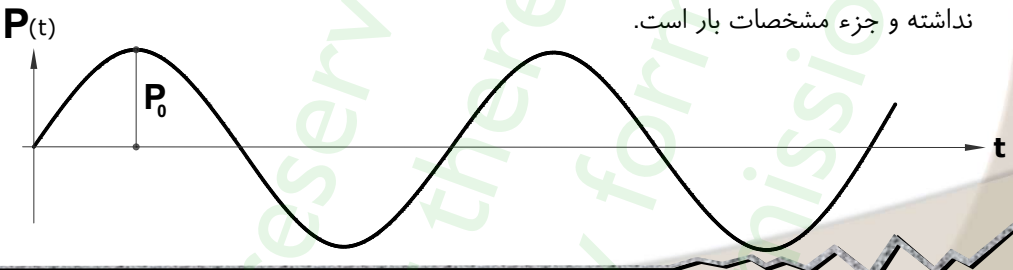
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

معرفی

✱ ارتعاش اجباری چیست؟

✱ تحریک هامونیک چیست؟

نیروی هامونیک به نیرویی به فرم $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ یا $P(t) = P_0 \cos \Omega t$ اطلاق می‌شود که در آن P_0 «دامنه» یا «حداکثر مقدار نیرو» و Ω فرکانس تحریک نامیده می‌شود. به این ترتیب می‌توان زمان تناوب طبیعی تحریک را به صورت $T = 2\pi/\Omega$ نیز تعریف نمود. فرکانس و زمان تناوب طبیعی تحریک ارتباطی به فرکانس و زمان تناوب طبیعی سازه نداشته و جزء مشخصات بار است.



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ارتعاش اجباری هامونیک نامیرا

معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد بصورت روبرو است:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)$$

با جاگذاری $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ و $c = 0$ برای شرایط نامیرا در رابطه‌ی فوق، معادله‌ی حاکم بر ارتعاش اجباری هامونیک نامیرا، عبارت است از:

$$m\ddot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم فوق، شرایط اولیه را به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

در معادله‌ی فوق، $u(0)$ و $\dot{u}(0)$ به ترتیب جابجایی و سرعت در لحظه‌ای است که نیرو اعمال می‌شود. پاسخ یک معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن، مجموع دو پاسخ «عمومی» و «خصوصی» آن است.

✱ برای حل رابطه فوق مروری بر روش حل معادله دیفرانسیل داشته باشیم:

Second order differential equations of the form : $a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ابتدا جواب عمومی تعیین شود. بدین منظور، به مانند روش شرح داده شده در فصل ۲، سمت راست معادله حذف شده و بدون در نظر گرفتن سمت راست معادله، بصورت زیر بازنویسی نمایید.

Rewrite the differential equation : $aD^2 + bD + c = 0$

ریشه‌های D را تعیین نمایید. فرض نمایید، α و β ریشه‌های این معادله باشند. سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) هر دو ریشه حقیقی و مختلف باشند:
 Real and different, then the general solution is: $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$

ب) هر دو ریشه حقیقی و برابر باشند:
 Real and equal, general solution is: $y = (Ax + B)e^{\alpha x}$

پ) ریشه‌ها مختلط باشند:
 Complex, general solution is: $y = e^{\alpha x}\{A \cos \beta x + B \sin \beta x\}$

جواب عمومی از یکی از روابط بالا تعیین شود و با u نمایش می‌دهیم.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

برای تعیین جواب خصوصی، v ، رابطه قبل را بصورت زیر بازنویسی نمایید:

Substitute the differential equation: $(aD^2 + bD + c)v = f(x)$

مقدار v از جدول زیر تعیین شود که به تابع سمت راست بستگی دارد.

Type	Straightforward cases Try as particular integral:	'Snag' cases Try as particular integral:
(a) $f(x) = a$ constant	$v = k$	$v = kx$ (used when C.F. contains a constant)
(b) $f(x) = \text{polynomial}$ (i.e. $f(x) = L + Mx + Nx^2 + \dots$ where any of the coefficients may be zero)	$v = a + bx + cx^2 + \dots$	
(c) $f(x) = \text{an exponential function}$ (i.e. $f(x) = Ae^{\alpha x}$)	$v = ke^{\alpha x}$	(i) $v = kxe^{\alpha x}$ (used when $e^{\alpha x}$ appears in the C.F.) (ii) $v = kx^2e^{\alpha x}$ (used when $e^{\alpha x}$ and $x e^{\alpha x}$ both appear in the C.F.)
(d) $f(x) = \text{a sine or cosine function}$ (i.e. $f(x) = a \sin px + b \cos px$, where a or b may be zero)	$v = A \sin px + B \cos px$	$v = x(A \sin px + B \cos px)$ (used when $\sin px$ and/or $\cos px$ appears in the C.F.)

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در نهایت با تعیین v ، و با ضرب آن در عبارت $(aD^2 + bD + c)$ ، ضرایب سینوس و کسینوس سمت چپ و راست معادله ثابت A و B تعیین شود. جواب کلی معادله از جمع جواب خصوصی و عمومی حاصل می‌شود.

جواب عمومی معادله (با طرف ثانی صفر) با توجه به اثبات فصل ۲، بصورت زیر بدست آمد:

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

حال برای جواب خصوصی داریم:

$$(mD^2 + k)v = P_0 \sin \Omega t \rightarrow (mD^2 + k)(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) = P_0 \sin \Omega t$$

$$D(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) = A \Omega \cos \Omega t - B \Omega \sin \Omega t$$

$$D^2(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) = -A \Omega^2 \sin \Omega t - B \Omega^2 \cos \Omega t$$

$$\rightarrow -mA \Omega^2 \sin \Omega t - mB \Omega^2 \cos \Omega t + kA \sin \Omega t + kB \cos \Omega t = P_0 \sin \Omega t$$

حال ضرایب سینوس و کسینوس هر دو طرف برابر هم قرار داده میشود.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

صفحه ۱۰۵

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\begin{cases} -mA\Omega^2 + kA = P_0 \\ -mB\Omega^2 + kB = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{P_0}{k - m\Omega^2} = \frac{P_0}{k - \frac{k}{\omega^2} \Omega^2} = \frac{P_0}{k \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)}$$

حل عمومی معادله بصورت روبرو (از فصل ۲) است:

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

پاسخ کلی به صورت مجموع پاسخ‌های عمومی و خصوصی فوق عبارت است از:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \quad \omega \neq \Omega$$

با اعمال شرایط مرزی مقدار ضرایب A و B بصورت زیر تعیین میشود:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

صفحه ۱۰۶

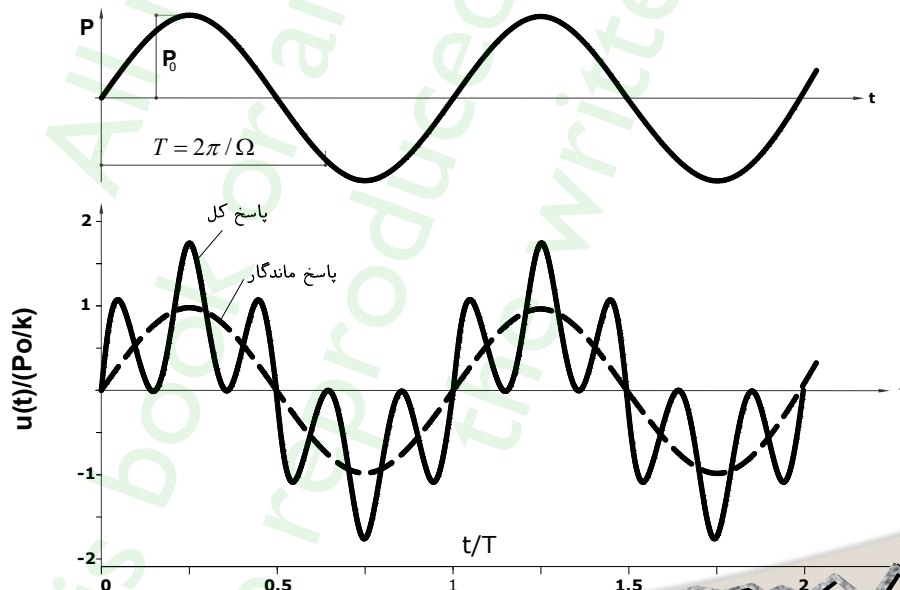
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \frac{p_0}{k} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right] \sin \omega t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin \Omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

ارتعاش نوع اول را «ارتعاش ماندگار» می‌نامند. چراکه در اثر اعمال بار به وجود آمده و ارتباطی به شرایط اولیه‌ی جابجایی و سرعت ندارد. ارتعاش نوع دوم را «ارتعاش گذرا» می‌نامند. این ارتعاش به شرایط اولیه‌ی جابجایی و سرعت بستگی دارد. حتی اگر جابجایی اولیه $(u(0))$ و سرعت اولیه‌ی $(\dot{u}(0))$ هر دو صفر باشند، باز هم پاسخ گذرا وجود دارد. پاسخ گذرا، غالباً در سازه‌های واقعی مهم نبوده و با زمان از بین می‌رود. در شکل اسلاید بعد معادله‌ی فوق برای یک سازه‌ی دلخواه با $\frac{\Omega}{\omega} = 0.2$ ، $u(0) = 0$ و $\dot{u}(0) = \frac{\omega P_0}{K}$ با خط پر نشان داده شده است. در معادله‌ی بالا جمله‌ای که شامل $\sin \Omega t$ است، در واقع همان پاسخ خصوصی (u_p) بوده و در شکل اسلاید بعد با خط چین ترسیم شده است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

که میتوان از پاسخ گذار صرف نظر نمود، بنابراین:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right] \sin \Omega t$$

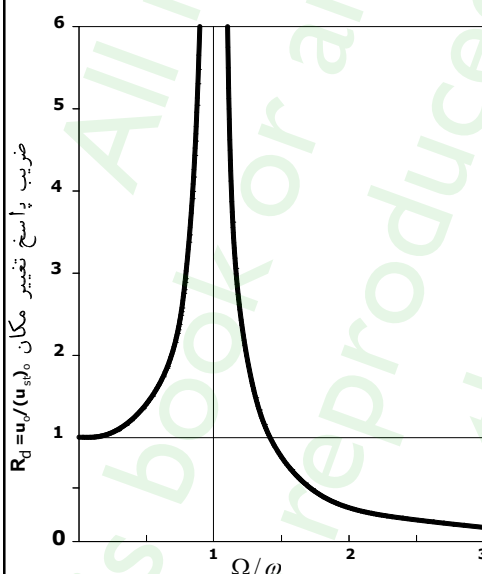
منظور از $(u_{st})_0$ همان $\frac{P_0}{k}$ بوده و به صورت «تغییر مکان استاتیکی حداکثر» تعریف می‌شود. می‌توان تصور نمود که اگر نیروی P_0 به صورت استاتیکی (و نه هارمونیک) به سازه وارد می‌شد، حداکثر تغییر مکان معادل $\frac{P_0}{k}$ را در آن تولید می‌کرد. اکنون که بار به صورت دینامیکی و نه استاتیکی به سازه وارد می‌شود، پاسخ تغییر مکان سازه در مقایسه با حالت استاتیکی تفاوت دارد. این تفاوت با ضریبی به نام «ضریب پاسخ تغییر مکان» نشان داده شده و برابر است با:

$$R_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

رابطه‌ی روبرو نشان می‌دهد که نسبت $\frac{\Omega}{\omega}$ پاسخ تغییر مکان دینامیکی سازه نسبت به پاسخ استاتیکی آن تفاوت خواهد داشت.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

شکل روبروی R_d در مقابل $\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$ ترسیم شده است. این نمودار بسیار اهمیت داشته و موارد زیر از آن قابل استخراج است:

۱. اگر فرکانس بار صفر باشد ($\Omega = 0$)، $R_d = 1$ خواهد بود. در واقع این حالت متناظر با بارگذاری استاتیکی با شدت P_0 بر روی سازه است.

۲. برای نسبت فرکانس $\frac{\Omega}{\omega} < 1$ ، ضریب پاسخ تغییر مکان R_d بزرگتر از یک خواهد بود. یعنی تغییر مکان دینامیکی نسبت به تغییر مکان استاتیکی تشدید می‌شود.

۳. برای نسبت فرکانس $\frac{\Omega}{\omega}$ برابر یک یا در محدوده‌ی $\frac{\Omega}{\omega} > 1$ ، ضریب R_d به پهنای میل می‌کند.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

در واقع در این حالت $\Omega = \omega$ شده و پدیده‌ی «تشدید» یا «رزونانس» اتفاق می‌افتد. چنانچه سازه در این شرایط قرار بگیرد، متحمل تغییر مکان‌های بسیار بزرگی شده و حتی ممکن است به ناپایداری کلی آن منجر شود. اگر چه در عمل به علت اثرات غیرخطی از جمله تسلیم شدن مصالح و تغییر در فرکانس سازه در لحظات بحرانی، این مسئله رخ نخواهد داد.

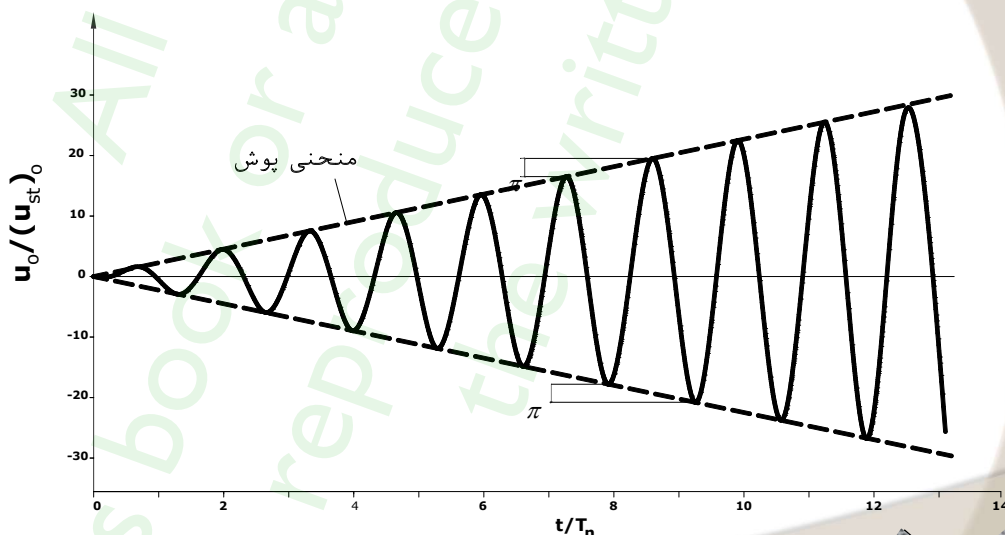
۴. برای نسبت فرکانس Ω/ω کمی بزرگتر از ۱ تا $\sqrt{2}$ ، باز هم ضریب R_d از یک بزرگتر بوده و افزایش تغییر مکان نسبت به حالت استاتیکی رخ می‌دهد.

۵. برای نسبت فرکانس $\Omega/\omega > \sqrt{2}$ ، ضریب R_d کوچکتر از یک بوده و در واقع جابجایی دینامیکی سازه در مقایسه با جابجایی استاتیکی آن کاهش یافته است.

در شکل اسلاید بعد، پاسخ $u(t)$ سازه‌ی یک‌درجه آزاد دلخواه نامیرایی تحت اثر بار هارمونیک در شرایط $\Omega = \omega$ (شرایط رزونانس)، نمایش داده شده است. دیده می‌شود که با گذشت زمان مرتباً جابجایی بدون محدودیت افزایش یافته و تا بی‌نهایت می‌تواند رشد کند. در بخش بعد دیده می‌شود که اثرات میرایی مانع رشد پاسخ تا بینهایت شده و پاسخ عملاً به مقدار مشخصی مجانب می‌شود.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

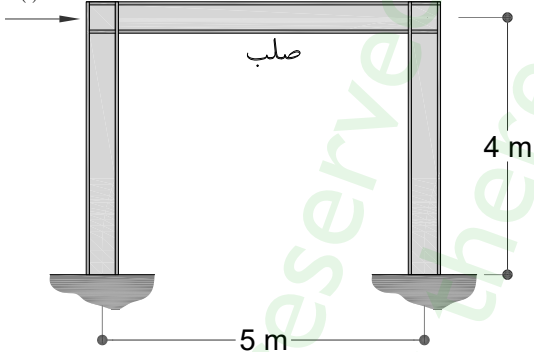
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب خمشی بتنی با سقف صلب را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن سقف برابر 20 ton است. ابعاد ستون‌های مربعی 40×40 سانتی‌متر و ابعاد تیرها 40×50 سانتی‌متر است. اگر مدول الاستیسیته‌ی آن 200000 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع باشد، با فرض آنکه سازه دارای جابجایی اولیه‌ای معادل 3 سانتی‌متر به سمت راست باشد و این سازه در تراز سقف تحت اثر یک نیروی هارمونیک بادامنه‌ی 200 تن و با فرکانس‌های 15، 29 و 60 رادیان بر ثانیه قرار بگیرد، مطلوب است:

$$P(t) = 200 \sin \Omega t$$



الف) محاسبه‌ی پاسخ جابجایی سازه برای کلیه‌ی فرکانس‌ها با در نظر گرفتن پاسخ‌های گذرا و ماندگار و ترسیم آن‌ها. ب) محاسبه‌ی ضریب پاسخ تغییر مکان (R_d) برای هر سه نسبت فرکانسی و محاسبه‌ی جابجایی حداکثر استاتیکی (u_{st}).

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}}$$

$$k = 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 2 \left(\frac{12 \times 2 \times 10^5 \times \frac{40^4}{12}}{400^3} \right) = 16000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16000}{20.4}} = 28 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28} = 0.22 \text{ sec}$$

$$\Omega = 15 \text{ rad/sec} \quad (\text{الف-۱})$$

با توجه به مشخصات سازه و همچنین $u(0) = 3 \text{ cm}$ و $\dot{u}(0) = 0$ بنابراین پاسخ برابر است با:

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \frac{p_0}{k} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right] \sin \omega t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin \Omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

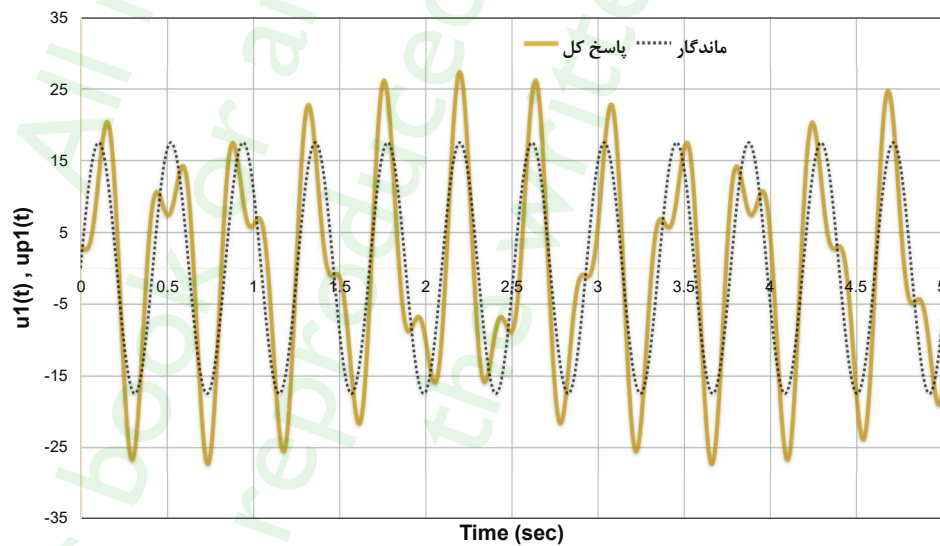
$$u_1(t) = \underbrace{3 \cos(28t) + \left[\frac{0}{28} - \frac{200000}{16000} \frac{\left(\frac{15}{28}\right)}{1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2} \right] \sin 28t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{200000}{16000} \frac{1}{1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2} \sin 15t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

$$u_1(t) = \underbrace{3 \cos(28t) - 9.4 \sin 28t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{17.5 \sin 15t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

رابطه‌ی فوق که هم شامل پاسخ گذرا و هم ماندگار است، در شکل اسلاید بعد ترسیم شده است.

۱۱۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

۱۱۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel) $\Omega = 29 \text{ rad/sec}$ (الف-۲)

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \underbrace{\left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \frac{p_0}{k} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right]}_{\text{پاسخ گذرا}} \sin \omega t + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin \Omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

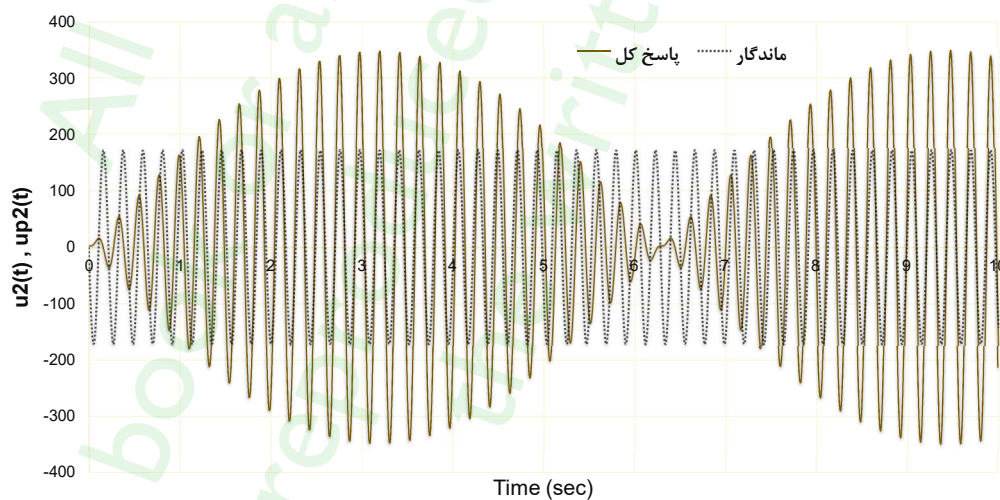
$$u_2(t) = 3 \cos(28t) + \underbrace{\left[\frac{0}{28} - \frac{200000}{16000} \frac{\left(\frac{29}{28}\right)}{1 - \left(\frac{29}{28}\right)^2} \right]}_{\text{پاسخ گذرا}} \sin 28t + \underbrace{\frac{200000}{16000} \frac{1}{1 - \left(\frac{29}{28}\right)^2} \sin 29t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

$$u_2(t) = \underbrace{3 \cos(28t) + 178 \sin 28t}_{\text{پاسخ گذرا}} - \underbrace{172 \sin 29t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

رابطه‌ی فوق که هم شامل پاسخ گذرا و هم ماندگار است، در شکل اسلاید بعد ترسیم شده است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.instagram.com/AlirezaeiChannel)

الف-۳ $\Omega = 60 \text{ rad/sec}$

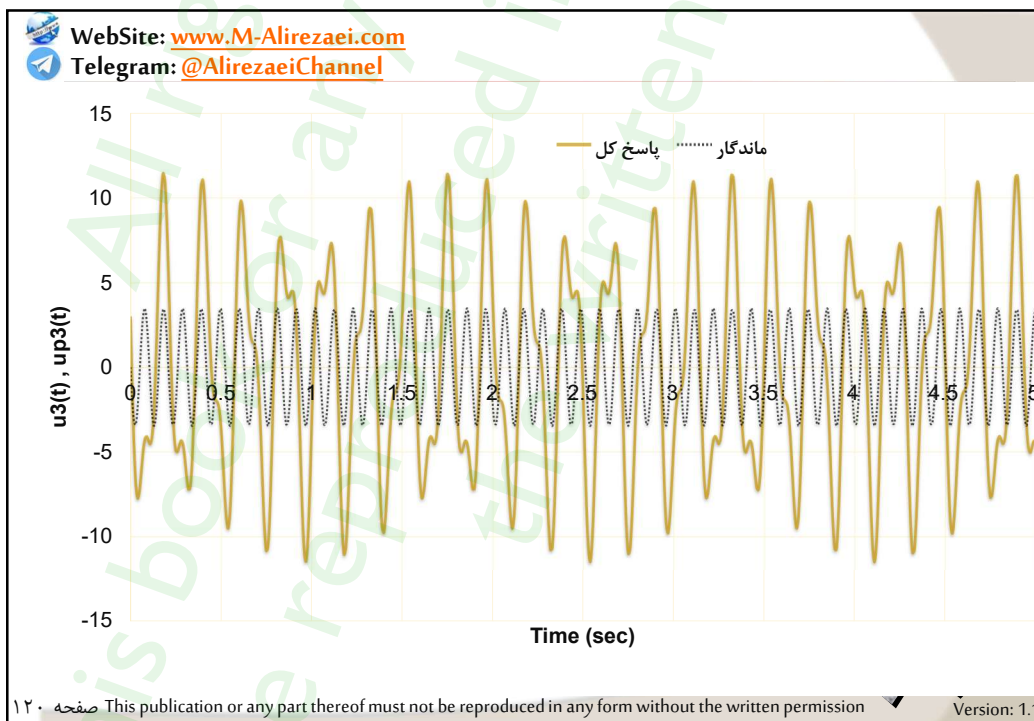
$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \frac{p_0}{k} \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \right] \sin \omega t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \sin \Omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

$$u_3(t) = \underbrace{3 \cos(28t) + \left[\frac{0}{28} - \frac{200000}{16000} \frac{\left(\frac{60}{28}\right)}{1 - \left(\frac{60}{28}\right)^2} \right] \sin 28t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{200000}{16000} \frac{1}{1 - \left(\frac{60}{28}\right)^2} \sin 60t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

$$u_3(t) = \underbrace{3 \cos(28t)}_{\text{پاسخ گذرا}} - \underbrace{7.46 \sin 28t}_{\text{پاسخ ماندگار}} - \underbrace{3.48 \sin 60t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

رابطه‌ی فوق که هم شامل پاسخ گذرا و هم ماندگار است، در شکل اسلاید بعد ترسیم شده است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ب) ضرایب پاسخ تغییر مکان عبارتند از:

$$R_{d_1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2} = 1.40$$

$$R_{d_2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{29}{28}\right)^2} = -13.75$$

$$R_{d_3} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{60}{28}\right)^2} = -0.278$$

دیده می‌شود که برای $\frac{\Omega}{\omega} \ll 1$ ، ضریب پاسخ $R_{d_1} = 1.40$ است. برای $\frac{\Omega}{\omega} \approx 1$ ، $R_{d_2} = -13.75$ رشد بسیار زیادی داشته و نشان‌دهنده‌ی نزدیک شدن به حالت «رزونانس» است. و بالاخره برای $\frac{\Omega}{\omega} > \sqrt{2}$ ، ضریب $R_{d_3} = -0.275$ بوده و نشان‌دهنده‌ی کاهش جابجایی نسبت به حالت استاتیکی است. منفی بودن نشان‌دهنده‌ی غیرهمفاز بودن بار و پاسخ تغییر مکان در این حالت است. یعنی در شرایط $\frac{\Omega}{\omega} > \sqrt{2}$ ، جهت اعمال بار و جهت تغییر مکان ممتد ۱۸۰° با هم اختلاف دارند.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ تغییر مکان استاتیکی حداکثر برابر است با:

$$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{K} = \frac{200000}{16000} = 12.5 \text{ cm}$$

در واقع تحریک $P(t) = 2000 \sin 15t$ موجب اعمال جابجایی دینامیکی حداکثر زیر شده است.

$$(u_{ma}) = 1.4 (12.5) = 17.5 \text{ cm}$$

به همین ترتیب تحریک $P(t) = 2000 \sin 29t$ موجب اعمال جابجایی دینامیکی حداکثر معادل مقدار زیر شده است:

$$(u_{ma}) = -13.75 (12.5) = 171.87 \text{ cm}$$

تحریک $P(t) = 2000 \sin 60t$ موجب اعمال جابجایی دینامیکی حداکثر معادل زیر شده است:

$$(u_{ma}) = -0.278 (12.5) = -3.475 \text{ cm}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ارتعاش اجباری هارمونیک میرا

با در نظر گرفتن اثر میرایی، معادله حرکت سیستم یکدرجه آزاد به صورت زیر درخواهد آمد:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \sin \Omega t$$

مجدداً در این حالت نیز لازم است معادله‌ی فوق برای شرایط اولیه‌ی $u = u(0)$ و $\dot{u} = \dot{u}(0)$ حل گردد. بدون اثبات، حل خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل فوق به شرح زیر است:

$$u_p(t) = C \sin \Omega t + D \cos \Omega t$$

$$C = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}$$

$$D = \frac{P_0}{k} \frac{-\frac{2\xi\Omega}{\omega}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

حل عمومی (همگن) معادله‌ی قبل در واقع پاسخ ارتعاش آزاد سازه به صورت زیر است:

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

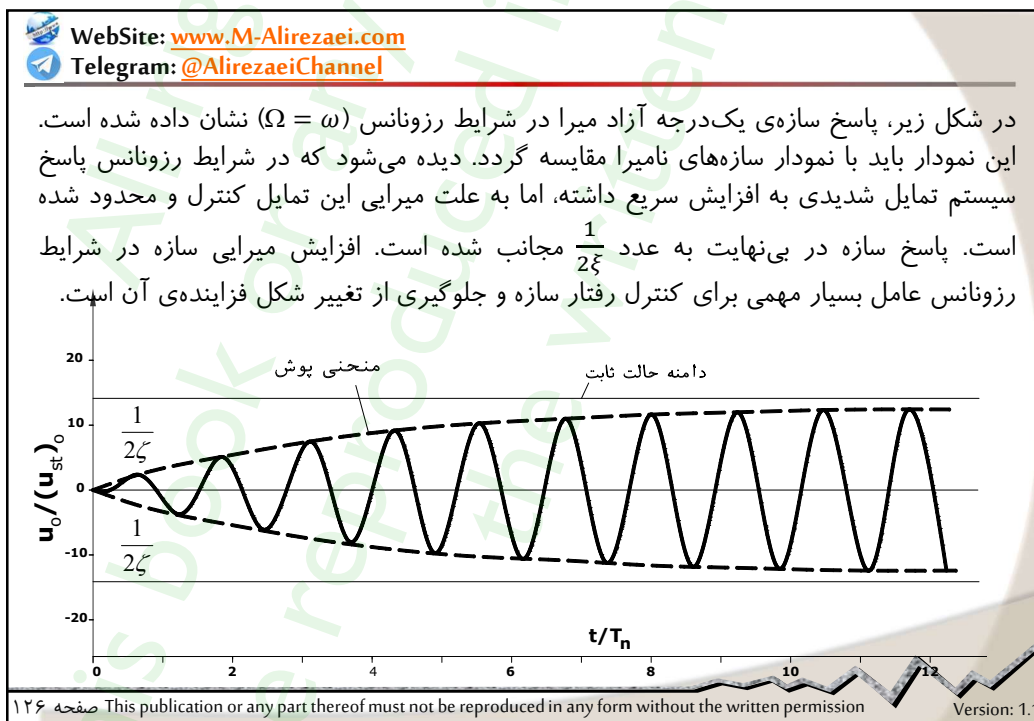
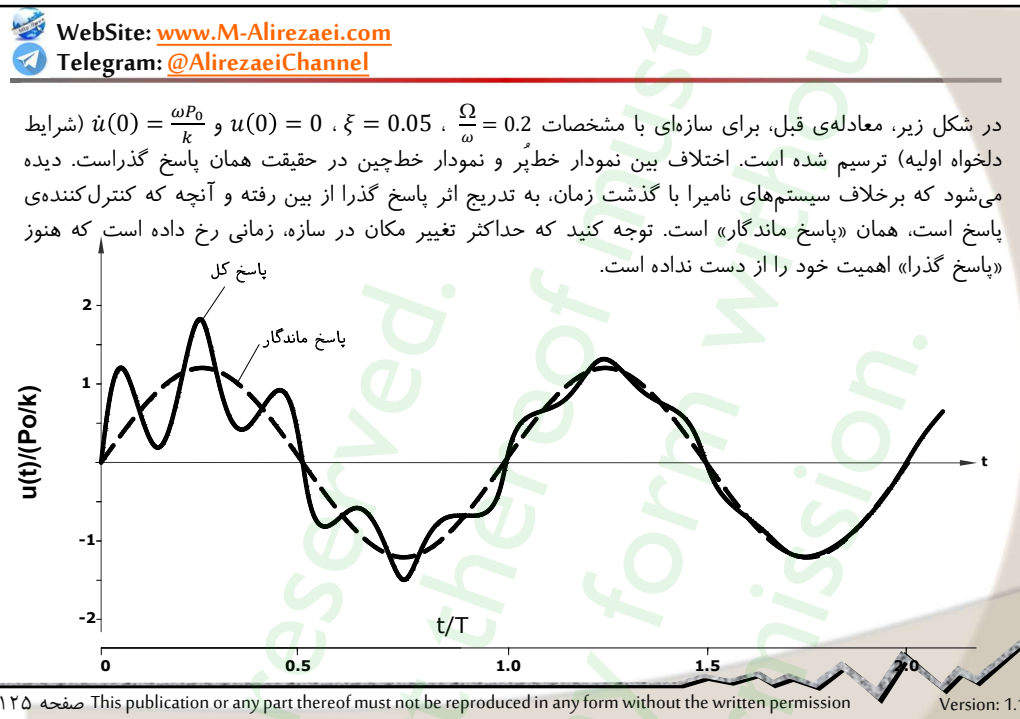
در معادله‌ی فوق $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ است. بنابراین حل کامل معادله‌ی فوق مطابق رابطه‌ی زیر خواهد بود.

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{C \sin \Omega t + D \cos \Omega t}_{\text{پاسخ ماندگار}}$$

ضریب B و A را می‌توان به روش‌های استاندارد مشابه آنچه که در سیستم‌های نامیرا انجام شد، برحسب جابجایی اولیه‌ی $u(0)$ و سرعت اولیه‌ی $\dot{u}(0)$ محاسبه نمود. همان‌طور که از معادله‌ی فوق دیده می‌شود، پاسخ کل از دو قسمت شامل «پاسخ گذرا» و «پاسخ ماندگار» تشکیل یافته است.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مشابه قبل میتوان می توان پاسخ جابجایی سازه (پاسخ ماندگار آن) را به صورت زیر نوشت:

$$u(t) = u_0 \sin(\Omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\Omega t - \phi)$$

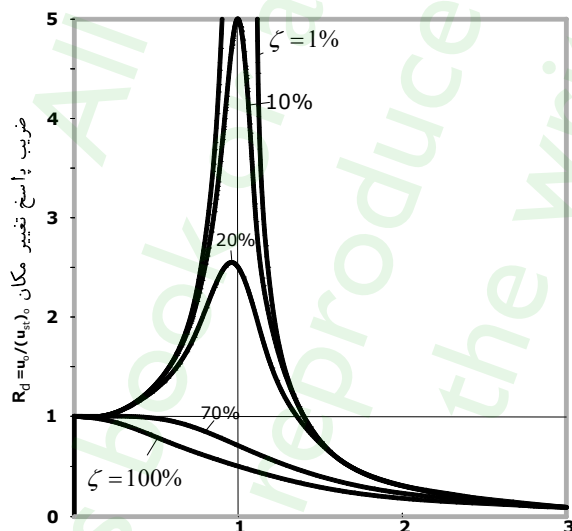
که در آن $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ و $\phi = tg^{-1} \left(-\frac{D}{C} \right)$ است. با جاگذاری C و D داریم:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}}$$

$$\phi = tg^{-1} \frac{2\xi \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

که R_d مشابه «ضریب پاسخ تغییر مکان» نام دارد که این بار برای سیستم‌های میرا تعریف شده است. این رابطه نشان می‌دهد که R_d در سیستم‌های میرا علاوه بر نسبت Ω/ω به ξ (نسبت میرایی) نیز وابسته است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission. Version: 1.1 صفحه ۱۲۷

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

شکل روبرو نمودار R_d در مقابل Ω/ω برای ξ های مختلف است. از نمودار مذکور نتیجه‌گیری‌های بسیار مهمی به صورت زیر قابل استخراج است:

۱- اگر فرکانس بار صفر باشد ($\Omega = 0$)، بار در واقع استاتیکی بوده و $R_d = 1$ است. در این حالت میرایی هیچ‌گونه نقشی در پاسخ ندارد. این حالت متناظر با اعمال استاتیکی بار P_0 به سازه است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission. Version: 1.1 صفحه ۱۲۸



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

1- If the frequency ratio $\Omega/\omega \ll 1.0$ implying that the force is “slowly varying”), R_d is only slightly larger than 1 and is essentially independent of damping. Thus:

$$u_0 \approx (u_{st}) = \frac{P_0}{k}$$

This result implies that the amplitude of dynamic response is essentially the same as the static deformation and is controlled by the stiffness of the system.

2- If the frequency ratio $\Omega/\omega \gg 1.0$ implying that the force is “rapidly varying”), R_d tends to zero as Ω/ω increases and is essentially unaffected by damping. which can be approximated by:

$$u_0 \approx (u_{st}) \frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{P_0}{m\Omega^2}$$

This result implies that the response is controlled by the mass of the system.

3- If the frequency ratio $\Omega/\omega \approx 1.0$ R_d is very sensitive to damping and, for the smaller damping values

$$u_0 \approx \frac{(u_{st})}{2\zeta} = \frac{P_0}{c\omega}$$

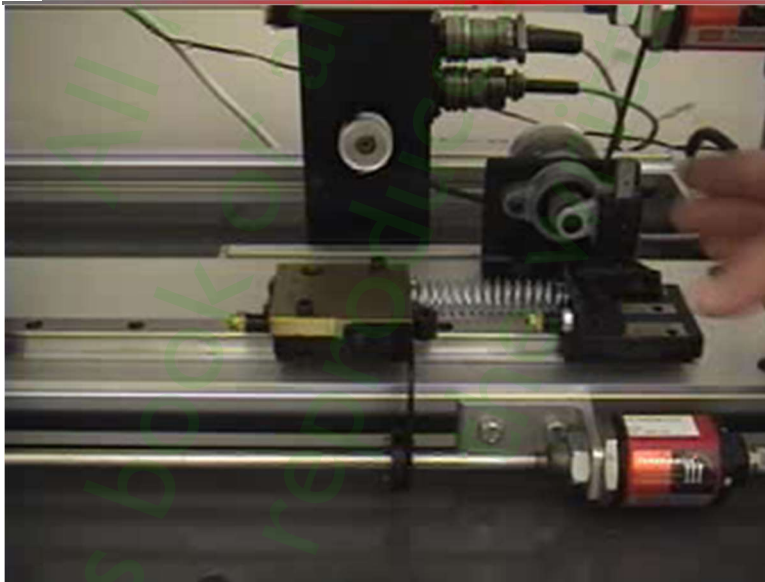
صفحه ۱۲۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



صفحه ۱۳۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

۲- برای نسبت‌های فرکانسی $\Omega/\omega < 1$ R_d تابعی از نسبت میرایی سیستم است. چنانچه میرایی تقریباً کمتر از $\xi = 0.7$ باشد، $R_d > 1$ بوده و پاسخ جابجایی دینامیکی نسبت به پاسخ جابجایی استاتیکی $(u_{st})_0 = \frac{P_0}{K}$ تشدید خواهد شد. برای $\xi > 0.7$ ، $R_d < 1$ بوده و در واقع پاسخ دینامیکی کمتر از پاسخ استاتیکی است.

۳- برای نسبت‌های فرکانس $\Omega/\omega \approx 1$ سازه در محدوده‌ی رزونانس قرار گرفته و R_d تمایل به رشد شدید دارد. این رشد برای سازه‌های با میرایی کم بسیار شدید بوده و برای سازه‌های با میرایی زیاد به شدت افت خواهد داشت. حتی دیده می‌شود که برای میرایی $\xi \geq 0.7$ ، R_d در محدوده‌ی رزونانس کمتر از ۱ است. میرایی بیشترین تأثیر را در کاهش پاسخ سازه در محدوده‌ی رزونانس دارد.

۴- برای نسبت‌های فرکانس $\Omega/\omega \gg 1$ ، عملاً میرایی تأثیر بسزایی نداشته و R_d همواره کمتر از ۱ خواهد بود. Ω/ω های بزرگ نمایانگر تغییر سریع بار از لحاظ فیزیکی است.

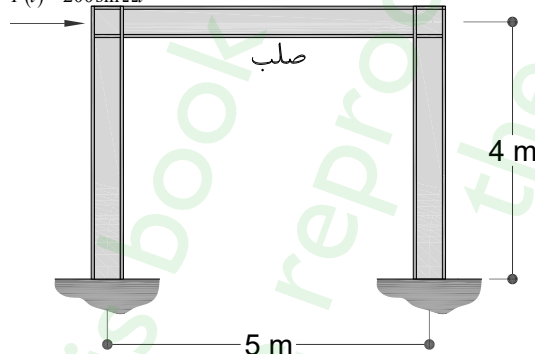
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب خمشی بتنی با سقف صلب را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن سقف برابر 20 ton است. ابعاد ستون‌های مربعی 40×40 سانتی‌متر و ابعاد تیرها 40×50 سانتی‌متر است. اگر مدول الاستیسیته‌ی آن 200000 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع باشد، با فرض آنکه سازه دارای جابجایی اولیه‌ی معادل ۳ سانتی‌متر به سمت راست باشد و این سازه در تراز سقف تحت اثر یک نیروی هارمونیک بادامنه‌ی ۲۰۰ تن و با فرکانس‌های ۱۵، ۲۹ و ۶۰ رادیان بر ثانیه قرار بگیرد،

$$P(t) = 200 \sin \Omega t$$



با فرض میرایی ۵٪ مطلوب است:

الف) محاسبه‌ی پاسخ جابجایی سازه برای کلیه‌ی فرکانس‌ها با در نظر گرفتن پاسخ‌های گذرا و ماندگار و ترسیم آن‌ها. ب) محاسبه‌ی ضریب پاسخ تغییر مکان (R_d) برای هر سه نسبت فرکانسی و محاسبه‌ی جابجایی حداکثر استاتیکی (u_{st}).

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

 WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}} \quad (\text{تکراری})$$

$$k = 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 2 \left(\frac{12 \times 2 \times 10^5 \times \frac{40^4}{12}}{400^3} \right) = 16000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16000}{20.4}} = 28 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28} = 0.22 \text{ sec}$$

فرکانس زاویه‌ای میرا

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 28 \sqrt{1 - 0.05^2} = 27.96$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

 WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

الف-۱) $\Omega = 15 \text{ rad/sec}$

با توجه به مشخصات سازه و همچنین $u(0) = 3 \text{ cm}$ و $\dot{u}(0) = 0$ بنابراین پاسخ برابر است با:

$$u_1(t) = e^{-\xi\omega t} (A_1 \cos \omega_D t + B_1 \sin \omega_D t) + C_1 \sin \omega_1 t + D_1 \cos \omega_1 t$$

$$C_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{200000}{16000} \frac{1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.05)\left(\frac{15}{28}\right)\right]^2} = 17.4$$

$$D_1 = \frac{P_0}{K} \frac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega}}{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{200000}{16000} \frac{-2(0.05)\frac{15}{28}}{\left[1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.05)\left(\frac{15}{28}\right)\right]^2} = -1.31$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$u_1(t) = e^{-1.4t} (A_1 \cos(27.96t) + B_1 \sin(27.96t)) + 17.4 (\sin 15t) - 1.31 (\cos 15t)$$

A_1 و B_1 بر اساس شرایط اولیه‌ی مسئله یعنی $u(0) = 3 \text{ cm}$ و $\dot{u}(0) = 0$ تعیین می‌شوند:

$$t = 0 \Rightarrow u(0) = 3 \text{ cm} \Rightarrow 3 = A_1(\cos 0) - 1.31 \cos(0) \rightarrow A_1 = 4.31$$

برای تعیین B_1 ، از $u(t)$ مشتق گرفته و رابطه‌ی سرعت را محاسبه می‌کنیم:

$$\dot{u}_1(t) = -1.4e^{-1.4t}(4.31 \cos(27.96t) + B_1 \sin(27.96t)) + e^{-1.4t}(-120.5 \sin(27.96t) + 27.96B_1 \cos(27.96t)) + 261 \cos(15t) + 0.354 \sin(15t)$$

$$t = 0 \Rightarrow \dot{u}_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = -1.4(4.31) + 27.96B_1 + 261 \rightarrow B_1 = -9.12$$

بنابراین پاسخ $u_1(t)$ به صورت زیر است:

$$u_1(t) = e^{-1.4t}(4.31 \cos(27.96t) - 9.12 \sin(27.96t)) + 17.4 \sin(15t) - 1.31 \cos(15t)$$

به همین ترتیب برای فرکانسهای $\omega_2 = 29 \text{ rad/sec}$ و $\omega_3 = 60 \text{ rad/sec}$ پاسخ جابجایی عبارت است از:

$$u_2(t) = e^{-1.4t}(-77.87 \cos(27.96t) + 1.87 \sin(27.96t)) - 56.75 \sin(15t) + 80.8 \cos(15t)$$

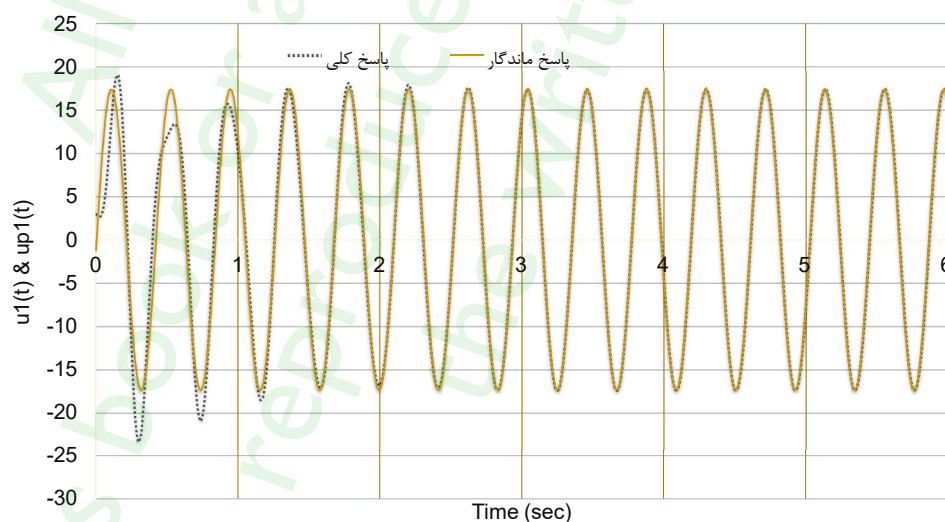
$$u_3(t) = e^{-1.4t}(3.21 \cos(27.96t) + 0.28 \sin(27.96t)) - 3.47 \sin(60t) - 0.21 \cos(60t)$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

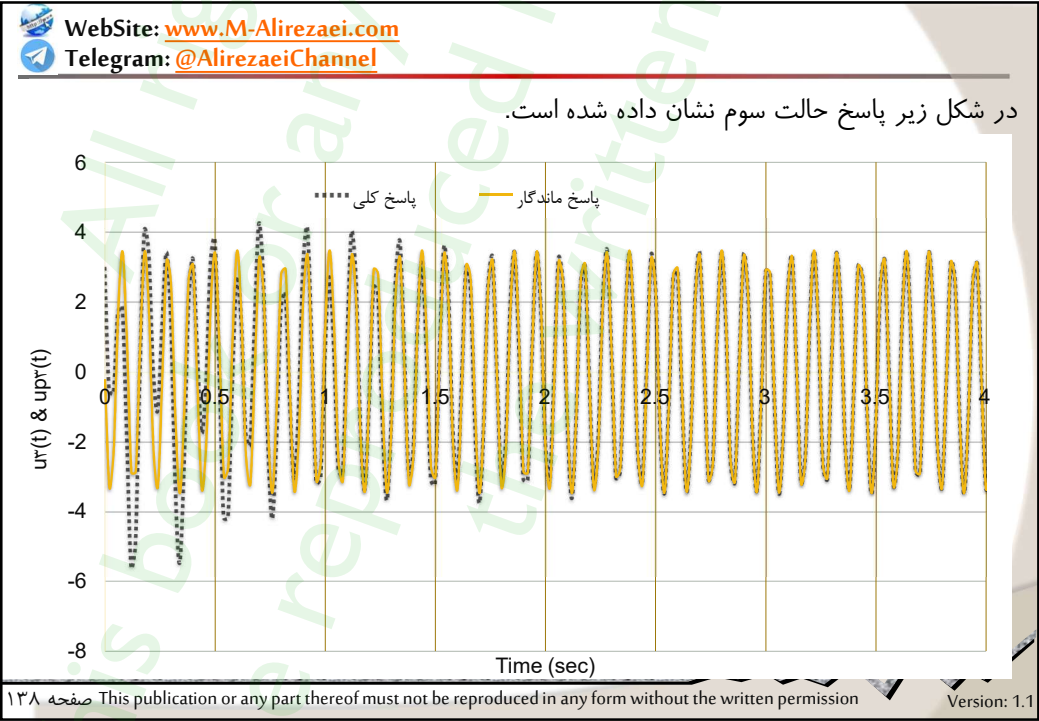
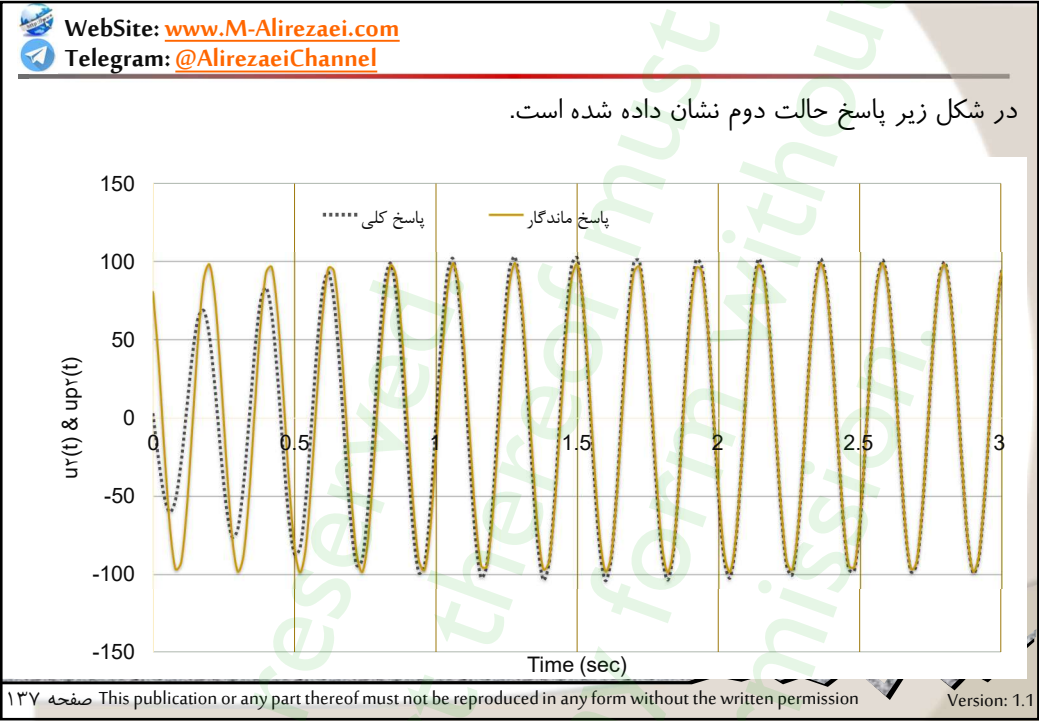
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در شکل زیر پاسخ حالت اول نشان داده شده است.



Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

دیده می‌شود که پاسخ کلی پس از طی مدت زمان مناسب عملاً بر پاسخ خصوصی (ماندگار) منطبق شده و پاسخ گذرا اهمیت خود را از دست داده است. همچنین توجه داشته باشید که پاسخ حداکثر قبل از زوال پاسخ گذرا رخ داده است. این مسئله در طراحی سازه اهمیت دارد؛ زیرا سازه باید حداکثر جابجایی رخ داده تحت اثر بار را تحمل نماید.

ب) محاسبه‌ی ضرایب پاسخ تغییر مکان:

$$R_{d1} = \frac{u_0}{(u_{st})} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{15}{28}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.05)\left(\frac{15}{28}\right)\right]^2}} = 1.4$$

$$R_{d2} = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{29}{28}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.05)\left(\frac{29}{28}\right)\right]^2}} = 7.9$$

$$R_{d3} = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{60}{28}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.05)\left(\frac{60}{28}\right)\right]^2}} = 0.27$$

۱۳۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) در یک سیستم یکدرجه آزاد مقدار دامنه تحت دو تحریک با فرکانس های ارتعاشی اجباری $\Omega = \omega$ و $\Omega = 5\omega$ تحت تحریک هارمونیک با نسبت فرکانسی $\Omega = 5\omega$ مقدار حداکثر دامنه برابر 0.02 in بدست آمده است. مقدار نسبت میرایی سیستم را تعیین نمایید.

$$\text{At } \Omega = \omega \quad u_0 \approx \frac{(u_{st})_0}{2\xi} = 5$$

$$\text{At } \Omega = 5\omega \quad u_0 \approx (u_{st}) \frac{\omega^2}{\Omega^2} = (u_{st}) \times \frac{1}{25} = 0.02$$

$$(u_{st})_0 = 0.5 \text{ in} \quad \zeta = 0.05$$

۱۴۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ضریب پاسخ دینامیکی:

در این بخش، ضرایب پاسخ تغییر شکل، سرعت و شتاب که بی بعد بوده و بیانگر دامنه این سه کمیت هستند، بررسی می‌شود.

$$u(t) = u_0 \sin(\Omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\Omega t - \phi) \quad \text{تکراری}$$

$$\frac{u(t)}{(u_{st})} = \frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\Omega t - \phi)$$

با یکبار مشتق گرفتن از رابطه اخیر داریم:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/k} = \Omega R_d \cos(\Omega t - \phi) = \frac{\dot{u}(t)}{\frac{p_0}{\sqrt{km}}} = \frac{\Omega}{\omega} R_d \cos(\Omega t - \phi)$$

$$= R_v \cos(\Omega t - \phi) \quad \rightarrow \quad R_v = \frac{\Omega}{\omega} R_d$$

که در فوق، R_v ضریب پاسخ سرعت است.

۱۴۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

اگر یکبار دیگر از رابطه اخیر مشتق گرفته شود، داریم:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = -\Omega R_v \sin(\Omega t - \phi) = \frac{\ddot{u}(t)}{\frac{p_0}{m}} = -\frac{\Omega}{\omega} R_v \sin(\Omega t - \phi)$$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{\frac{p_0}{m}} = -R_a \sin(\Omega t - \phi) \quad \rightarrow \quad R_a = \frac{\Omega}{\omega} R_v$$

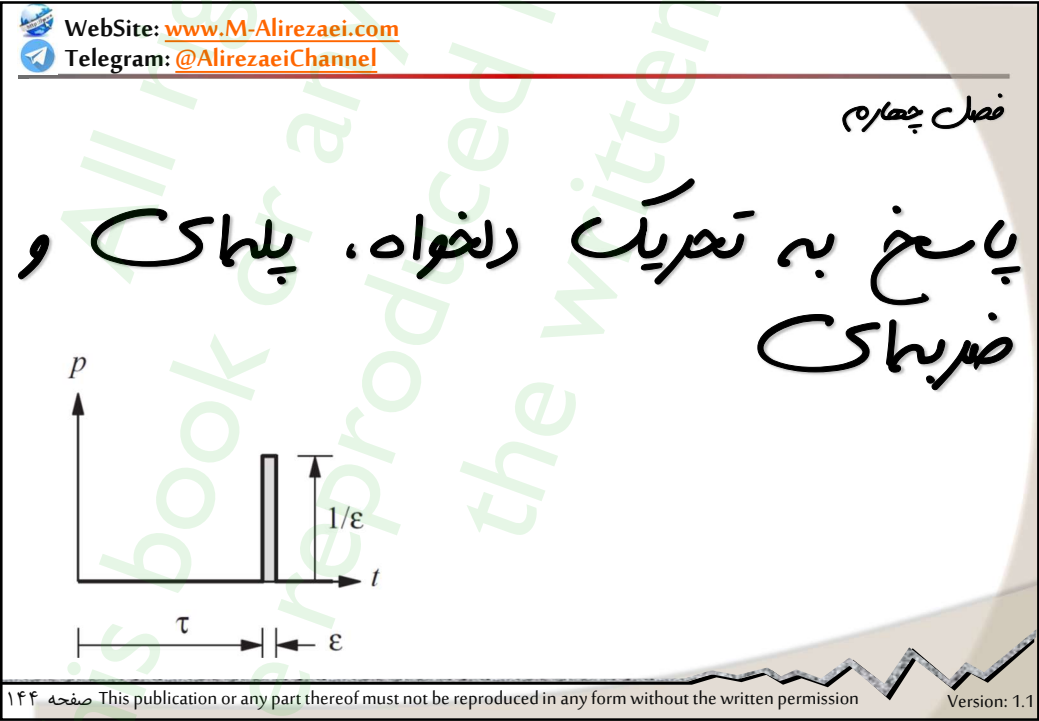
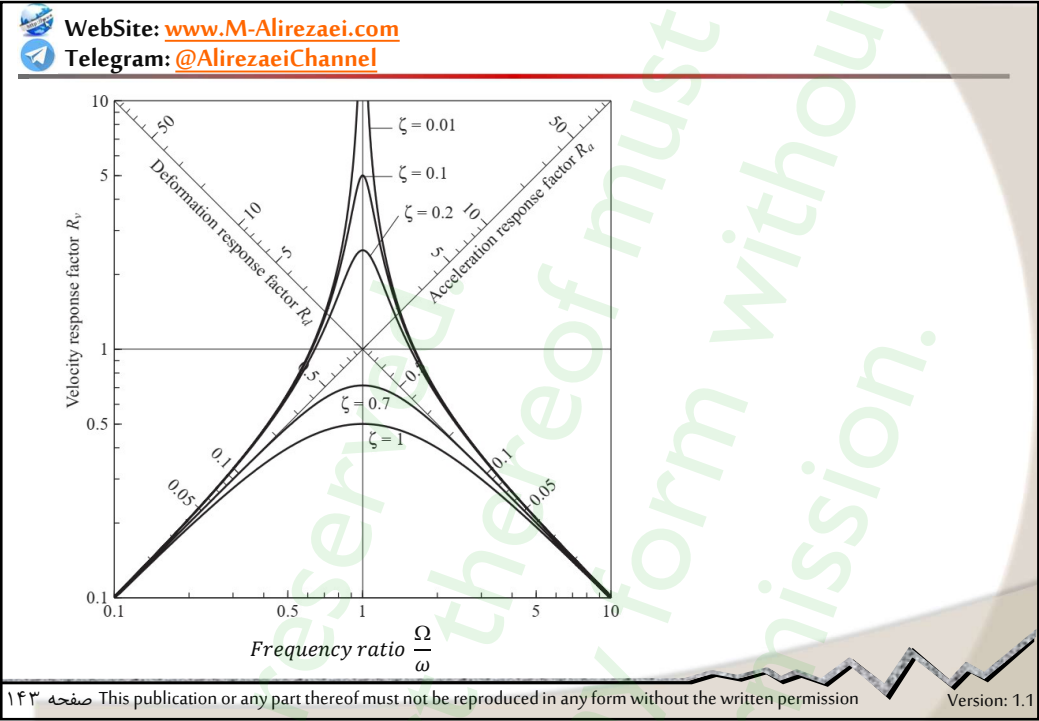
همانطور که دیده میشود، نسبت دامنه شتاب ارتعاشی به شتاب حاصل از اعمال نیروی p_0 بر جرم است. بنابراین داریم:

$$\frac{R_a}{\frac{\Omega}{\omega}} = R_v = \frac{\Omega}{\omega} R_d$$

از رابطه بالا میتوان تمام روابط را در یک نمودار واحد قرار داد.

۱۴۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- مفهوم ضربه؟
- انتگرال دوهامل و بررسی این انتگرال برای حالت زلزله
- پاسخ سازه تحت ضربه کوتاه
- اثر میرایی در ضربه



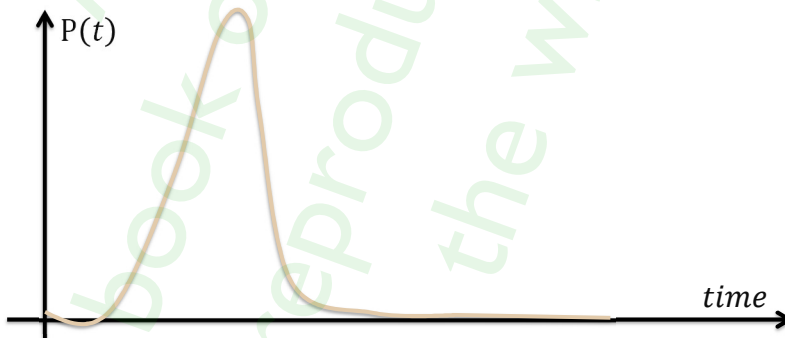
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مقدمه

یکی دیگر از انواع بسیار مهم بارگذاری‌های دینامیکی، «بارگذاری ضربه‌ای» یا «پالسی» است. این نوع بارگذاری در موارد متعددی از جمله بار ناشی از انفجار و یا حتی حرکات لرزه‌ای در نزدیکی گسل‌ها به وجود می‌آیند. دینامیک سازه‌های قرار گرفته در معرض چنین بارگذاری‌هایی یکی از محورهای اصلی مطالعات محققین در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی بوده است.



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

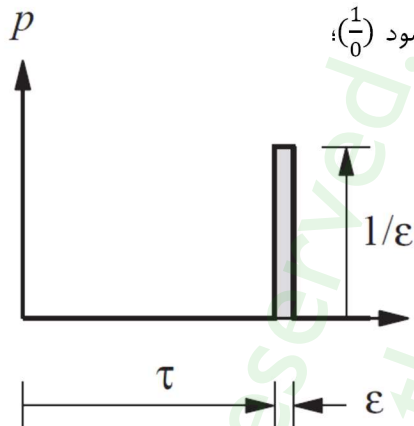




WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در شکل زیر، نیرویی نشان داده شده است در یک مدت زمان بسیار کوتاه و با مقدار بسیار بزرگ (اما محدود) به سازه اعمال شده است. این بار را «نیروی ضربه» می‌نامیم. همان‌طور که دیده می‌شود، معادله‌ی این بار $P(t) = 1/\varepsilon$ است که ε طول مدت زمان اعمال بار از لحظه‌ی $t = \tau$ است. با میل کردن ε به صفر، بار بینهایت می‌شود $(\frac{1}{0})$:



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



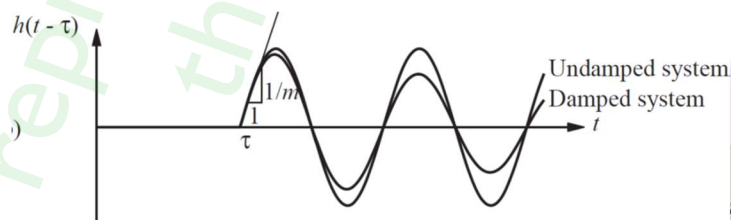
WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

اما «شدت بار» که برابر با انتگرال سطح زیر نمودار $P(t)$ است، ثابت مانده و معادل واحد خواهد بود. شدت بار در حالت $\varepsilon \rightarrow 0$ را «ضربه‌ی واحد» می‌نامیم. در ریاضیات تابع معروف دلتای دیراک که به صورت $\delta(t - \tau)$ تعریف می‌شود، در واقع ضربه‌ی واحدی است که مرکز آن در $t = \tau$ قرار دارد.

با توجه به قانون دوم حرکت نیوتن، اگر بار P بر جرمی به مقدار m وارد شود، نرخ تغییرات مومنتوم (اندازه حرکت) جسم برابر با نیروی اعمالی است؛ یعنی

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u}) = P$$



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

برای یک مقدار ثابت جرم، این معادله برابر است با:

$$P = m\ddot{u}$$

با انتگرال گیری طرفین نسبت به t داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m \Delta \dot{u}$$

حاصل سمت چپ معادله‌ی فوق «شدت بار» است. حاصلضرب جرم و سرعت نیز «مومنتم» نام دارد. لذا معادله‌ی فوق بیان می‌کند که «شدت بار ضربه‌ای» برابر است با تغییرات مومنتم. مطلب فوق را همچنین می‌توان به سازه‌های یک‌درجه آزاد که علاوه بر m دارای k و c نیز هستند، تعمیم داد. در این تعمیم باید مقادیر k و c تأثیری نداشته باشند؛ زیرا در معادلات فوق فقط اثر جرم لحاظ شده است. در سازه‌های واقعی، عملاً به علت کوتاه بودن زمان اعمال ضربه، سازه فرصت عکس‌العمل به وسیله‌ی نیروهای لختی و میرایی را نداشته و عملاً k, c بی‌تأثیر خواهند بود.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ضربه‌ی واحد در لحظه‌ی $t = \tau$ به جرم m سرعتی معادل زیر می‌دهد:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m}$$

همچنین می‌دانیم که قبل از اعمال ضربه، جابجایی اولیه‌ی سازه صفر است و لذا:

$$u(\tau) = 0$$

پس از اتمام ضربه، سازه به علت سرعت اولیه‌ای که در فاصله‌ی زمانی اعمال ضربه معادل رابطه‌ی فوق دریافت کرده است، شروع به ارتعاش آزاد می‌کند؛ بنابراین پاسخ سازه از جایگذاری $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1/m$ در معادله‌ی حرکت سیستم یک‌درجه آزاد برای سازه‌های نامیرا و سازه‌های میرا به صورت زیر به دست می‌آید:

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

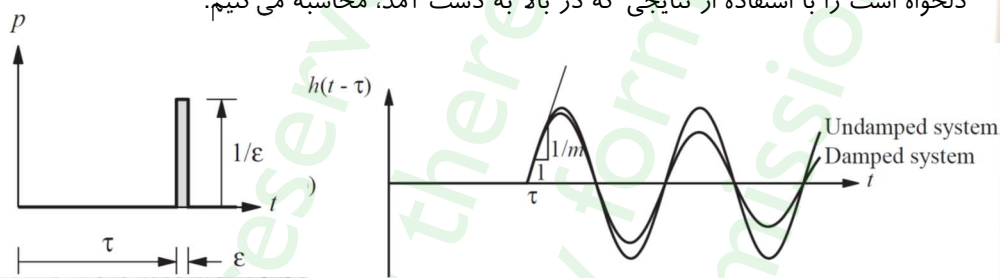
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$h(t - \tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m\omega} \sin[\omega(t - \tau)] \quad t \geq \tau$$

$$h(t - \tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi(t-\tau)} \sin[\omega_D(t - \tau)] \quad t \geq \tau$$

توابع پاسخ ضربه‌ی واحد که با $h(t - \tau)$ نمایش داده شده است، در شکل اسلاید بعد دیده می‌شود. حال مسئله‌ی اصلی که مربوط به پاسخ سیستم یک‌درجه آزاد تحت اثر بارگذاری دلخواه است را با استفاده از نتایجی که در بالا به دست آمد، محاسبه می‌کنیم.



۱۵۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بار $P(t)$ دلخواه متغیر با زمان را می‌توان به صورتی که در شکل اسلاید بعد نشان داده شده است، با مجموعه‌ای از ضربه‌های کوتاه متوالی نشان داد. می‌توان پاسخ سیستم دینامیکی خطی (ارتجاعی) به چنین ضربه‌هایی-که مقدار آنها در هر لحظه‌ی زمانی τ برابر $P(\tau)d\tau$ است-را با حاصلضرب مقدار ضربه در پاسخ ضربه‌ی واحد به دست آورد:

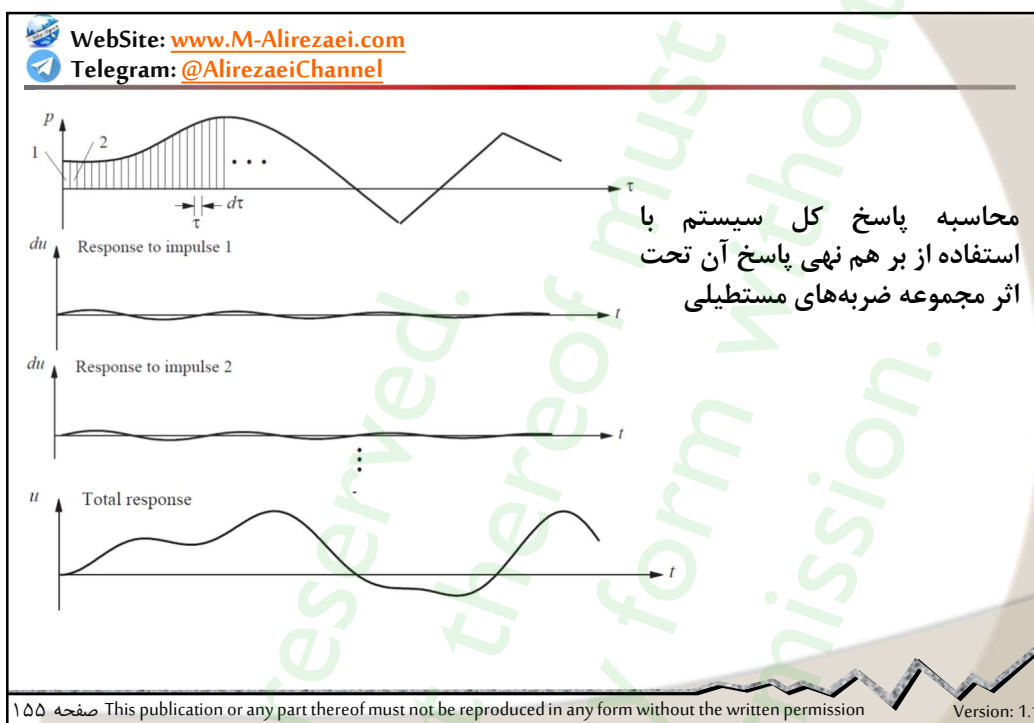
$$du(t) = [P(\tau)d\tau]h(t - \tau) \quad t \geq \tau$$

پاسخ جابجایی سیستم در هر لحظه‌ی زمانی t مجموع پاسخ‌ها به کلیه ضربه‌ها تا آن لحظه است. بنابراین:

$$u(t) = \int_0^t P(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

۱۵۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با جاگذاری معادلات بدست آمده برای $h(t - \tau)$ در انتگرال فوق، پاسخ $u(t)$ به صورت زیر برای سازه‌های نامیرا و میرا به دست می‌آید:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t - \tau)] d\tau$$

هر یک از انتگرال‌های فوق را «انتگرال دوهمامل» می‌نامند. دقت شود که روابط فوق با فرض اولیه‌ی $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ به دست آمده است.

۱۵۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

انتگرال دوهمال روشی برای محاسبه‌ی پاسخ سیستم یک‌درجه آزاد خطی به بارگذاری دلخواه $P(t)$ است. چنانچه $P(t)$ تابع ریاضی ساده‌ای باشد، محاسبه‌ی انتگرال به روشهای تحلیلی ریاضی امکان پذیر خواهد بود. اما چنانچه $P(t)$ پیچیده باشد - نظیر بارگذاری زلزله - برای محاسبه‌ی انتگرال‌های فوق به روش‌های عددی ریاضی نیاز خواهد بود. در بخش بعد، الگوریتم حل عددی انتگرال دوهمال برای شتاب پایه‌ی دلخواه در شرایط میرا و نامیرا آورده شده است. لازم به ذکر است که انتگرال دوهمال روش کارامدی برای تحلیل لرزه‌ای سازه‌ها نبوده و در فصل بعد، روش‌های عددی جایگزین کارآمدتر و مناسب‌تری معرفی خواهند شد.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

انتگرال دوهمال یک‌درجه آزاد تحت اثر شتاب

الف) حالت نامیرا

تحت اثر شتاب پایه‌ی دلخواه $\ddot{u}_g(\tau)$ ، می‌توان نیروی معادل $P(\tau)$ شتاب فوق را به صورت زیر نوشت:

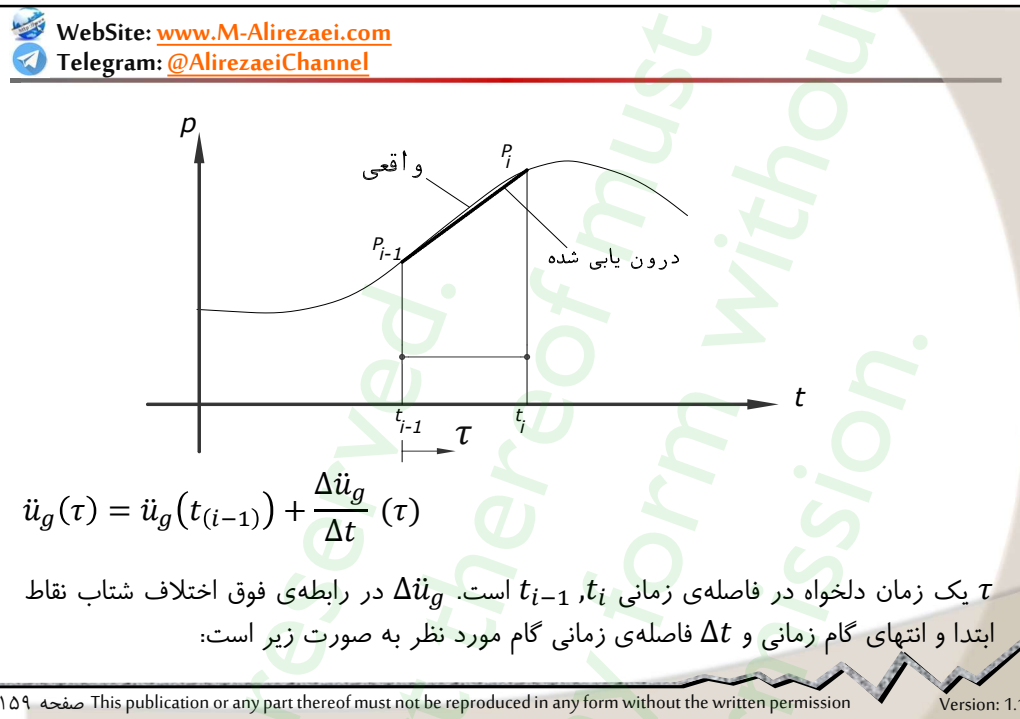
$$|P(\tau)| = m\ddot{u}_g(\tau)$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$$

حال هدف حل انتگرال فوق برای تابع دلخواه $\ddot{u}_g(t)$ است. برای حل لازم است نحوه‌ی تغییرات شتاب در هر فاصله‌ی زمانی t_i و t_{i-1} (شماره‌ی گام) مشخص باشد. فرض کنید این تغییرات را بتوان معادل شکل اسلاید بعد خطی در نظر گرفت. در این صورت می‌توان معادله‌ی شتاب فاصله در لحظه‌های زمانی t_i و t_{i-1} را به شکل زیر مشخص نمود:

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\Delta \ddot{u}_g = \ddot{u}_g(t_i) - \ddot{u}_g(t_{i-1})$$

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}$$

همچنین عبارت سینوسی داخل انتگرال را می‌توان مطابق رابطه‌ی زیر بسط داد:

$$\sin \omega(t - \tau) = \sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau$$

بنابراین انتگرال دو هامل به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u(t) = \frac{1}{\omega} \left\{ \sin \omega t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right\}$$

انتگرال‌های داخل آکولاد را به ترتیب $A(t_i)$ و $B(t_i)$ می‌نامیم؛ یعنی:

$$A(t_i) = \int_0^{t_i} \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$B(t_i) = \int_0^{t_i} \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$A(t_i)$ و $B(t_i)$ را می‌توان به صورت گام به گام و بر اساس مقادیر آن‌ها در گام قبل - یعنی گام t_{i-1} به صورت زیر به دست آورد:

$$A(t_i) = A(t_{i-1}) + \Delta A(t_i)$$

$$B(t_i) = B(t_{i-1}) + \Delta B(t_i)$$

$\Delta A(t_i)$ و $\Delta B(t_i)$ از انتگرال‌های زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\Delta A(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$\Delta B(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

اکنون رابطه‌ی تغییرات شتاب (معادله‌ی شتاب) را در روابط فوق جاگذاری می‌کنیم و انتگرال‌ها را حل می‌کنیم:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\begin{aligned} \Delta A(t_i) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\ddot{u}_g(t_{i-1}) + \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} (\tau - t_{i-1}) \right] \cos \omega \tau d\tau \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ddot{u}_g(t_{i-1}) \cos \omega \tau d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} (\tau - t_{i-1}) \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \ddot{u}_g(t_{i-1}) \sin \omega \tau \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \end{aligned}$$

حاصل عبارت اول برابر است با:

$$\frac{\ddot{u}_g(t_{i-1})}{\omega} [\sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1}]$$

جمله‌ی اول داخل آکولاد را به روش جزءبه‌جزء حل می‌کنیم:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

 WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \overbrace{\tau}^u \cdot \overbrace{\cos \omega \tau}^{dv} d\tau = \overbrace{\tau}^u \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{\omega} \sin \omega \tau}^v \right) - \int \overbrace{\frac{1}{\omega} \sin \omega \tau}^v \cdot \overbrace{d\tau}^{du} =$$

$$\frac{\tau}{\omega} \sin \omega \tau + \frac{\cos \omega \tau}{\omega^2}$$

بنابراین $\Delta A(t_i)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \Delta A_{t_i} &= \frac{\ddot{u}_g(t_{i-1})}{\omega} [\sin(\omega t_i) - \sin(\omega t_{i-1})] \\ &+ \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} \left[\frac{t_i}{\omega} \sin(\omega t_i) + \frac{\cos(\omega t_i)}{\omega^2} - \frac{t_{i-1}}{\omega} \sin(\omega t_{i-1}) - \frac{\cos(\omega t_{i-1})}{\omega^2} \right] \end{aligned}$$

صفحه ۱۶۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

 WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با انجام محاسبات مشابه:

$$\begin{aligned} \Delta B_{t_i} &= -\frac{1}{\omega} \left[\ddot{u}_g(t_{i-1}) - \frac{(t_{i-1})\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} \right] (\cos(\omega t_i) - \cos(\omega t_{i-1})) + \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\omega^2 \Delta t} \{ \sin(\omega t_i) \\ &- \sin(\omega t_{i-1}) - \omega [t_i \cos(\omega t_i) - t_{i-1} \cos(\omega t_{i-1})] \} \end{aligned}$$

صفحه ۱۶۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

حال به صورت گام به گام از لحظه‌ی $t = 0$ تا پایان شتاب پاسخ در هر لحظه محاسبه می‌شود.

حالت میرا (مطالعه آزاد)

در این حالت نیز با تعریف $|P(t)| = m\ddot{u}_g(\tau)$ و جایگذاری در رابطه، انتگرال دوهامل برای شتاب پایه‌ی دلخواه $\ddot{u}_g(\tau)$ در شرایط میرا به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

مشابه روندی که در حالت (الف) برای شرایط نامیرا در پیش گرفته شد و با فرض تغییرات خطی شتاب در بازه‌ی زمانی t_{i-1} و t_i پاسخ به دست می‌آید. در ادامه، بدون اثبات، روابط مربوط ارائه می‌گردد: با استفاده از رابطه‌ی

$$\sin \omega_D(t-\tau) = \sin \omega_D t \cos \omega_D \tau - \cos \omega_D t \sin \omega_D \tau$$

انتگرال دوهامل در شرایط میرا تبدیل می‌شود به:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۱۶۵

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\omega_D} \left\{ \sin \omega_D t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \cos \omega_D \tau d\tau \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_D t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_D \tau d\tau \right\} \end{aligned}$$

مشابه حالت «الف» پاسخ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \{ e^{-\xi\omega t_i} [A'(t_i) \cdot \sin \omega_D t_i - B'(t_i) \cdot \cos \omega_D t_i] \}$$

$$A'(t_i) = A'(t_{i-1}) + \Delta A'(t_i)$$

$$B'(t_i) = B'(t_{i-1}) + \Delta B'(t_i)$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۱۶۶

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

در رابطه‌ی بازگشتی فوق، $\Delta A'(t_i)$ و $\Delta B'(t_i)$ برابر است با:

$$\Delta A'(t_i) = \left[\ddot{u}_g(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} \right] C_1 + \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} C_4$$

$$\Delta B'(t_i) = \left[\ddot{u}_g(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} \right] C_2 + \frac{\Delta \ddot{u}_g}{\Delta t} C_3$$

مقادیر ضرایب C_1 تا C_4 به صورت زیر است:

$$C_1 = \frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} (\xi \omega \cos \omega_D \tau + \omega_D \sin \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$C_2 = \frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} (\xi \omega \sin \omega_D \tau - \omega_D \cos \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

C_3

همان رابطه‌ی C_2 بدون کران

$$= \left\{ \left(\tau - \frac{\xi \omega}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) \left(\frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) (\xi \omega \sin \omega_D \tau - \omega_D \cos \omega_D \tau) \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega_D}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) \left(\frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) (\xi \omega \cos \omega_D \tau + \omega_D \sin \omega_D \tau) \right\} \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

C_4

همان رابطه‌ی C_1 بدون کران

$$= \left(\tau - \frac{\xi \omega}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) \left(\frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) (\xi \omega \cos \omega_D \tau + \omega_D \sin \omega_D \tau) \\ - \left(\frac{\omega_D}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) \left(\frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) (\xi \omega \sin \omega_D \tau - \omega_D \cos \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

همان رابطه‌ی C_2 بدون کران

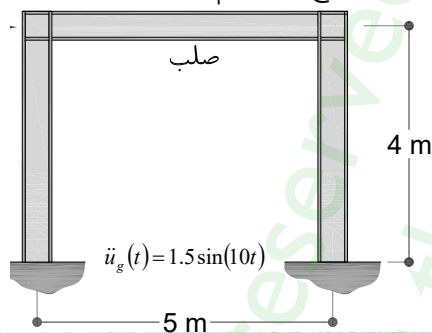
$$- \left(\frac{\omega_D}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) \left(\frac{e^{\xi \omega \tau}}{(\xi \omega)^2 + \omega_D^2} \right) (\xi \omega \sin \omega_D \tau - \omega_D \cos \omega_D \tau) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

همان رابطه‌ی C_1 بدون کران

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب خمشی بتنی با سقف صلب را مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن سقف برابر 20 ton است. ابعاد ستون‌های مربعی 40×40 سانتی‌متر و ابعاد تیرها 40×50 سانتی‌متر است. اگر مدول الاستیسیتهی آن 200000 کیلوگرم بر سانتیمتر مربع باشد، مطلوب است محاسبه‌ی پاسخ جابجایی سازه در مرکز جرم به مدت $1/5$ ثانیه در راستای x به روش دوهامل و با گامهای 0.05 ثانیه و 0.01 ثانیه به علت اعمال شتاب هارمونیک به فونداسیون سازه که معادله‌ی آن به صورت $\ddot{u}_g(t) = 1.5 \sin(10t)$ است. این پاسخ را ترسیم کنید.



گرچه این مسئله بدون استفاده از انتگرال دوهامل نیز به راحتی با استفاده از روابط حرکت هارمونیک نامیرا (فصل ۳) قابل است، اما در اینجا جهت نشان دادن نحوه‌ی استفاده از انتگرال دوهامل، مسأله با الگوریتم دوهامل حل می‌شود.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}}$$

$$k = 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 2 \left(\frac{12 \times 2 \times 10^5 \times \frac{40^4}{12}}{400^3} \right) = 16000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16000}{20.4}} = 28 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{28} = 0.22 \text{ sec}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

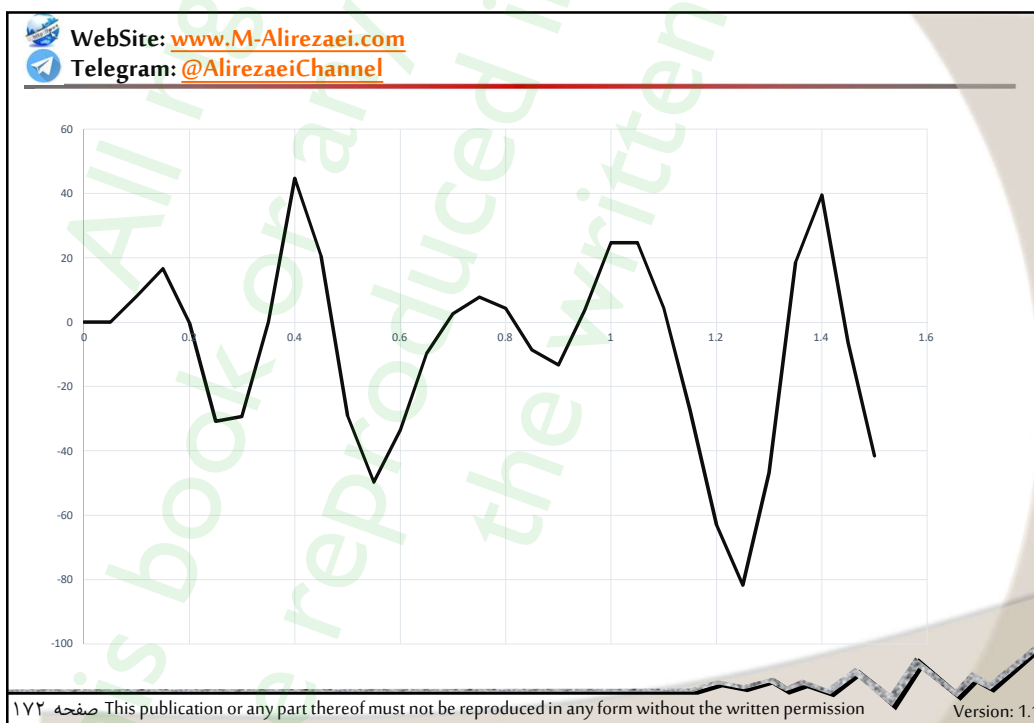
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

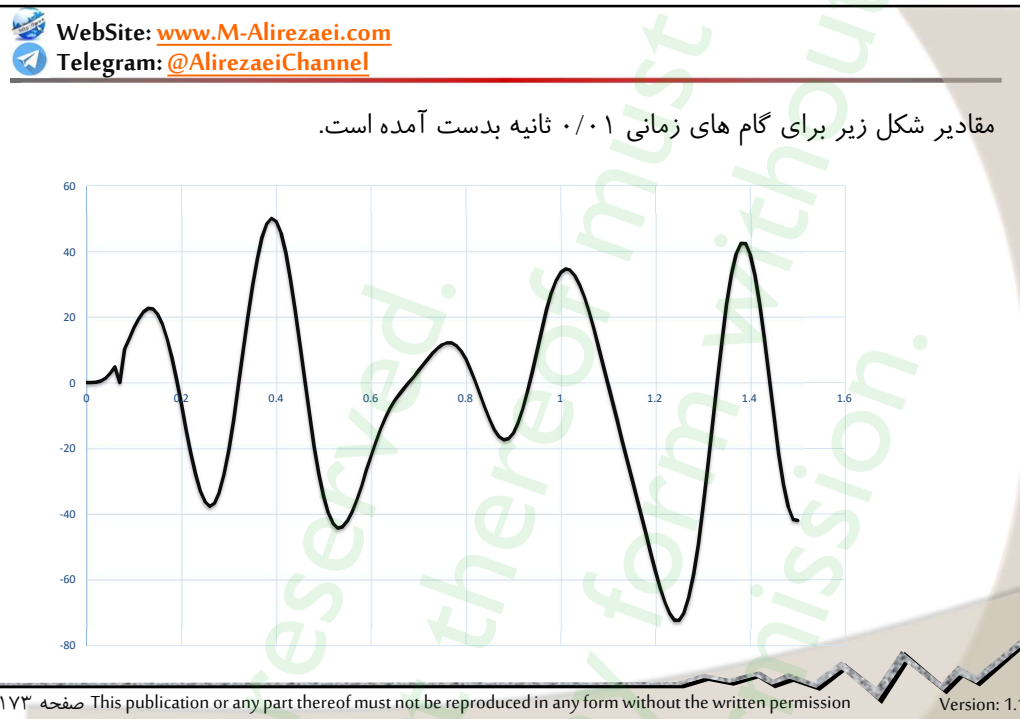
t	d^2u/dt^2	dA	A	dB	B	u(t)
0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.719	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	1.262	-0.174	-0.174	0.301	0.301	8.054
0.15	1.496	-0.239	-0.414	-0.087	0.214	16.628
0.2	1.364	-0.030	-0.444	0.158	0.372	-0.315
0.25	0.898	-0.462	-0.906	-0.019	0.354	-30.775
0.3	0.212	-0.055	-0.961	-0.352	0.002	-29.292
0.35	-0.526	-0.047	-1.008	0.014	0.016	0.014
0.4	-1.135	-0.197	-1.205	-0.368	-0.352	44.681
0.45	-1.466	0.330	-0.874	-0.254	-0.607	20.599
0.5	-1.438	-0.037	-0.911	-0.033	-0.640	-29.114
0.55	-1.058	0.414	-0.497	-0.662	-1.301	-49.669
0.6	-0.419	1.103	0.606	0.430	-0.871	-33.538
0.65	0.323	-0.205	0.401	0.909	0.038	-9.727
0.7	0.985	-0.263	0.137	-0.007	0.031	2.545
0.75	1.407	0.016	0.153	0.134	0.164	7.799
0.8	1.484	-0.047	0.107	0.014	0.178	4.331
0.85	1.198	0.067	0.174	0.135	0.314	-8.676
0.9	0.618	-0.095	0.079	0.066	0.380	-13.337
0.95	-0.113	0.071	0.150	0.073	0.452	3.649
1	-0.816	-0.195	-0.046	0.278	0.730	24.652
1.05	-1.320	-0.485	-0.530	-0.237	0.493	24.669
1.1	-1.500	0.085	-0.445	-0.327	0.165	4.365
1.15	-1.313	-0.512	-0.957	-0.039	0.126	-27.334
1.2	-0.805	-0.140	-1.097	-1.635	-1.509	-63.072
1.25	-0.099	2.036	0.939	-0.578	-2.087	-81.713
1.3	0.630	0.624	1.563	1.359	-0.727	-46.805
1.35	1.206	-0.453	1.110	0.317	-0.411	18.581
1.4	1.486	-0.033	1.077	-0.034	-0.444	39.484
1.45	1.402	0.004	1.081	-0.005	-0.449	-6.378
1.5	0.975	-0.009	1.071	-0.005	-0.454	-41.558

حل مسأله به صورت جدول زیر در هر گام زمانی t تنظیم می‌شود. ستون آخر، جابجایی در هر لحظه است.

مقادیر جدول روبروی برای گام های زمانی ۰/۰۵ ثانیه بصورت شکل اسلاید بعد خواهد بود.

Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ به نیروی پله‌ای

مطابق شکل زیر، نیروی پله‌ای، نیرویی است که دفعتهاً به مقدار p_0 جهش نماید:

با حل معادله دوهامل، برای سیستم نامیرا پاسخ سیستم بصورت زیر بدست می‌آید:

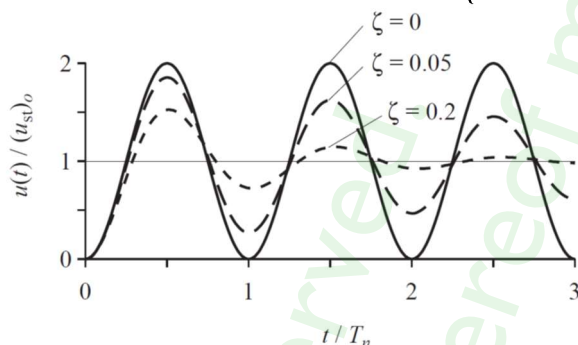
$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega(t-\tau)] d\tau = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p_0 \sin[\omega(t-\tau)] d\tau$$

$$= \frac{p_0}{m\omega} \int_0^t \sin[\omega(t-\tau)] d\tau = \frac{p_0}{m\omega} \left[\frac{\cos \omega(t-\tau)}{\omega} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

صفحه ۱۷۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$u(t) = (u_{st})_0(1 - \cos\omega t) = (u_{st})_0\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{و یا عبارتی:}$$



در شکل روبرو تغییر شکل همپایه شده به علت نیروی p_0 ترسیم شده است.

نتیجه: پاسخ سیستم با زمان تناوب طبیعی است.

برای بدست آوردن حداکثر پاسخ، از جابجایی (رابطه اخیر مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\dot{u}(t) = (u_{st})_0(-\omega \sin\omega t) = 0 \rightarrow \omega t = j\pi \rightarrow t = \frac{j}{2}T$$

که در رابطه فوق، j عدد صحیح فرد است j های زوج مقدار حداقل جابجایی را می‌دهند.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با قرار دادن مقدار t حداکثر در رابطه اسلاید قبل داریم:

$$u_0 = 2(u_{st})_0$$

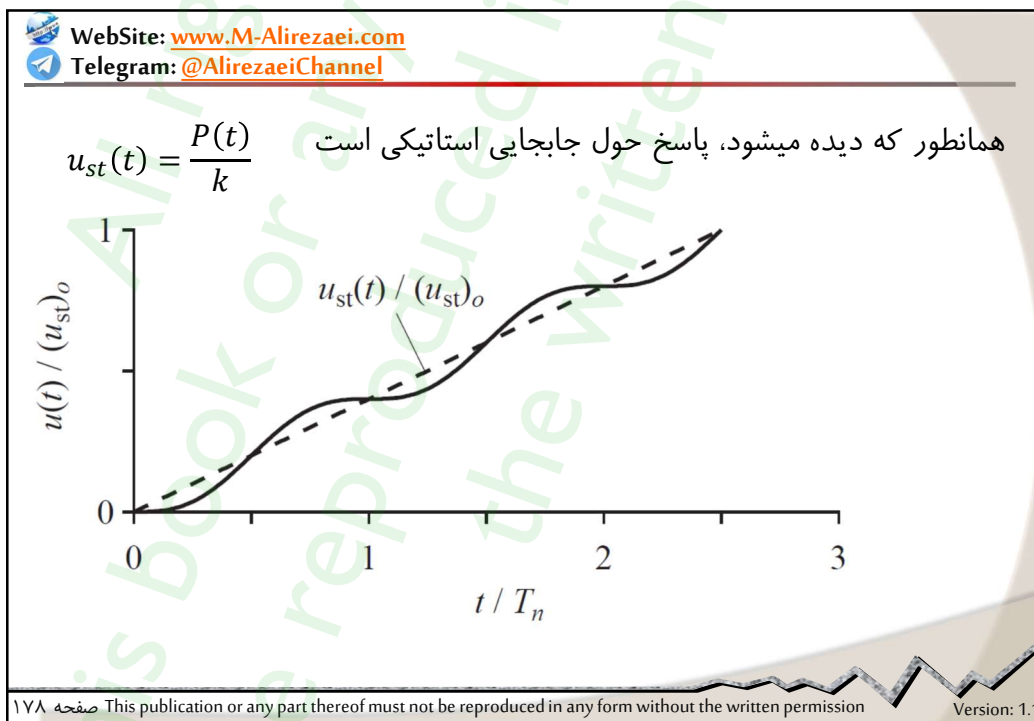
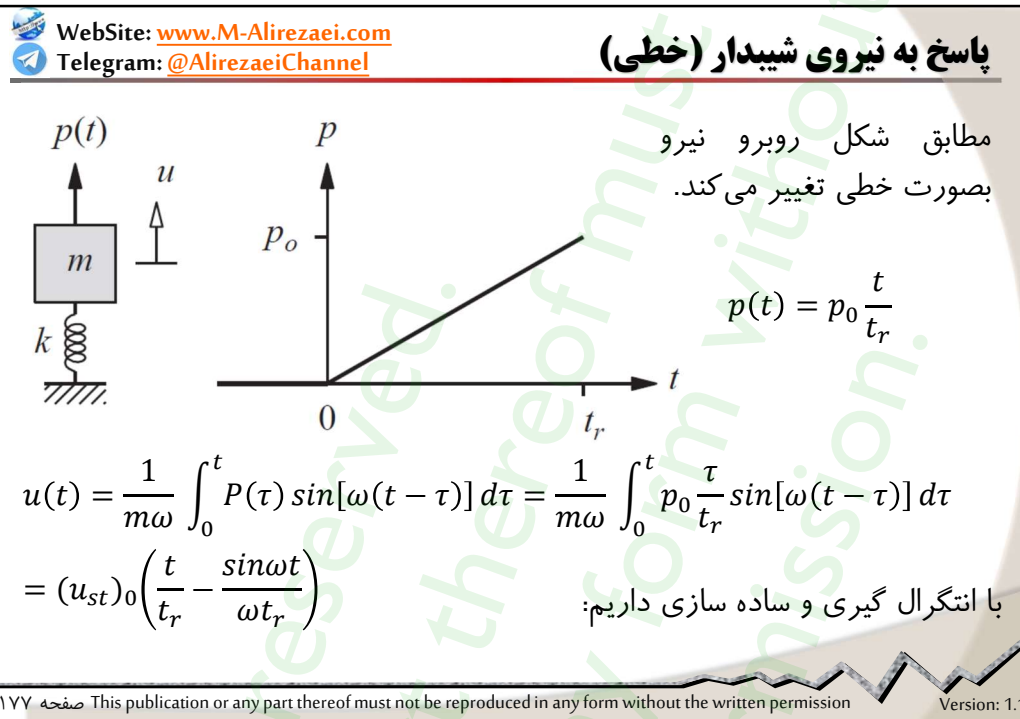
بنابراین همانطور که دیده میشود، تغییر شکل ناشی از اعمال ناگهانی نیرو، دو برابر تغییر شکل ناشی از اعمال آرام نیرو است.

کاربرد:

بند ۴-۵-۵-۶- میحث ششم: **سازه‌های نگهدارنده آسانسورها:** وزن اتاقک، ماشین آلات، وزنه تعادل و بار زنده ناشی از وزن مسافران و وسایل باید در ضریب ۲ ضرب شوند، مگر آنکه بارهای اسمی ارائه شده توسط سازنده در ضریبی حداقل برابر این مقدار ضرب شده باشد.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

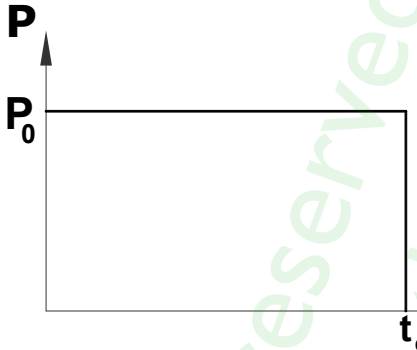
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ به نیروی ضربه مستطیلی

در شکل زیر نمونه‌ای از بارگذاری ضربه‌ای، موسوم به «بار ضربه پله‌ای» دیده می‌شود. سازه تا لحظه‌ی t_d تحت اثر بار با مقدار ثابت P_0 قرار داشته و پس از این لحظه بار مساوی صفر خواهد بود. اما سازه متوقف نمی‌شود؛ بلکه به علت مشخصات اولیه‌ای که حین اعمال بار ضربه‌ای پیدا کرده است، شروع به ارتعاش آزاد می‌کند. بنابراین دو معادله‌ی حرکت باید نوشته شود. معادله‌ی اول برای ارتعاش سازه در زمان‌های $t \leq t_d$ که بار بر سازه وارد می‌شود و معادله‌ی دوم برای ارتعاش سازه در زمان‌های $t \geq t_d$ که بار از سازه برداشته شده و سازه ارتعاش آزاد دارد. این معادلات به صورت زیر برای شرایط نامیرا نوشته می‌شوند:



$$m\ddot{u} + ku = P(t) = \begin{cases} P_0 & t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

شرایط اولیه‌ی رابطه‌ی قبل عبارتند از: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$. حل در دو فاز انجام می‌شود:

- ۱- فاز ارتعاش اجباری ($t \leq t_d$): برای این فاز، پاسخ کلی معادله قبلاً حل شده که سیستم تحت نیروی پله‌ای است. برای سهولت مجدداً تکرار می‌شود:

$$u_1(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t) \rightarrow \frac{u_1(t)}{(u_{st})_0} = 1 - \cos \omega t = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \quad t \leq t_d$$

- ۲- فاز ارتعاش آزاد ($t \geq t_d$): پس از قطع بار در لحظه‌ی $t = t_d$ ، سازه با شرایط اولیه‌ای که در واقع شرایط انتهایی فاز ۱ است، شروع به ارتعاش آزاد می‌کند. این شرایط عبارتند از:

$u(t_d) =$ جابجایی در انتهای فاز اول = جابجایی اولیه در ابتدای فاز دوم

$\dot{u}(t_d) =$ سرعت در انتهای فاز اول = سرعت اولیه در ابتدای فاز دوم

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بنابراین پاسخ فاز دوم از معادله‌ی بدست آمده در فصل دوم برای ارتعاش آزاد نامیرا، با شرایط اولیه‌ی فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_2(t) = u_1(t_d)\cos\omega(t - t_d) + \frac{\dot{u}_1(t_d)}{\omega} \sin\omega(t - t_d) \quad t \geq t_d$$

توجه کنید که زمان در معادله‌ی فوق پس از لحظه‌ی t_d اندازه‌گیری می‌شود. به همین دلیل در معادله‌ی اخیر عبارت $t - t_d$ ظاهر شده است.

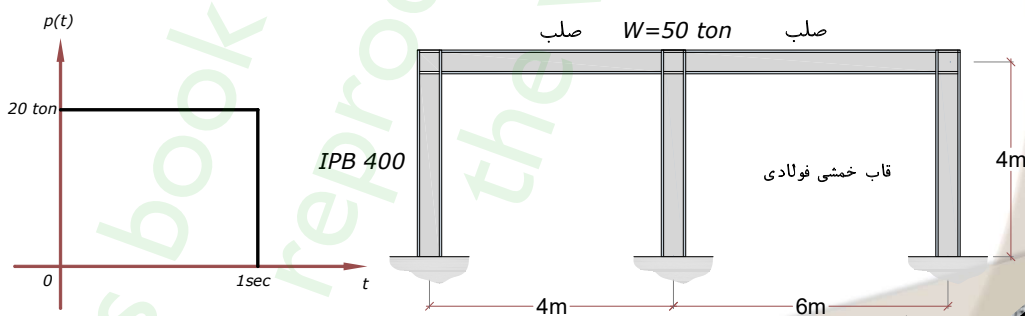
$$\begin{cases} u_1(t_d) = \left(\frac{P_0}{k}\right)(1 - \cos\omega t_d) \\ \dot{u}_1(t_d) = \left(\frac{P_0}{k}\right)\omega \sin\omega t_d \end{cases} \quad \text{در معادله اخیر:}$$

۱۸۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سازه‌ی یک‌درجه آزاد شکل زیر را در نظر بگیرید. وزن کل طبقه با احتساب وزن تیرها و ستون‌ها و نیز هر در دهانه مجموعاً $W = 50 \text{ ton}$ می‌باشد. تیرها کاملاً صلب فرض می‌شوند. مقطع ستون‌ها $IPB400$ بوده و تیرها به بال ستون‌ها متصل شده‌اند. اگر مصالح ستون فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ و $f_y = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ باشد و برای سیستم نامیرا مطلوبست محاسبه و ترسیم جابجایی سازه به علت بارگذاری پالسی نشان داده شده برای مدت ۴ ثانیه.



۱۸۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

حل: ابتدا مشخصات سیستم را محاسبه می کنیم:

$$k = 3 \left(\frac{12EI}{h^3} \right) = \frac{36EI}{h^3}$$

$I = 57680 \text{ cm}^4$ ممان اینرسی حول محور قوی از جدول

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$k = \frac{36(2 \times 10^6)(57680)}{400^3} = 64890 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{50000}{981} \cong 50 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 36.02 \text{ rad/sec}$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ در دو فاز ۱ و ۲ به صورت زیر محاسبه می شود:

فاز ۱ ($t \leq 1 \text{ sec}$)

$$u_1(t) = \frac{20000}{64890} (1 - \cos 36.02t) = 0.308(1 - \cos 36.02t)$$

فاز ۲ ($t \geq 1 \text{ sec}$)

$$u_1(t_d) = \frac{P_0}{k} (1 - \cos \omega t_d) = \frac{20000}{64890} (1 - \cos(36.02 \times 1)) = 0.34 \text{ cm}$$

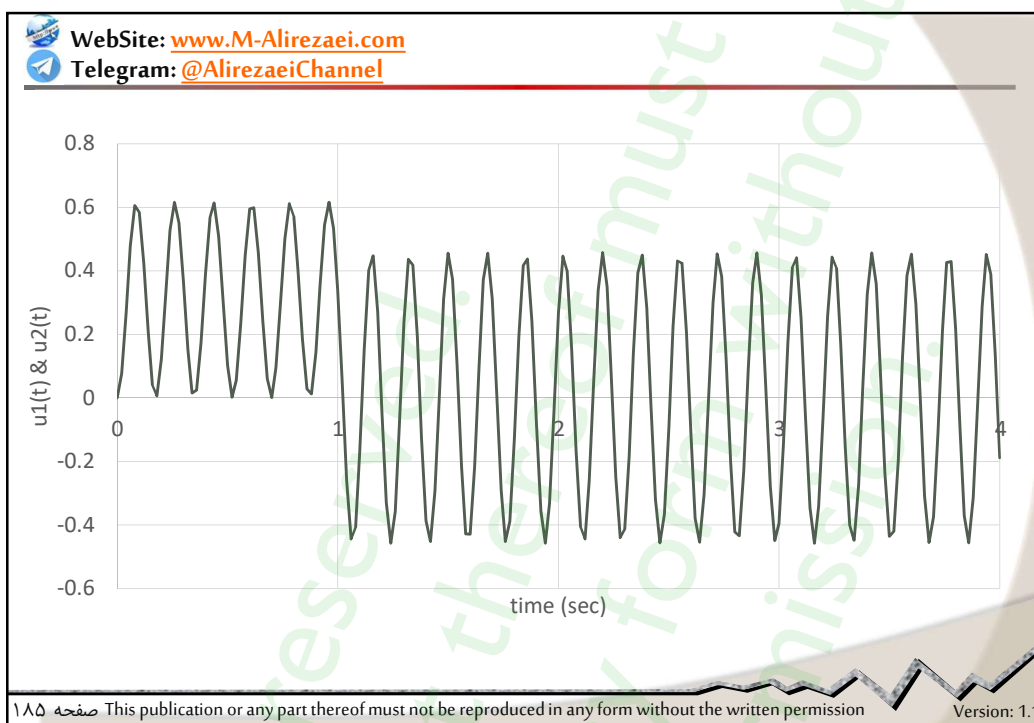
$$\dot{u}_1(t_d) = \frac{P_0}{k} \omega \sin \omega t_d = \frac{20000}{64890} (36.02) \sin(36.02 \times 1) = -11.03 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$$u_2(t) = u(t_d) \cos \omega(t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega} \sin \omega(t - t_d) \quad t \geq 1 \text{ sec}$$

$$u_2(t) = 0.34 \cos[36.02(t - 1)] - \frac{11.03}{36.02} \sin[36.02(t - 1)]$$

پاسخ در نمودار بعدی ترسیم شده است.

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تحلیل تقریبی برای ضربه کوتاه

اگر زمان تداوم ضربه خیلی کوتاه باشد، ($t_d/T < 0.25$) حل مربوط به ضربه خالص نزدیک به ضربه واقعی است. مساحت زیر ضربه:

$$I = \int_0^{t_d} p(t) dt$$

پاسخ سیستم به نیروی ضربه‌ای فوق برابر پاسخ ضربه واحد در مقدار انتگرال فوق است:

$$u(t) = I \left(\frac{1}{m\omega} \sin \omega t \right)$$

بنابراین حداکثر تغییر شکل برابر است با:

$$u_0 = \frac{I}{m\omega} = \frac{I}{k} \frac{2\pi}{T}$$

Version: 1.1

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) مطابق شکل زیر، مخزن هوایی به علت انفجار سطحی تحت تاثیر ضربه $p(t)$ قرار گرفته است. حداکثر برش پایه و لنگر خمشی پایه مخزن را به علت ضربه تعیین نمایید. مشخصات مخزن بصورت زیر است:

$w = 100 \text{ kips}$ $k = 8.2 \frac{\text{kips}}{\text{in}}$ $T_n = 1.12 \text{ sec}$

$\frac{t_d}{T_n} = \frac{0.08}{1.12} = 0.071 < 0.25$

$\omega = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{1.12} = 5.61 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

۱۸۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با استفاده از قانون ذوزنقه و با صرف نظر از میرایی داریم:

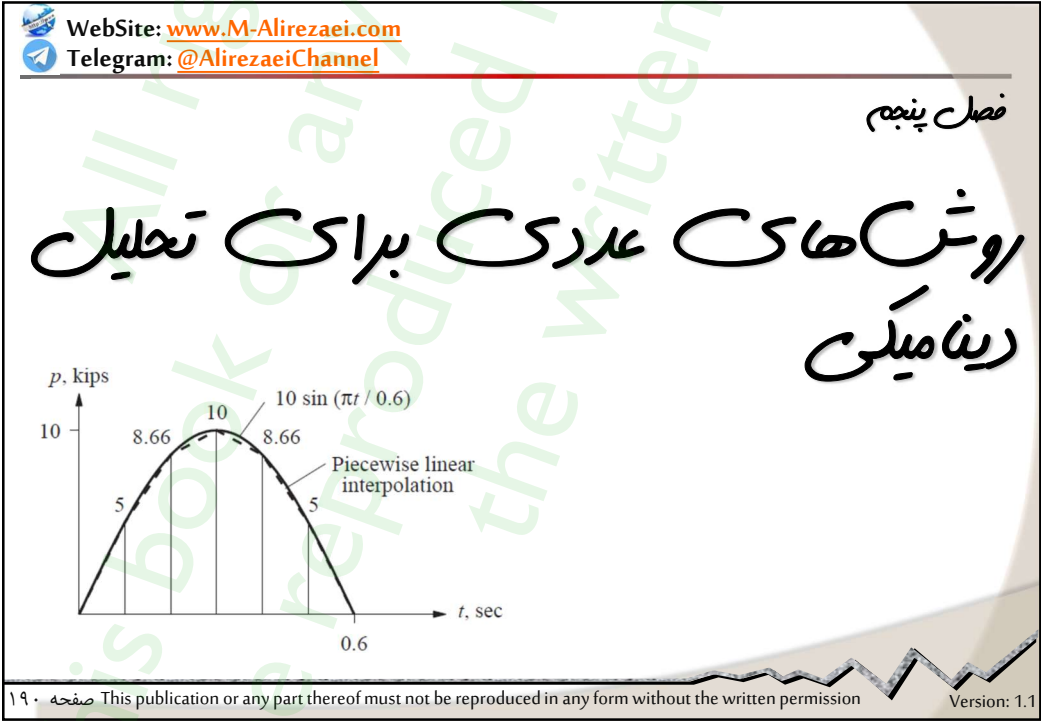
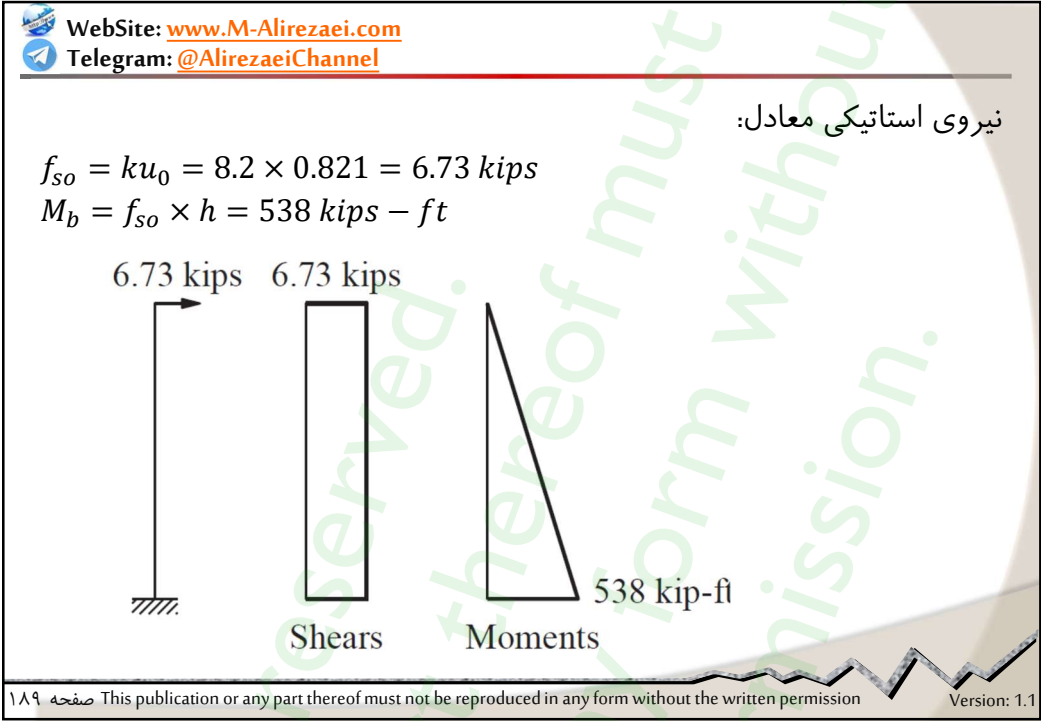
$$I = \int_0^{t_d} p(t) dt = \int_0^{0.08} p(t) dt = \frac{0.02}{2} [0 + 2(40) + 2(16) + 2(4) + 0]$$

$$= 1.2 \text{ kips} \cdot \text{sec}$$

$$u_0 = \frac{I}{m\omega} = \frac{I}{k T_n} = \frac{1.2 \times 2\pi}{8.2 \times 1.12} = 0.821 \text{ in}$$

$$\int_a^b y dx \approx \left\langle \text{width of interval} \right\rangle \left\{ \frac{1}{2} \left(\text{first + last ordinate} \right) \right\} + \left(\text{sum of remaining ordinates} \right)$$

۱۸۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- نحوه بررسی یک سیستم دینامیکی در برابر بارهای دلخواه
- انواع روش های عددی کدامند؟
- عوامل موثر در دقت روش های عددی



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مقدمه

در این فصل روش های عددی محاسبه ی پاسخ سازه ها به نیرو یا شتاب پایه ی دینامیکی دلخواه درحوزه زمان معرفی می شود. این روش ها درواقع روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل با توابع پیچیده هستند که معادله ی حرکت در بسیاری از موارد، از جمله تحت اثر بارگذاری زلزله، از این دست اند. این روش بسیار کارآمدتر از روش عددی انتگرال دو هامل بوده و به راحتی نیز قابل برنامه نویسی و اجرا به کمک نرم افزار است. روش های عددی متعدددند.

فقط دو روش از آن ها به نام «روش مبتنی بر درونیابی بار» و «روش تفاضل مرکزی» مورد توجه قرار خواهد گرفت.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مبانی روش عددی

استفاده از روش‌های تحلیلی حل معادلات حرکت سازه‌ی یک‌درجه آزاد معمولاً در شرایطی که تحریک - نیروی خارجی $P(t)$ یا شتاب پایه‌ی $\ddot{u}_g(t)$ پیچیده باشد، و یا سیستم غیرخطی باشد، ممکن نیست. در چنین شرایطی از روش‌های عددی گام‌به‌گام استفاده می‌شود. در ریاضیات، مطالعات بسیار وسیعی در زمینه‌ی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل انجام گرفته است. سیستمی که در مرحله‌ی غیرارتجاعی از رفتار خود قرار دارد و در مصالح آن تسلیم، ترک و یا خرابی دیده می‌شود.

سیستم غیرخطی: سیستمی که در مرحله‌ی غیرارتجاعی از رفتار خود قرار دارد و در مصالح آن تسلیم، ترک و یا خرابی دیده می‌شود.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

روشهای گام به گام زمانی

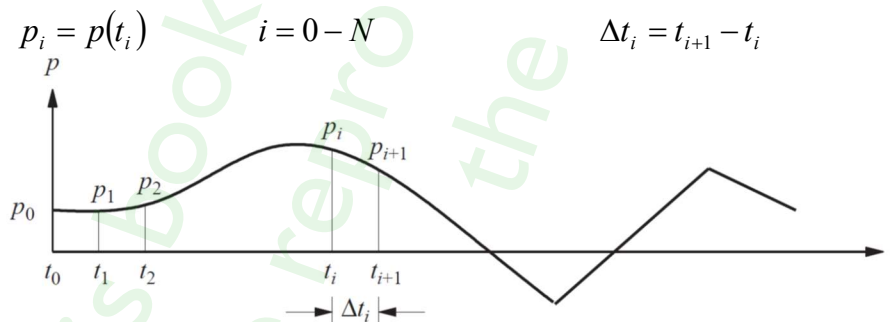
برای یک سیستم غیرارتجاعی، معادله حرکت که حل عددی آن مورد نظر باشد، بصورت زیر است:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u) = p(t) \quad \text{or} \quad -m\ddot{u}_g(t)$$

شرایط مرزی بصورت زیر در نظر گرفته شود:

$$u(0) = 0 \quad \dot{u}(0) = 0$$

نیروی وارده به سیستم را میتوان بصورت زیر مجزا نمود:



Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

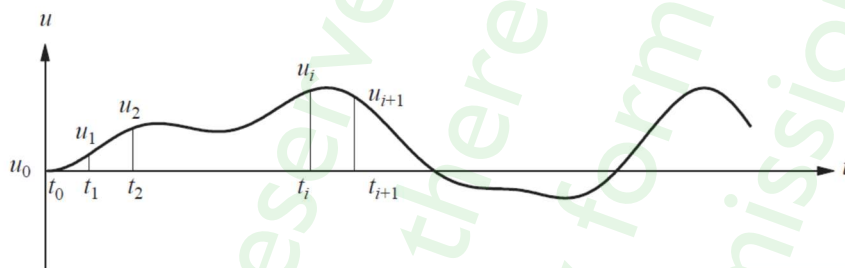
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب، در هر لحظه زمانی، تعیین میشوند، بنابراین برای زمان i ام، مقادیر پاسخ برابر است با:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = p_i$$

با استفاده از روشهای عددی ذکر شده در این فصل، میتوان پاسخهای زمان $i+1$ را طوری تعیین نمود که رابطه فوق در آن زمان اقناع شود:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_s)_{i+1} = p_{i+1}$$



۱۹۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بنابراین پاسخ در هر گام زمانی مشخص میشود. گام برداشتن از یک گام به گام جلوتر، معمولاً یک روش دقیق نیست. سه شرط اساسی در حل عددی:

۱- همگرایی، یعنی با کاهش فواصل، حل عددی به حل دقیق همگرا شود.

۲- پایداری، یعنی در صورت ظهور خطای گردن اعداد، حل عددی باید پایدار باشد.

۳- نتایج حل عددی نزدیک به حل دقیق باشد.

۱۹۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

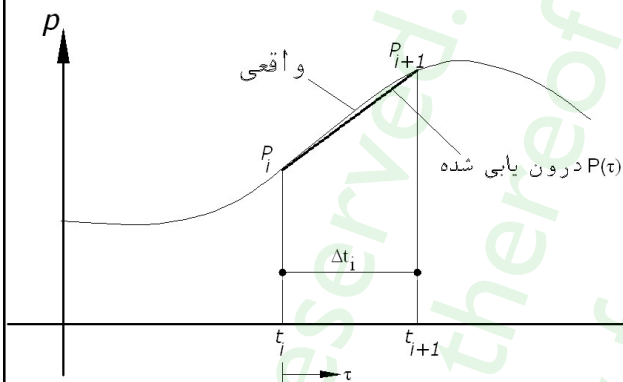
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

روش‌های مبتنی بر درون‌یابی تحریک

با درون‌یابی کردن بار دینامیکی در بازه‌های زمانی و محاسبه‌ی پاسخ دقیق در این بازه‌ی زمانی به کمک روابط فصل‌های قبل، می‌توان پاسخ سازه‌ها را در هر لحظه محاسبه کرد. چنانچه بازه‌ی زمانی کوچک باشد، درون‌یابی خطی دقت مناسبی دارد.



با درون‌یابی خطی می‌توان تابع تحریک را در فاصله‌ی زمانی $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ به صورت زیر بیان نمود:

$$P(\tau) = P_i + \frac{\Delta P_i}{\Delta t_i} \tau$$

$${}^t\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ سیستم در حین زمان Δt_i حاصل جمع سه مقدار زیر است:

۱- ارتعاش آزاد به علت تغییر مکان اولیه u_i و سرعت اولیه $\dot{u}_i$ در لحظه $\tau=0$

۲- پاسخ به نیروی پله‌ای p_i با شرایط اولیه صفر.

۳- پاسخ به نیروی شیدار $\left(\frac{\Delta P_i}{\Delta t_i}\right) \tau$

مجموع جوابهای برای سه حالت فوق بصورت زیر خواهد شد:

$$u(\tau) = u_i \cos \omega \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \tau + \frac{p_i}{k} (1 - \cos \omega \tau) + \frac{\Delta p_i}{k} \left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\sin \omega \tau}{\omega \Delta t_i} \right)$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

و همچنین

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega} = -u_i \sin \omega \tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \cos \omega \tau + \frac{p_i}{k} \sin \omega \tau + \frac{\Delta p_i}{k} \frac{1}{\omega \Delta t_i} (1 - \cos \omega \tau)$$

با حل روابط فوق در $\tau = \Delta t_i$ داریم:

$$u_{i+1} = u_i \cos \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \sin \omega \Delta t_i + \frac{p_i}{k} (1 - \cos \omega \Delta t_i) + \frac{\Delta p_i}{k} \frac{1}{\omega \Delta t_i} (\omega \Delta t_i - \sin \omega \Delta t_i)$$

$$\frac{\dot{u}_{i+1}}{\omega} = -u_i \sin \omega \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega} \cos \omega \Delta t_i + \frac{p_i}{k} \sin \omega \Delta t_i + \frac{\Delta p_i}{k} \frac{1}{\omega \Delta t_i} (1 - \cos \omega \Delta t_i)$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

بدون اثبات - مشابه آنچه در روش انتگرال دو هامل نشان داده شد - می توان پاسخ های جابجایی و سرعت را در هر لحظه به صورت زیر محاسبه نمود:

$$u_{i+1} = AP_i + BP_{i+1} + Cu_i + D\dot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'P_i + B'P_{i+1} + C'u_i + D'\dot{u}_i$$

روابط فوق را می توان جهت برنامه نویسی به صورت ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در جدول زیر کلیه ضرایب فوق آورده شده است. فرمول بازگشتی فوق در فرم ماتریسی آن به سادگی قابل برنامه‌ریزی در رایانه است.

$$A = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left[\left(\frac{1 - 2\xi^2}{\omega_D \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t - \left(1 + \frac{2\xi}{\omega \Delta t} \right) \cos \omega_D \Delta t \right] \right\}$$

$$B = \frac{1}{k} \left\{ 1 - \frac{2\xi}{\omega \Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega_D \Delta t} \sin \omega_D \Delta t + \frac{2\xi}{\omega \Delta t} \right) \cos \omega_D \Delta t \right] \right\}$$

$$C = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right)$$

$$D = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{1}{\omega_D} \sin \omega_D \Delta t \right)$$

صفحه ۲۰۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$A' = \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi \omega \Delta t} \left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \sin \omega_D \Delta t + \frac{1}{\Delta t} \cos \omega_D \Delta t \right] \right\}$$

$$B' = \frac{1}{k \Delta t} \left\{ 1 - e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D \Delta t + \cos \omega_D \Delta t \right) \right\}$$

$$C' = -e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D \Delta t \right)$$

$$D' = e^{-\xi \omega \Delta t} \left(\cos \omega_D \Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D \Delta t \right)$$

صفحه ۲۰۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

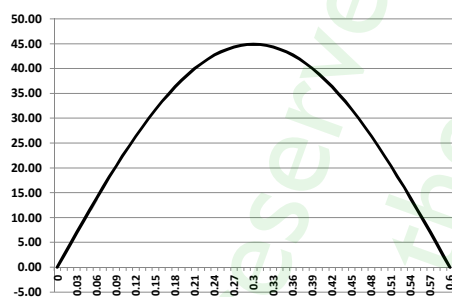
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سیستم یک درجه آزادی را با پارامترهای زیر در نظر بگیرید:

$$W = 254 \text{ ton}, \quad k = 1020 \text{ ton/m}, \quad \xi = 0.05$$

مطلوب است تعیین پاسخ سازه $u(t)$ به علت اعمال بار نیم سینوسی ضربه‌ای که با معادله‌ی $p(t) = 44.48 \sin(\frac{\pi t}{0.6})$ تعریف می‌شود. حل را با روش درون یابی تحریک در فواصل زمانی $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ محاسبه کنید.



صفحه ۲۰۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

• با توجه به پارامترهای سیستم، فرکانس سازه برابر است با:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{254}{9.81} = 25.8 \text{ ton} \cdot \frac{s^2}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 6.28 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 6.28 \sqrt{1 - 0.05^2} = 6.275 \text{ rad/sec}$$

پارامترهای لازم جهت تعیین مقادیر ضرایب جدول عبارتند از:

$$e^{-\xi \omega \Delta t} = e^{-0.05(6.283)(0.1)} = 0.9691$$

$$\sin \omega_D \Delta t = \sin(6.275 \times 0.1) = 0.5871$$

$$\cos \omega_D \Delta t = \cos(6.275 \times 0.1) = 0.8095$$

صفحه ۲۰۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با قرار دادن مقادیر فوق در جدول، ضرایب به صورت زیر به دست می آیند:

$$A = 1.236E - 5 \quad B = 6.352E - 6 \quad C = 0.8129 \quad D = 0.09067$$

$$A' = 1.709E - 4 \quad B' = 0.000187 \quad C' = -3.5795 \quad D' = 0.7559$$

حال با داشتن ضرایب می توان جدول را تا زمان 0.6 ثانیه و پس از آن با توجه حذف بار باید از پاسخ ارتعاش آزاد با شرایط اولیه به وجود آمده در انتهای زمان 0.6 ثانیه تنظیم نمود.

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8129 & 0.09076 \\ -3.5795 & 0.7559 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 44.48 \sin\left(\frac{\pi t_i}{0.6}\right) \\ 44.48 \sin\left(\frac{\pi t_{i+1}}{0.6}\right) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01236 & 0.006352 \\ 0.1709 & 0.1871 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix}$$

صفحه ۲۰۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

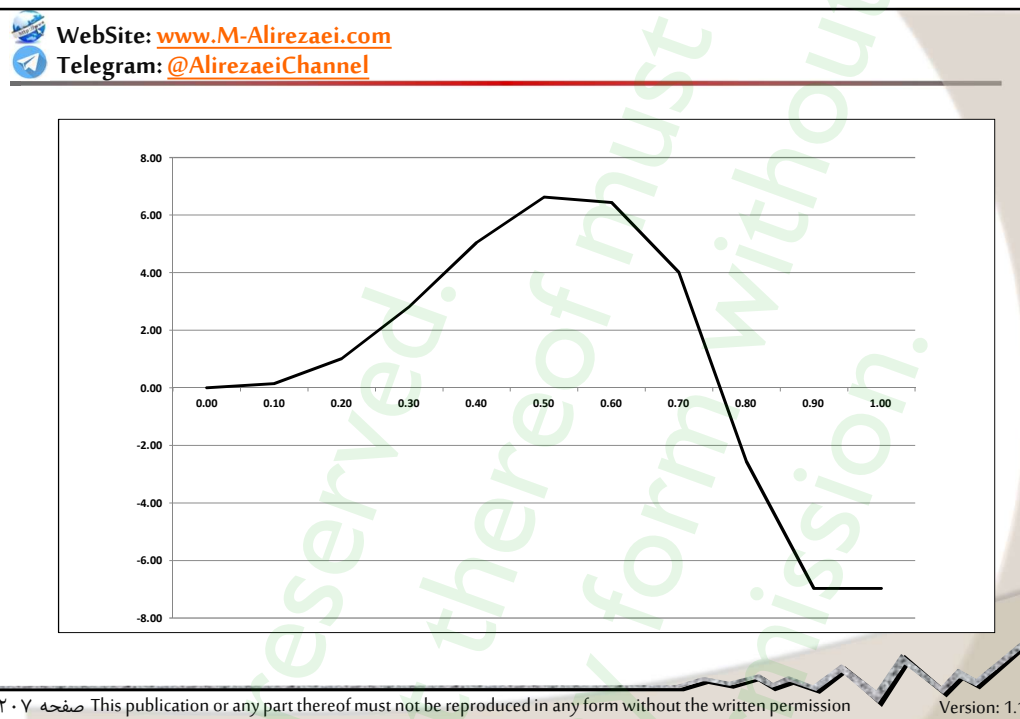
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

t_i	p_i	Ap_i	Bp_{i+1}	$D\dot{u}_i$	$\dot{u}_i$	Cu_i	u_i (mm)
0.0	0.0000	0.0000	1.6392	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	22.2400	18.0789	2.8392	0.0004	0.0042	0.0001	0.1413
0.2	38.5208	31.3136	3.2784	0.0012	0.0136	0.0008	1.0117
0.3	44.4800	36.1578	2.8392	0.0020	0.0216	0.0023	2.8185
0.4	38.5208	31.3136	1.6392	0.0019	0.0210	0.0041	5.0441
0.5	22.2400	18.0789	0.0000	0.0008	0.0086	0.0054	6.6262
0.6	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0012	-0.0134	0.0052	6.6410
0.7	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0030	-0.0332	0.0033	4.0196
0.8	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0036	-0.0395	0.0002	-2.5562
0.9	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0028	-0.0308	-0.0027	-6.9684
1.0	0.0000				-0.0112		-6.9696

صفحه ۲۰۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

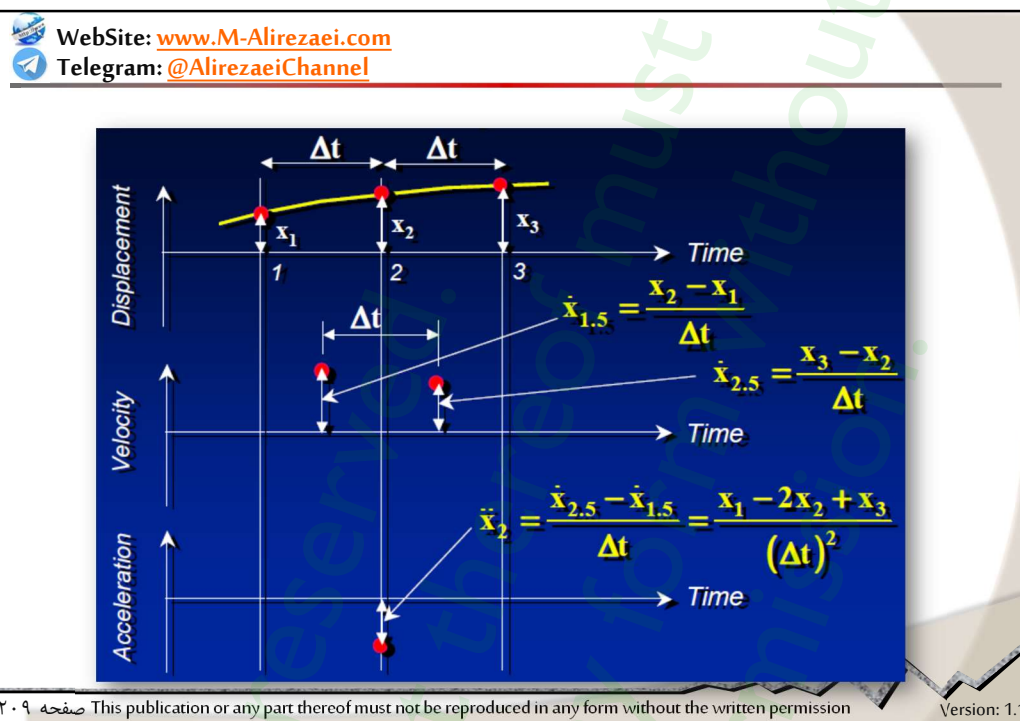
روش تفاضل مرکزی

این روش بر مبنای تقریب تفاضل محدود مشتقات زمانی جابجایی (یعنی سرعت و شتاب) است. با فرض آنکه گامهای زمانی ثابت باشد ($\Delta t_i = \Delta t$), رابطه‌ی تفاضل مرکزی سرعت و شتاب در زمان t_i به صورت زیر است:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$$

با جاگذاری روابط فوق در معادله‌ی اصلی حرکت یعنی $m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = P_i$ و مرتب‌سازی می‌توان مطابق گام‌های ارائه‌شده در جدول اسلاید بعد، جابجایی و در صورت نیاز سرعت و شتاب را در هر لحظه محاسبه نمود:

۲۰۸ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



صفحه ۲۰۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

روش گام به گام محاسبه‌ی پاسخ به روش تفاضل مرکزی

۱- محاسبات اولیه $(u_o, \dot{u}_o, P_o)$ در عبارات زیر به ترتیب جابجایی، سرعت و نیرو در زمان $t = 0$ می باشند

$$\ddot{u}_o = (P_o - c\dot{u}_o - ku_o)/m \quad (1-1)$$

$$u_{-1} = u_o - \Delta t \cdot \dot{u}_o + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_o \quad (2-1)$$

$$\hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (3-1)$$

$$a = \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \quad (4-1)$$

$$b = k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \quad (5-1)$$

Version: 1.1

صفحه ۲۱۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

۲- محاسبات لازم در هر گام برای تعیین پاسخ $u(t)$ ، $\dot{u}(t)$ و $\ddot{u}(t)$

$$\hat{P}_i = P_i - au_{i-1} - bu_i \quad (۱-۲)$$

P_i نیرو در گام i - ام است. u_{i-1} و u_i نیز به ترتیب جابجایی در گام $(i-1)$ - ام و i - ام است.

$$u_{i+1} = \frac{\hat{P}_i}{k} \quad (۲-۲)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2\dot{u}_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}, \dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad (۳-۲)$$

۳- تکرار محاسبات برای گام بعد.

در مراحل (۱-۲) الی (۳-۲)، i را $i+1$ جهت محاسبات گام بعد جایگزین کنید.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

چنانچه تحریک خارجی شتاب پایه $\ddot{u}_g(t)$ باشد، لازم است در کلیه محاسبات اسلاید قبل، P_i را با $m\ddot{u}_{g_i} - \ddot{u}_{g_i}$ که شتاب در هر گام زمانی است) جایگزین شود. مقادیر جابجایی، سرعت و شتابی که از جدول به دست می آیند، «مقادیر نسبی» آنها است. چنانچه هدف محاسبه سرعت کل و شتاب کل ناشی از شتاب زمین باشد، به کمک روابط زیر آن را محاسبه کنید:

$$\dot{u}_i^t = \dot{u}_i + \dot{u}_{g_i}$$

$$\ddot{u}_i^t = \ddot{u}_i + \ddot{u}_{g_i}$$

در روابط فوق $\dot{u}_i^t$ و $\ddot{u}_i^t$ به ترتیب سرعت و شتاب کل (مطلق) سازه بوده که از جمع سرعت و شتاب نسبی در هر لحظه با سرعت و شتاب زمین ($\dot{u}_{g_i}$ و $\ddot{u}_{g_i}$) در هر لحظه به دست می آید. جابجایی معمولاً به صورت مطلق (کل) محاسبه نمی شود.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

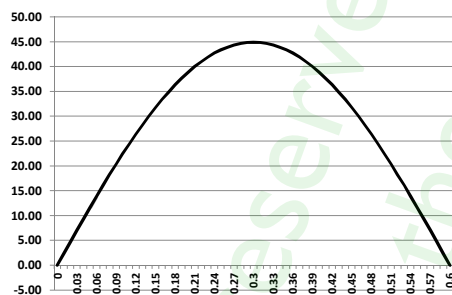
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) سیستم یک درجه آزادی را با پارامترهای زیر در نظر بگیرید:

$$W = 254 \text{ ton}, \quad k = 1020 \text{ ton/m}, \quad \xi = 0.05$$

مطلوب است تعیین پاسخ سازه $u(t)$ به علت اعمال بار نیم سینوسی ضربه‌ای که با معادله‌ی $p(t) = 44.48 \sin(\frac{\pi t}{0.6})$ تعریف می‌شود. حل را با روش درون یابی تحریک در فواصل زمانی $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ محاسبه کنید.



صفحه ۲۱۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

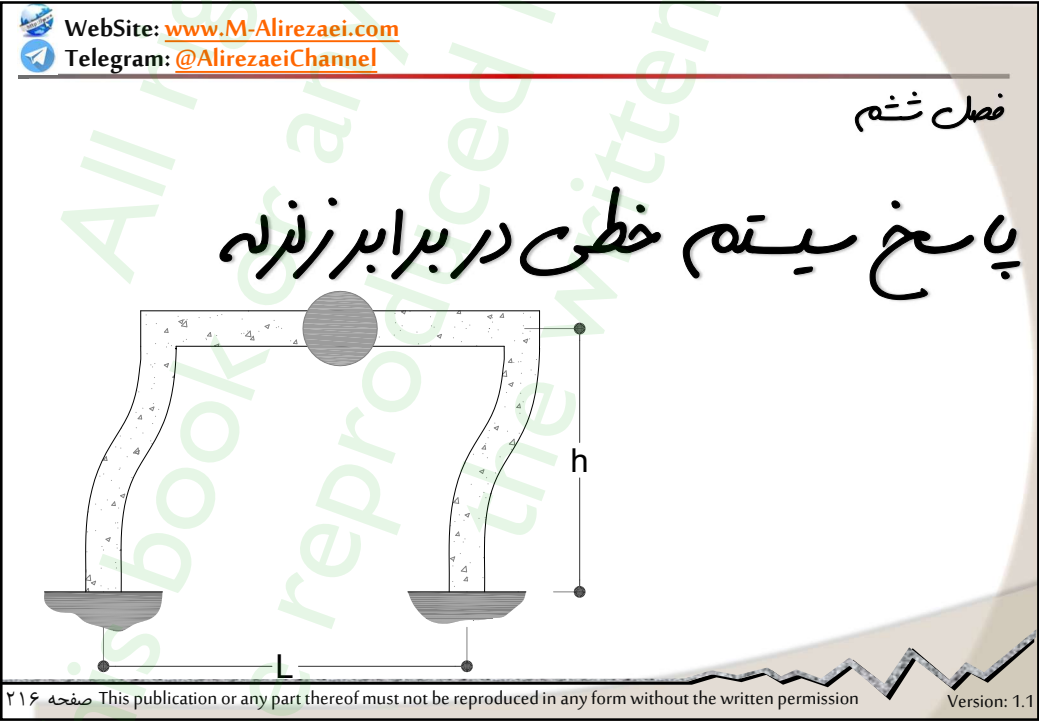
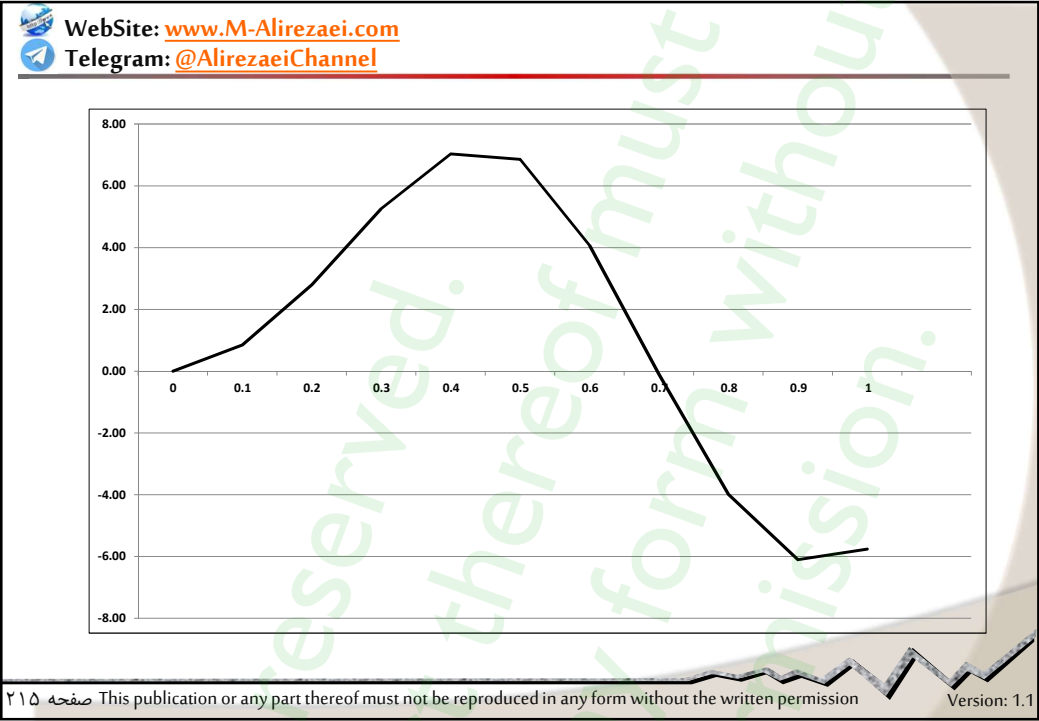
در گام‌ها نیاز به ضریب میرایی c است، ابتدا این پارامتر را محاسبه می‌کنیم:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \Rightarrow c = 0.05(2) \sqrt{(1020) \left(\frac{254}{9.81} \right)} = 162.5 \text{ ton.s/m}$$

t	P_i	$u_{i-1} \text{ (mm)}$	$u_{i+1} \text{ (mm)}$	$\bar{P}_i$
0	0	0.0000	0.0000	0
0.1	0	0.0000	0.0000	0
0.2	22.24	0.0000	0.9000	22.24
0.3	38.5208	0.0000	2.8000	73.1338
0.4	44.48	0.9000	5.3000	137.4157
0.5	38.5208	2.8000	7.0000	183.7074
0.6	22.24	5.3000	6.9000	179.1062
0.7	0	7.0000	4.1000	106.2333
0.8	0	6.9000	-0.1000	-2.8605
0.9	0	4.1000	-4.0000	-104.2137
1	0	-0.1000	-6.1000	-159.5055

صفحه ۲۱۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...



- تعریف و نحوه بدست آوردن طیف پاسخ
- طیف استاندارد و اختلاف آن با طیف پاسخ
- نیروی استاتیکی معادل
- ترسیم طیف پاسخ سیستم یکدرجه آزاد در قالب طیف سه گانه
- نحوه تعیین پاسخ سیستم یک درجه آزاد به طیف پاسخ

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

پاسخ به نیروی تابع زمان دلخواه

یکی از کاربردهای بسیار مهم روش‌های عددی، محاسبه‌ی پاسخ سازه‌ها تحت اثر بارگذاری پیچیده‌ی زلزله است. همان‌طور که مشخص شده است، به علت پیچیدگی بارگذاری زلزله، امکان حل معادله‌ی دیفرانسیل حرکت به روش‌های تحلیلی ممکن نبوده و به ناچار باید به سراغ روش‌های عددی - نظیر روش‌های معرفی‌شده در بخش‌های قبل - رفت.

به کل نمودار پاسخ سازه که حاوی اطلاعات پاسخ از لحظه‌ی شروع زلزله تا پایان آن است، اصطلاحاً «تاریخچه‌ی زمانی پاسخ» گفته می‌شود.

گام‌های زمانی در مورد رکوردهای زلزله کوچک بوده و غالباً اعدادی مانند 0.005 ، 0.01 و یا 0.02 ثانیه است. بنابراین، برای مثال، در مورد یک زلزله ۲۰ ثانیه‌ای با گام‌های زمانی 0.01 ثانیه، نیاز به $\frac{20}{0.01} = 2000$ بار تکرار محاسبات است. در این صورت جهت محاسبات به نرم‌افزار مطلوبی نیاز است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مفهوم طیف پاسخ

در عمل مسئله‌ای که طراح سازه با آن مواجه است، طرح ایمن و اقتصادی سازه‌ای است که در معرض زلزله‌های محتمل آینده قرار می‌گیرد. بنابراین برای طراح رکورد زلزله از قبل وجود ندارد. چرا که اساساً نمی‌توان رکورد زلزله‌ای را که در منطقه رخ می‌دهد با قطعیت و یا حتی دقت بسیار زیاد پیش‌بینی نمود. خواص زلزله‌ها بسیار متفاوت بوده و همواره گستره‌ی وسیعی از رکوردهای زلزله وجود دارند. بنابراین نمی‌توان طراحی سازه را بر اساس یک رکورد خاص انجام داد. در طراحی عموماً اطلاعات زلزله‌های رخ داده در ساختگاه سازه و یا ساختگاه‌های مشابه جمع‌آوری شده و مجموعه‌ی کلیه‌ی اطلاعات در طراحی استفاده می‌شود. برای بررسی موضوع باید مفاهیم طیف پاسخ و طیف طرح ارائه گردد. مفهوم «طیف پاسخ» یکی از مفاهیم بسیار اساسی در مهندسی زلزله است که به عنوان ابزاری عملی جهت بررسی خواص حرکات زمین و اثرات آن بر سازه‌ها توسط M.A.Biot در سال ۱۹۳۲ ارائه گردید.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

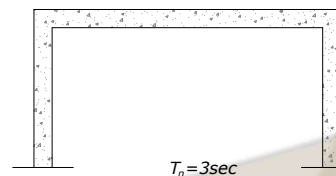
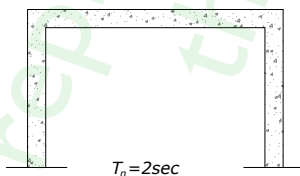
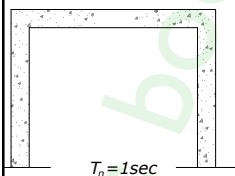
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

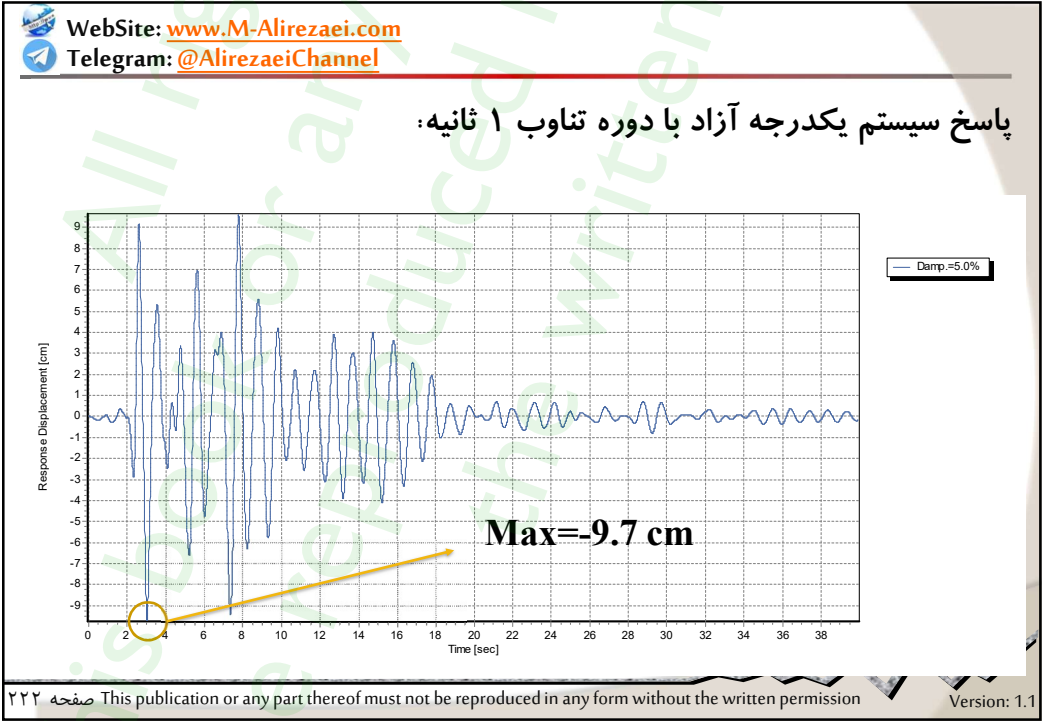
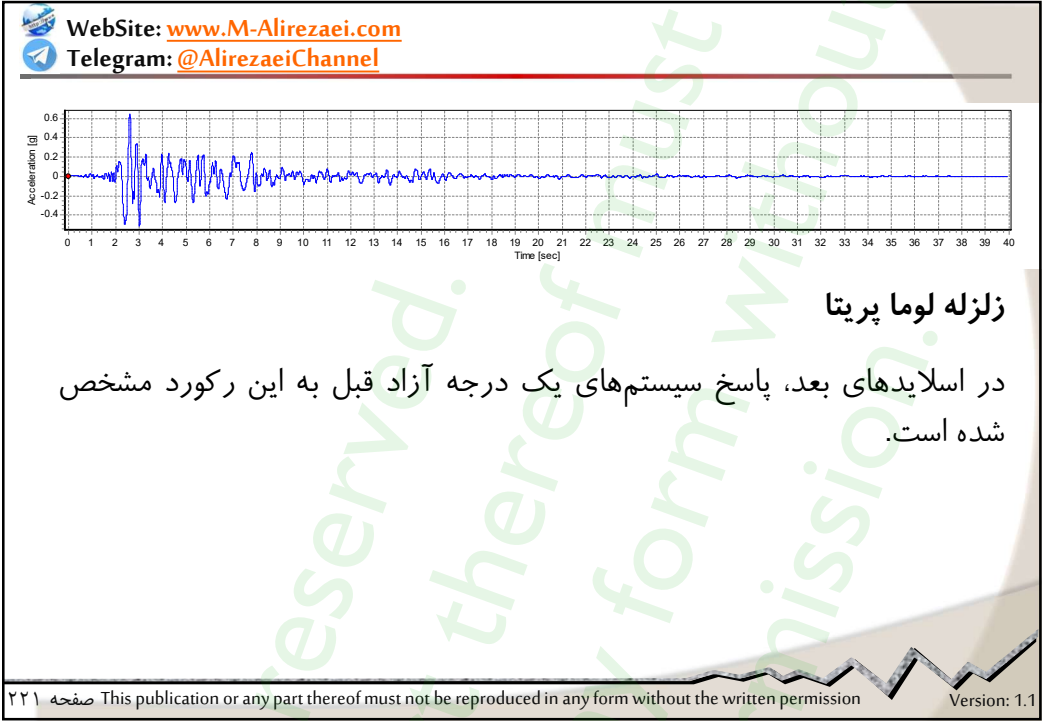
«طیف پاسخ» ابزاری است که نشان دهنده‌ی پاسخ حداکثر سیستم‌های یک‌درجه آزاد با پریودها (یا فرکانس‌های) مختلف تحت اثر یک رکورد خاص زلزله است.

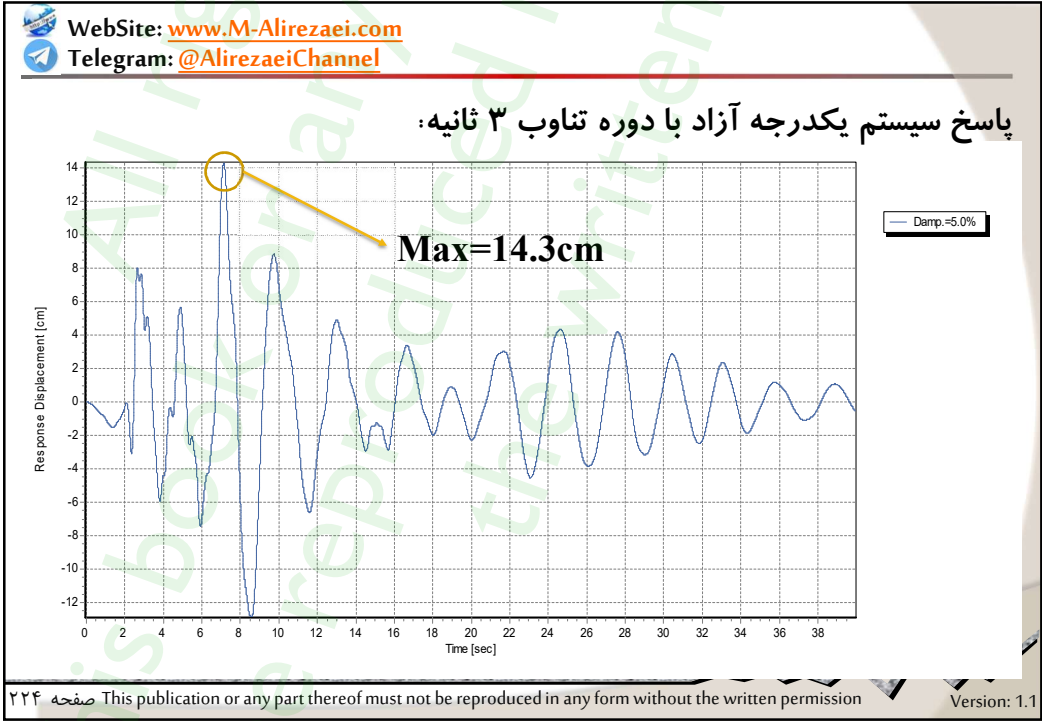
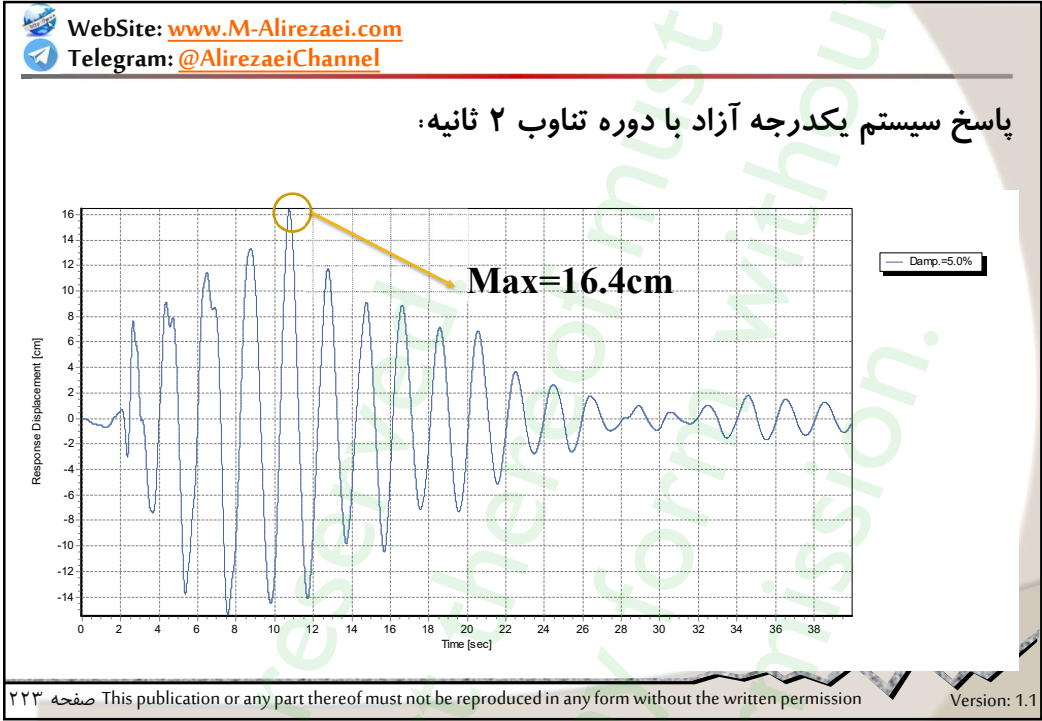
سازه‌های یک‌درجه آزاد شکل زیر را در نظر بگیرید. سازه‌ها در پای خود تحت اثر شتابنگاشت زلزله‌ی دلخواهی که در اسلاید بعد نشان داده شده است، قرار می‌گیرند. می‌دانیم که می‌توان پاسخ سازه‌ها را با داشتن ω (یا T) و ξ آن‌ها در هر لحظه در زمان به کمک روش‌های عددی ترسیم نمود.



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1







WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

حداکثر جابجایی رخ داده طی مدت زمان وقوع زلزله به ترتیب برای سازه با پریود ۱، ۲ و ۳ ثانیه و نسبت میرایی ۵٪ معادل ۹/۷، ۱۶/۴ و ۱۴/۳ سانتیمتر است که در لحظه‌های مختلفی رخ داده‌اند.

حال نموداری ترسیم می‌کنیم که محور افقی آن دوره تناوب (T) و محور قائم آن حداکثر جابجایی‌های فوق‌الذکر است. نمودار به دست آمده - که محور افقی آن پریود (T) و محور قائم آن حداکثر مقدار یک کمیت پاسخ است - را «طیف پاسخ» می‌نامیم که در اینجا برای سازه‌های مختلف، اما تحت اثر یک رکورد معین به دست آمده است. (شکل اسلاید بعد)

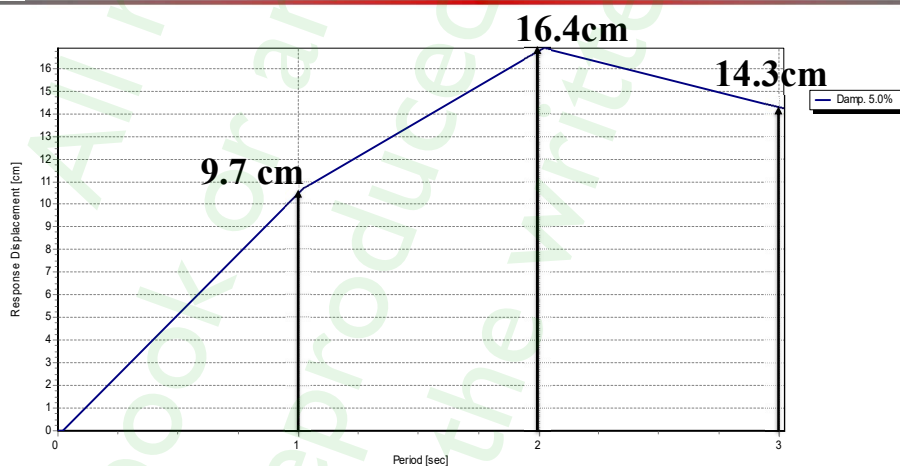
Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



با توجه به اینکه محور قائم در شکل فوق، حداکثر مقدار جابجایی سیستم یک‌درجه آزاد است، به آن «طیف پاسخ جابجایی» گفته می‌شود.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



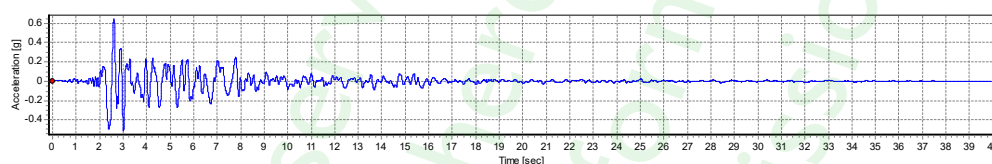
WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مقدار طیف تا چند ثانیه بایستی ترسیم شود؟

چنانچه محور قائم حداکثر مقادیر سرعت و شتاب باشند، به طیف‌های به‌دست آمده به ترتیب «طیف سرعت» و «طیف شتاب کل» گفته می‌شود.

در اسلایدهای بعدی، طیف جابجایی، سرعت و شتاب برای زلزله لوماپریتا ترسیم شده است:



زلزله لوما پریتا

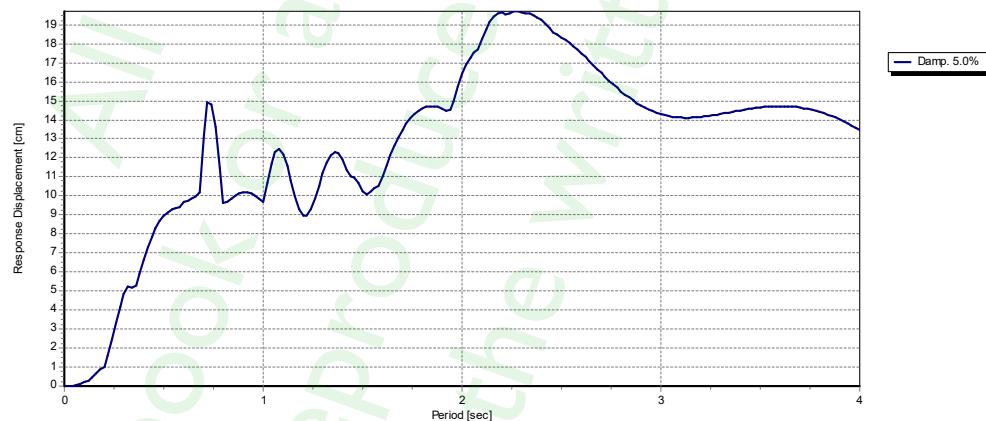
صفحه ۲۲۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

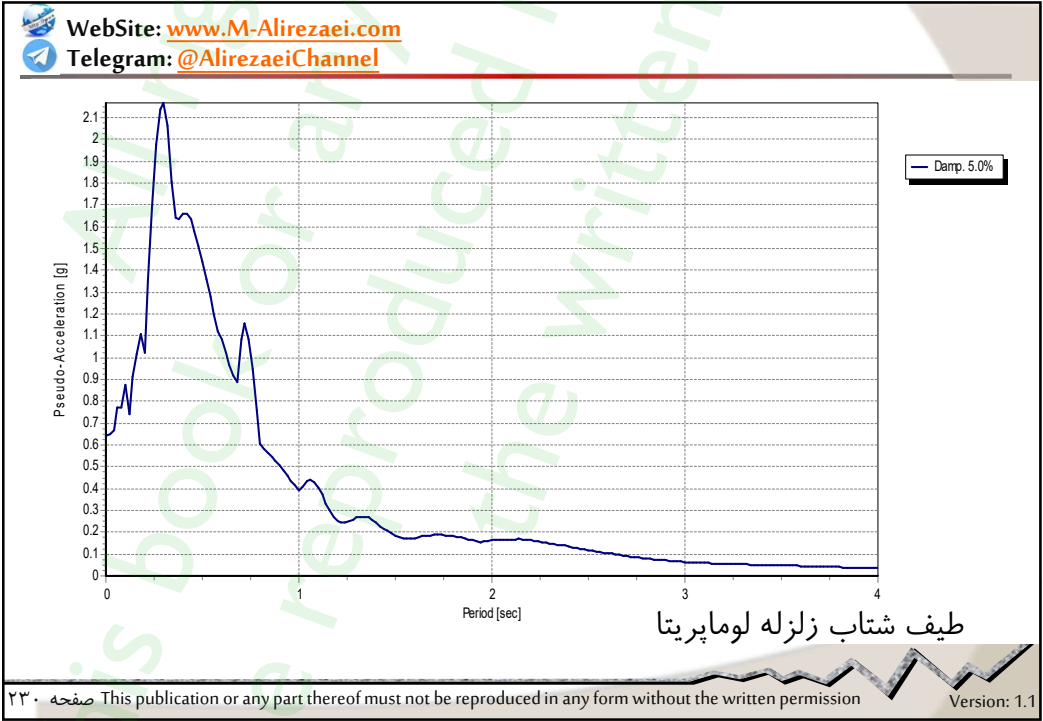
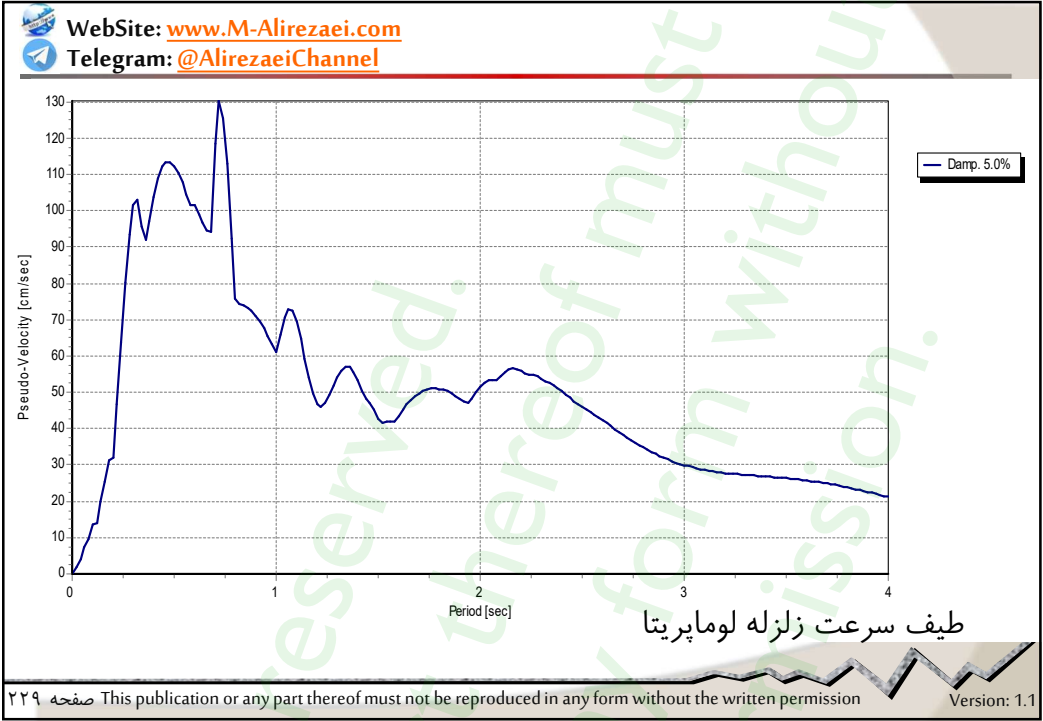
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



طیف جابجایی زلزله لوماپریتا

صفحه ۲۲۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بین طیف‌های جابجایی، سرعت و شتاب ارتباط مستقیمی وجود دارد. به گونه‌ای که با داشتن یکی از آنها، دو طیف دیگر به سادگی و بدون انجام مراحل طولانی فوق‌الذکر قابل محاسبه است. در هر دوره تناوب مشخص T_n ، اگر مقدار جابجایی در طیف جابجایی را با S_d مقدار سرعت در طیف سرعت را با S_v و مقدار شتاب در طیف شتاب را با S_a نمایش دهیم، روابط بسیار ساده‌ی زیر بین آنها برقرار است:

$$S_v = \omega S_d = (2\pi/T) S_d$$

$$S_a = \omega S_v = (2\pi/T) S_v = (2\pi/T)(2\pi/T) S_d = (2\pi/T)^2 S_d = (4\pi^2/T^2) S_d = \omega^2 S_d$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برای مثال در دوره تناوب متناظر ۱ ثانیه، اگر جابجایی طیفی ۹/۷ سانتیمتر باشد، سرعت و شتاب طیفی در این پریود برابر است با:

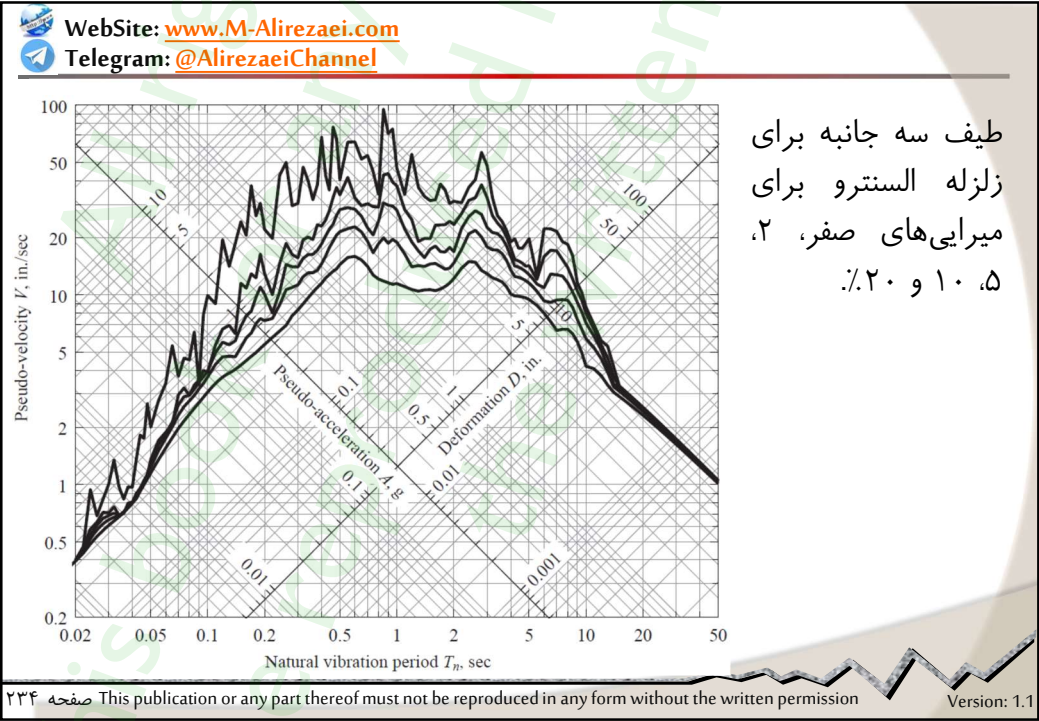
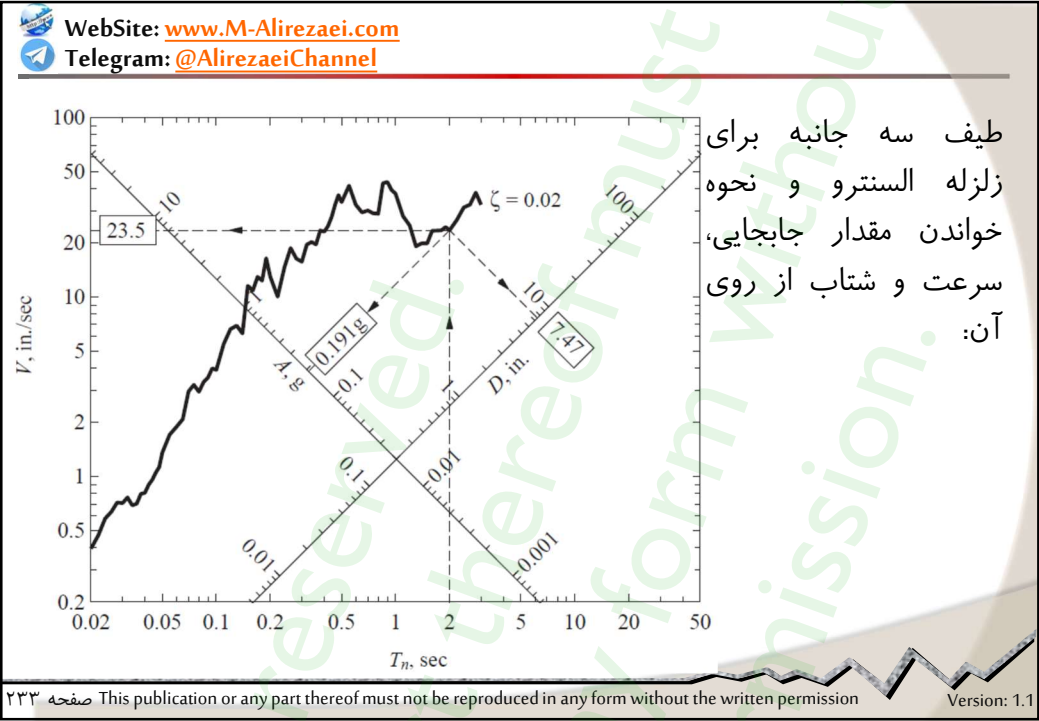
$$S_v = \omega S_d = (2\pi/1) 9.7 = 60.9 \text{ cm/sec}$$

$$S_a = \omega S_v = (2\pi/1) 60.9 = 383 \text{ cm/sec}^2$$

غالباً جهت سهولت هر سه طیف جابجایی، سرعت و شتاب را در یک نمودار سه‌جانبه ترسیم کرده و به آن «طیف سه‌جانبه» می‌گویند. مثل شکل اسلاید بعد.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

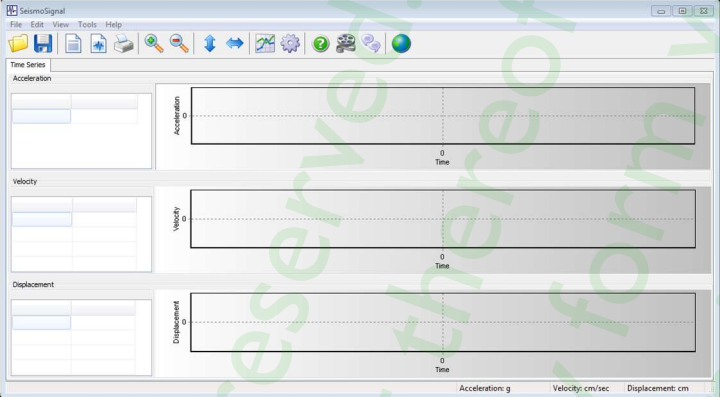
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

آشنایی به برنامه SeismoSignal

این نرم‌افزار در یک محیط گرافیکی بسیار جذاب و ساده، کلیه محاسبات مرتبط با رکوردها و سازه‌های یک‌درجه آزاد را انجام می‌دهد. یکی از کاربردهای این نرم‌افزار، حل معادله دیفرانسیل حرکت یک سازه مشخص با ω و ξ دلخواه به روش‌های عددی است.



Version: 1.1

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

کاربرد طیف در طراحی

طیف پاسخ به دست آمده در بخش قبل، کاربرد زیادی در طراحی عملی سازه‌های یک‌درجه آزاد و چنددرجه آزاد دارد. استفاده از طیف در مورد سازه‌های چنددرجه آزاد را به فصل‌های بعد موکول می‌کنیم و در اینجا فقط در مورد سازه‌های یک‌درجه آزاد بحث خواهیم کرد. می‌دانیم که نیروی جانبی به وجود آمده در سازه یک‌درجه آزاد در هر لحظه‌ی زمانی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$f_s(t) = ku(t)$$

که در آن k سختی و $u(t)$ پاسخ جابجایی سازه‌ی یک‌درجه آزاد در هر لحظه است. در واقع رابطه‌ی فوق «تاریخچه‌ی زمانی نیرو» را نتیجه می‌دهد. حال چنانچه از طیف برای بررسی سازه استفاده کنیم، می‌توان با مراجعه به طیف مورد نظر مقدار جابجایی حداکثر (S_d) سیستم با T_n مشخص را از آن به دست آورد.

Version: 1.1

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بنابراین نیروی حداکثر استاتیکی معادل به وجود آمده در سازه‌ی یکدرجه آزاد عبارت است از:

$$f_{max} = ku_{max} = kS_d = m \cdot \ddot{u}_{max} = m \cdot S_a$$

که در آن m جرم و S_a شتاب طیفی به دست آمده از نمودار طیف برای T_n مشخص است. دقت شود که به کمک طیف پاسخ مقادیر ماکزیمم پاسخ تحت اثر یک زلزله‌ی خاص به دست می‌آید؛ اما نمی‌توان تعیین نمود که این مقادیر در چه لحظه‌ای از زمان وقوع زلزله رخ داده‌اند. به بیان دیگر، طیف پاسخ فقط مقادیر حداکثر را می‌دهد و لحظه‌ی وقوع آن را تعیین نمی‌کند. البته باید توجه داشت که برای طراحی سازه معمولاً اطلاع از مقادیر حداکثر پاسخ مهم است و نه لحظه‌ی وقوع آنها.

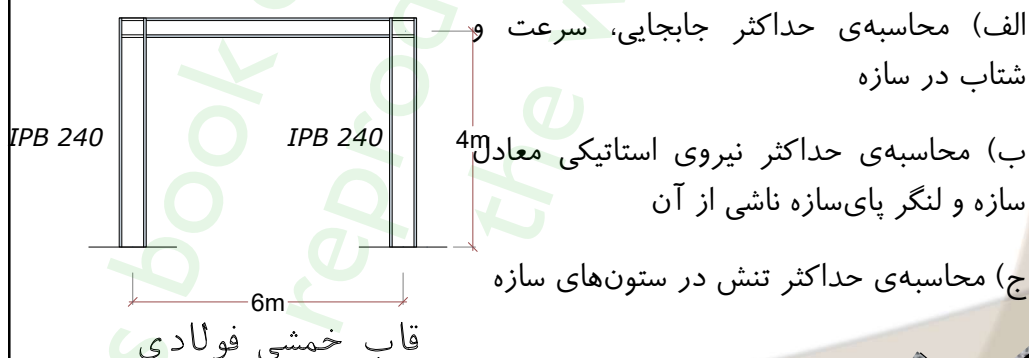
Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

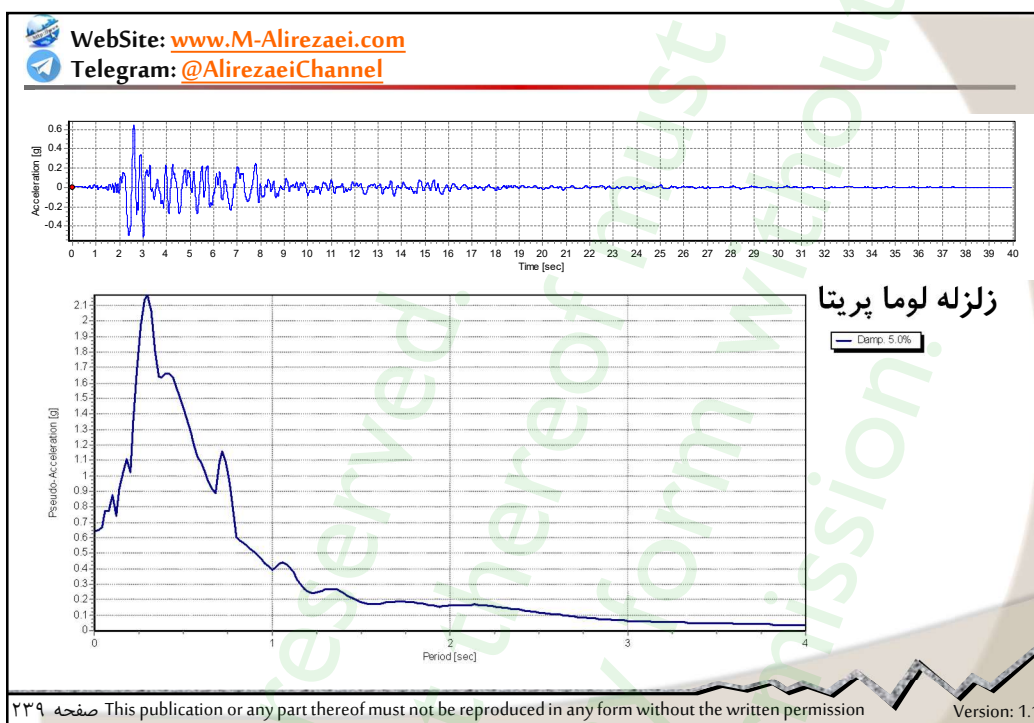
مثال) قاب خمشی فولادی نشان داده شده با سقف صلب در شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر میرایی این سازه ۵٪ بوده و تحت اثر زلزله‌ای با تاریخچه‌ی زمانی شتاب مطابق شکل اسلاید بعد و طیف پاسخ شتاب محاسبه شده قرار بگیرید، مطلوب است:

$$W = 10 \text{ ton}$$



Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

الف) ابتدا مشخصات دینامیکی سیستم محاسبه می‌شود:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{10000}{981} = 10.19 \text{ kg.s}^2/\text{cm}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$k = 24 \frac{EI}{h^3} = 24 \frac{(2 \times 10^6)(11260)}{400^3} = 8445 \text{ kg/cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi/\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 28.79 \Rightarrow T = 0.218 \text{ sec.}$$

حال با مراجعه به طیف داریم:

صفحه ۲۴۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

→ $T = 0.218 \text{ sec.} \Rightarrow S_a = 1.30 g = 1275 \text{ cm/s}^2$ حداکثر شتاب

$S_v = \frac{S_a}{\omega} = 44.3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ حداکثر سرعت ، $S_d = \frac{S_v}{\omega} = \frac{S_a}{\omega^2} = 1.53 \text{ cm}$ حداکثر جابجایی

(ب) نیروی استاتیکی معادل برابر است با:

$$f_{max} = kS_d = 8445(1.53) = 12.9 \text{ ton}$$

و لنگر پای سازه عبارت است از:

$$M_{base} = f_{max} \cdot h = 12.9(4) = 51.6 \text{ ton.m}$$

(ج) با توجه به صلب بودن تیر و یکسان بودن مشخصات ستون‌ها، از تحلیل سازه تحت اثر بار استاتیکی معادل f_{max} ، لنگر پای ستون‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

۲۴۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$M_{col} = \frac{f_{max}}{2} \cdot h = 25.8 \text{ ton.m}$$

در نتیجه تنش حداکثر با توجه به مشخصات پروفیل IPB240 برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{M_c}{I} = \frac{(25.8 \times 10^5) \left(\frac{24}{2}\right) \text{ cm}}{11260 (\text{cm}^4)} = 2749 \text{ kg/cm}^2$$

با توجه به اینکه تنش تسلیم فولاد نرمه‌ی ساختمانی 2400 kg/cm^2 است؛ لذا به علت وقوع این زلزله ستون تسلیم می‌شود و وارد ناحیه‌ی غیرارجاعی از رفتار خود می‌گردد.

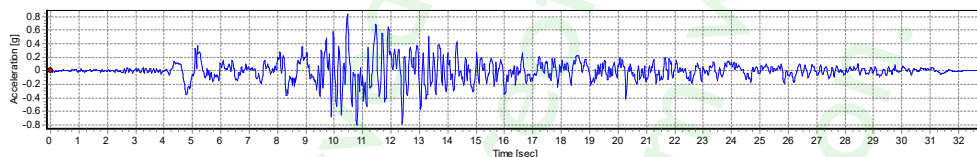
۲۴۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

خواص طیف‌های پاسخ

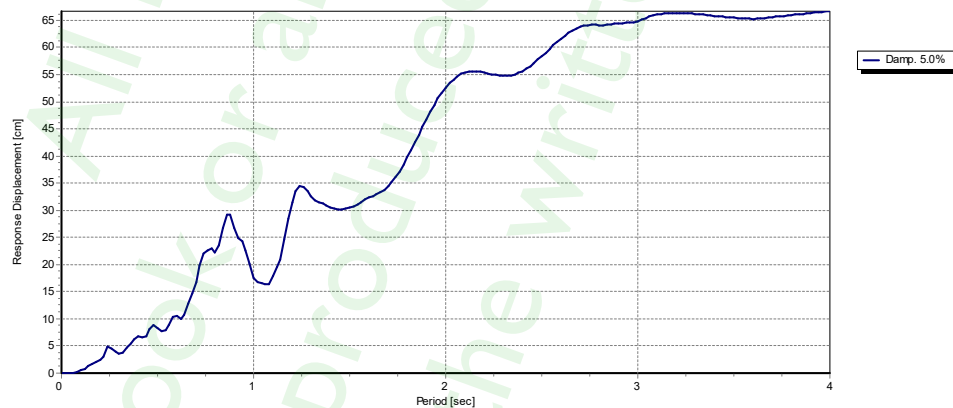
طیف‌های پاسخ حاوی اطلاعات بسیار مهمی از خواص زلزله رخ داده هستند. این اطلاعات به طراح سازه در درک و شناخت رفتار سازه‌ها تحت آن زلزله کمک شایانی می‌کند. در شکل‌های زیر طیف‌های شتاب، سرعت و جابجایی زلزله ی طبس نشان داده شده است.



زلزله طبس

صفحه ۲۴۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

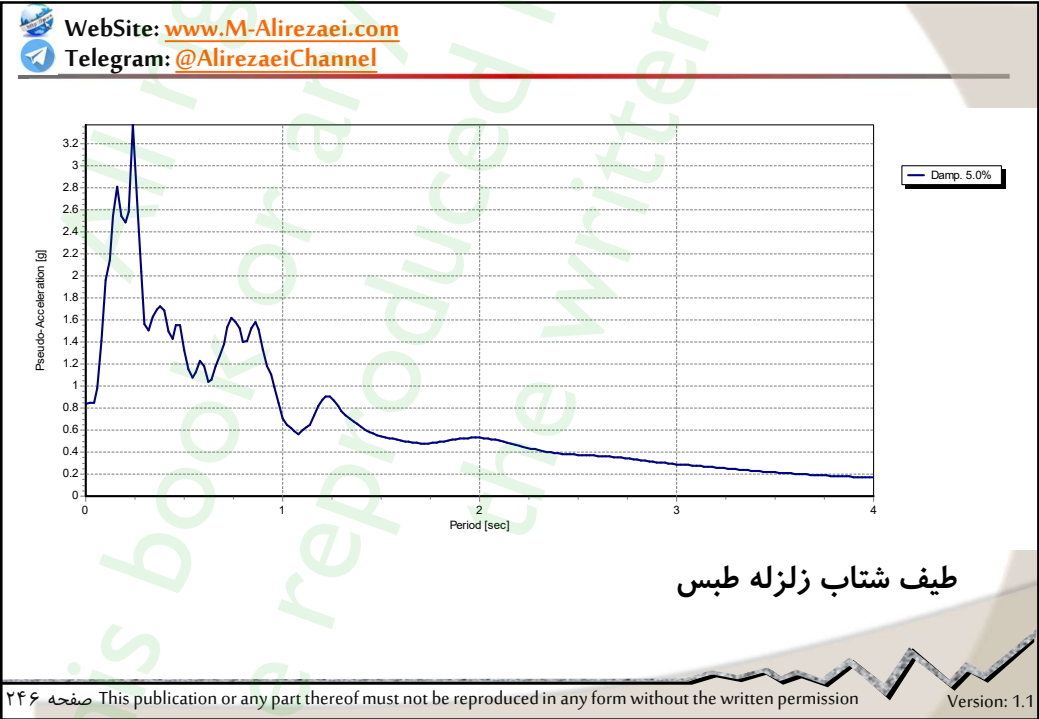
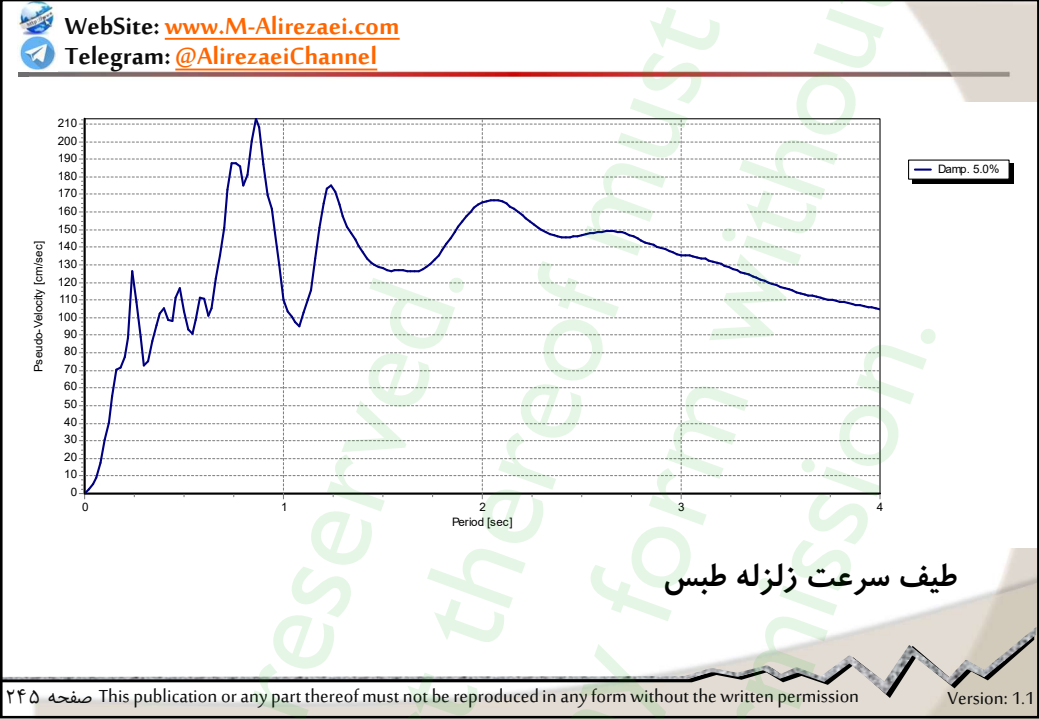
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

طیف جابجایی زلزله طبس

صفحه ۲۴۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

بررسی اشکال فوق بیانگر خواص مهمی از زلزله‌ها به شرح زیر است:

۱- برای سیستم‌های با پریود بسیار کوتاه (کمتر از 0.033 ثانیه)، شتاب طیفی به PGA یعنی شتاب حداکثر زمین نزدیک شده و جابجایی نسبی داخل سازه بسیار کم است. در واقع چنین سازه‌های «سختی» به حالت صلب و بدون تغییر شکل داخلی همراه با زمین حرکت کرده و حداکثر نیروی اینرسی در آن متناسب با جرم خود سازه به وجود می‌آید.

۲- برای سیستم‌های با پریود بلند (بیش از ۱/۵ ثانیه) جابجایی داخلی سازه به حداکثر جابجایی رخ داده روی زمین نزدیک می‌شود. در این حالت با توجه به نمودار طیف شتاب، می‌بینیم که چنین سازه‌های «نرمی» شتاب کمی از زمین دریافت می‌کنند؛ بنابراین اینرسی کمی به آن‌ها وارد می‌شود.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

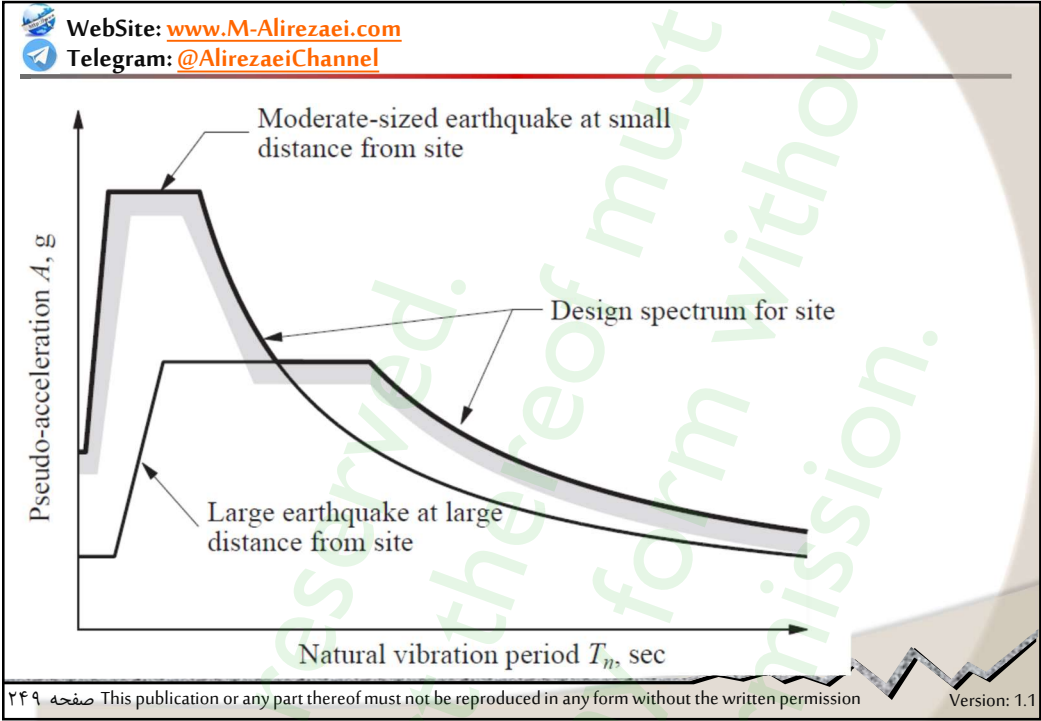
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

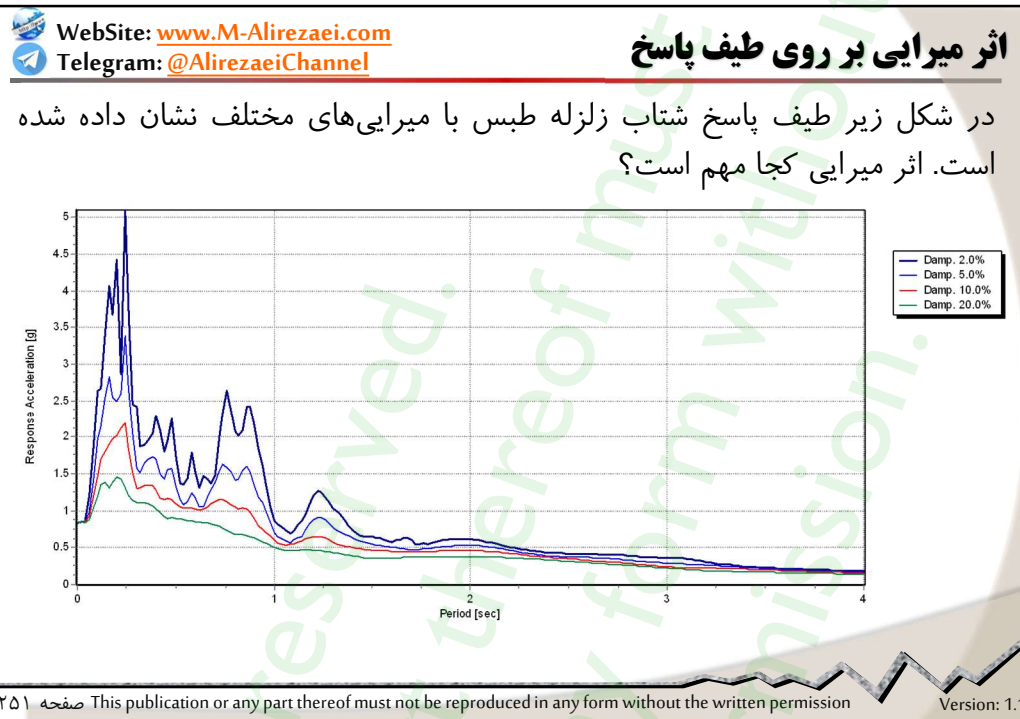
۳- برای سازه‌های با پریود متوسط (بین ۰/۵ تا ۳ ثانیه)، سرعت سازه به حداکثر سرعت زمین (V) نزدیک می‌گردد. اغلب سازه‌های ساختمانی متداول در این محدوده پریودی قرار می‌گیرند. اضافه کردن میرایی در این گونه سازه‌ها بسیار مؤثر بوده و به شدت پاسخ‌ها را کاهش می‌دهد.

مقادیر ماکزیمم، محتوای فرکانسی و مدت زمان تداوم زلزله جزء مهمترین خواص رکودهای زلزله هستند که در مهندسی زلزله‌ی کاربردی، اهمیت بسیار دارند. طیف پاسخ اساساً فاقد اطلاعات مربوط به مدت زمان زلزله است. در واقع، اگر به طور کلی مقادیر طیف یک زلزله نسبت به طیف زلزله‌ی دیگر بیشتر باشد، نمی‌توان به یقین نتیجه گرفت که اثر زلزله‌ی اول بسیار نامناسب تر از زلزله‌ی دوم بوده است؛ چرا که ممکن است مدت زمان زلزله‌ی دوم طولانی بوده و سازه را به مدت طولانی در حوزه‌ی غیرخطی از رفتار آن تحت تأثیر قرار دهد.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

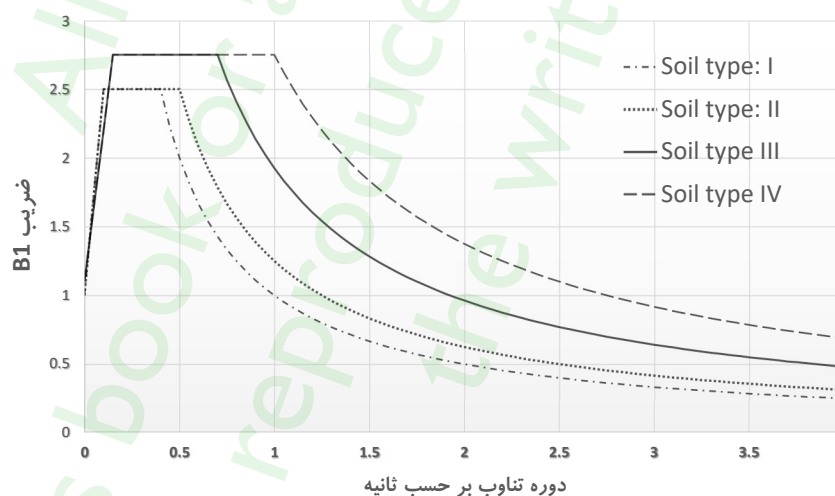
از طرف دیگر می‌دانیم که پریود محاسبه شده، صرفاً یک عدد تئوری بوده و در عمل پریود واقعی سازه با پریود محاسباتی اختلاف دارد؛ بنابراین نیاز به طیفی برای طراحی وجود دارد که هم نماینده‌ی چندین زلزله‌ی مختلف بوده و هم نمودار آن «صاف» باشد. چنین طیفی «طیف طرح» نام داشته و غالباً توسط کمیته‌های آئین‌نامه‌ی طراحی سازه‌ها در برابر زلزله مانند آئین‌نامه‌ی ۲۸۰۰ ایران محاسبه شده و در آئین‌نامه‌ها جهت اهداف طراحی گنجانده می‌شود. طی دهه‌های اخیر، همواره طراحان به طور سنتی از طیف شتاب برای اهداف طراحی استفاده کرده‌اند؛ زیرا با حاصلضرب جرم سازه در مقدار آن، می‌توان به کمیت نیرو دست یافت که برای مهندسان طراح معمولاً مفهوم کاربردی تری است.

Version: 1.1
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

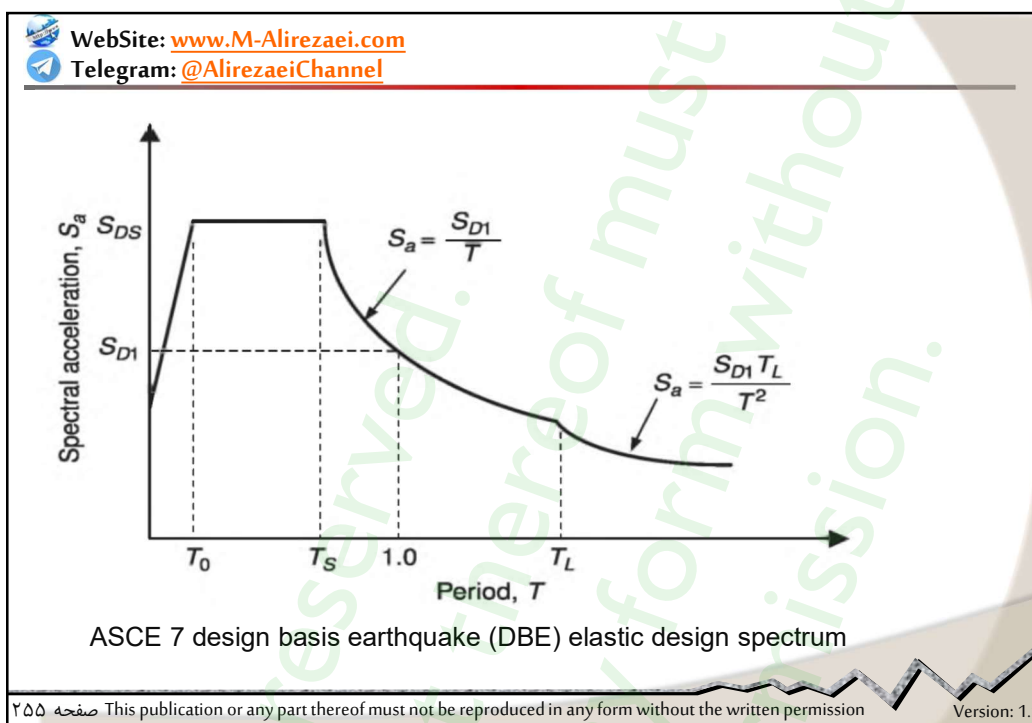
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ضریب شکل طیف برای مناطق با لرزه خیزی زیاد و خیلی زیاد



Version: 1.1
This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

شکل خود شامل ۴ طیف مجزاست که هر یک مربوط به یک نوع خاک است. آئین‌نامه‌ی ۲۸۰۰، نوع خاک را (براساس متوسط مشخصات تا ۳۰ متر زیر تراز فونداسیون) پیشنهاد داده است. طراح با تعیین نوع لرزه خیزی به یکی از اشکال رجوع کرده و با تعیین نوع خاک یک طیف را انتخاب می‌کند. سپس با توجه به پی‌رود سازه، مقدار شتاب طیفی (S_a) را بر حسب g از محور قائم و با ضرب ضریب لرزه خیزی منطقه می‌خواند. آئین‌نامه‌ی ۲۸۰۰، به جای S_a از پارامتر AB تحت عنوان «ضریب بازتاب» استفاده نموده است.

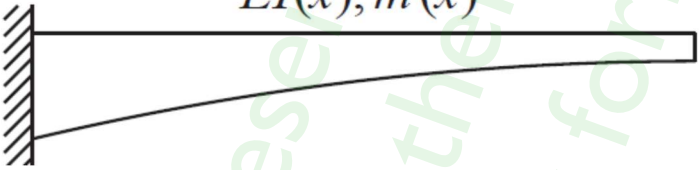
* نقش لرزه خیزی منطقه در تعیین پاسخ شتاب سازه چیست؟

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

فصل هفتم

سیستم یکدرجه آزاد کلی



$EI(x), m(x)$

صفحه ۲۵۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- تعیین دوره تناوب اصلی یک سازه چند درجه آزاد
- تعیین تابع تغییر شکل یک سازه یک درجه آزادی کلی



صفحه ۲۵۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

معرفی

در این فصل با سازه‌های پیچیده‌تری که همانند سیستم‌های یکدرجه آزاد با آنها برخورد میشود، و به سیستم‌های یکدرجه آزاد کلی معروف هستند اشاره خواهد شد.

به عنوان مثال، شکل روبرو، یک سازه شامل یک میله صلب بدون جرم، دو جرم متمرکز، فنر و میراگر است. از آنجا که میله صلب است، تغییر شکل آن را میتوان بصورت یک تغییر مکان کلی $u(x,t)$ مطابق شکل تحتانی نشان داد. این تغییر مکان توسط تابع زیر تعریف میشود:

$$u(x,t) = \psi(x)z(t)$$

شکل (a) یک سیستم مکانیکی را نشان می‌دهد. یک میله صلب بدون جرم با دو جرم m_1 و m_2 در دو نقطه از آن قرار دارد. یک فنر با ثابت k و یک میراگر با ضریب c نیز در این سیستم وجود دارد. یک بار $p(t)$ در نقطه m_2 اعمال می‌شود. شکل تحتانی، تغییر مکان کلی $u(x,t)$ را نشان می‌دهد که به صورت $u(x,t) = \psi(x)z(t)$ تعریف می‌شود. در این شکل، $z(t)$ تغییر مکان کلی و $\psi(x)$ تابع شکل است.

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

معرفی

به عنوان مثال دیگر، شکل روبرو، یک سازه شامل بینهایت درجه آزادی است. در صورت انتخاب تابع شکل یا فرم تغییر شکلی $\psi(x)$ شبیه به شکل مود ارتعاشی اصلی میتوان با تقریب خوب، فرکانس طبیعی مربوط به مود اول ارتعاش را تعیین نمود:

$$u(x,t) = \psi(x)z(t)$$

شکل (b) یک سازه با بینهایت درجه آزادی را نشان می‌دهد. یک میله صلب با تغییر مکان کلی $u(x,t)$ و تغییر مکان $z(t)$ در یک نقطه از آن. شکل تحتانی، تغییر مکان کلی $u(x,t)$ را نشان می‌دهد که به صورت $u(x,t) = \psi(x)z(t)$ تعریف می‌شود. در این شکل، $z(t)$ تغییر مکان کلی و $\psi(x)$ تابع شکل است.

بنابراین معادله سیستم یکدرجه آزاد کلی بصورت زیر در آمده و تمام روابط فصول قبل برای آن نیز برقرار است:

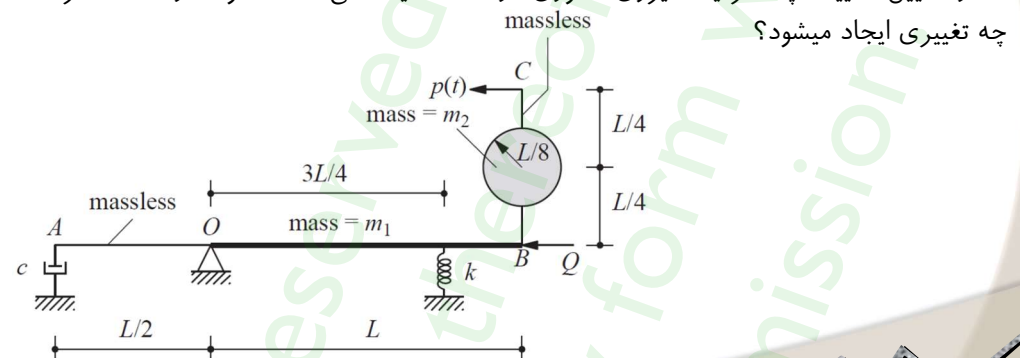
$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{c}\dot{z} + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$$

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مجموعه اجسام صلب

مثال) سیستم زیر را در نظر بگیرید. قسمت OA و BC بدون جرم هستند. اگر مختصه کلی بصورت دوران در خلاف عقربه های ساعت در حول تکیه گاه مفصلی در نظر گرفته شود، الف) معادله حرکت این سیستم را تشکیل و با حل آن فرکانس طبیعی سیستم و نسبت میرایی را تعیین نمایید. ب) اگر این سیستم با صرف نظر از میرایی بطور ناگهانی تحت نیروی p_0 قرار گیرد، پاسخ آن را تعیین نمایید. پ) اگر یک نیروی محوری در امتداد میله افقی اعمال شود، در معادله حرکت چه تغییری ایجاد میشود؟

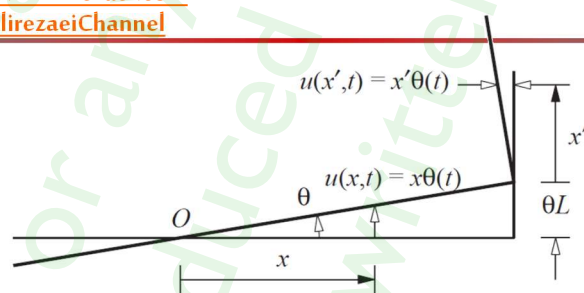


This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

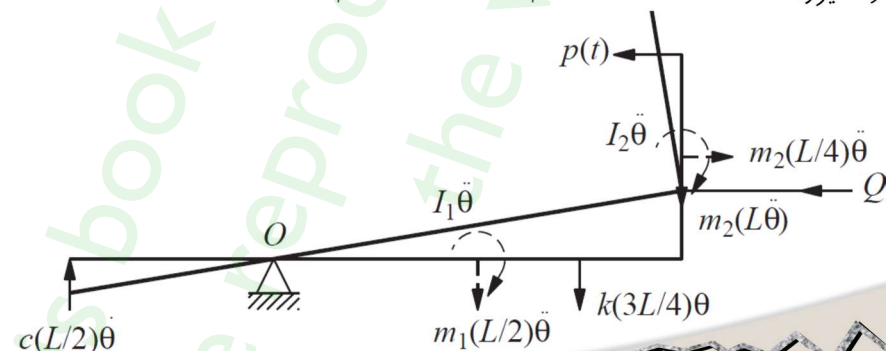
Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

منحنی تغییر شکل:



نمودار آزاد نیروها:

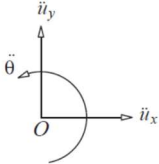


This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

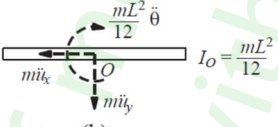
Version: 1.1



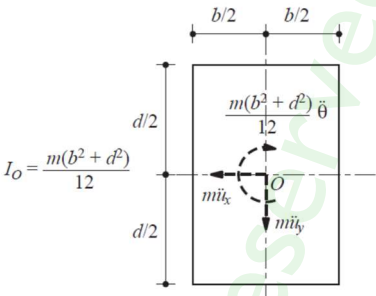
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



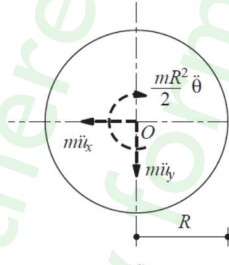
(a)



(b)



(c)



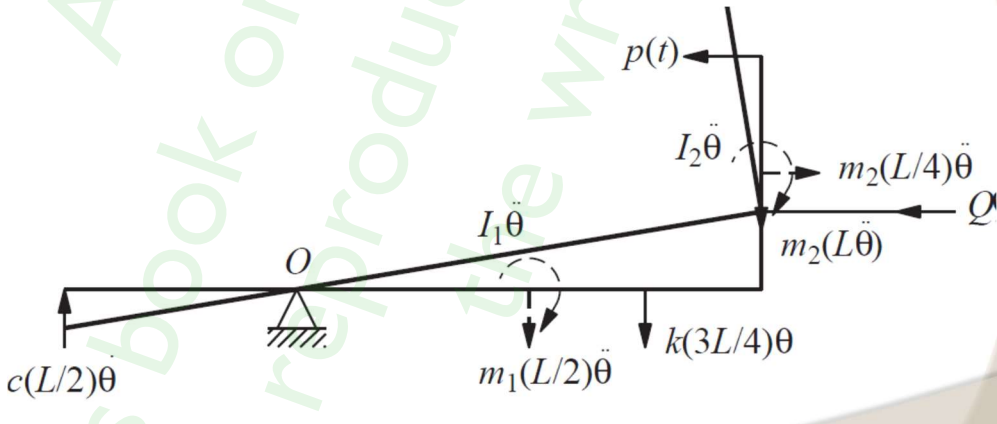
(d)

Version: 1.1

صفحه ۲۶۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$I_1 \ddot{\theta} + \left(m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta}\right) \frac{L}{2} + I_2 \ddot{\theta} + (m_2 L \ddot{\theta}) L + \left(m_2 \frac{L}{4} \ddot{\theta}\right) \frac{L}{4} + \left(c \frac{L}{2} \dot{\theta}\right) \frac{L}{2} + \left(k \frac{3L}{4} \theta\right) \frac{3L}{4} = P(t) \frac{L}{2}$$


Version: 1.1

صفحه ۲۶۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$I_1 \ddot{\theta} + \left(m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta}\right) \frac{L}{2} + I_2 \ddot{\theta} + (m_2 L \ddot{\theta}) L + \left(m_2 \frac{L}{4} \ddot{\theta}\right) \frac{L}{4} + \left(c \frac{L}{2} \dot{\theta}\right) \frac{L}{2} + \left(k \frac{3L}{4} \theta\right) \frac{3L}{4} = P(t) \frac{L}{2}$$

با جایگذاری مقادیر زیر داریم:

$$I_1 = \frac{m_1 L^2}{12} \quad I_2 = \frac{m_2 \left(\frac{L}{8}\right)^2}{2} = \frac{m_2 L^2}{128}$$

$$\left(\frac{m_1 L^2}{3} + \frac{137}{128} m_2 L^2\right) \ddot{\theta} + \frac{c L^2}{4} \dot{\theta} + \frac{9k L^2}{16} \theta = p(t) \frac{L}{2}$$

$$\tilde{m} \ddot{\theta} + \tilde{c} \dot{\theta} + \tilde{k} \theta = \tilde{p}(t)$$

معادله حرکت:

$$\tilde{m} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2\right) L^2 \quad \tilde{c} = \frac{c L^2}{4} \quad \tilde{k} = \frac{9k L^2}{16} \quad \tilde{p}(t) = p(t) \frac{L}{2}$$

صفحه ۲۶۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با استفاده از روابط فصول قبل داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} \quad \xi = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}}$$

با حل معادله حرکت داریم:

با توجه به روابط مربوط به ضربه:

$$\tilde{p}(t) = \frac{p(t) L}{2} = \frac{p_o L}{2} \equiv \tilde{p}_o$$

$$u(t) = \frac{p_o}{k} (1 - \cos \omega t) \implies \theta(t) = \frac{\tilde{p}_o L}{\tilde{k}} (1 - \cos \omega t) = \frac{8p_o}{9kL} (1 - \cos \omega t)$$

در صورت وجود نیروی محوری:

$$\tilde{m} \ddot{\theta} + \tilde{c} \dot{\theta} + (\tilde{k} - QL) \theta = \tilde{p}(t) \quad Q_{cr} = \frac{\tilde{k}}{L} = \frac{9kL}{16}$$

صفحه ۲۶۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

سیستم با جرم و سختی گسترده

برج زیر را در نظر بگیرید که دارای سختی خمشی $EI(x)$ و جرم گسترده $m(x)$ است. تحت تحریک زلزله قرار دارد.

تابع شکل فرضی:

تغییر مکان نسبی برج:

$$u(x, t) = \psi(x)z(t)$$

بایستی شرایط مرزی را اقلان نماید

تغییر مکان کل برج:

$$u^t(x, t) = u(x, t) + u_g(t)$$

۲۶۷ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

یک راه حل برای انتخاب تابع شکل، بصورت معادله تغییر شکل برج به علت نیروی استاتیکی است. به عنوان مثال تغییر شکل یک تیر طره قائم با EI ثابت به علت نیروی جانبی واحد برابر است با:

$$u(x) = (3Lx^2 - x^3)/6EI$$

توابع شکل زیر هم قابل قبول هستند:

$$\psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \quad \text{and} \quad \psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$$

رابطه حرکت:

در هر لحظه از زمان، سیستم تحت نیروهای داخلی و نیروی اینرسی در حال تعادل است.

با جایگذاری شتاب کلی داریم:

$$f_I(x, t) = -m(x)\ddot{u}^t(x, t)$$

$$f_I(x, t) = -m(x)[\ddot{u}(x, t) + \ddot{u}_g(t)]$$

۲۶۸ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با استفاده از اصل کار مجازی، اگر سیستمی در حال تعادل تحت تغییر مکان مجازی، قرار گیرید، کار داخلی و خارجی برابر هستند:

$$\delta W_I = \delta W_E$$

$$\delta W_E = \int_0^L f_I(x, t) \delta u(x) dx$$

بنابراین:
با جایگذاری داریم:

$$\delta W_E = - \int_0^L m(x) \ddot{u}(x, t) \delta u(x) dx - \ddot{u}_g(t) \int_0^L m(x) \delta u(x) dx$$

$\ddot{u}(x, t) = \psi(x) \ddot{z}(t)$
کار داخلی به واسطه لنگر تحت انحنای مجازی ایجاد شده برابر است با:

$$\delta W_I = \int_0^L \mathcal{M}(x, t) \delta \kappa(x) dx$$

حال بایستی کار داخلی بر حسب مختصه کلی z و تابع شکل بیان شود.

صفحه ۲۶۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\mathcal{M}(x, t) = EI(x) u''(x, t) \quad \delta \kappa(x) = \delta [u''(x)]$$

$$u'' \equiv \partial^2 u / \partial x^2$$

$$\delta W_I = \int_0^L EI(x) u''(x, t) \delta [u''(x)] dx$$

$$u''(x, t) = \psi''(x) z(t)$$

تغییر مکان مجازی سازگار با تابع شکل فرضی، انتخاب میشود، انحنای مجازی نیز مطابق رابطه زیر تعیین میشود:

$$\delta u(x) = \psi(x) \delta z \quad \delta [u''(x)] = \psi''(x) \delta z$$

صفحه ۲۷۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با جایگذاری داریم:

$$\delta W_E = -\delta z \left[\ddot{z} \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + \ddot{u}_g(t) \int_0^L m(x) \psi(x) dx \right]$$

$$\delta W_I = \delta z \left[z \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \right]$$

$$\delta z \left[\tilde{m} \ddot{z} + \tilde{k} z + \tilde{L} \ddot{u}_g(t) \right] = 0$$

با برابر قرار دادن کار داخلی و خارجی داریم:

صفحه ۲۷۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx$$

$$\tilde{L} = \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

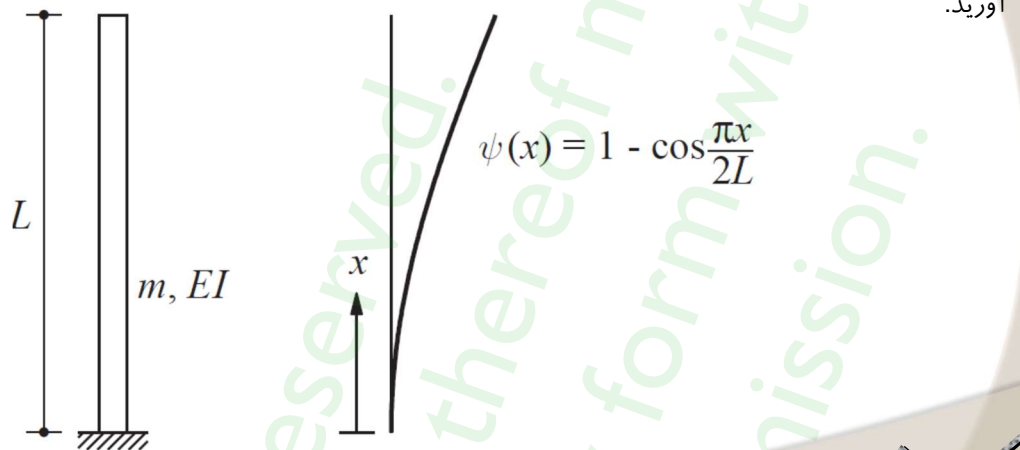
$$\tilde{m} \ddot{z} + \tilde{k} z = -\tilde{L} \ddot{u}_g(t)$$

صفحه ۲۷۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) مطابق شکل زیر، یک برج طره ای، به طول L و جرم واحد طول m و سختی یکنواخت EI مفروض است. با فرض تابع شکل زیر، رابطه حرکت را تعیین و فرکانس زاویه‌ای آن را بدست آورید.



صفحه ۲۷۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\tilde{m} = m \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.227 \text{ mL}$$

$$\tilde{k} = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2L} dx = 3.04 \frac{EI}{L^3}$$

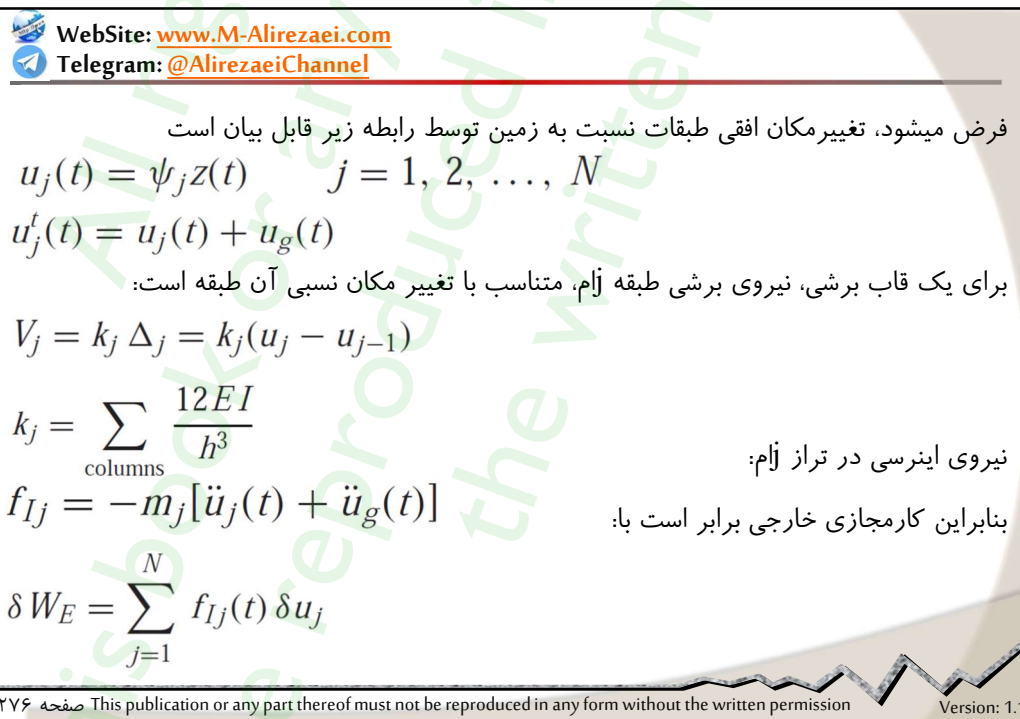
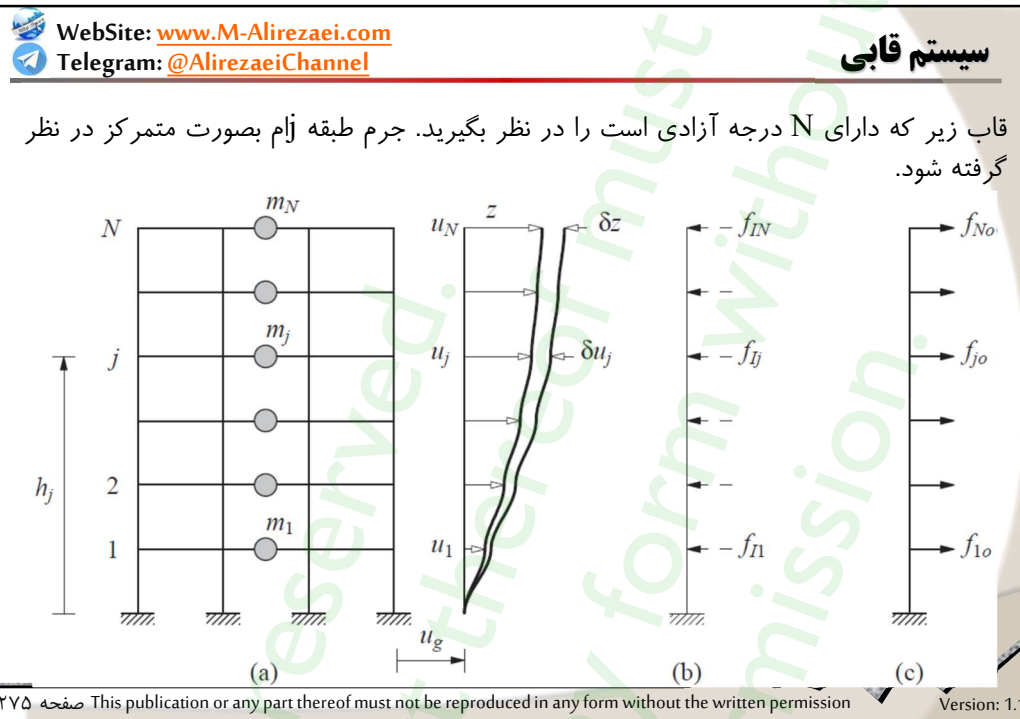
$$\tilde{L} = m \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.363 \text{ mL}$$

فرکانس زاویه ای:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \frac{3.66}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \omega_{\text{exact}} = (3.516/L^2) \sqrt{EI/m}$$

صفحه ۲۷۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

بعد از جایگذاری داریم:

$$\delta W_E = - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{u}_j(t) \delta u_j - \ddot{u}_g(t) \sum_{j=1}^N m_j \delta u_j$$

همچنین کار داخلی به سبب برش طبقه در جابجایی نسبی برابر است با:

$$\delta W_I = \sum_{j=1}^N V_j(t) (\delta u_j - \delta u_{j-1})$$

با توجه به اینکه تغییر مکان مجازی با بردار شکل متناسب است، کار مجازی داخلی و خارجی را بر حسب مختصه کلی Z و تابع شکل بازنویسی مینمایید.

بنابراین داریم:

$$\delta u_j = \psi_j \delta Z$$

$$\delta W_E = -\delta Z \left[\ddot{z} \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2 + \ddot{u}_g(t) \sum_{j=1}^N m_j \psi_j \right]$$

صفحه ۲۷۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\delta W_I = \delta Z \left[z \sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \right]$$

با برابر قرار دادن کار داخلی و خارجی داریم:

$$\tilde{m} \ddot{z} + \tilde{k} z = -\tilde{L} \ddot{u}_g(t)$$

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j^2 \quad \tilde{k} = \sum_{j=1}^N k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 \quad \tilde{L} = \sum_{j=1}^N m_j \psi_j$$

صفحه ۲۷۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

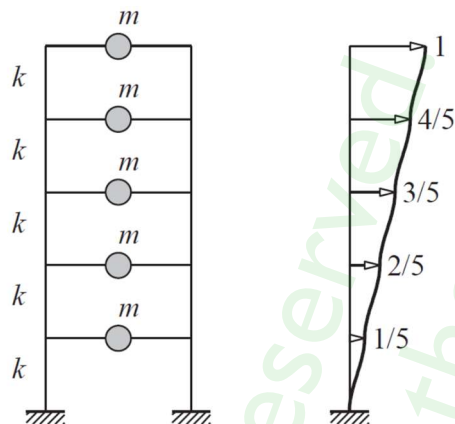
Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب پنج طبقه زیر را در نظر گرفته، که تحت شتاب زمین قرار دارد. جرم و سختی هر طبقه بر روی آن نوشته شده است. تغییر مکان طبقات بصورت خطی فرض شده و رابطه حرکت برای این سیستم را تعیین و فرکانس طبیعی آن را استخراج نمایید.



صفحه ۲۷۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com

Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\tilde{m} = \sum_{j=1}^5 m_j \psi_j^2 = m \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5^2} = \frac{11}{5} m$$

$$\tilde{k} = \sum_{j=1}^5 k_j (\psi_j - \psi_{j-1})^2 = k \frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{k}{5}$$

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^5 m_j \psi_j = m \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3m$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k/5}{11m/5}} = 0.302 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

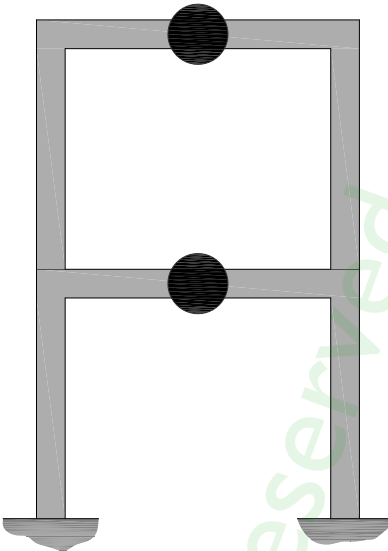
صفحه ۲۸۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

فصل هشتم

سیستم چند درجه آزاد



صفحه ۲۸۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

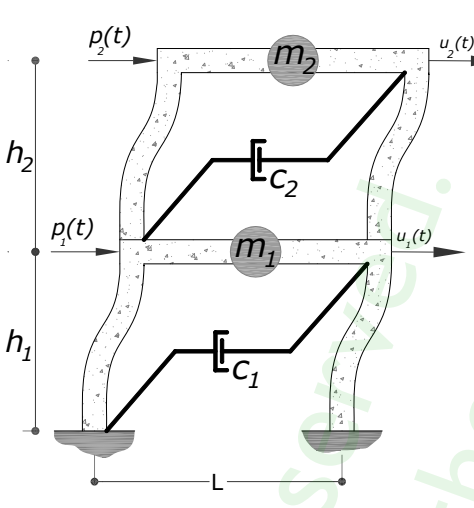
- معرفی سیستم چند درجه آزاد
- تعیین معادلات حرکت برای این سیستم
- تحلیل ارتعاش آزاد برای سیستم چند درجه آزاد
- تفاوت سیستم چند درجه آزاد و یکدرجه آزاد



صفحه ۲۸۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تشکیل معادلات حرکت برای سازه‌های دوبعدی

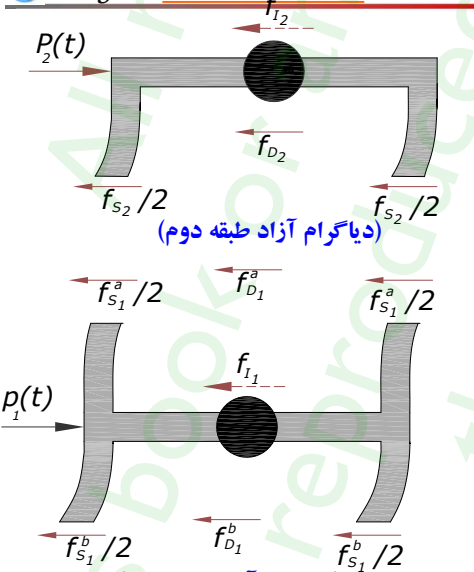


تشکیل معادلات حرکت را با ساده‌ترین مثال سازه‌های چنددرجه آزاد، یعنی سازه‌ی دو درجه آزاد با تیرهای صلب (برشی) شروع می‌کنیم. این سازه در شکل روبرو نشان داده شده و در هر دو درجه آزادی خود در طبقات تحت اثر نیروهای دینامیکی متغیر با زمان $P_1(t)$ و $P_2(t)$ قرار گرفته است. در سازه‌های ساختمانی معمولاً جرم تراز طبقات بسیار بیشتر از جرم در سایر نقاط بوده و لذا می‌توان جرم سازه را در تراز طبقات متمرکز کرد.

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تشکیل معادلات حرکت برای سازه‌های دوبعدی



دیالگرام آزاد هر دو طبقه از سازه نشان داده شده است. جهت مثبت را سمت راست فرض می‌کنیم. نیروهای مقاوم سختی و میرایی هر طبقه جداگانه روی شکل نشان داده شده است. با نوشتن معادلات تعادل برای هر قسمت داریم:

$$P_j(t) - f_{sj} - f_{Dj} - m_j \ddot{u}_j = 0$$

$$m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{sj} = P_j(t)$$

در رابطه‌ی فوق j نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی طبقه است. ($j = 1, 2$) معادله‌ی مربوط به حرکت هر دو جرم را می‌توان برای کل سازه به صورت زیر نوشت:

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

معادله‌ی مربوط به حرکت هر دو جرم را می‌توان برای کل سازه به صورت ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S_1} \\ f_{S_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

با فرض رفتار خطی مصالح، می‌توان نیروهای مقاوم سختی را به جابجایی درجات آزادی مرتبط ساخت. برای این منظور، پارامتر سختی جانبی طبقه یعنی k_j را معرفی می‌کنیم؛ که برش طبقه (V_j) را به جابجایی نسبی طبقه - که برابر اختلاف جابجایی گره‌های فوقانی و تحتانی طبقه است و با $\Delta j = u_j - u_{j-1}$ نمایش داده می‌شود، مرتبط می‌سازد. یعنی:

$$V_j = k_j \cdot \Delta j$$

۲۸۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با توجه به فرض صلب‌بودن سقف‌ها، سختی طبقه (k_j) برابر است با مجموع سختی کلیه‌ی ستون‌های آن طبقه، از فصل‌های قبل می‌دانیم که سختی یک ستون با سختی خمشی EI_c و ارتفاع h برابر است با $\frac{12EI_c}{h^3}$. لذا سختی جانبی طبقه برابر است با:

$$k_j = \sum \text{کل ستون‌ها} \frac{12EI_c}{h^3}$$

با تعریف سختی جانبی طبقه، می‌توان نیروهای مقاوم سختی را به جابجایی کف‌ها (u_1, u_2) مرتبط ساخت. نیروی f_{S_1} در تراز اول خود از دو مؤلفه‌ی تشکیل شده است: $f_{S_1}^a$ از طبقه روی آن و $f_{S_1}^b$ از طبقه‌ی زیر آن، لذا:

$$f_{S_1} = f_{S_1}^a + f_{S_1}^b$$

۲۸۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با جایگذاری رابطه‌ی مربوط به برش طبقه در رابطه‌ی فوق و با تعریف $\Delta_1 = u_1$ و $\Delta_2 = u_2 - u_1$ داریم:

$$f_{s1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2)$$

به همین ترتیب نیروی مقاوم سختی در تراز دوم برابر است با:

$$f_{s2} = k_2 (u_2 - u_1)$$

روابط فوق را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[f_s] = [K]\{u\}$$

صفحه ۲۸۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ماتریس $[K]$ را «ماتریس سختی سازه» می‌نامیم که نیروهای سختی را به جابجایی مرتبط می‌کند. به همین ترتیب می‌توان نیروهای مقاوم میرایی را به سرعت طبقات $(\dot{u}_2, \dot{u}_1)$ ارتباط داد. روش کار عیناً مطابق روش محاسبه‌ی نیروهای سختی است؛ با این تفاوت که به جای جابجایی، از پارامتر سرعت استفاده می‌شود:

$$f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$$

$$f_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

در فرم ماتریسی عبارات بالا به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_D\} = [C]\{\dot{u}\}$$

صفحه ۲۸۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ماتریس $[C]$ را «ماتریس میرایی سازه» می‌نامیم که نیروهای میرایی را به سرعت مرتبط می‌سازد. با جاگذاری روابط فوق در معادله‌ی حرکت سازه‌ی چند درجه آزاد داریم:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

و یا در فرم ماتریسی:

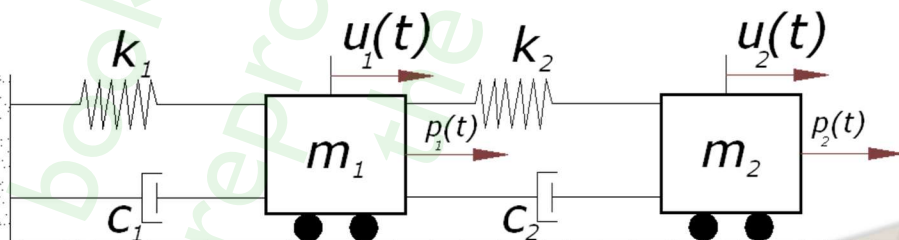
$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}$$

۲۸۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

به روش دیگر نیز می‌توان روابط قبل را تعیین نمایید. درجات آزادی در محل جرم‌ها با u_1, u_2 نشان داده شده است.



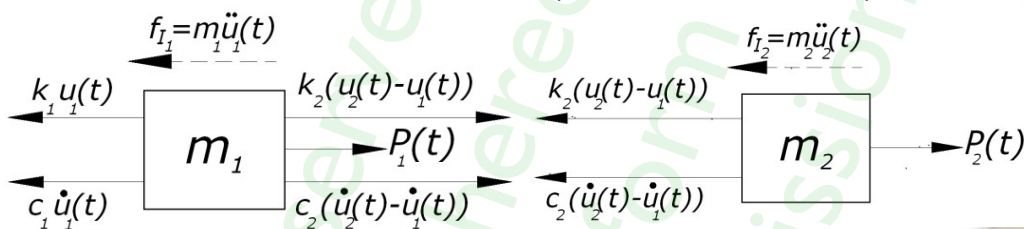
۲۹۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

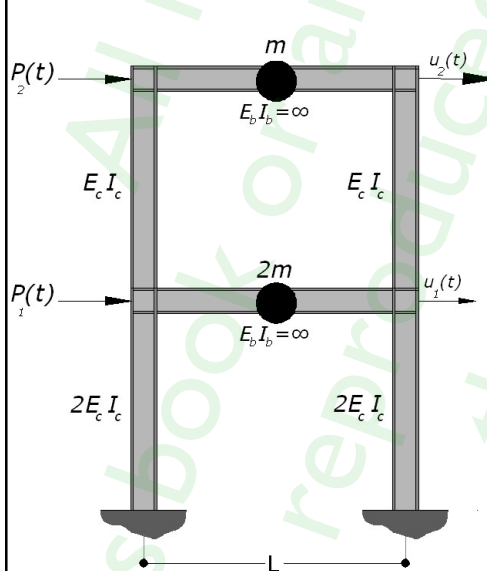
در شکل زیر دیاگرام آزاد هر دو جرم دیده می‌شود. همچنین نیروی اینرسی هریک از جرم‌ها با خط‌چین و در خلاف جهت حرکت کلی سیستم نشان داده شده است. اعمال معادله‌ی تعادل دینامیکی ($\Sigma F_x = 0$) برای هریک از جرم‌ها، عیناً معادلات قبل را نتیجه می‌دهد.

ماتریس جرم $[M]$ با فرض تمرکز جرم‌ها در طبقات، همواره قطری خواهد بود.



۲۹۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) شکل روبرو سازه‌ی دو درجه آزادی را نشان می‌دهد که تحت اثر بارهای دینامیکی در تراز طبقات قرار گرفته است. تیرها را صلب فرض کرده و از میرایی صرف‌نظر کنید. مطلوب است تشکیل معادلات حرکت حاکم به صورت پارامتری.

۲۹۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

درجات آزادی طبقات را u_1, u_2 می‌نامیم. با توجه به مطالب صفحات قبل، ماتریس جرم عبارت است از:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \Sigma \frac{12EI_c}{h^3} = 2 \frac{12(2EI_c)}{h^3} = 48 \frac{EI_c}{h^3}$$

$$k_2 = \Sigma \frac{12EI_c}{h^3} = 2 \frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

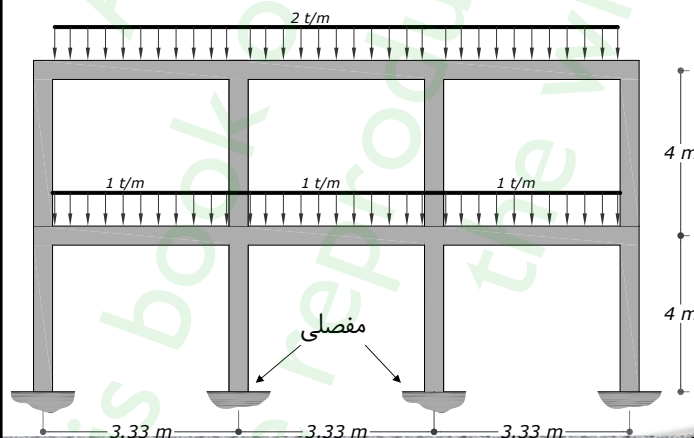
$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی ماتریس‌های جرم و سختی سازه‌ی بتنی نشان داده شده در شکل زیر. کف طبقات صلب هستند. کلیه‌ی ستون‌ها $400\text{mm} \times 400\text{mm}$ ارتفاع طبقات ۴ متر و طول دهانه‌ها ۳/۳۳ متر است. $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ابتدا ماتریس جرم به صورت متمرکز تشکیل می‌شود:

$$m_1 = \frac{W_1}{g} = \frac{10000}{981} = 10.2 \text{ kg.s}^2/\text{cm}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \text{ kg.s}^2/\text{cm}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.2 & 0 \\ 0 & 20.4 \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس سختی، ابتدا سختی طبقات ۱ و ۲ به ترتیب محاسبه می‌شوند.

$$I_c = \frac{40(40)^3}{12} = 213 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k_1 = 2 \left(\frac{3EI_c}{h^3} \right) + 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 20000 \text{ kg/cm}$$

ستون پایایی مفصلی

۲۹۵ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$k_2 = 4 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = \frac{48EI_c}{h^3} = 32000 \text{ kg/cm}$$

لذا ماتریس برابر است با:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52000 & -32000 \\ -32000 & 32000 \end{bmatrix} (\text{kg/cm})$$

۲۹۶ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برای سازه‌ی سه‌طبقه‌ی نشان‌داده شده در شکل روبرو، مطلوب است تشکیل معادله‌ی حرکت تحت اثر نیروهای خارجی در تراز طبقات. تیرهای کف کاملاً صلب هستند. همچنین جرم سازه را می‌توان در طبقات متمرکز در نظر گرفت. سختی طبقات و میرایی آنها در شکل مشخص شده است.

صفحه ۲۹۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس جرم (قطری)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}}_{\text{ماتریس میرایی}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس میرایی}} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

صفحه ۲۹۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

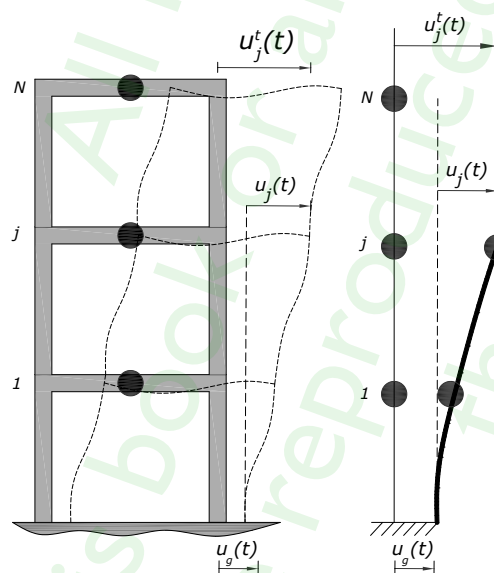
WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مشابه آنچه در مثالهای فوق دیده شد - یک ماتریس نواری بوده و برای سازهی N طبقه به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_N \end{bmatrix}$$

صفحه ۲۹۹ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

شکل روبرو دو سازهی دو بعدی را نشان می‌دهد که تحت اثر یک جابجایی در پای خود قرار گرفته‌اند. جابجایی زمین را با u_g ، جابجایی کل (مطلق) جرم m_j را با u_j^t و جابجایی نسبی بین این جرم و زمین را با u_j نمایش می‌دهیم.

$$u_j^t(t) = u_j(t) + u_g(t)$$

صفحه ۳۰۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

برای یک سازه‌ی N درجه آزاد می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت برداری و مطابق زیر برای کل سازه نوشت:

$$\begin{Bmatrix} u_1^t(t) \\ u_2^t(t) \\ \vdots \\ u_N^t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} + u_g(t) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

شتاب جرم‌ها بایستی معادل «شتاب کل» در معادلات وارد گردد. شتاب کل عبارت است از مجموع شتاب نسبی سازه و شتاب مطلق زمین:

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \rightarrow \dot{u}^t(t) = \dot{u}(t) + \dot{u}_g(t) \rightarrow \ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$$

صفحه ۳۰۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

با تغییرات فوق، رابطه بصورت زیر بازنویسی میشود:

$$[M]\{\ddot{u}^t\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

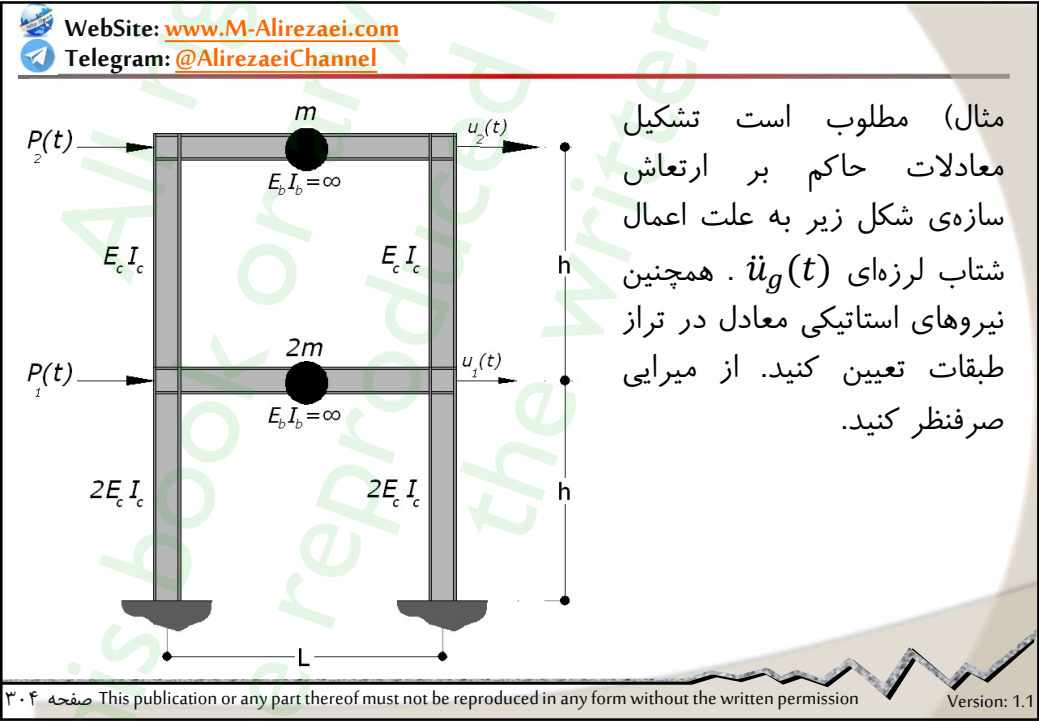
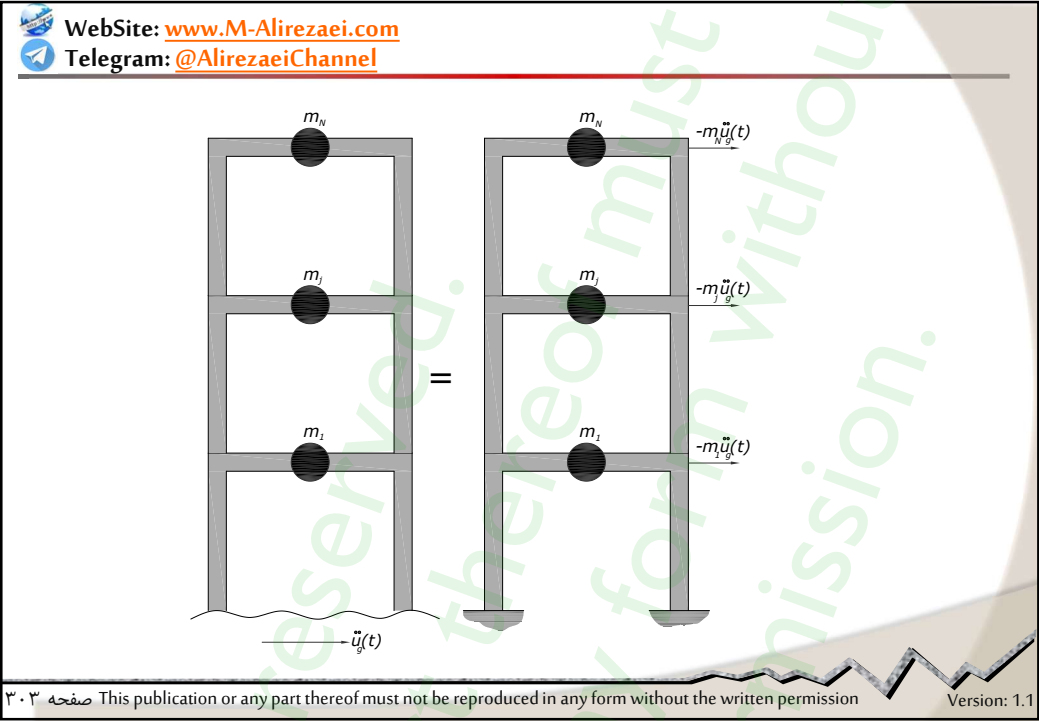
$$[M](\{\ddot{u}\} + \ddot{u}_g(t)) + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[m]\ddot{u}_g(t)\{1\}$$

معادله‌ی فوق، شامل N معادله (به تعداد درجات آزادی) دیفرانسیل حاکم بر جابجایی‌های نسبی $u_j(t)$ سازه‌ی چنددرجه آزاد تحت اثر شتاب پایه‌ی زلزله است. برای سازه‌ی یک‌درجه آزاد می‌توان جهت معادل‌سازی استاتیکی، پای سازه را ثابت فرض کرده و نیروهای استاتیکی معادل را مطابق شکل اسلاید بعد در تراز طبقات اعمال نمود:

صفحه ۳۰۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

درجات آزادی طبقات را u_2, u_1 می‌نامیم. با توجه به مطالب صفحات قبل، ماتریس جرم عبارت است از:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \Sigma \frac{12EI_c}{h^3} = 2 \frac{12(2EI_c)}{h^3} = 48 \frac{EI_c}{h^3}$$

$$k_2 = \Sigma \frac{12EI_c}{h^3} = 2 \frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

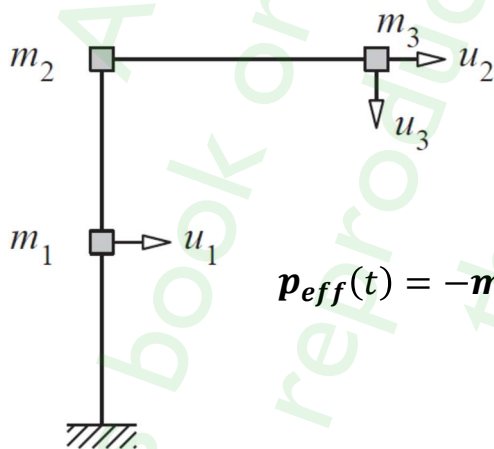
$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\ddot{u}_g(t)\{1\}$$

صفحه ۳۰۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

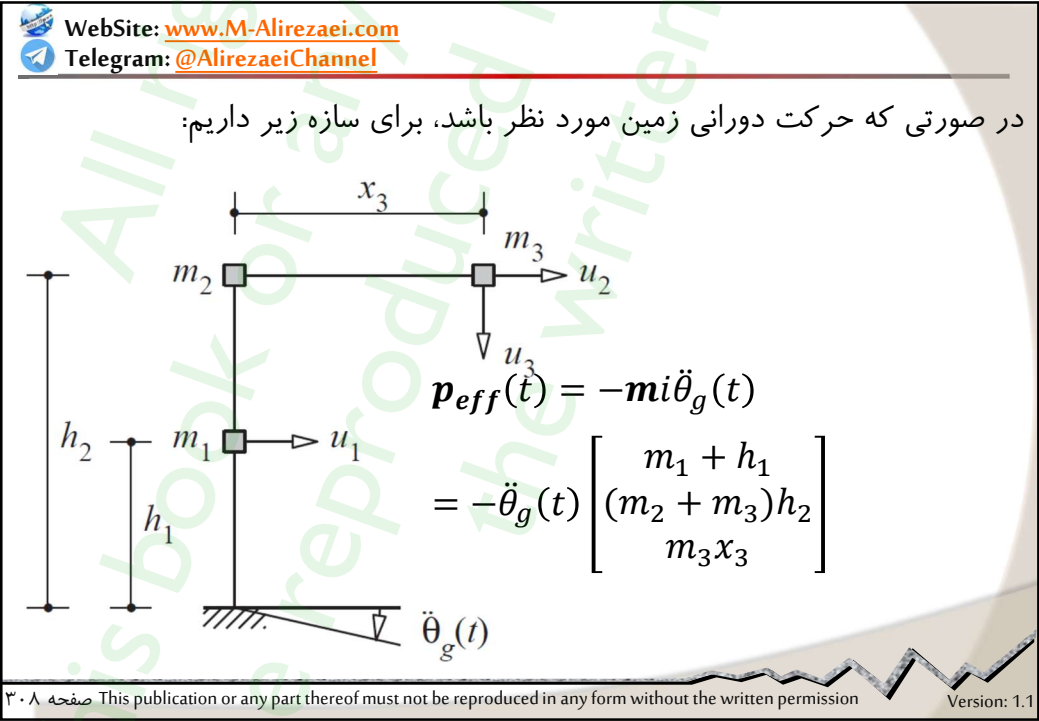
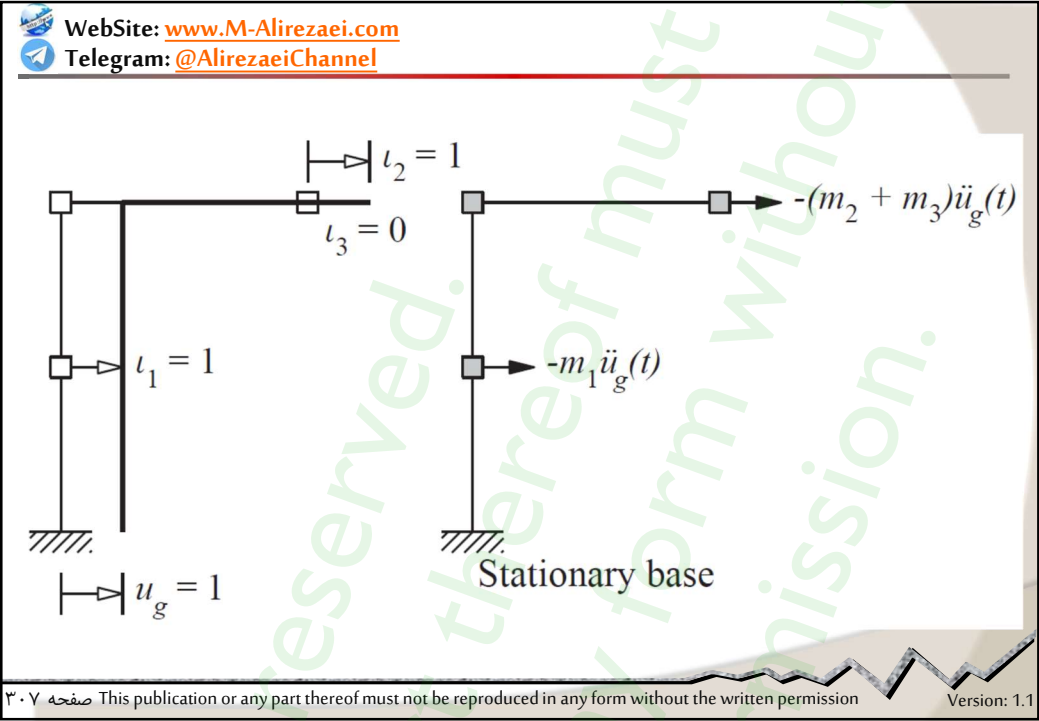
حال سیستم زیر را در نظر بگیرید که تمام درجات آزادی آن در امتداد حرکت زمین نیستند. بنابراین نیروی موثر زلزله برای سازه زیر، برابر خواهد بود با:

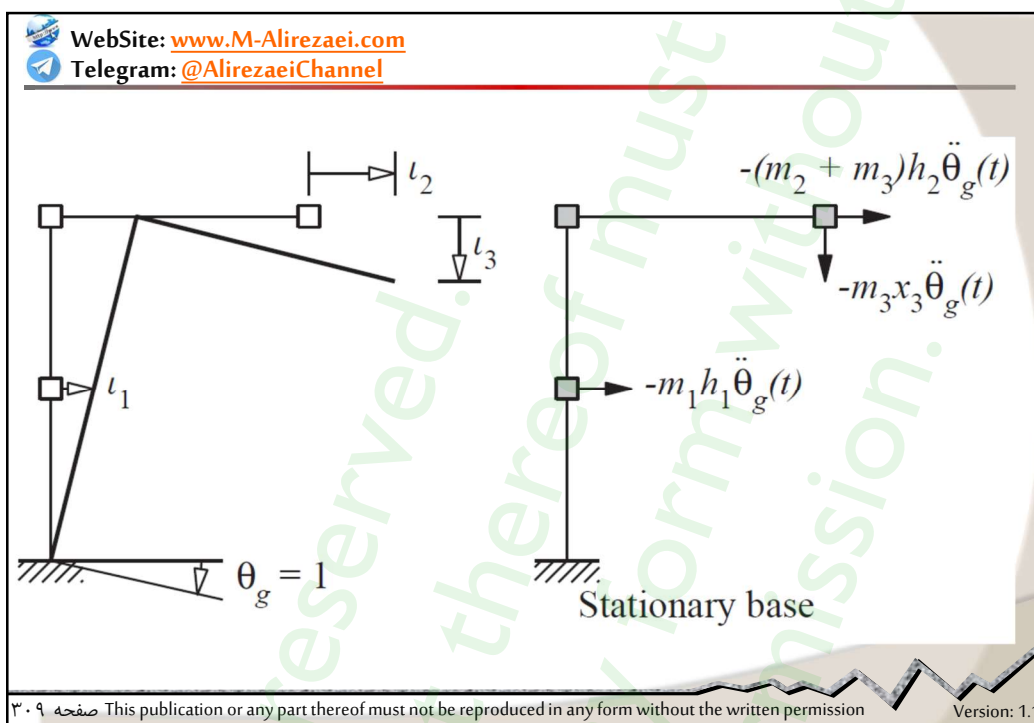


$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) = -\ddot{u}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 + m_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

صفحه ۳۰۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ماتریس سختی سازه به صورت زیر در می‌آید:

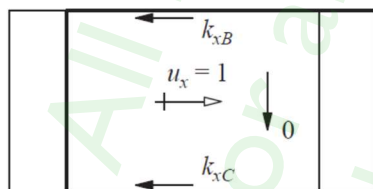
$$\begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{f_s\} = [K]\{u\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & \left(\frac{d}{2}\right)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & ek_y \\ \left(\frac{d}{2}\right)(k_{xC} - k_{xB}) & ek_y & e^2 k_y \left(\frac{d^2}{4}\right)(k_{xB} + k_{xC}) \end{bmatrix}$$

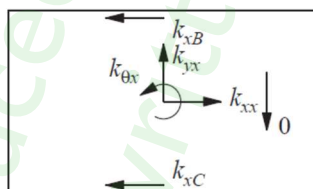
مرکز سختی، نقطه‌ای در پلان است که می‌توان مجموع کل سختی قابها را در آن نقطه متمرکز فرض نمود.

صفحه ۳۱۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

e



e

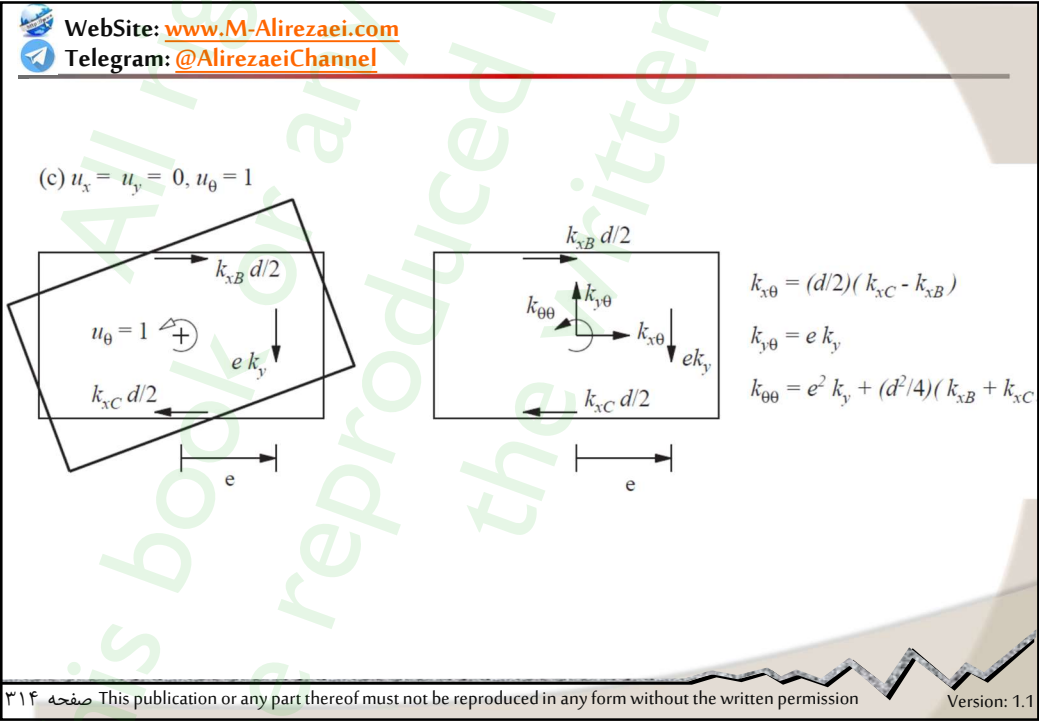
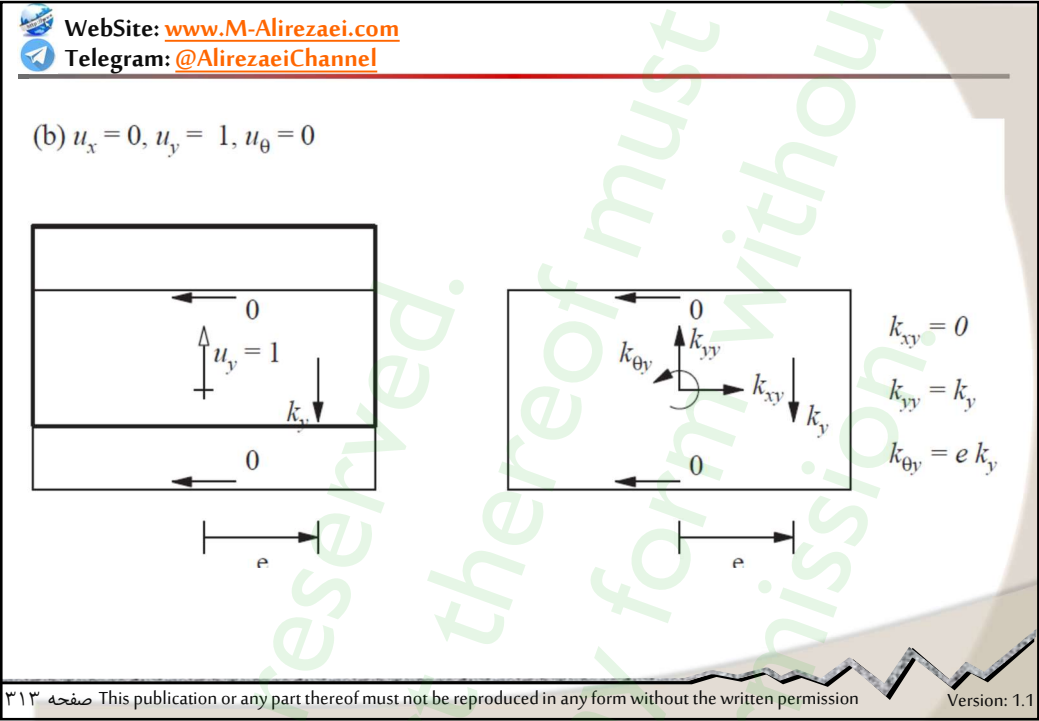
$$k_{xx} = k_{xB} + k_{xC}$$

$$k_{yx} = 0$$

$$k_{\theta x} = \left(\frac{d}{2}\right)(k_{xC} - k_{xB})$$

صفحه ۳۱۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

نیروهای اینرسی برای حرکت در راستای x ، حرکت در راستای y و دوران حول محور قائم (z) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$f_{Ix} = m\ddot{u}_x^t \quad ; \quad f_{Iy} = m\ddot{u}_y^t \quad ; \quad f_{I\theta} = I_0\ddot{u}_\theta^t$$

در روابط فوق، $\ddot{u}_x^t, \ddot{u}_y^t, \ddot{u}_\theta^t$ به ترتیب شتاب‌های کل در راستای x, y و حول محور قائم (شتاب دورانی) هستند. همچنین m جرم سازه و I_0 ممان اینرسی جرمی سازه حول محور عمود بر مرکز جرم سازه است. برای پلان مستطیلی با جرم یکنواخت m و ابعاد b, d و I_0 برابر است با:

$$I_0 = m(b^2 + d^2)/12$$

روابط فوق را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۳۱۵

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\begin{Bmatrix} f_{Ix} \\ f_{Iy} \\ f_{I\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad [f_I] = [M]\{\ddot{u}^t\}$$

معادله‌ی حرکت: با داشتن نیروهای سختی و اینرسی از روابط فوق و جایگذاری بدون در نظر گرفتن میرایی و بدون نیروهای خارجی، معادله‌ی حرکت عبارت است از:

$$[M]\{\ddot{u}^t\} + [K]\{u\} = 0$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان ساده‌تر نوشت. ابتدا شتاب کل را به صورت مجموع شتاب نسبی و شتاب زمین می‌نویسیم:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission صفحه ۳۱۶

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^t \\ \ddot{u}_y^t \\ \ddot{u}_\theta^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \\ \ddot{u}_{g\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{\ddot{u}^t\} = \{\ddot{u}\} + \{\ddot{u}_g\}$$

کمیت‌های رابطه‌ی فوق به شرح زیر است:

- $\ddot{u}_x$: شتاب نسبی سازه در راستای x
- $\ddot{u}_y$: شتاب نسبی سازه در راستای y
- $\ddot{u}_\theta$: شتاب نسبی دورانی سازه حول محور قائم
- $\ddot{u}_{gx}$: شتاب زمینی در راستای x
- $\ddot{u}_{gy}$: شتاب زمین در راستای y
- $\ddot{u}_{g\theta}$: شتاب دورانی زمین حول محور قائم.

صفحه ۳۱۷ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

با جانشانی:

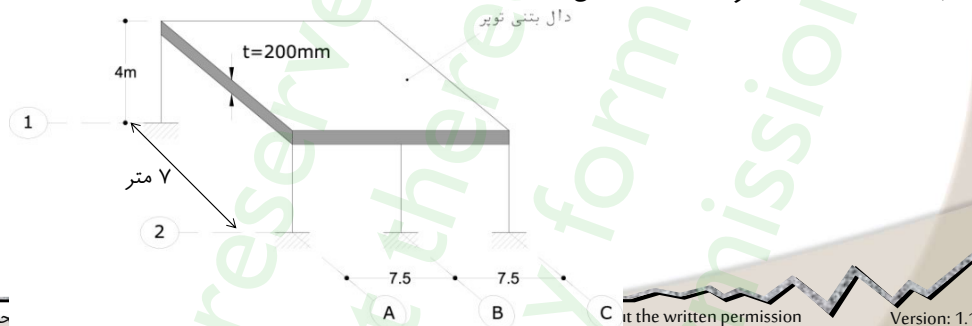
$$\begin{Bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_o \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{xB} + k_{xC} & 0 & \left(\frac{d}{2}\right)(k_{xC} - k_{xB}) \\ 0 & k_y & ek_y \\ \left(\frac{d}{2}\right)(k_{xC} - k_{xB}) & ek_y & e^2k_y \left(\frac{d^2}{4}\right)(k_{xB} + k_{xC}) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m\ddot{u}_{gx}(t) \\ m\ddot{u}_{gy}(t) \\ I_o\ddot{u}_{g\theta}(t) \end{Bmatrix}$$

صفحه ۳۱۸ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) قاب بتنی سه‌بعدی و یک‌طبقه به ارتفاع ۴ متر در شکل زیر را در نظر بگیرید. سقف سازه را صلب فرض نمایید. در راستای x ، سازه از دو قاب کاملاً متقارن با سه‌ستون و در راستای y نیز از دو قاب کاملاً متقارن با دو ستون در هر قاب تشکیل گردیده است. اگر ابعاد ستون‌ها $400\text{mm} \times 400\text{mm}$ باشد، مدول الاستیسیته‌ی بتن $2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ، وزن مخصوص بتن 2500 kg/m^3 و وزن سقف 40 ton باشد، معادلات حرکت را تشکیل دهید.



چه ۳۱۹

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

تعیین جرم کل سازه و ممان اینرسی دورانی جرمی:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{40000}{981} = 40.7 \text{ kg} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}$$

$$I_o = m \frac{b^2 + d^2}{12} = 15262500 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}$$

تعیین سختی قاب:

$$K_{x1} = K_{x2} = \frac{3(12EI)}{h^3} = \frac{36 \times 2 \times 10^5 (40 \times 0.4^3 / 12)}{4^3} = 24000 \text{ kg/cm}$$

$$K_{yA} = K_{yB} = K_{yC} = \frac{2(12EI)}{h^3} = \frac{24EI}{h^3} = \frac{24 \times 2 \times 10^5 \times (40 \times 40^3 / 12)}{400^3} = 16000 \text{ kg/cm}$$

صفحه ۳۲۰ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

تعیین مرکز سختی:

اگر x_i و K_{y1} به ترتیب فاصله‌ی قاب i ام در جهت y از یک مبدأ دلخواه و سختی قاب i ام در جهت y باشد، مختصات مرکز سختی به ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

$$x_R = \frac{\sum x_i K_{yi}}{\sum K_{yi}}$$

در نتیجه با انتخاب محور سمت چپ به عنوان مبدأ:

$$x_R = \frac{0(16000) + 7.5(16000) + 15(16000)}{3 \times 16000} = 7.5^m$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

به همین منوال، اگر y_i و K_{xi} به ترتیب فاصله‌ی قاب i ام در جهت x از یک مبدأ و سختی قاب i ام در جهت x باشد، مختصات مرکز سختی به ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

تعیین مرکز سختی:

$$y_R = \frac{\sum y_i K_{xi}}{\sum K_{xi}}$$

با انتخاب محور پایین به عنوان مبدأ داریم:

$$y_R = \frac{0(24000) + 7(24000)}{2 \times 24000} = 3.5^m$$

بدون محاسبه نیز با توجه به تقارن کامل پلان از لحاظ سختی، مختصات مرکز سختی در وسط پلان تعیین می‌گردد. حال با توجه به آن که جرم و هندسه‌ی پلان سازه کاملاً یکنواخت است، مرکز جرم سازه در مرکز پلان قرار می‌گیرد.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

ماتریس‌های جرم و سختی سازه

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.7 & 0 & 0 \\ 0 & 40.7 & 0 \\ 0 & 0 & 15262500 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی نیز به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[K] = \begin{bmatrix} \Sigma K_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma K_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma K_{xi} \cdot e_{yi}^2 + \Sigma K_{yi} e_{xi}^2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 48000 & 0 & 0 \\ 0 & 32000 & 0 \\ 0 & 0 & \{(24000 \times 350^2) + (24000 \times (-350)^2)\} + \{(16000 \times (-750)^2) + (16000 \times 0^2) + (16000 \times 750^2)\} \end{bmatrix}$$

صفحه ۳۲۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

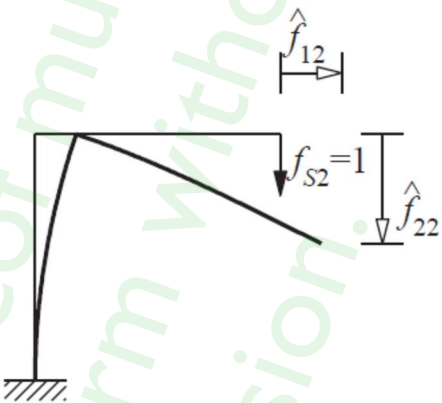
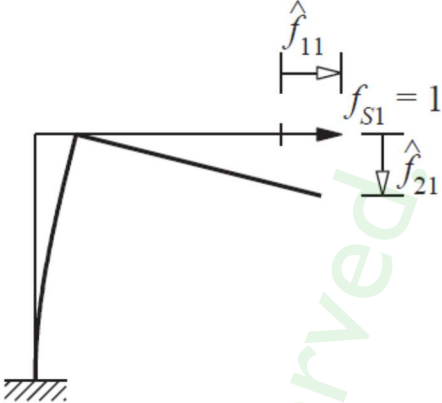
WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) برای شکل نشان داده شده، معادله حرکت ارتعاش آزاد سیستم نامیرای زیر را تعیین نمایید.

صفحه ۳۲۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

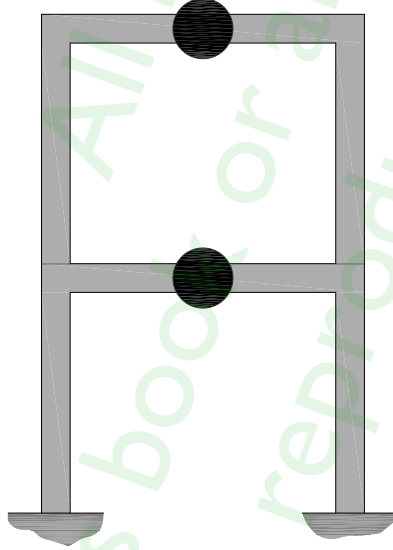


$$\begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

صفحه ۳۲۵ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1



WebSite: www.M-Alirezaei.com
Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)



فصل نهم

ارتعاش آزاد

سیستم چند درجه آزاد

صفحه ۳۲۶ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

برخی از سوالات مرتبط با این فصل...

- نحوه تعیین مودهای ارتعاش
- تعیین شکل مودی
- تعیین دوره تناوب هر مود نوسانی سازه



This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

معادله‌ی ارتعاش آزاد سیستم‌های نامیرا

برای بررسی مسأله‌ی ارتعاش آزاد سیستم‌های چنددرجه آزاد نامیرا، لازم است در معادله‌ی اصلی ارتعاش سیستم چند درجه آزاد $\{P(t)\} = \{0\}$ قرار داده شود و ماتریس میرایی $[C]$ از معادله حذف شود؛ یعنی:

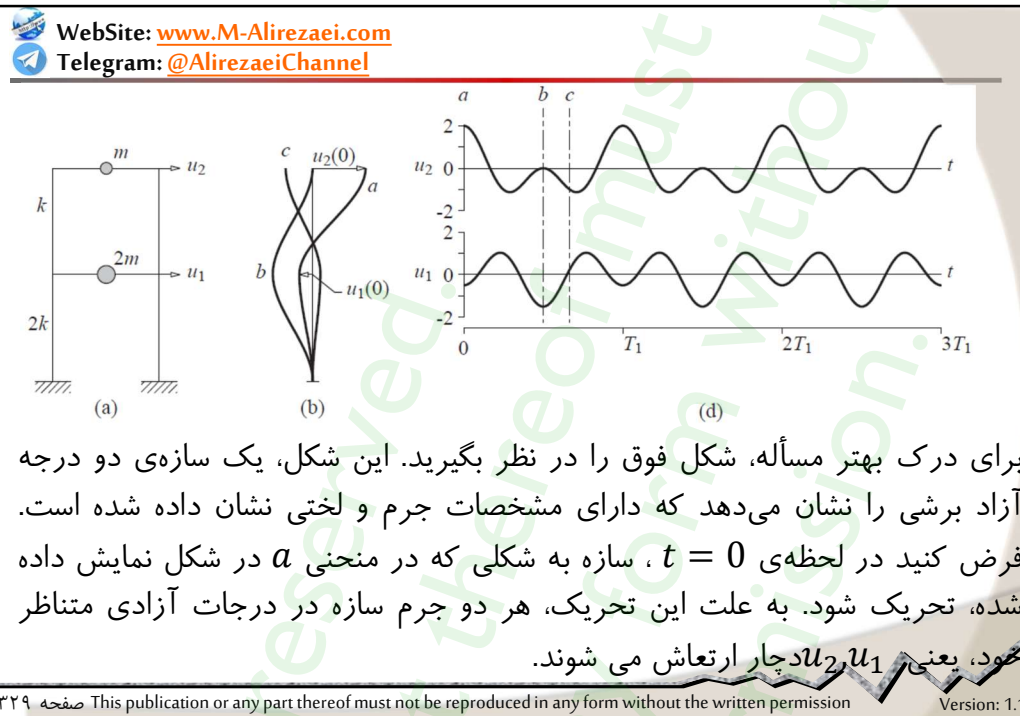
$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\}$$

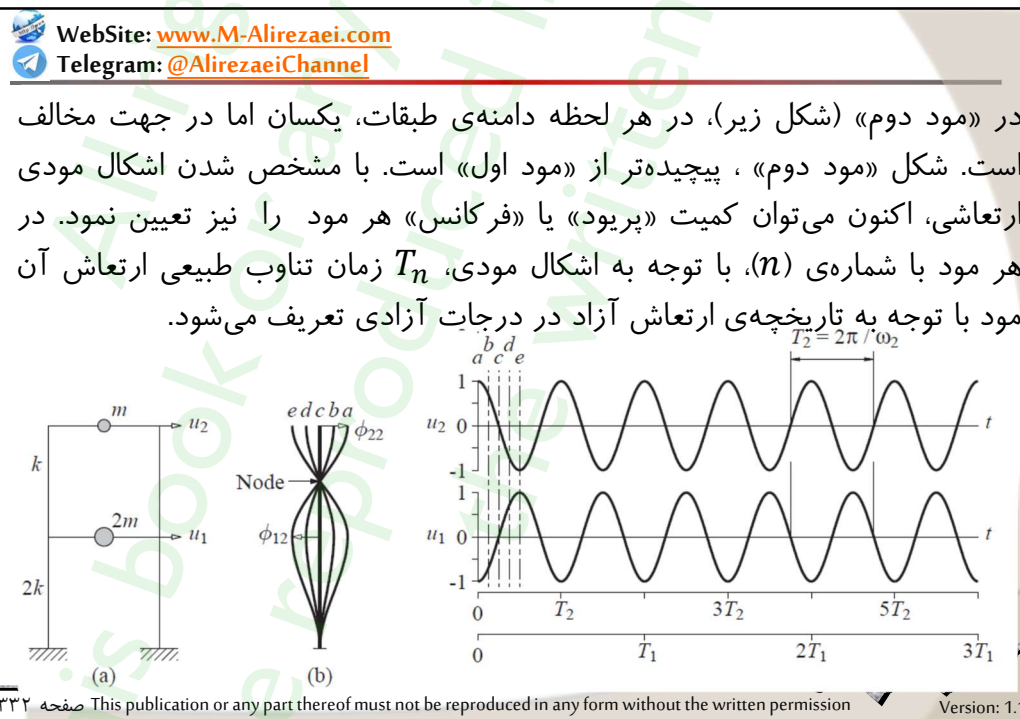
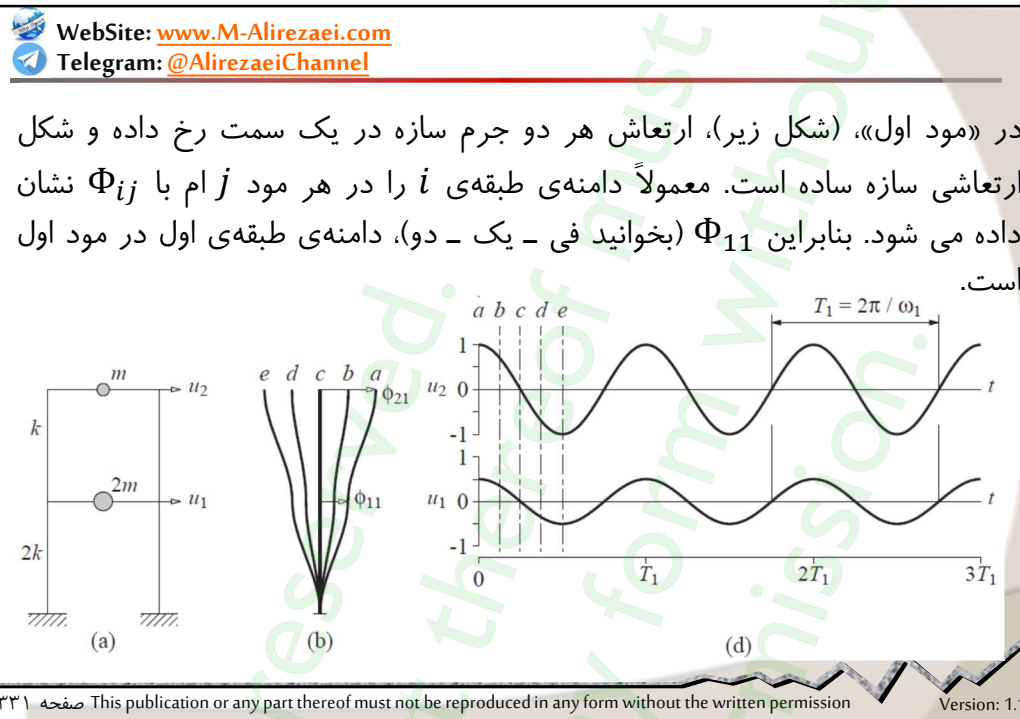
معادله‌ی فوق، در واقع معرف N معادله‌ی دیفرانسیل همگن است که از طریق ماتریس‌های $[M]$ ، $[K]$ یا هر دو به هم وابسته‌اند. N تعداد درجات آزادی سازه است. برای حل این معادله، شرایط اولیه‌ی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\{u(t)\} = \{u(0)\} \quad , \quad \{\dot{u}(t)\} = \{\dot{u}(0)\}$$

در معادله‌های بالا، $\{u(0)\}$ ، $\{\dot{u}(0)\}$ به ترتیب بردار جابجایی اولیه و بردار سرعت اولیه در درجات آزادی سازه در لحظه‌ی $t = 0$ است.

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission
 Version: 1.1





WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

* همچنین می‌توان فرکانس طبیعی زاویه‌ای هر مود را به صورت $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ تعریف نمود. با بالا رفتن شماره‌ی مود، فرکانس آن نیز افزایش و زمان تناوب آن کاهش می‌یابد. یعنی برای سازه‌ی دو درجه آزاد فوق، $\omega_1 < \omega_2$ و $T_1 > T_2$ خواهد بود.

* اشکال مودی و فرکانس‌های متناظر آن‌ها (یا زمان‌های تناوب متناظر)، جزو مشخصات بسیار مهم هر سازه‌ی چنددرجه آزاد است که در تعیین پاسخ آن‌ها تحت اثر شرایط ارتعاش اجباری، از جمله تحریک پایه‌ی زلزله، نقش بسیار اساسی ایفا می‌کند. اشکال مودی و فرکانس‌های آن‌ها با روش‌های ریاضی قابل محاسبه است. در ادامه روش محاسبه شرح داده می‌شود.

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

فرکانس‌های ارتعاش طبیعی و اشکال مودی

مسأله‌ی محاسبه‌ی فرکانس‌های ارتعاش طبیعی و اشکال مودی، از نظر ریاضی، یک «مسأله‌ی مقدار ویژه» است. پاسخ ارتعاش آزاد $\{u(t)\}$ را می‌توان به لحاظ ریاضی به فرم زیر نوشت:

$$\{u(t)\} = q_n(t)\Phi_n$$

در حاصلضرب فوق، Φ_n بردار شکل تغییر یافته سازه است که مستقل از زمان است. Φ_n در واقع همان بردار اشکال مودی درمود $\bar{n}$ - ام ارتعاش است که هدف محاسبه آن است. تغییرات زمانی پاسخ اصلی یعنی $\{u(t)\}$ در $q_n(t)$ قرار دارد. به طور دلخواه $q_n(t)$ را تابع هارمونیک ساده در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

که ω_n فرکانس طبیعی ارتعاش سازه در مود n ام است و ضرایب B_n, A_n باید محاسبه شوند. با نوشتن دو رابطه‌ی فوق بر حسب هم داریم:

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\{u(t)\} = \Phi_n(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

با جاگذاری معادله‌ی اخیر در معادله‌ی ارتعاش آزاد سیستم چند درجه آزاد نیز داریم:

$$[M](-\omega_n^2(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)\Phi_n) + [K](\Phi_n(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)) = \{0\}$$

$$\Rightarrow (-\omega_n^2[M]\Phi_n + [K]\Phi_n)q_n(t) = \{0\}$$

معادله‌ی فوق در دو حالت ارضا می‌شود. در یک حالت $q_n(t) = 0$ ، که برای مسأله‌ی ما جواب مناسبی نیست؛ زیرا اگر $q_n(t) = 0$ باشد، جابجایی درجات آزادی سازه برابر صفر به دست می‌آید؛ یعنی، سازه بدون حرکت است. در حالت دوم، عبارت داخل پرانتز باید برابر با صفر باشد؛ یعنی:

$$([K] - \omega_n^2[M])\Phi_n = \{0\}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

رابطه‌ی اخیر درحقیقت یک دستگاه معادلات همگن جبری شامل N معادله است. N تعداد درجات آزادی. این معادله در شرایطی دارای جواب غیربدیهی است که دترمینان ضرایب معادله صفر باشد؛ یعنی:

$$|[K] - \omega_n^2[M]| = 0$$

در دستگاه معادله‌ی $[A][X] = [b]$ اگر $b = 0$ باشد، دستگاه همگن خوانده می‌شود. در این حالت $[X] = [0]$ یک جواب بدیهی آن است. در جبر خطی ثابت می‌شود که دستگاه فقط در شرایطی جواب غیربدیهی دارد که $|A| = 0$ گردد.

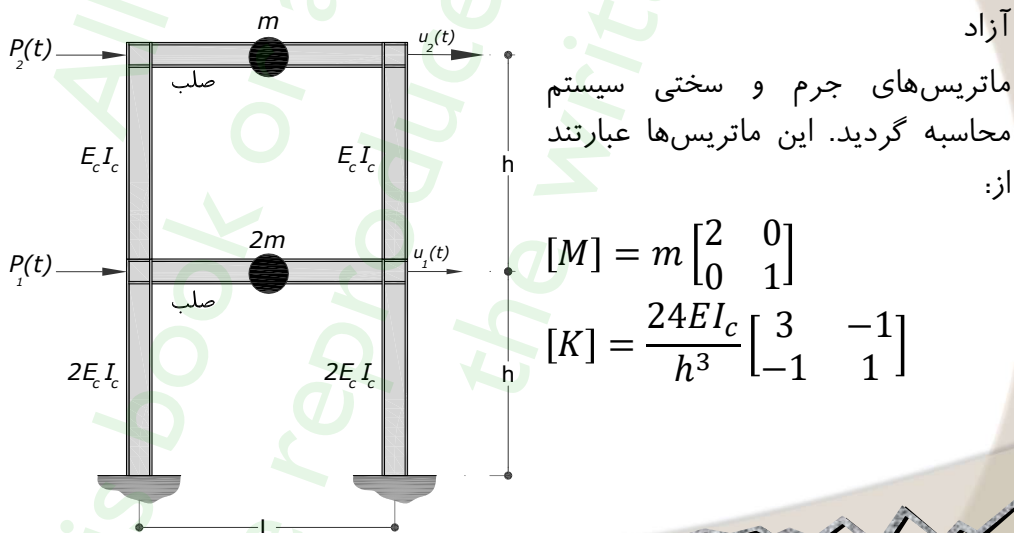
Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

همانطور که در مثال‌ها دیده خواهد شد، نتیجه‌ی بسط رابطه‌ی اخیر یک چندجمله‌ای از درجه‌ی N بر حسب ω_n^2 است. حل این معادله‌ی چندجمله‌ای - که معادله‌ی مشخصه یا معادله‌ی فرکانس هم نامیده می‌شود، N ریشه‌ی مثبت و حقیقی از ω_n^2 را به دست می‌دهد؛ زیرا ماتریس‌های جرم و سختی $[M]$ و $[K]$ متقارن و مثبت‌اند. N ریشه معادله فوق، N فرکانس طبیعی سازه است. این ریشه‌ها را، **مقادیر ویژه** یا **مقادیر مشخصه** هم می‌نامند. با تعیین مقادیر فرکانس‌های طبیعی ω_n ، می‌توان با جایگذاری آن‌ها Φ_n یا شکل مودی مربوط به هر مود را به دست آورد. Φ_n یک بردار $N \times 1$ است. Φ_n را «**بردارهای ویژه**» یا «**بردارهای مشخصه**» نیز می‌نامند.

توجه شود که فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی ارتعاش سازه، جزو مشخصات ذاتی سازه بوده که فقط وابسته به جرم و سختی سازه است. در واقع این مشخصات وابسته به نوع یا مقدار بارهای وارد بر سازه نبوده و فقط در حالت ارتعاش آزاد رخ می‌دهد.

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی سازه‌ی دو درجه آزاد



WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

حال با جاگذاری ماتریس‌های فوق در معادله داریم:

$$|[K] - \omega_n^2[M]| = 0 \Rightarrow \left| \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega_n^2(m) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

فرض کنیم $\lambda = \frac{\omega_n^2 m}{\frac{24EI_c}{h^3}}$ تعریف شود. در این صورت داریم:

$$\left| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-2\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

حال دترمینان را بسط می‌دهیم تا معادله‌ی چندجمله‌ای به دست آید:

$$(3-2\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

این معادله بر حسب λ از درجه‌ی دوم و بر حسب ω_n از مرتبه‌ی چهارم است. (اگر به جای λ در معادله‌ی اخیر از $\lambda = \frac{\omega_n^2 m}{\frac{24EI_c}{h^3}}$ استفاده شود). این معادله دو ریشه‌ی مثبت و حقیقی λ خواهد داشت. اگر معادله را بر حسب ω_n^2 حل کنیم، چهار ریشه خواهد داشت که فقط دو ریشه‌ی مثبت و حقیقی دارد. حل معادله بر حسب λ دو ریشه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = 2$$

حال می‌توان دو فرکانس طبیعی مجهول را محاسبه نمود:

$$\omega_1^2 = \left(\frac{24EI_c}{h^3} \right) \frac{\lambda_1}{m} = \frac{24EI_c}{mh^3} (0.5) = \frac{12EI_c}{mh^3} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{12EI_c}{mh^3}}$$

Version: 1.1 This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

دقت شود که λ ها باید به ترتیبی جاگذاری شود که $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ شود.
با محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی مجهول و جاگذاری اشکال مودی نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

مود اول:

Mode # 1

$$\omega_1^2 = \frac{12EI_c}{mh^3}$$

$$([K] - \omega_1^2[M])\Phi_1 = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{12EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Phi_1 = \{0\}$$

صفحه ۳۴۱ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$\Rightarrow \left(2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Phi_1 = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\Phi_{11} - 2\Phi_{21} = 0 \\ -2\Phi_{11} + \Phi_{21} = 0 \end{cases}$$

در دستگاه فوق، دو معادله وابسته دیده می‌شود. یعنی ظاهراً دو معادله با دو مجهول وجود دارد؛ اما در حقیقت یک معادله و دو مجهول است. چنین پدیده‌ای، خاصیت «مسائل مقدار ویژه» در ریاضیات است. در چنین شرایطی باید یکی از مجهولات را فرض نمود و دیگری را بر حسب آن به دست آورد.

صفحه ۳۴۲ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

در این مثال $\Phi_{11} = 1$ فرض کرده و در نتیجه:

$$\Phi_{11} = 1 \quad \Phi_{21} = \frac{1}{2}$$

به دست می‌آید. اعداد ۱ و ۱/۵ بدون واحد بوده و فقط نسبت آن‌ها اهمیت دارد. بنابراین:

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix} \right\}$$

مود دوم:

Mode # 2

صفحه ۳۴۳ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://t.me/AlirezaeiChannel)

$$\omega_2^2 = \frac{48EI_c}{mh^3} \Rightarrow ([K] - \omega_2^2[M])\Phi_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24EI_c}{mh^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{48EI_c}{mh^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Phi_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Phi_2 = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \\ -\Phi_{21} - \Phi_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi_{21} + \Phi_{22} = 0$$

مشابه مود اول فرض می‌کنیم $\Phi_{22} = 1$. در نتیجه از رابطه‌ی بالا $\Phi_{21} = -1$ به دست می‌آید. لذا:

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$$

صفحه ۳۴۴ This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی سازه‌ی سازه‌ی بتنی نشان داده شده در شکل زیر. کف طبقات صلب هستند. کلیه‌ی ستون‌ها 400mm $\times$ 400mm ، ارتفاع طبقات ۴ متر و طول دهانه‌ها ۳/۳۳ متر است. $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

۳۴۵ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.com
 Telegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

ابتدا ماتریس جرم به صورت متمرکز تشکیل می‌شود:

$$m_1 = \frac{W_1}{g} = \frac{10000}{981} = 10.2 \text{ kg.s}^2/\text{cm}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{g} = \frac{20000}{981} = 20.4 \text{ kg.s}^2/\text{cm}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.2 & 0 \\ 0 & 20.4 \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس سختی، ابتدا سختی طبقات ۱ و ۲ به ترتیب محاسبه می‌شوند.

$$I_c = \frac{40(40)^3}{12} = 213 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$k_1 = \underbrace{2 \left(\frac{3EI_c}{h^3} \right)}_{\text{ستون با پای مفصلی}} + 2 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = 20000 \text{ kg/cm}$$

۳۴۶ صفحه This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

$$k_2 = 4 \left(\frac{12EI_c}{h^3} \right) = \frac{48EI_c}{h^3} = 32000 \text{ kg/cm}$$

لذا ماتریس برابر است با:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52000 & -32000 \\ -32000 & 32000 \end{bmatrix} (kg/cm)$$

با جاگذاری ماتریس‌های فوق در معادله‌ی مشخصه داریم:

$$|[K] - \omega_n^2[M]| = 0$$

$$\omega_1^2 = 22.53 \frac{rad}{sec} \Rightarrow T_1 = 0.28 \text{ sec}$$

$$\omega_2^2 = 79.26 \frac{rad}{sec} \Rightarrow T_1 = 0.079 \text{ sec}$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

WebSite: www.M-Alirezaei.comTelegram: [@AlirezaeiChannel](https://www.t.me/AlirezaeiChannel)

مود اول:

Mode#1

$$\omega_1^2 = 507.8$$

$$([K] - \omega_1^2[M])\Phi_1 = \{0\} \Rightarrow \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.682 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

مود دوم:

Mode#2

$$\omega_2^2 = 6282.15$$

This publication or any part thereof must not be reproduced in any form without the written permission

Version: 1.1

