

استاتیک و مقاومت

• مدرس: سید محمد علی ابطحی

- Gmail: mohamadabtahi2005@gmail.com
- Telegram: @mohammadabtahi
- Channel: telegram.me/BiomedicalEng_abtahi
- Instagram: abtahi.biorobnews

1

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar, M.Sc.



- 1 مفاهیم پایه
- 2 استاتیک ذره ها
- 3 اجسام صلب؛ سیستم نیروهای معادل
- 4 تعادل اجسام صلب
- 5 نیروهای گسترده؛ مراکز هندسی و مراکز گرانی
- 6 تحلیل سازه ها
- 7 نیروها در تیرها و کابلها
- 8 اصطکاک
- 9 نیروهای گسترده؛ گشتاورهای لختی
- 10 روش کار مجازی

مفاهیم پایه



مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

استاتیک یا ایستایی شاخه‌ای از مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعه دربارهٔ سامانه‌های فیزیکی در حال تعادل ایستا (یا تعادل استاتیکی) می‌پردازد. تعادل ایستا حالتی است که در آن، مکان نسبی زیرسامانه‌ها نسبت به یکدیگر تغییر نکند یا آن‌که اجزا و سازه‌ها در اثر اعمال نیروهای خارجی، در حال ایستا و سکون باقی بمانند. در حالت تعادل ایستا، سامانه مورد نظر یا در حال سکون است یا مرکز جرم (گرانیگاه) آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

با استفاده از قانون دوم نیوتون به این نتیجه می‌رسیم که در یک سامانه در حال تعادل ایستا، نیروی خالص و نیز گشتاور خالص وارد بر هر یک از جرم‌های درون سامانه برابر با صفر است، و این بدان معناست که در ازای هر نیرویی که بر یک جزء یا مؤلفه از سامانه وارد می‌شود، نیرویی به همان اندازه ولی در جهت مخالف به آن جزء اعمال می‌گردد. این‌که نیروی خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به عنوان شرط اول تعادل شناخته می‌شود. این شرط که گشتاور خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به شرط دوم تعادل موسوم است.

ایستایی‌شناسی از جمله مباحثی است که در تجزیه و تحلیل سازه‌ها، مثلاً در مهندسی سازه یا معماری، و نیز به هنگام مطالعات سیالات در حالت سکون مثل پایداری سدها تحت فشارهای عظیم هیدرو استاتیکی آب کاربرد بسیار دارد. مقاومت مصالح (مکانیک ماده‌ها) شاخه‌ای مرتبط از علم مکانیک است که مبحث تعادل ایستا در آن بسیار به کار می‌رود. استاتیک پایه‌ای‌ترین و اصلی‌ترین درس در رشته مهندسی مکانیک و عمران محسوب می‌شود.

- شاخه ای از علم فیزیک که شرایط اجسام ساکن یا در حال حرکت را تحت اثر نیروها بررسی و پیش بینی می کند.

- طبقه بندی علم مکانیک :

- (۱) اجسام صلب

- I. استاتیک

- II. دینامیک

- (۲) اجسام تغییر شکل پذیر

- (۳) سیالات

- مکانیک یک علم کاربردی است و در هسته مرکزی بیشتر تحلیل های مهندسی جای دارد.

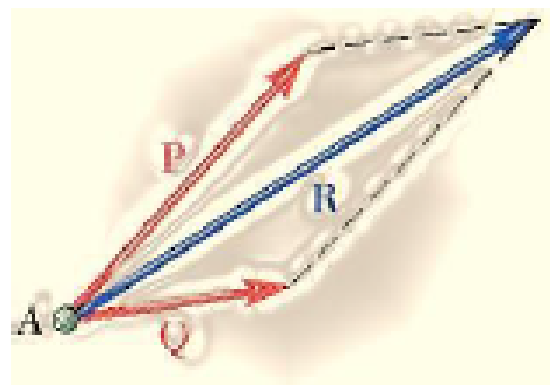
- مکانیک پایه ی بسیاری از علوم مهندسی است و در حقیقت هیچ علمی در مهندسی مهمتر از مکانیک نیست.

مکانیک برداری برای مهندسان : استاتیک

مفاهیم اساسی

- “*Space*” فضا مکان هندسی نقاطی است که در آن میدانی سه بعدی برای نقاط بکاربرده می شود.
- “*Time*” زمان مشخصه ای که وقوع جسم را اطلاع میدهد. (شاخص توالی رویدادها)
- “*Mass*” جرم خاصیتی از هر جسم است که بصورت مقدار جاذبه گرانشی ظاهر می شود.
- “*Force*” عمل یک جسم روی جسم دیگر را نشان می دهد یک نیرو مشخصه ایست که با نقطه اثر، بزرگی و جهت تعیین می شود. (کمیت برداری)

در مکانیک نیوتنی مفاهیم زمان-جرم - فضا مطلق و مستقل از هم می باشند. اما نیرو مستقل نبوده و به جرم و آهنگ تغییر سرعت در زمان (شتاب) وابسته است.



• قانون متوازی الاضلاع

- قانون اول نیوتن: وقتی برابند نیروها روی یک ذره صفر است جسم در حالت سکون یا حرکت ثابت خود خواهد ماند.

(Newton's First Law)

- قانون دوم نیوتن: نیرو متناسب است با جرم و شتاب جسم.

$$F = ma$$

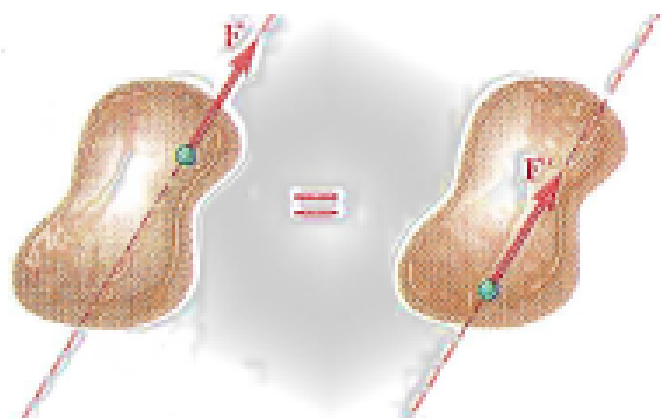
(Newton's Second Law)

- قانون سوم نیوتن: برای هر عملی عکس العملی وجود دارد برابر ولی با جهت مخالف.

(Newton's Third Law)

- قانون گرانش نیوتن: دو ذره در راستای خط واصل خود با نیرویی به سمت یکدیگر جذب می شوند که با حاصلضرب جرمشان نسبت مستقیم و با فاصله شان نسبت عکس دارد.

(Newton's Law of Gravitation)



• اصل قابلیت انتقال

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad W = mg, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

International System of Units (SI): •
سیستم بین المللی واحدها

واحدهای اصلی، طول - زمان - جرم هستند برای
سنجش این خاصیتها از لحاظ کمی: متر (m) ثانیه (s) و
کیلوگرم (kg) را بکار می بریم.

U.S. Customary Units •

واحدهای مرسوم آمریکایی

واحدهای اصلی، طول - زمان - جرم هستند برای
سنجش این خاصیتها از لحاظ کمی: فوت (ft) ثانیه (s)
و پوند (lb) را بکار می بریم.

• در هر دو سیستم کمیت‌های فرعی بر حسب کمیت‌های
اصلی تعریف می شوند.

نیرو در **SI**: نیوتن N و در **US** با اسلاگ slug
تعیین می شود.

$$1_{ft} = 12_{in} = 0.305_{m}$$

$$1_{lb} = 0.454_{kg}$$

$$F = ma$$

$$1 N = (1 kg) \left(1 \frac{m}{s^2} \right)$$

$$1_{slug} = \frac{1 lb}{1 ft/s^2}$$

مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

فریدیناند پی. بی. ایر

ای. راسل جانسون

ارائه: سید محمد علی ابطحی



فصل 2

استاتیکی ذرات



Vector Mechanics for Engineers: Statics

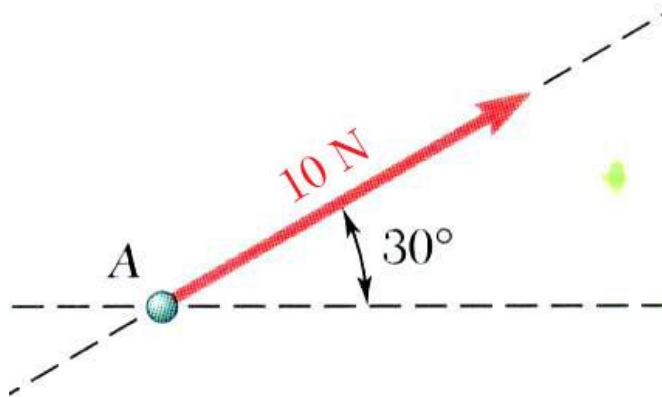
Introduction

- هدف از این فصل، بررسی اثر نیروها بر روی ذرات می باشد
- جایگزین کردن چند نیروی عمل کننده بر روی یک ذره با یک نیروی معادل یا
منتج
- روابط بین نیروهای عمل کننده بر روی یک ذره که در حالت تعادل می
باشند



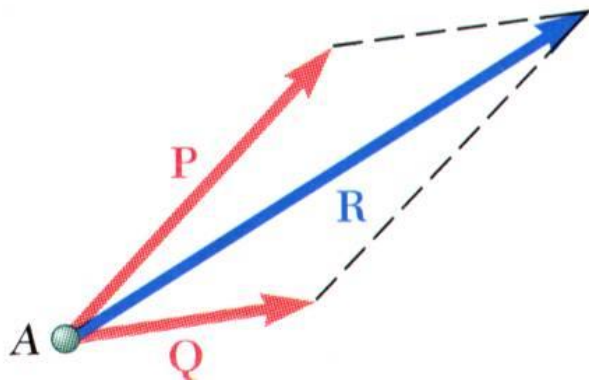
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Resultant of Two Forces



- نیرو: عمل یا کنش یک جسم بر روی جسم دیگر است، نیرو کمیتی است برداری که کنش آن با مقدار، جهت و نقطه اثرش مشخص می شود

- شواهد تجربی نشان می دهد که اثر ترکیبی دو نیرو ممکن است توسط یک نیروی منتج تنها نشان داده شود.



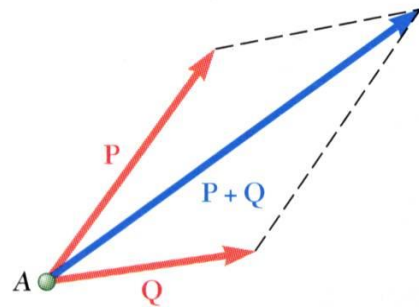
- این نیروی منتج معادل است با قطری که از نقطه A میگذرد

- نیرو کمیتی برداری است



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Vectors

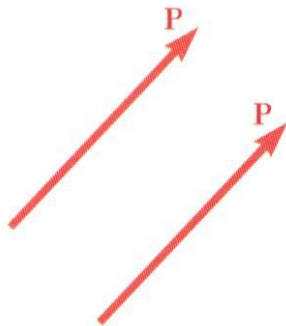


بردار: کمیتی است که دارای اندازه و جهت است.

اسکالر: کمتهایی که فقط دارای مقدار هستند و طبق قوانین جبری باهم جمع و تفریق می شوند. مثلاً: جرم - حجم - دما

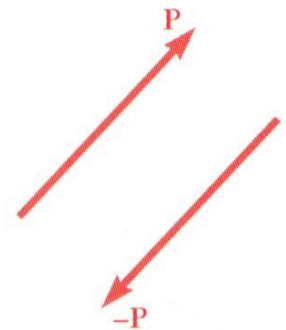
طبقه بندی بردارها:

i. بردارهای ثابت و مقید، که نقطه اثر آن کاملاً معین شده است و فقط یک موقعیت خاص را در فضا اشغال می کنند (مثل اثر نیرو روی جسم غیر صلب).



ii. بردارهای آزاد، که عمل آنها محدود به یک خط منحصر بفرد در فضا نمی باشد (مثل بردارهای میدان جاذبه و مغناطیس).

iii. بردارهای لغزان، که برای عمل آنها یک خط منحصر بفرد وجود دارد و در آن امتداد اثر می کنند (مثل بردار نیروی خارجی روی یک جسم صلب).



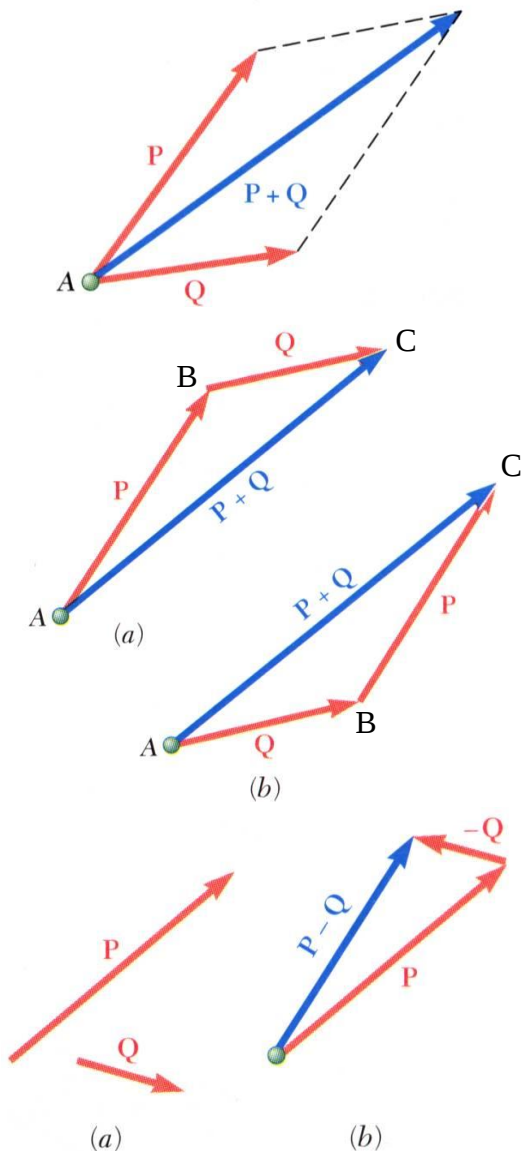
بردارهای برابر، دارای بزرگی و جهت یکسان اند.

بردارهای منفی، دارای بزرگی برابر اما جهت مخالفند.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Addition of Vectors



• قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها

• قانون مثلث برای جمع بردارها

• قانون کسینوسها

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

• قانون سینوسها

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} = \frac{\sin C}{A}$$

• جمع بردارها دارای خاصیت جابجایی است

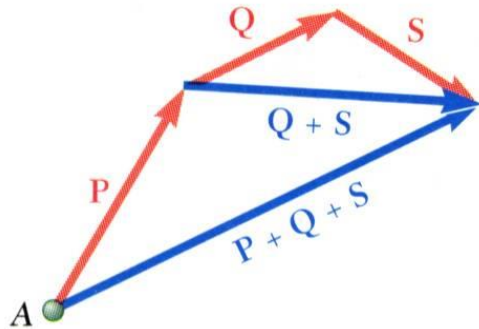
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

• تفریق بردارها

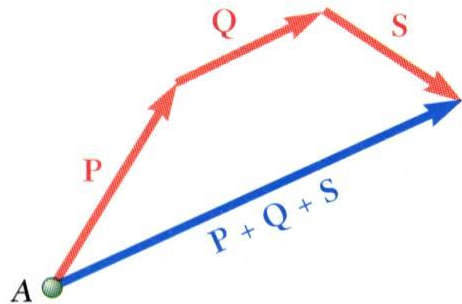
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Addition of Vectors

- جمع سه یا تعداد بیشتری بردار با قاعده مثلثی



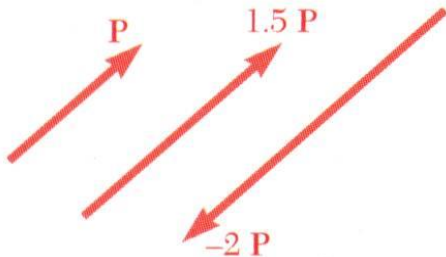
- قاعده چند ضلعی برای جمع سه یا تعداد بیشتری بردار



- جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری می باشند

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S})$$

- ضرب یک عدد در بردار

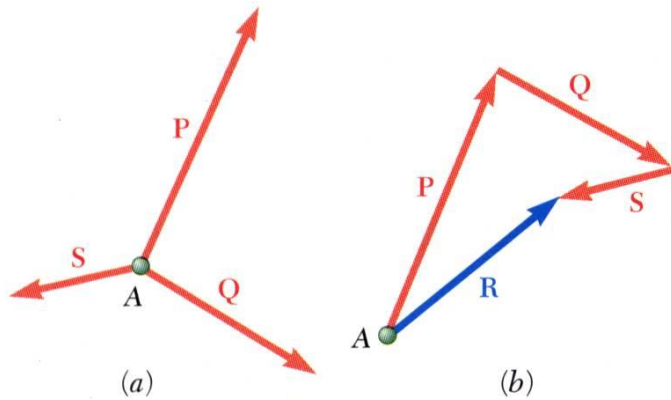


Vector Mechanics for Engineers: Statics

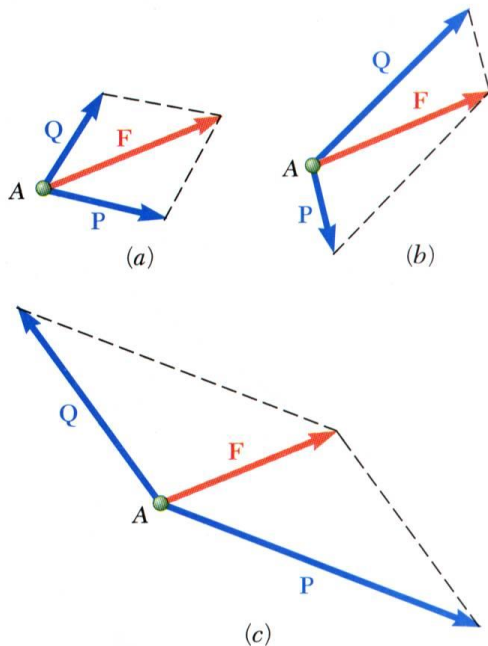
Resultant of Several Concurrent Forces

• نیروهای همرو مجموعه ای از نیروها هستند که در یک نقطه مشترک وارد می شوند.

یک مجموعه نیروی همرو که بر یک ذره اثر می کنند ممکن است با برآیندشان جایگزین شوند.

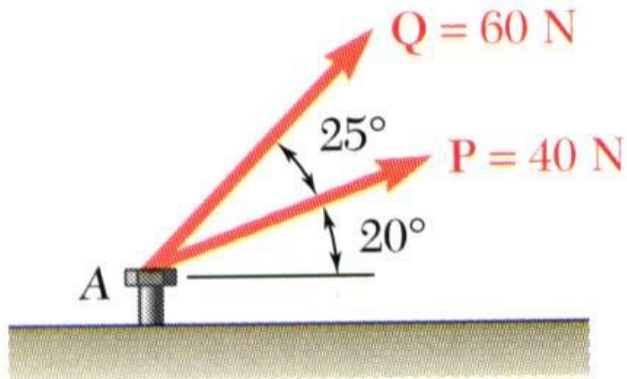


• دو یا تعداد بیشتری بردار نیرو اثری مشابه بردار برآیند نیرو روی ذره دارند.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.1



حل:

- راه حل گرافیکی- متوازی الاضلاعی با ضلع هایی همجهت با جهت P و Q و طول هایی متناسب می سازیم. به طور گرافیکی متوجه می شویم که برآیند در جهت و مقدار با قطر متناسب می باشد

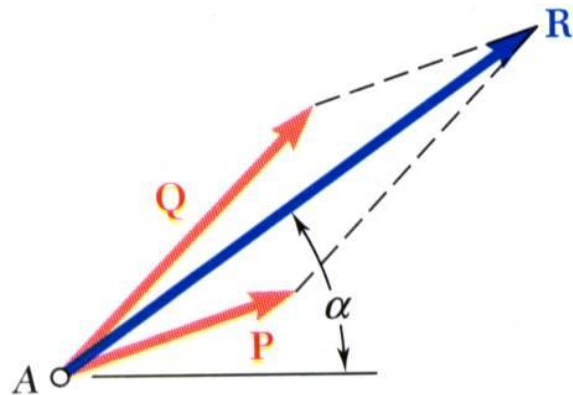
- راه حل مثلثاتی- استفاده از دو قانون کسینوسها و سینوسها

مطلوبست برآیند دو نیروی وارد بر پیچ
A



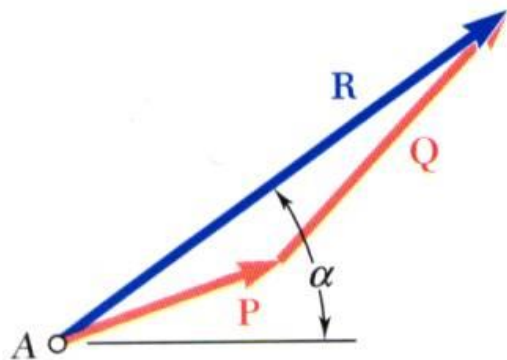
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.1



- راه حل گرافیکی- متوازی الاضلاعی با ضلع هایی همجهت با جهت P و Q و طول هایی متناسب می سازیم. به طور گرافیکی متوجه می شویم که برآیند در جهت و مقدار با قطر متناسب می باشد

• , $\boxed{R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ}$

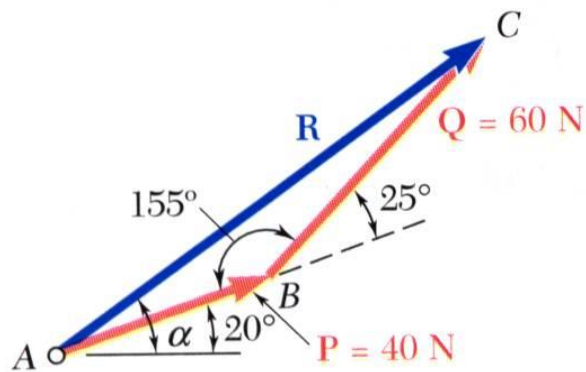


- راه حل گرافیکی: مثلثی که از ابتدای P تا انتهای Q ترسیم شده است

$\boxed{R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ}$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.1



- اعمال قانون كسينوسها

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ &= (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155^\circ \end{aligned}$$

$$R = 97.73\text{N}$$

- اعمال قانون سينوسها

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin B \frac{Q}{R} \\ &= \sin 155^\circ \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}} \end{aligned}$$

$$A = 15.04^\circ$$

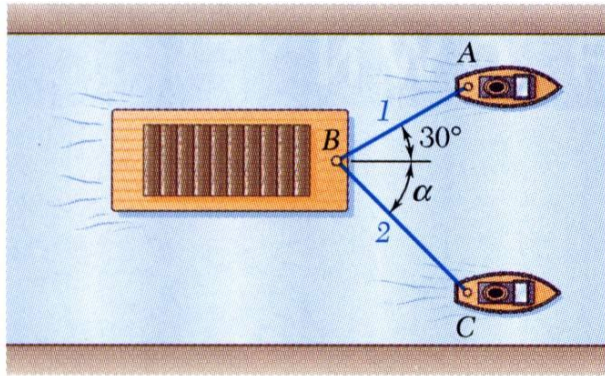
$$\alpha = 20^\circ + A$$

$$\alpha = 35.04^\circ$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.2



SOLUTION:

- راه حل گرافیکی.
- اعمال قانون سینوس ها
- زاویه برای تنش مینیمم در طناب 2 تعیین میشود توسط اعمال قانون مثلثات

مطلوبست نیروی وارد به دو قایق کشنده ی
سکوی 5000 نیوتن وقتی

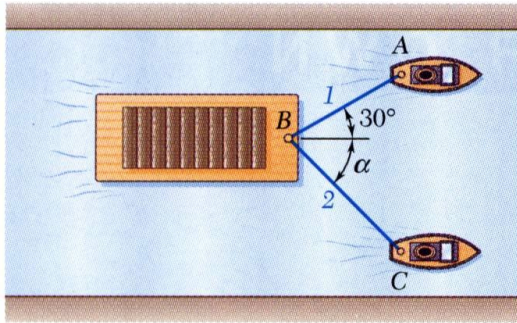
a) $\alpha = 45^\circ$,

(b) مقدار α برای هر کدام از طناب ها
کمترین مقدار خود می باشد

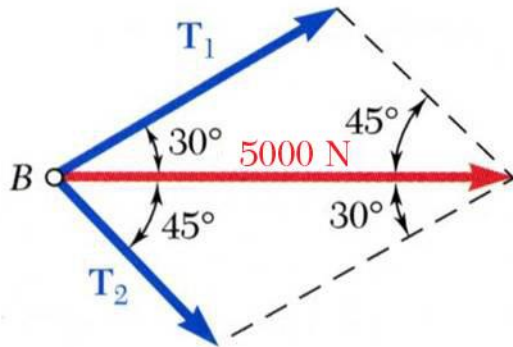


Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.2

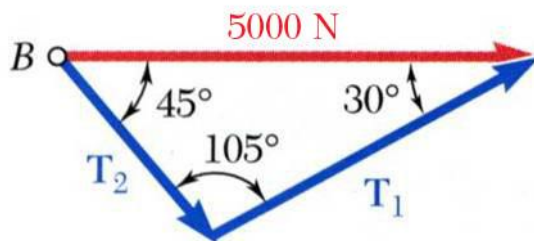


• راه حل گرافیکی.



$$T_1 = 3700 \text{ N} \quad T_2 = 2600 \text{ N}$$

• اعمال قانون سینوس ها

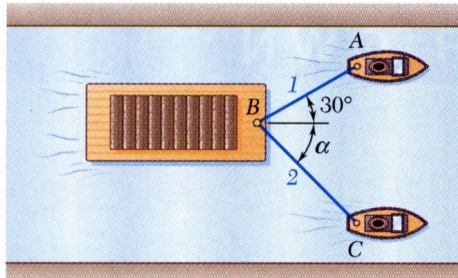


$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000 \text{ N}}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1 = 3660 \text{ N} \quad T_2 = 2590 \text{ N}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.2



- زاویه برای تنش مینیمم در طناب 2 تعیین میشود توسط اعمال قانون مثلثات

- کمترین تنش در طناب 2 زمانی رخ می دهد که T_1 و T_2 بر هم عمودند

$$T_2 = (5000 \text{ N}) \sin 30^\circ$$

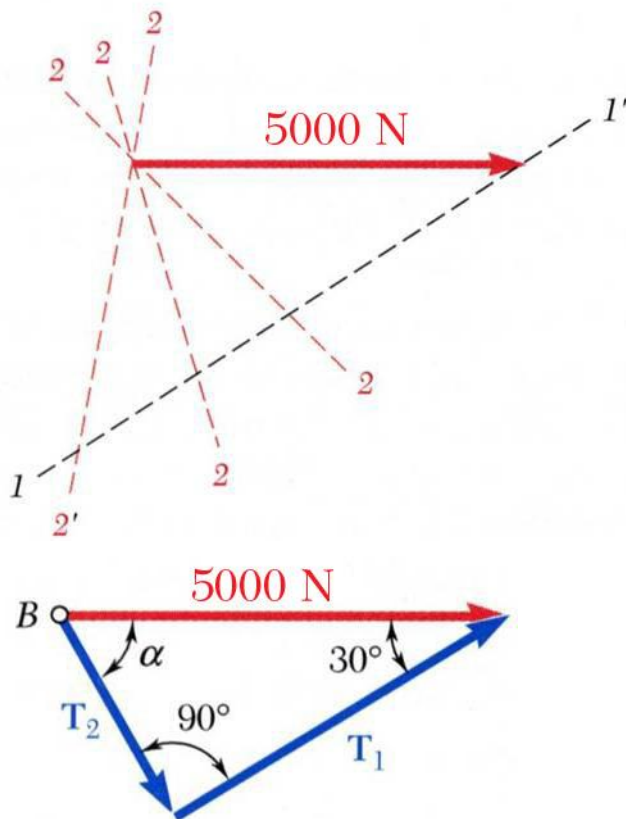
$$T_2 = 2500 \text{ N}$$

$$T_1 = (5000 \text{ N}) \cos 30^\circ$$

$$T_1 = 4330 \text{ N}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Rectangular Components of a Force: Unit Vectors

- عکس عمل جمع بردارها را تجزیه گویند. بردار F به دو مولفه عمود F_x در جهت X ها و F_y در جهت Y ها، تجزیه می شود. هر دو بردار در یک صفحه قرار دارند. (تجزیه دوبعدی)

$$\vec{F}_x \text{ and } \vec{F}_y$$

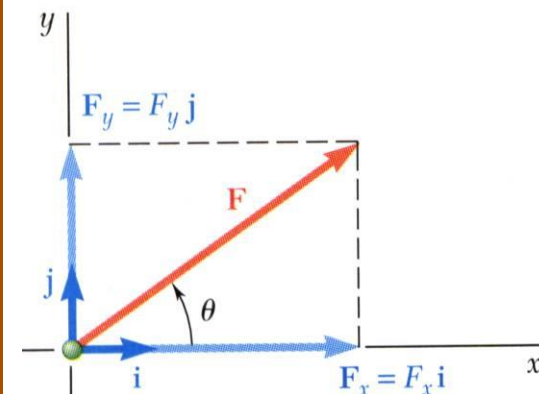
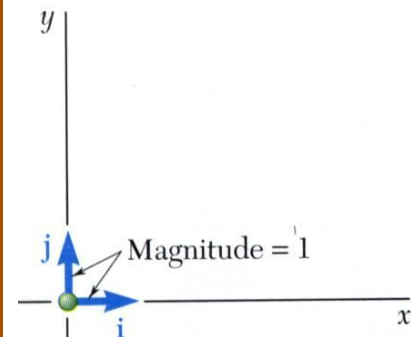
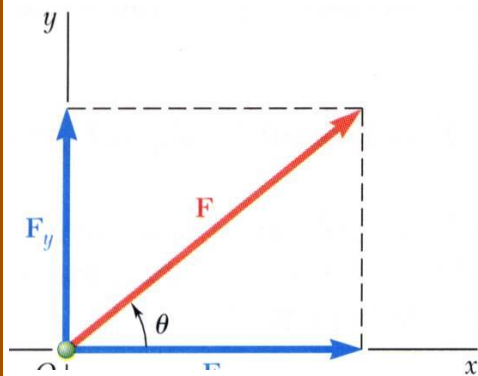
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

- بردار واحد یا یک: بردار واحد در راستای یک بردار، برابر یا بردار تقسیم بر بزرگی آن بردار می باشد.
- به عبارت دیگر، برداری که دارای بزرگی واحد باشد بردار واحد نامیده می شود.

- اجزا بردارها را برای بیان در مقیاس اسکالر در بردارهای واحد ضرب می کنند.

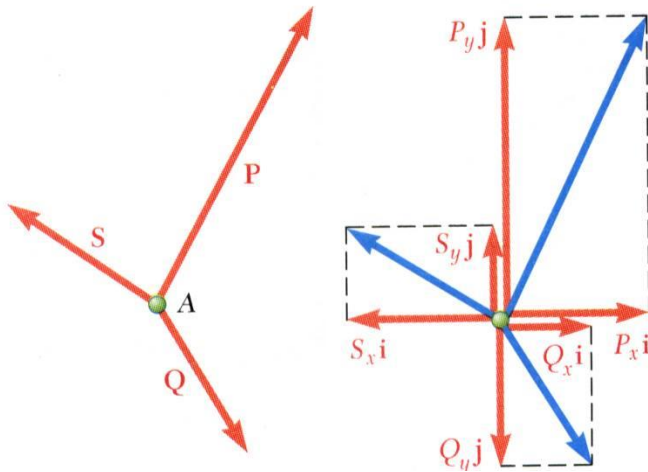
- اجزا بردارها را برای بیان در مقیاس اسکالر در بردارهای واحد ضرب می کنند.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Addition of Forces by Summing Components



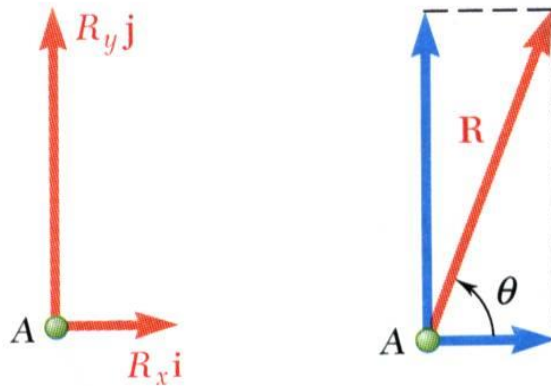
- روش مطلوب برای تعیین برآیند سه یا تعداد بیشتر نیروهای همرو

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

- تجزیه هر نیرو به مولفه های مستطیلی (کارتزین)

$$\begin{aligned} R_x \vec{i} + R_y \vec{j} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + S_x \vec{i} + S_y \vec{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \vec{i} + (P_y + Q_y + S_y) \vec{j} \end{aligned}$$

- مولفه های اسکالر نیروی برآیند برابر است با جمع مولفه های اسکالر مربوطه به نیروهای مشخص



$$\begin{aligned} R_x &= P_x + Q_x + S_x \\ &= \sum F_x \end{aligned} \quad \begin{aligned} R_y &= P_y + Q_y + S_y \\ &= \sum F_y \end{aligned}$$

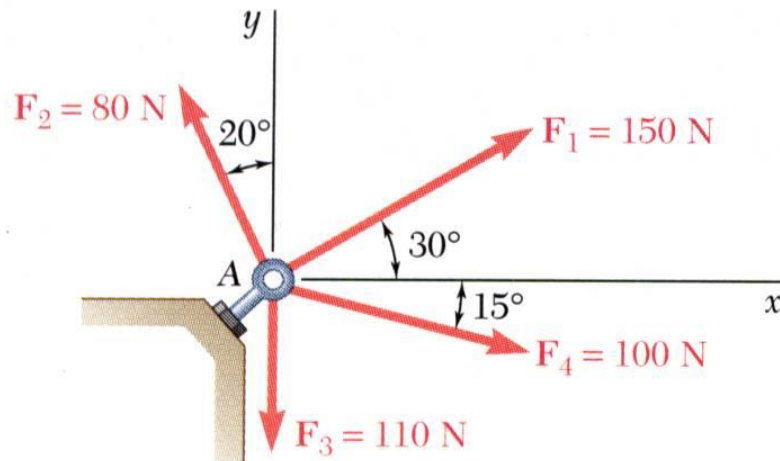
- پیدا کردن جهت و مقدار نیروی برآیند

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.3



راه حل:

- تجزیه هر نیرو به مولفه های کارتیزین

- تعیین مولفه های نیروی برآیند با اضافه کردن مولفه های نیروی مربوطه

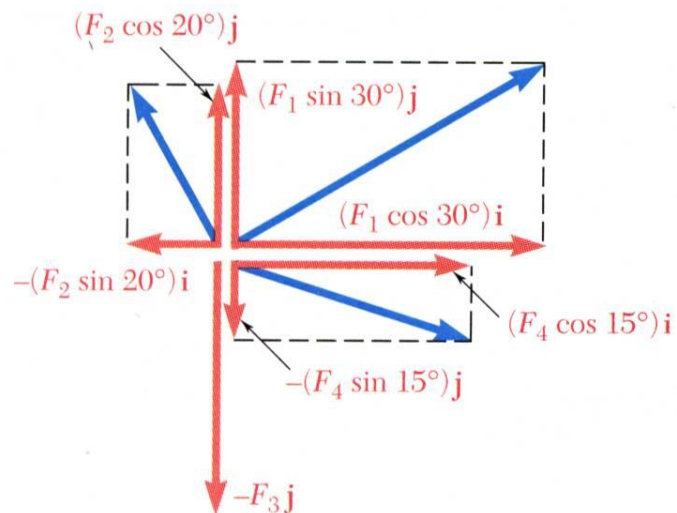
- محاسبه مقدار و جهت نیروی برآیند

برآیند چهار نیروی عمل کننده بر گیره نشان داده شده را بدست آورید

Vector Mechanics for Engineers: Statics

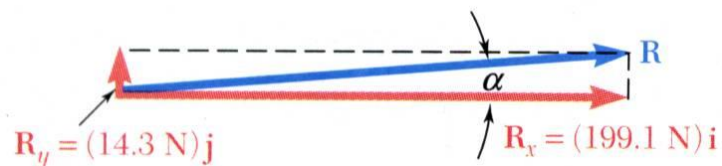
Sample Problem 2.3

SOLUTION:



• تجزیه هر نیرو به مولفه های کارتیزین.

force	mag	x - comp	y - comp
$\vec{F}_1$	150	+129.9	+ 75.0
$\vec{F}_2$	80	- 27.4	+ 75.2
$\vec{F}_3$	110	0	-110.0
$\vec{F}_4$	100	+ 96.6	- 25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$



• تعیین مولفه های نیروی برآیند با اضافه کردن مولفه های نیروی مربوطه

• محاسبه مقدار و جهت نیروی برآیند

$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2}$$

$$R = 199.6 \text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}}$$

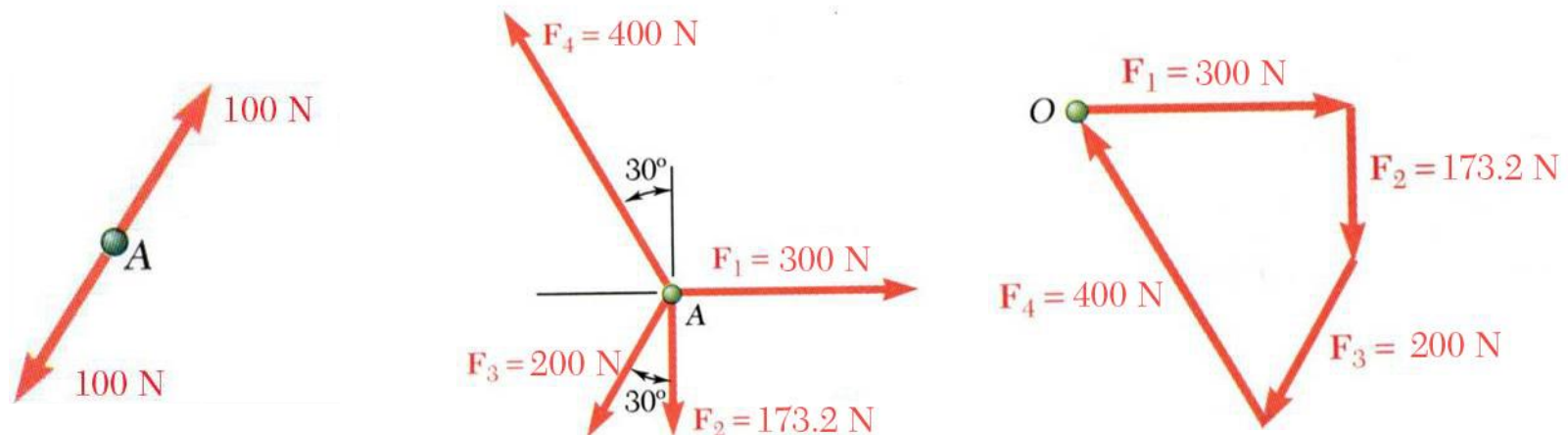
$$\alpha = 4.1^\circ$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Equilibrium of a Particle

• وقتی برآیند نیروها برابر صفر می باشد ذره در حال تعادل می باشد

• **قانون اول نیوتن:** اگر نیروی برآیند بر یک ذره برابر صفر باشد، ذره در حالت سکون باقی می ماند یا به حرکت خود با سرعت ثابت در یک خط مستقیم ادامه خواهد داد



• ذره تحت اثر دو نیرو:

- بزرگی برابر
- خط اثر یکسان
- جهت مخالف

• ذره تحت اثر سه یا تعداد بیشتر نیرو:

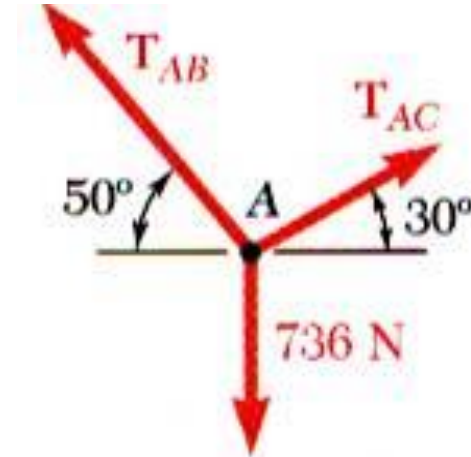
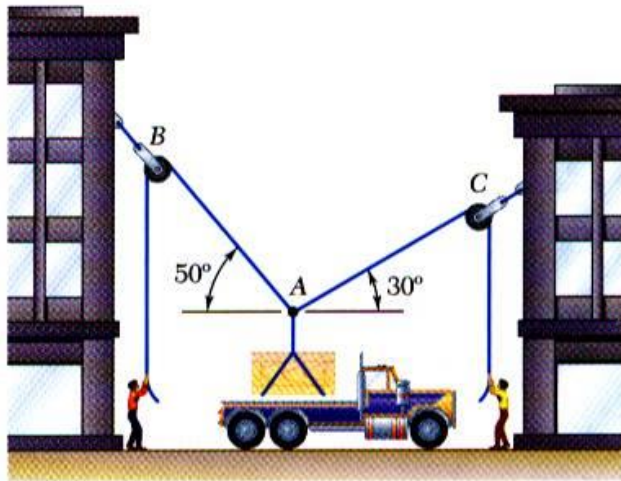
- راه حل ترسیمی یک چند ضلعی بسته
- راه حل جبری

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Free-Body Diagrams



- دیاگرام فضایی: نمایشی از یک طرح فیزیکی است که شرایط حاکم بر مسئله را نشان می دهد.

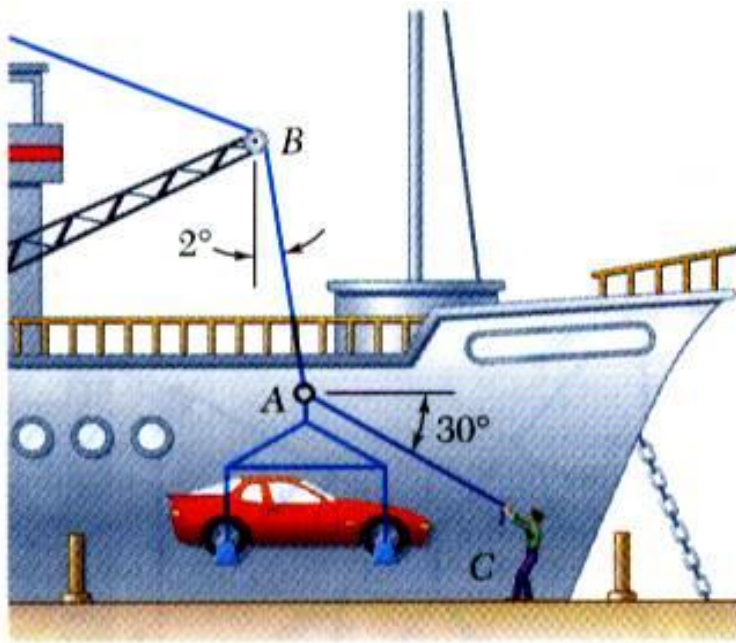
- دیاگرام جسم آزاد: نمایش طرحی ساده است که نیروهای وارد بر ذره را نشان می دهد.

- توجه شود وقتی عضو در تعادل است تمام ذرات آن در تعادل خواهند بود.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.4



حل:

رسم دیاگرام آزاد

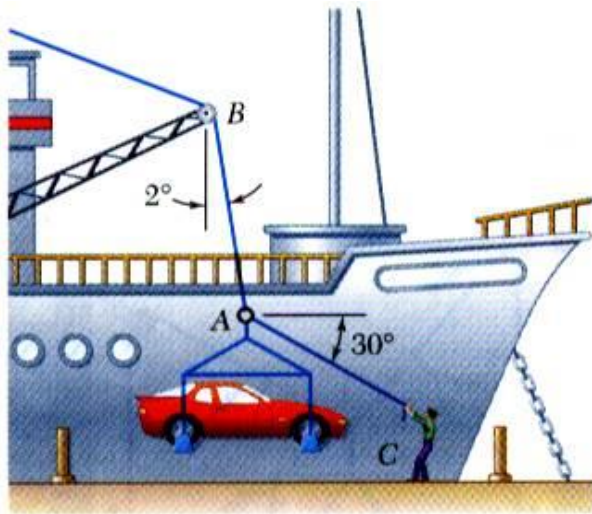
- اعمال شرایط برای تعادل توسط ایجاد یک شکل بسته از نیروهای اعمال شده به ذره
- اعمال روابط مثلثاتی برای تعیین مقدار نیروهای مجهول

با توجه به تخلیه بار شکل مقابل، نیروی هر کابل را بیابید. وزن اتومبیل 3500 نیوتن است



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.4



SOLUTION:

• رسم دیاگرام آزاد برای ذره A

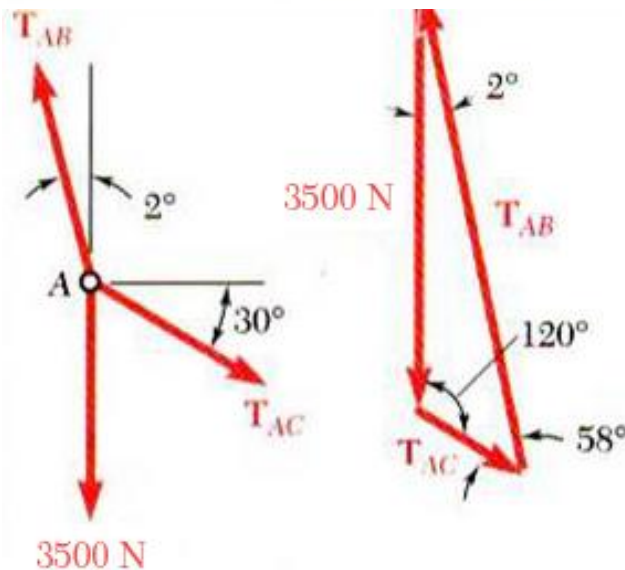
اعمال شرایط برای تعادل

• بدست آوردن مقدار نیروهای مجهول

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3500 \text{ N}}{\sin 58^\circ}$$

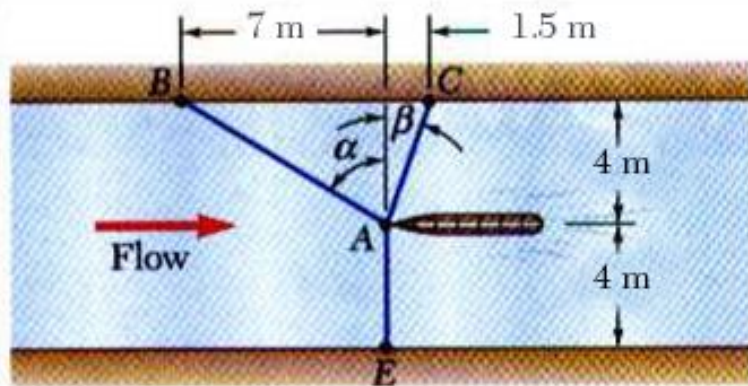
$$T_{AB} = 3570 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 144 \text{ N}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.5



انتخاب شناور به عنوان جسم آزاد و رسم دیاگرام آزاد آن

- توصیف شرایط برای تعادل برای شناور توسط نوشتن اینکه برآیند همه نیروها باید برابر با صفر شود

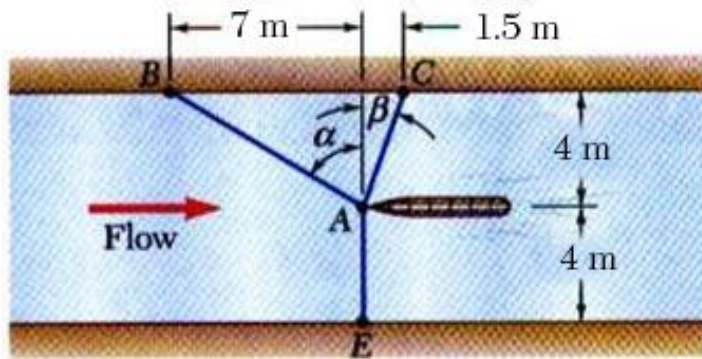
مطلوبست نیروی اعمال شده بر کابل AC و شناور. نیروی کشش در کابل AB برابر با 40 نیوتن و در کابل AC برابر با 60 نیوتن می باشد

معادلات تعادل را در هر دو جهت x و y برابر صفر قرار می دهیم



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.5



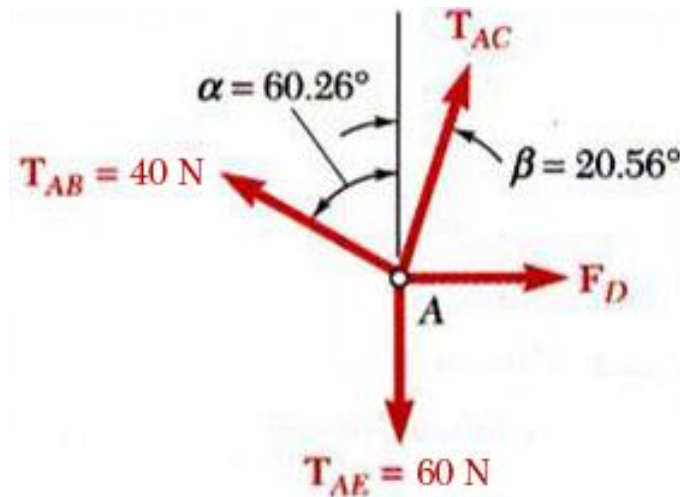
SOLUTION:

انتخاب شناور به عنوان جسم آزاد و رسم دیاگرام آزاد آن

$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 1.75 \quad \tan \beta = \frac{1.5 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 0.375$$

$$\alpha = 60.25^\circ$$

$$\beta = 20.56^\circ$$



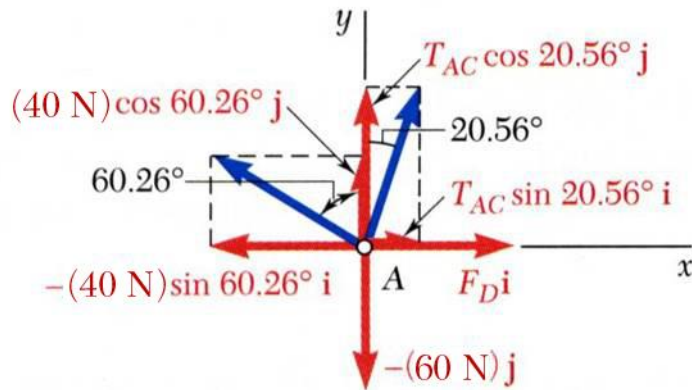
• توصیف شرایط برای تعادل برای شناور توسط نوشتن اینکه براینده همه نیروها باید برابر با صفر شود

$$\vec{R} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AE} + \vec{F}_D = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.5

• تجزیه بردارها

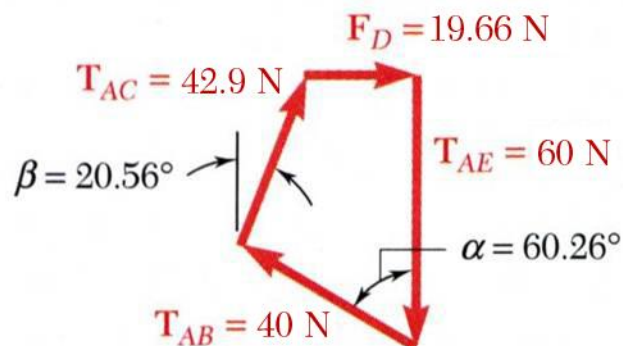


$$\begin{aligned}\vec{T}_{AB} &= -(40 \text{ N})\sin 60.26^\circ \vec{i} + (40 \text{ N})\cos 60.26^\circ \vec{j} \\ &= -(34.73 \text{ N})\vec{i} + (19.84 \text{ N})\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{T}_{AC} &= T_{AC}\sin 20.56^\circ \vec{i} + T_{AC}\cos 20.56^\circ \vec{j} \\ &= 0.3512 T_{AC}\vec{i} + 0.9363 T_{AC}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{T} = -(60 \text{ N})\vec{j}$$

$$\vec{F}_D = F_D \vec{i}$$

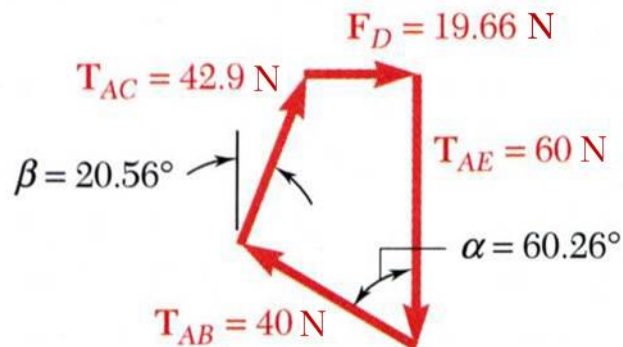


$$\vec{R} = 0$$

$$\begin{aligned}&= (-34.73 + 0.3512 T_{AC} + F_D)\vec{i} \\ &\quad + (19.84 + 0.9363 T_{AC} - 60)\vec{j}\end{aligned}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 2.5



$$\vec{R} = 0$$

$$= (-34.73 + 0.3512T_{AC} + F_D)\vec{i} \\ + (19.84 + 0.9363T_{AC} - 60)\vec{j}$$

معادلات تعادل را در هر دو جهت x و y برابر صفر قرار می دهیم

$$(\sum F_x = 0) \quad 0 = -34.73 + 0.3512T_{AC} + F_D$$

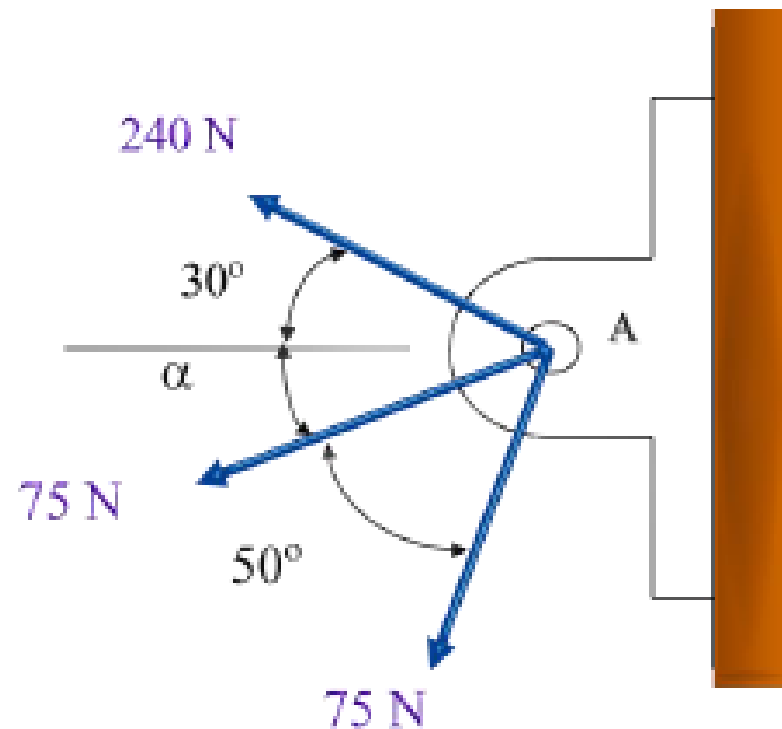
$$(\sum F_y = 0) \quad 0 = 19.84 + 0.9363T_{AC} - 60$$

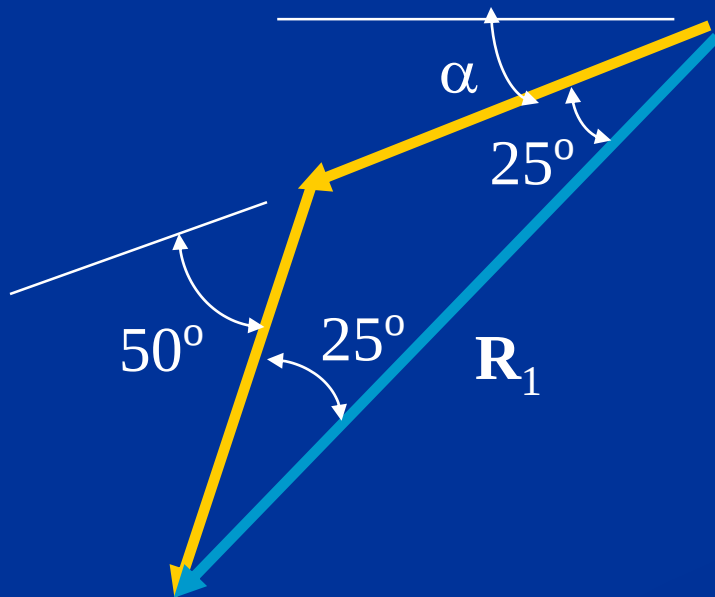
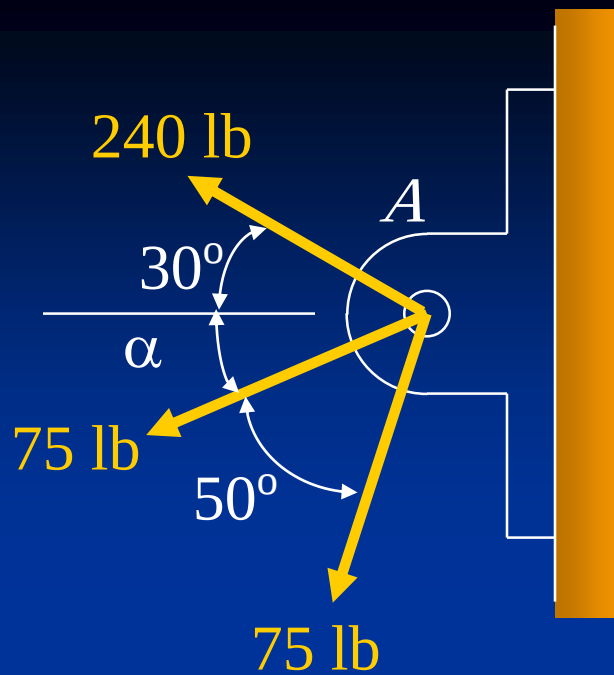
$$T_{AC} = +42.9 \text{ N}$$

$$F_D = +19.66 \text{ N}$$



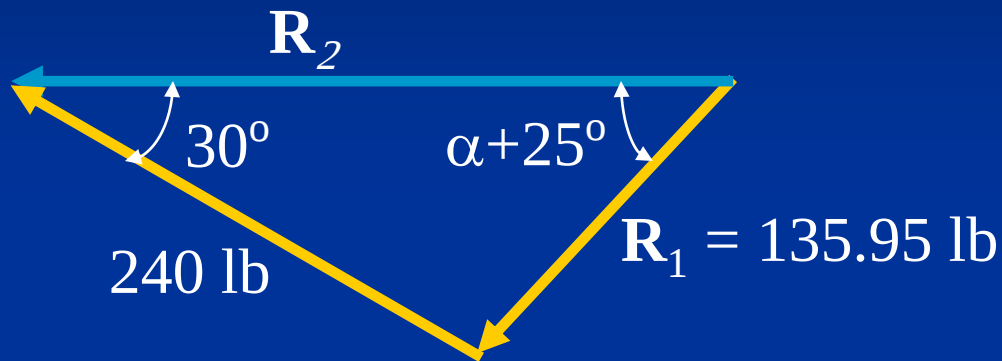
□ در گیره ای زاویه بین دو نیروی 75N همیشه 50 درجه است. مقدار α را تعیین کنید.





$$R_1 = 2(75 \text{ lb}) \cos 25^\circ = 135.95 \text{ lb}$$

$$\mathbf{R}_1 = 135.95 \text{ lb} \quad \angle \alpha + 25^\circ$$



Law of sines:

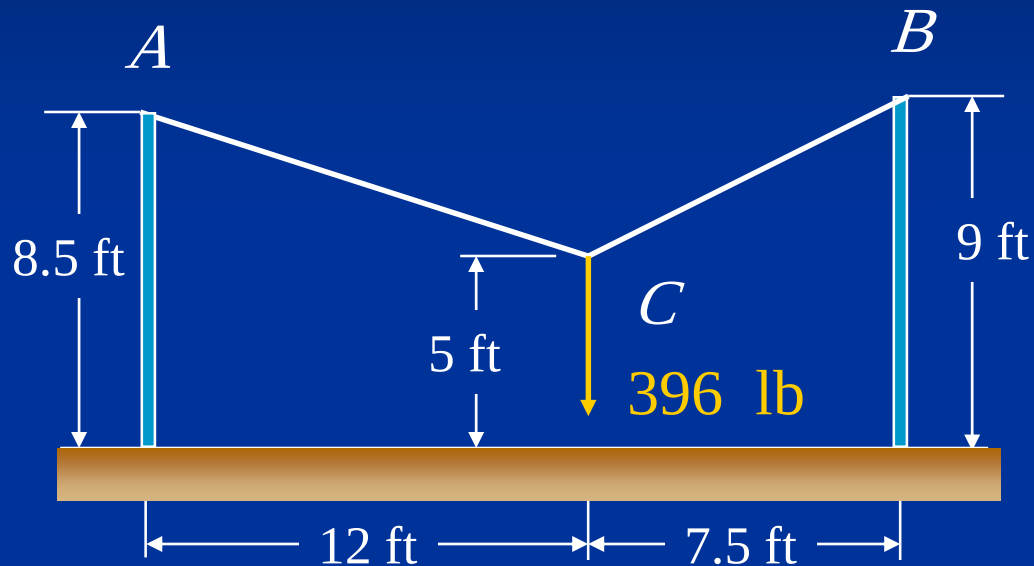
$$\frac{\sin(\alpha + 25^\circ)}{240 \text{ lb}} = \frac{\sin(30^\circ)}{135.95 \text{ lb}}$$

$$\sin(\alpha + 25^\circ) = \frac{(240 \text{ lb}) \sin(30^\circ)}{135.95 \text{ lb}} = 0.88270$$

$$\alpha + 25^\circ = 61.97^\circ$$

$$\alpha = 37.0^\circ$$

Problem 2.8



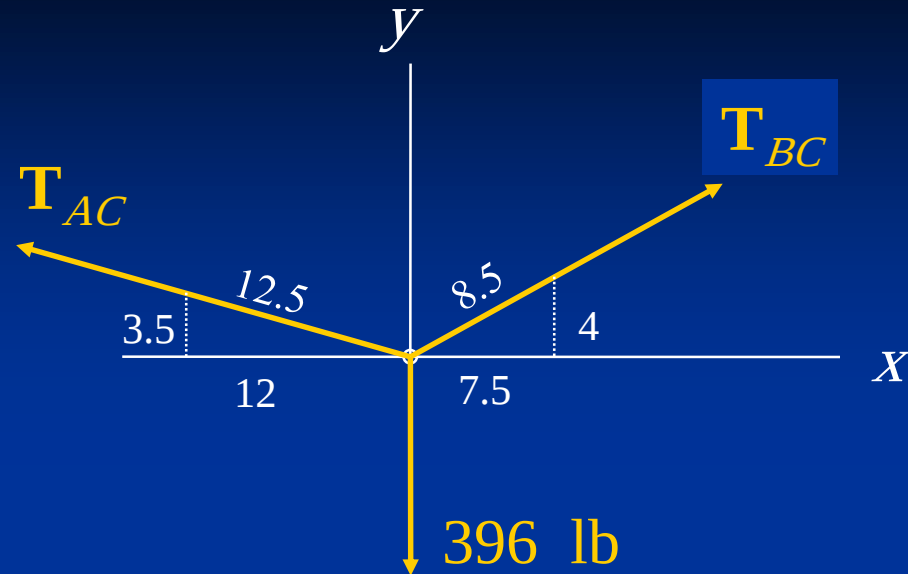
دو کابل در نقطه C گره خورده
اند و تحت بارگذاری نشان داده
شده می باشند. تعیین کنید الف)
کشش در کابل AC ب) کشش در
کابل BC

FREE BODY C:

Problem 2.8 Solution

کشیدن یک دیاگرام آزاد از نره

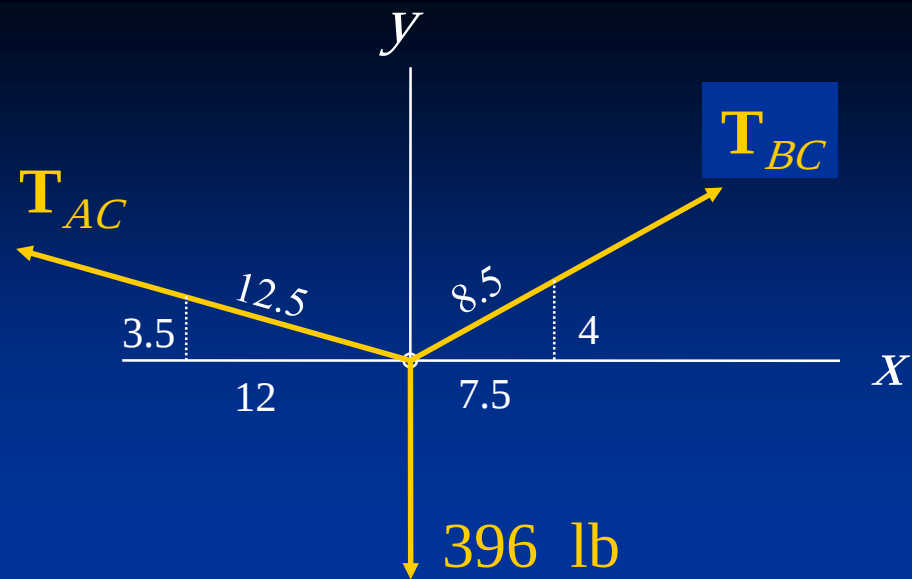
نیروهای اعمال شده بر نره در جهات x و y برابر با صفر قرار می دهیم



$$\Sigma F_x = 0 : -\frac{12}{12.5} T_{AC} + \frac{7.5}{8.5} T_{BC} = 0$$

$$T_{BC} = 1.088 T_{AC}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} T_{BC} - 396 \text{ lb} = 0$$



(a) Substitute for T_{BC} :

$$\frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} (1.088 T_{AC}) - 396 \text{ lb} = 0$$

$$(0.280 + 0.512) T_{AC} - 396 \text{ lb} = 0$$

$$T_{AC} = 500 \text{ lb}$$

(b) $T_{BC} = 1.088 (500 \text{ lb})$

$$T_{BC} = 544 \text{ lb}$$

مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

اجسام صلب

سیستم های معادل نیروها

فر دیناند پی. پی. ایر

ای. راسل جانسون

ارائه: سید محمد علی ابطحی



CHAPTER

3

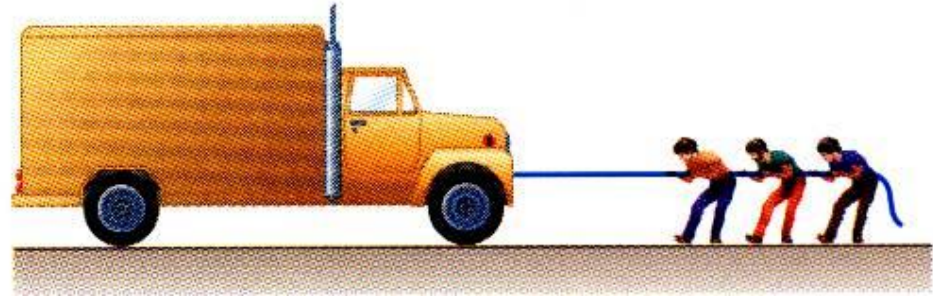
- رفتار یک جسم به عنوان یک ذره همیشه امکان پذیر نیست. در کل، اندازه جسم و نقاط اثر نیروهای اثرگذار باید مورد بررسی قرار گیرد
- بیشتر اجسام در مکانیک مقدماتی صلب فرض می شوند. در واقع، تغییر شکل های واقعی بسیار کوچک هستند و تاثیری بر شرایط تعادل یا حرکت جسم نمی گذارند.
- فصل جاری اثر نیروهای اعمالی بر روی یک جسم صلب و نحوه جایگزینی یک سیستم مشخص از نیروها را با یک سیستم معادل ساده تر را توصیف میکند
 - گشتاور یک نیرو حول یک نقطه
 - گشتاور یک نیرو حول یک محور
 - گشتاور به علت یک کوپل
- هر سیستم نیرویی که بر یک جسم صلب عمل می کند می تواند توسط یک سیستم معادل شامل یک نیروی عمل کننده بر یک نقطه و یک کوپل جایگزین شود



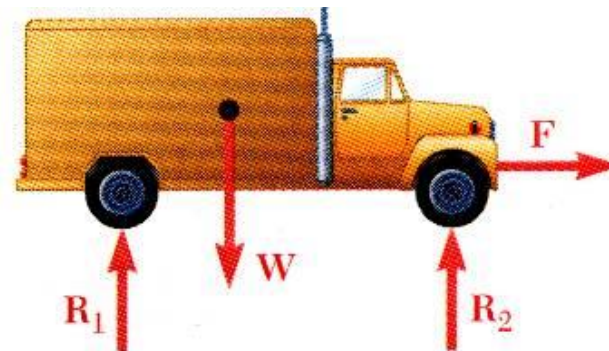
Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروهای داخلی و خارجی

- نیروهای عمل کننده بر اجسام صلب به دو گروه تقسیم می شوند:
 - نیروهای خارجی
 - نیروهای داخلی



- نیروهای خارجی در دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده اند.

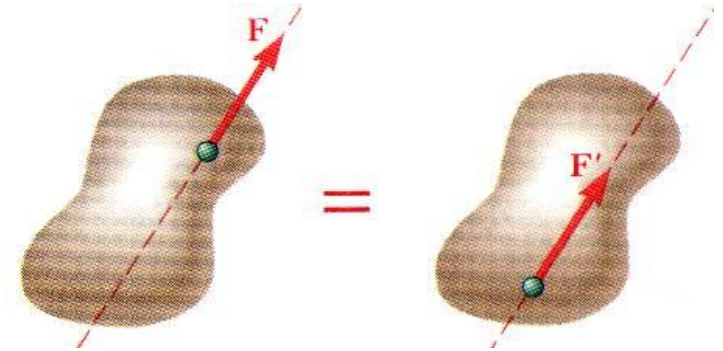


- هر نیروی خارجی می تواند باعث انتقال یا دوران یا هر دو شود.

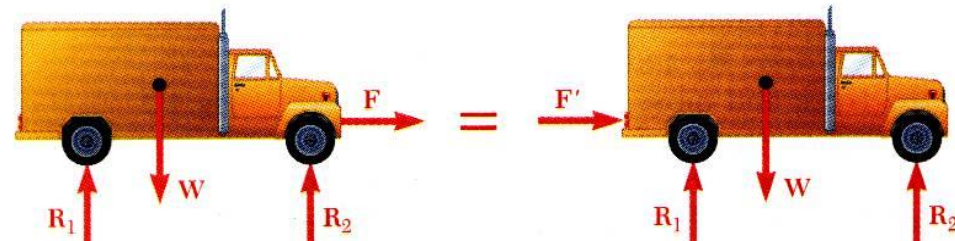
Vector Mechanics for Engineers: Statics

قانون جابجایی: بردارهای معادل

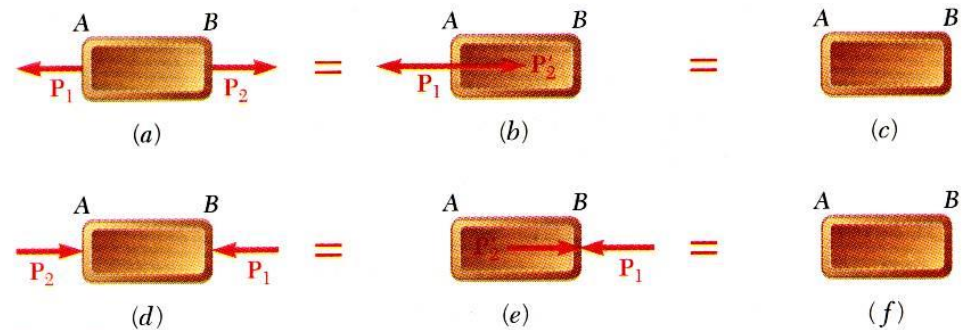
- شرایط تعادل یا حرکت توسط انتقال یک نیرو در طول خط اثرش تحت تاثیر قرار نخواهد گرفت
- نکته: نیروی F و F' ، نیروهای مساوی می باشند



- حرکت نقطه اثر نیروی F به پشت کامیون هیچ تاثیری بر حرکت یا دیگر نیروهای عمل کننده بر کامیون ندارد



- قانون انتقال ممکن است همیشه برای تعیین نیروهای داخلی و تغییر شکل ها اعمال نشود



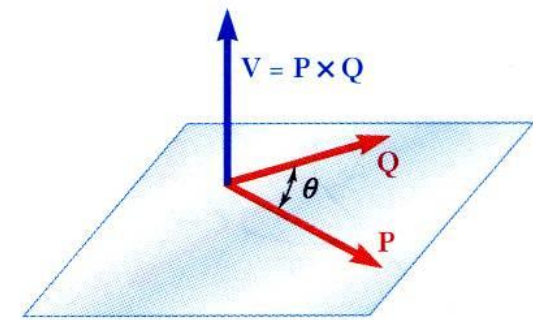
• مفهوم ممان یک نیرو حول یک نقطه از طریق کاربرد ضرب برداری یا ضرب خارجی خیلی راحت تر قابل فهم می باشد

• ضرب برداری دو بردار P و Q به عنوان بردار V تعریف می شود که شرایط زیر را دارا می باشد

1. خط اثر V بر صفحه P و Q عمود می باشد

2. مقدار V برابر است با: $V = PQ \sin \theta$

3. جهت V از قانون دست راست بدست می آید



(a)



(b)

• ضرب برداری:

- قانون جابجایی برقرار نیست $Q \times P = -(P \times Q)$

- توزیع پذیرند $P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$

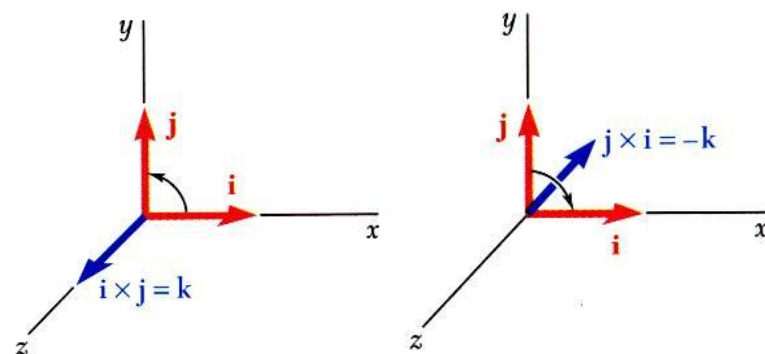
- بدون خاصیت شرکت پذیری $(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S)$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب برداری: مولفه های مستطیلی

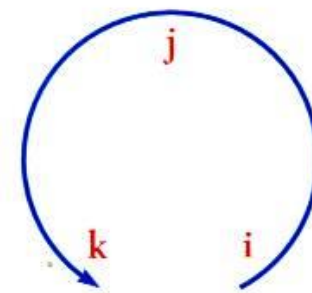
• ضرب های برداری بردارهای واحد کارتزین

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$



• ضرب های برداری در ارتباط با مختصات
مستطیلی

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} \\ &\quad + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k} \end{aligned}$$



$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

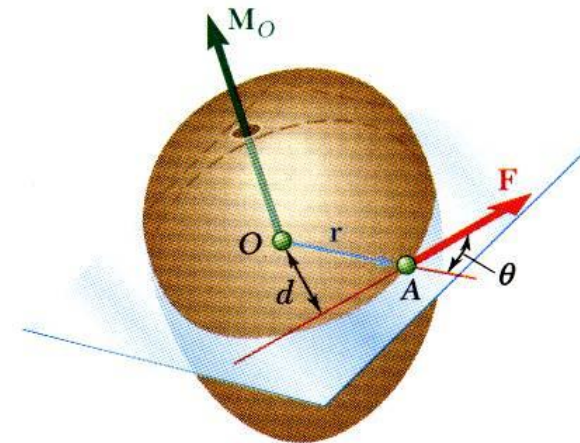
ممان یک نیرو حول یک نقطه

- یک بردار نیرو توسط مقدار و جهتش تعریف می شود. اثرش بر روی جسم صلب بستگی به نقطه اثرش دارد

- ممان نیروی F حول نقطه O به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- بردار ممان $\mathbf{M}_O$ بر صفحه O و نیروی F عمود می باشد.



(a)

- مقدار M_O تمایل نیرو را برای دوران حول یک محور در طول M_O را نشان می دهد

$$M_O = rF \sin \theta = Fd$$

جهت ممان توسط قانون دست راست تعیین می شود



(b)

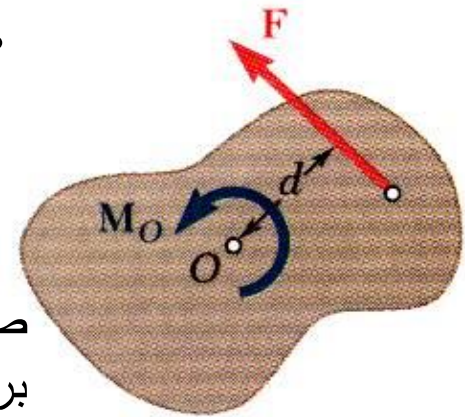
- هر نیروی F' که مقدار و جهت مشابه با نیروی F را داشته باشد اگر در یک خط عمل یاشند مساوی می باشند و بنابراین تولید ممان مشابه می کنند

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک نیرو حول یک نقطه

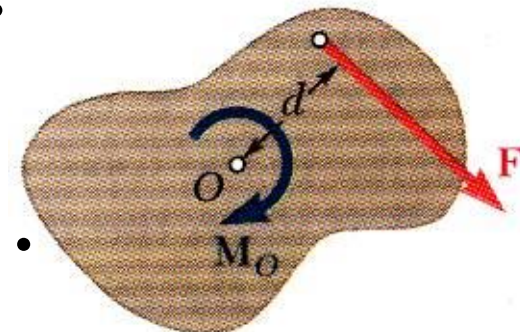
- ساختارهای دوبعدی دارای طول و عرض می باشند و اما عمق آنها نادیده گرفته می شود. و پیرو نیروهای داخل صفحه می شود

صفحه شامل نقطه O و نیروی F می باشد. M_O ، ممان نیرو حول O عمود بر صفحه می باشد



$$(a) M_O = +Fd$$

- اگر نیرو تمایل به دوران ساختار در جهت ساعتگرد داشته باشد، جهت بردار ممان خارج از صفحه ساختار می باشد و مقدار آن را می توان قراردادی مثبت در نظر گرفت.
- اگر نیرو تمایل به دوران ساختار در جهت پادساعتگرد داشته باشد، جهت بردار به سمت داخل صفحه ساختار می باشد و مقدار آن را می توان قراردادی منفی در نظر گرفت.



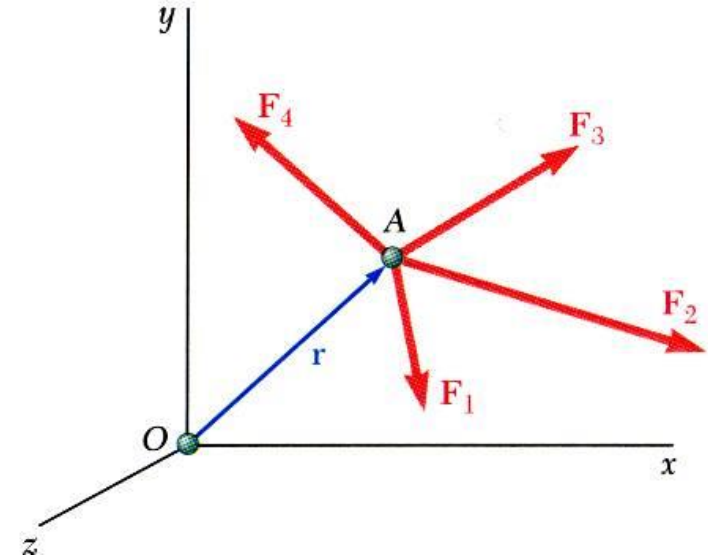
$$(b) M_O = -Fd$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Varignon's Theorem

- ممان حول نقطه مشخص O از نیروی معادل چند نیرو که همرو می باشند مساوی با جمع ممانهای بوجود آمده از تک تک نیروها حول نقطه O

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$



- مطابق تئوری Varignon گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه است.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه های کارتیزین ممان یک نیرو

گشتاور نیروی F حول نقطه O

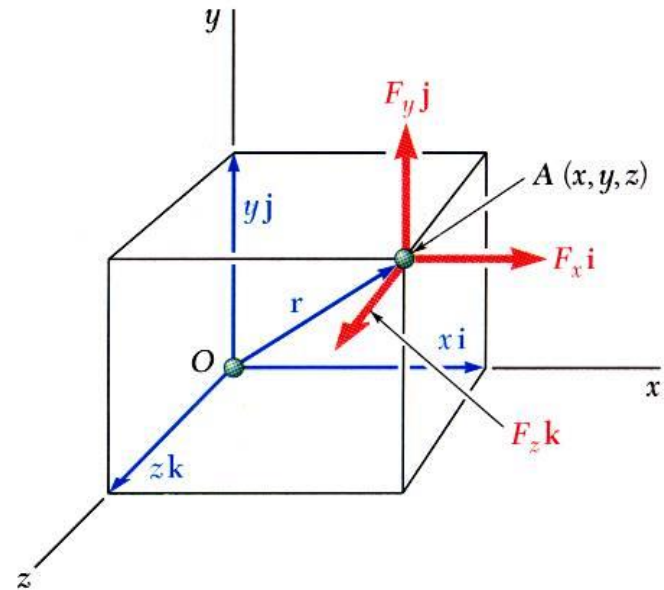
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

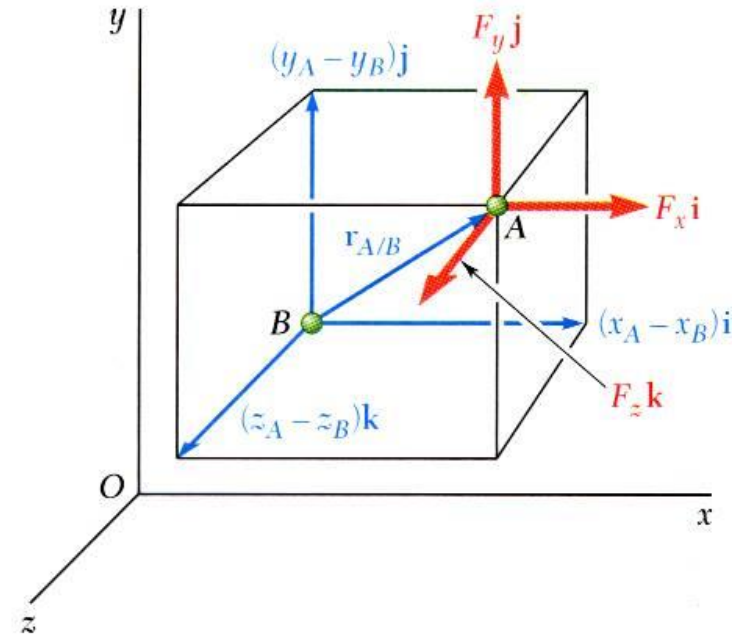
مولفه های کارتیزین ممای یک نیرو

گشتاور نیروی F حول نقطه B

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A/B} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B \\ &= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k} \\ \vec{F} &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



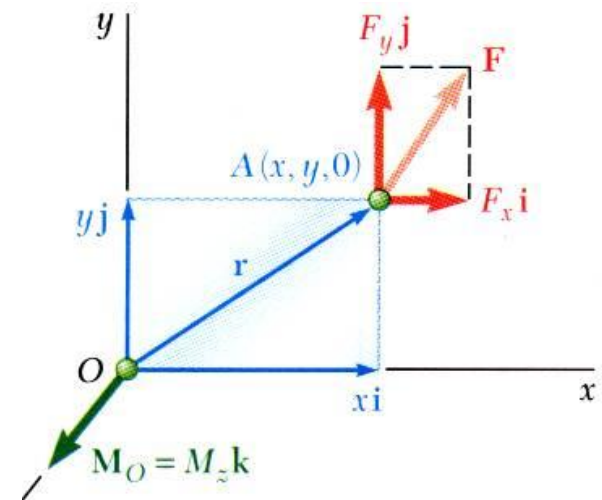
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مولفه های کارتیزین ممان یک نیرو

برای ساختارهای دو بعدی

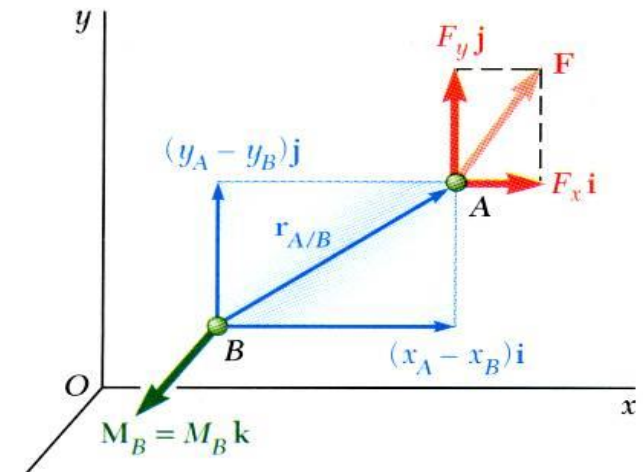
$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} M_O &= M_Z \\ &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$



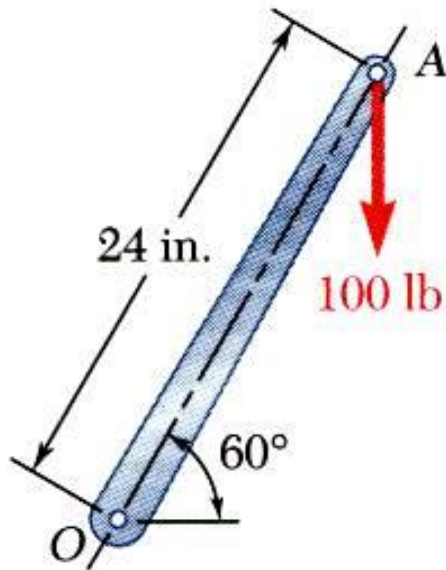
$$\vec{M}_B = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x]\vec{k}$$

$$\begin{aligned} M_B &= M_Z \\ &= (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \end{aligned}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1



یک نیروی عمودی 100 lb به میله روبرو که به یک شافت در نقطه O متصل است اعمال می شود

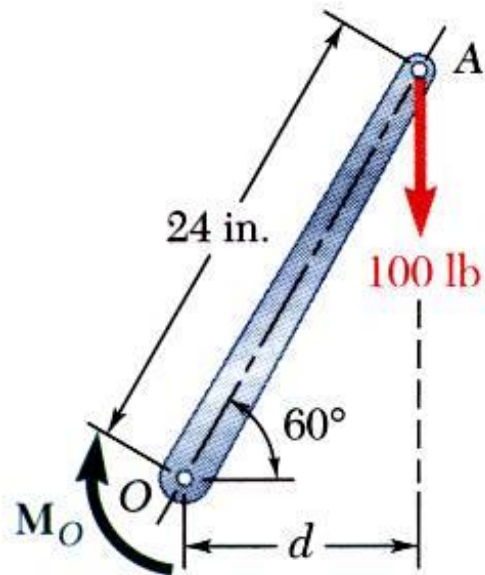
تعیین کنید:

- ممان حول نقطه O
- مقدار نیرو افقی در A که همان گشتاور را ایجاد کند
- کوچکترین نیرو در A که ایجاد همان ممان را بکند
- مکان نیروی عمودی 240 lb برای تولید ممان مشابه
- آیا هر نیرویی در بخش b ، c و d معادل با نیروی اصلی است



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1



(a) مممان حول نقطه O مساوی است با ضرب نیرو در فاصله عمودی بین خط عمل نیرو و نقطه O . به دلیل اینکه نیرو تمایل دارد میله در جهت ساعتگرد بچرخاند مممان به سمت داخل صفحه می باشد

$$M_O = Fd$$

$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

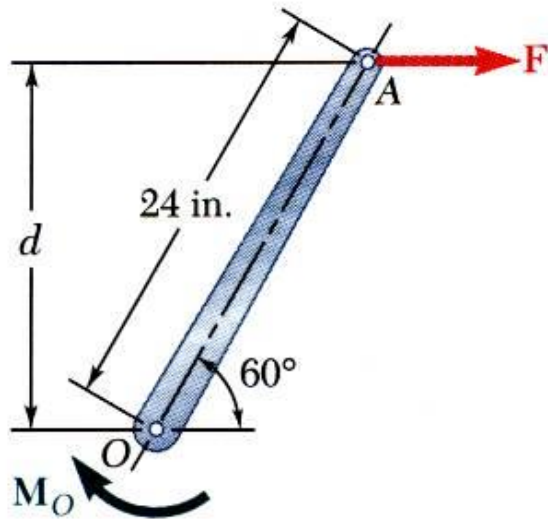
$$M_O = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.})$$

$$M_O = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1



(b) مقدار نیرو افقی در A که همان گشتاور را ایجاد کند

$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(20.8 \text{ in.})$$

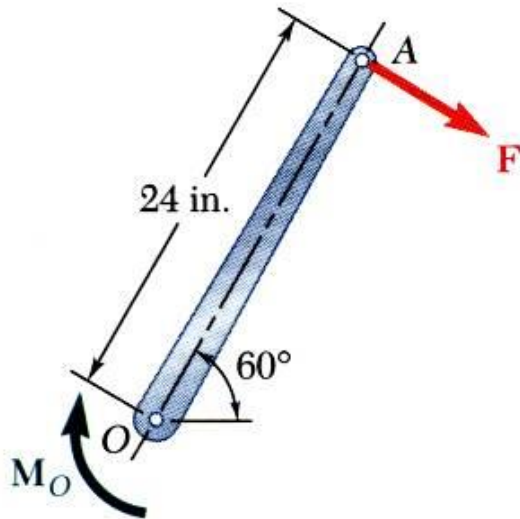
$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{20.8 \text{ in.}}$$

$$F = 57.7 \text{ lb}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1

(c) کوچکترین نیرو A به منظور ایجاد مماسی مشابه زمانی رخ می دهد که فاصله عمودی ماکزیمم است یا زمانی که F عمود بر OA می باشد



$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(24 \text{ in.})$$

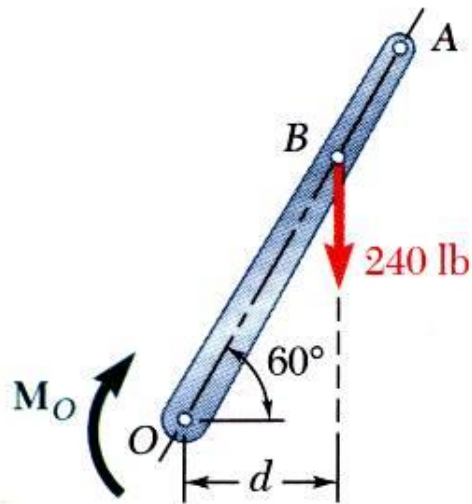
$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{24 \text{ in.}}$$

$$F = 50 \text{ lb}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1



(d) تعیین نقطه اثر یک نیروی 240lb برای تولید ممان مشابه

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = (240 \text{ lb})d$$

$$d = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{240 \text{ lb}} = 5 \text{ in.}$$

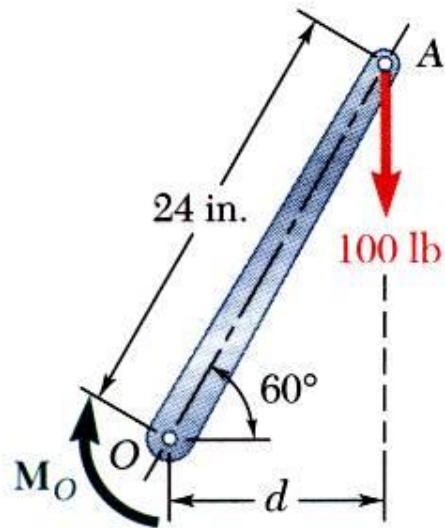
$$OB \cos 60^\circ = 5 \text{ in.}$$

$$OB = 10 \text{ in.}$$

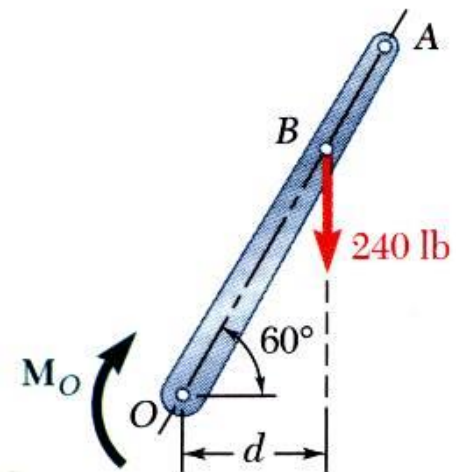
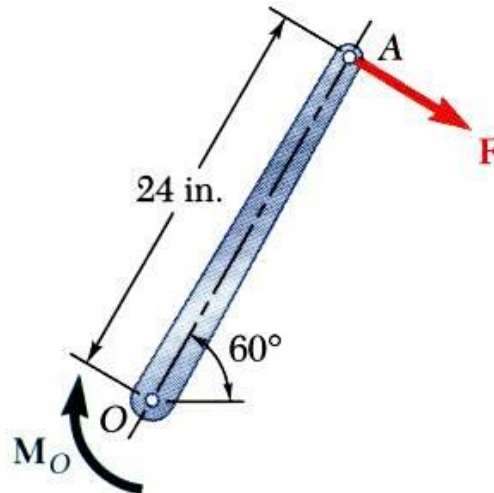
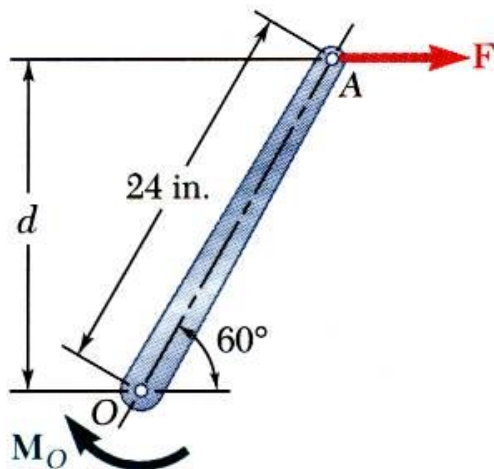


Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.1



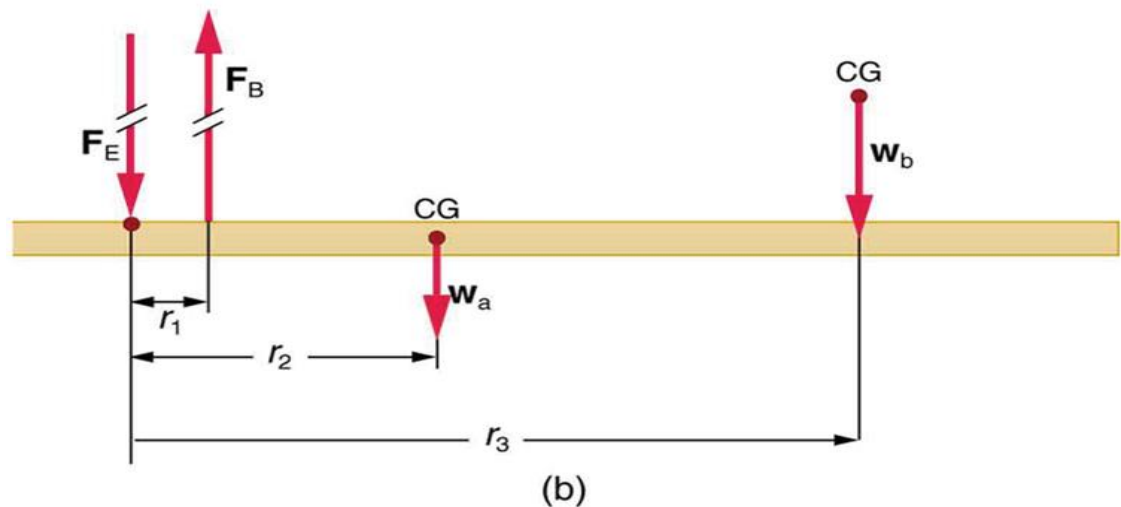
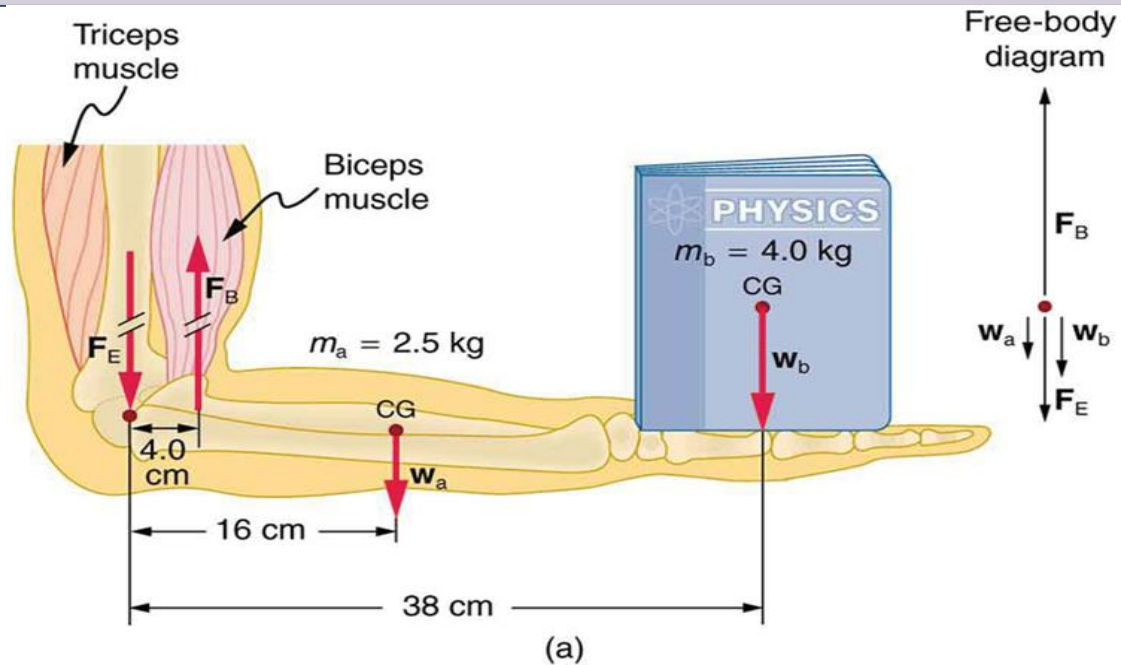
(e) اگرچه هر نیرویی در بخش b، c و d تولید ممان مشابه با نیروی 100 lb می کند اما هیچ کدام مقدار و جهت مشابهی ندارند یا خط عمل مشابهی ندارند. هیچ کدام از نیروها معادل نیروی 100 lb نمی باشد



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.1

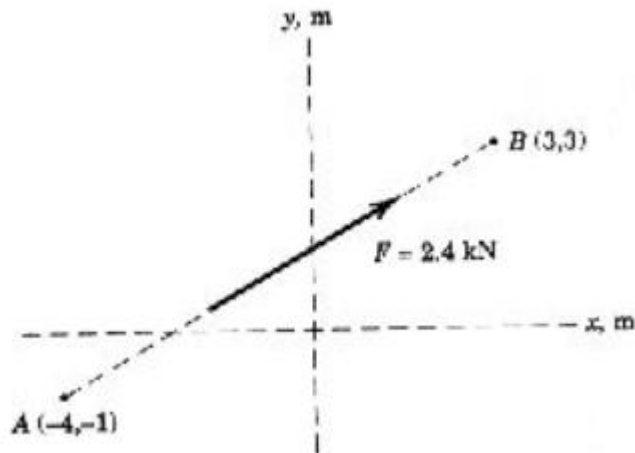
گشتاور حول مفصل آرنج را بدست آورید



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.1

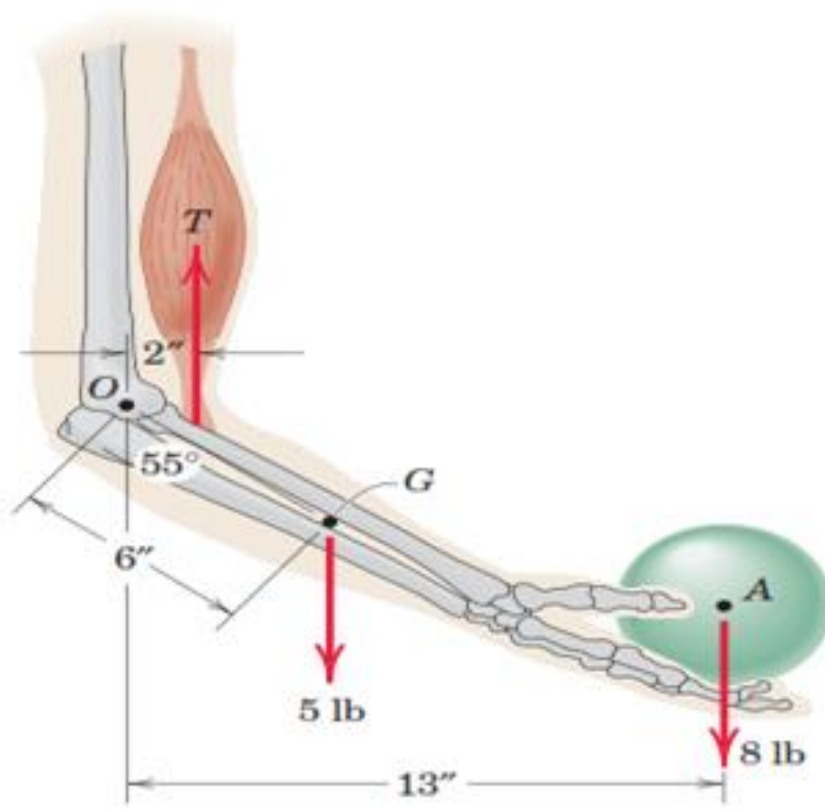
گشتاور نیروی F را حول نقطه B در
شکل زیر بدست آورید



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 6.1

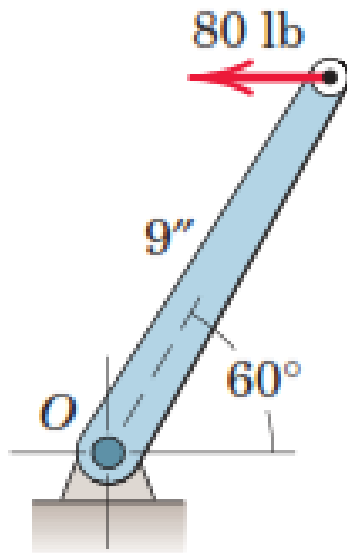
در شکل زیر نیروی کششی دوسر
بازو چقدر باشد تا کل مماس حول
نقطه O صفر گردد؟



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.1

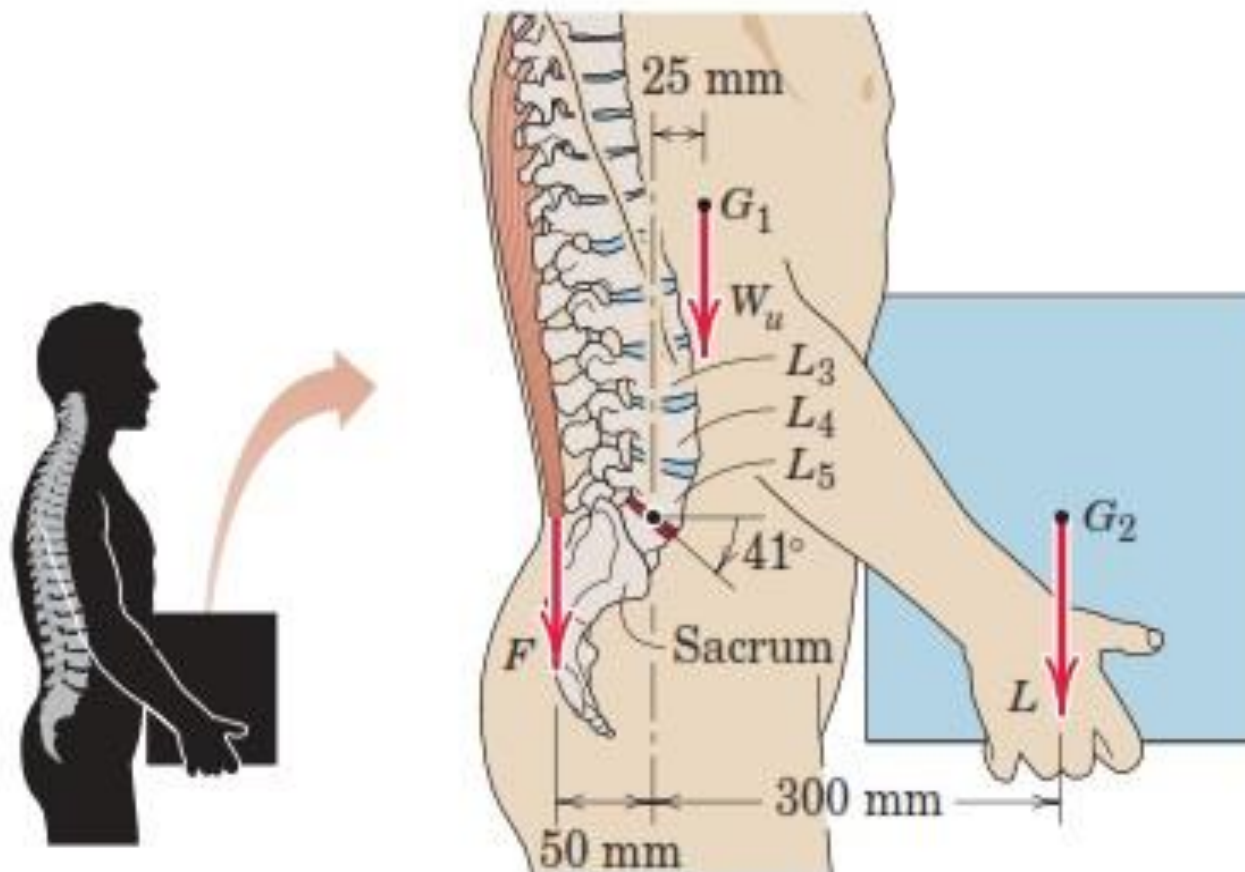
گشتاور نیروی افقی 80lb حول نقطه
O را حساب کنید



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 8.1

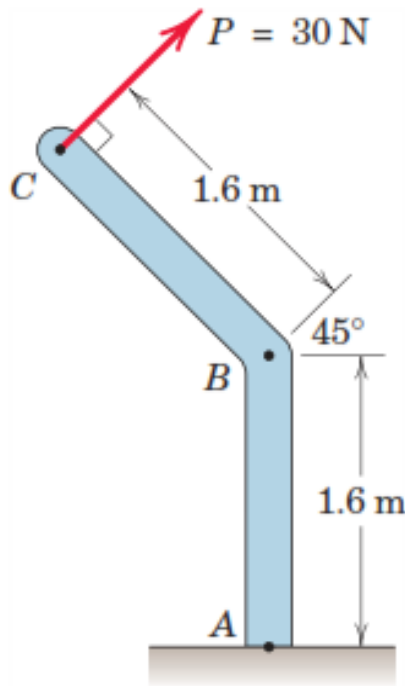
اگر وزن جعبه برابر با 50 نیوتن باشد و نیروی وزن بدن 200 نیوتن باشد مقدار نیروی F را
طوری بدست آورید که گشتاور حول مهره L5 برابر صفر گردد



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 9.1

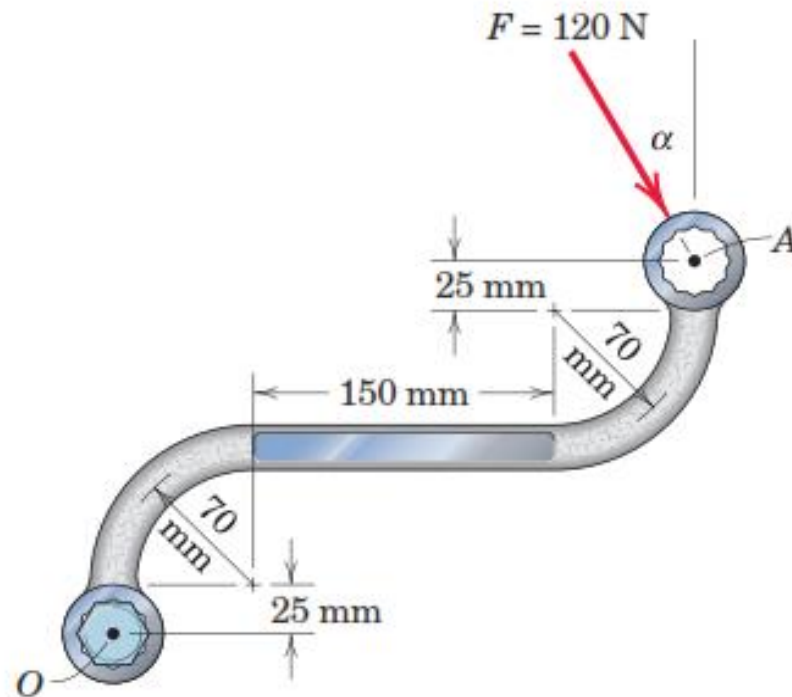
گشتاور نیروی P را حول نقاط A و B بدست آورید؟



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.1

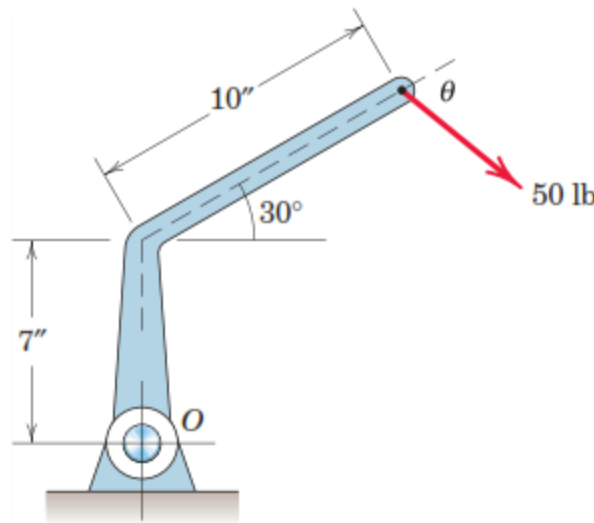
گشتاور نیروی F حول نقطه O اگر زاویه نیرو با خط عمود 30° درجه باشد



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 11.1

گشتاور حول نقطه O را بدست آورید؟



Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک کوپل

- دو نیروی F و $-F$ دارای مقدار یکسان و دارای خط اثر موازی ولی در جهت مخالف می باشند به این حالت یک کوپل نیرویی گویند

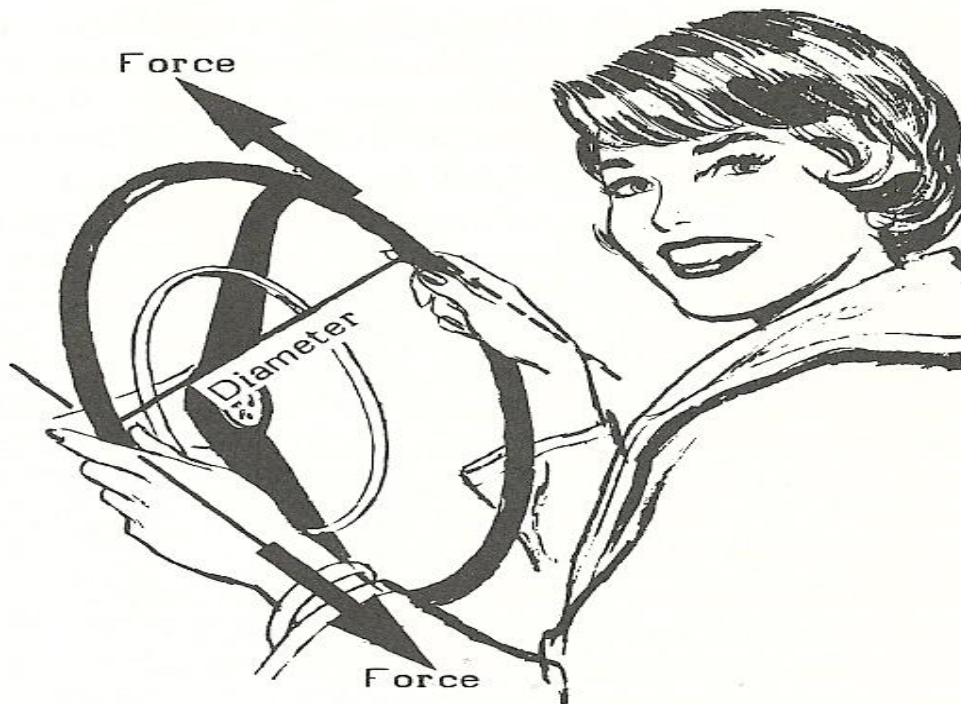
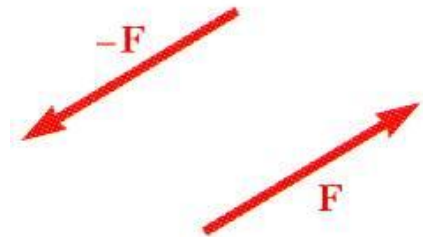


Figure 2.14. A steering wheel offers an example of a couple in which two parallel forces are separated by a distance to produce torque. Torque equals two parallel forces times distance.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک کوپل

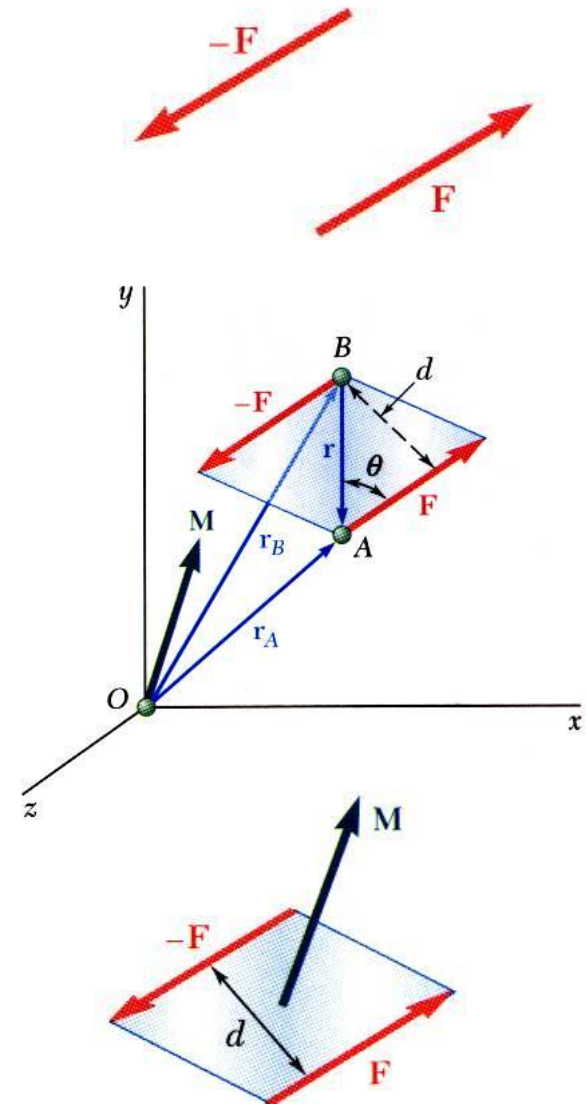
- دو نیروی F و $-F$ دارای مقدار یکسان و دارای خط اثر موازی ولی در جهت مخالف می باشند به این حالت یک کوپل نیرویی گویند

- ممان کوپل

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}\end{aligned}$$

$$M = rF \sin \theta = Fd$$

- بردار ممان کوپل مستقل از انتخاب مبدا محور مختصات می باشد. در واقع، آن یک بردار آزاد می باشد که می تواند به هر نقطه ای با همان اثر اعمال شود

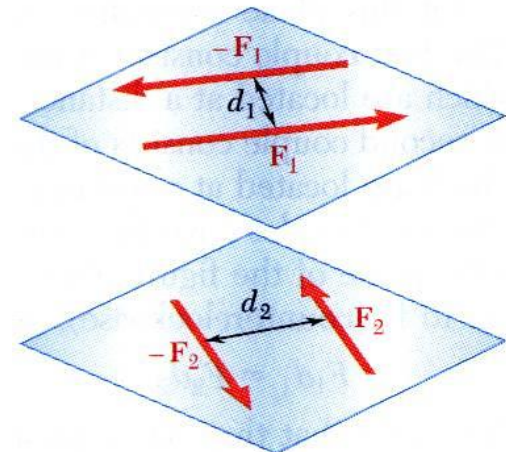
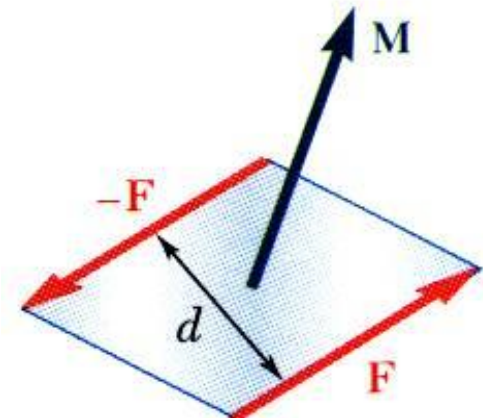


Vector Mechanics for Engineers: Statics

گشتاور یک کوپل

از تعریف لنگر کوپل، نتیجه می شود دو کوپل، یکی متشکل از نیروهای F_1 و $-F_1$ و دیگری متشکل از نیروهای F_2 و $-F_2$ دارای لنگرهای برابرند به شرطی که:

- $F_1 d_1 = F_2 d_2$
- همچنین دو کوپل در صفحات موازی (یا در صفحه یکسان) و همسو باشند.



- فرض کنید صفحات P_1 و P_2 هر کدام شامل یک کوپل

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 \text{ in plane } P_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 \text{ in plane } P_2$$

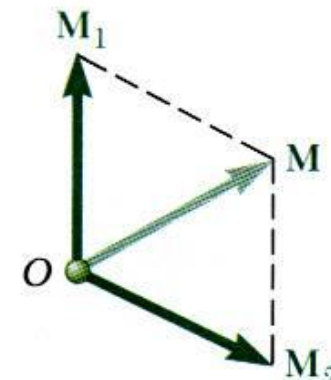
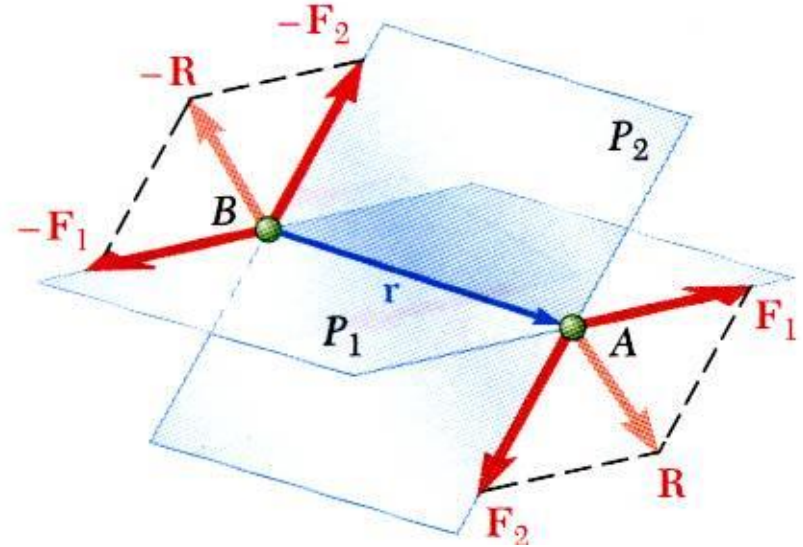
- برآیند نیروها تشکیل یک کوپل را می دهند

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

- توسط نظریه Varignon

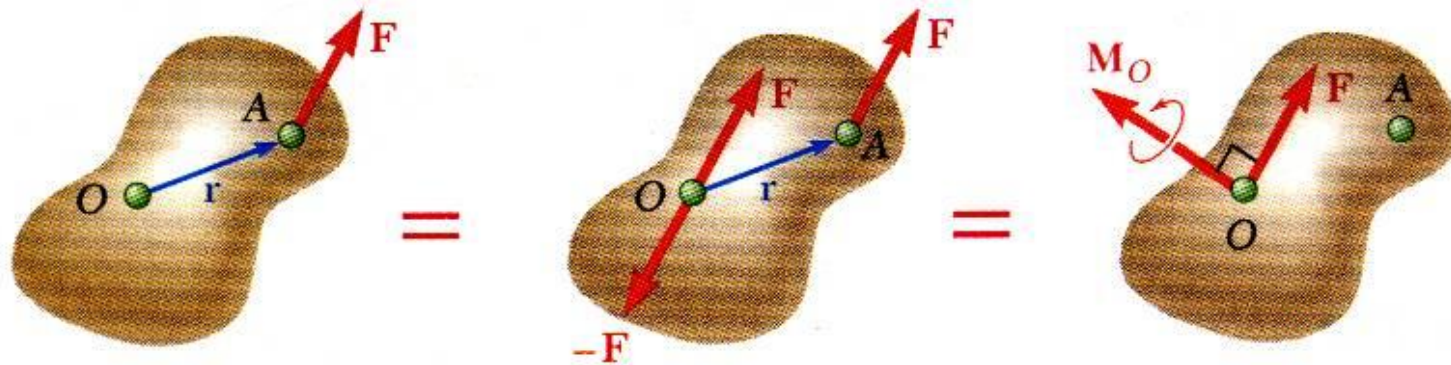
$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{aligned}$$

- جمع دو کوپل یک کوپلی هست که مساوی بردار برآیند دو کوپل می باشد



Vector Mechanics for Engineers: Statics

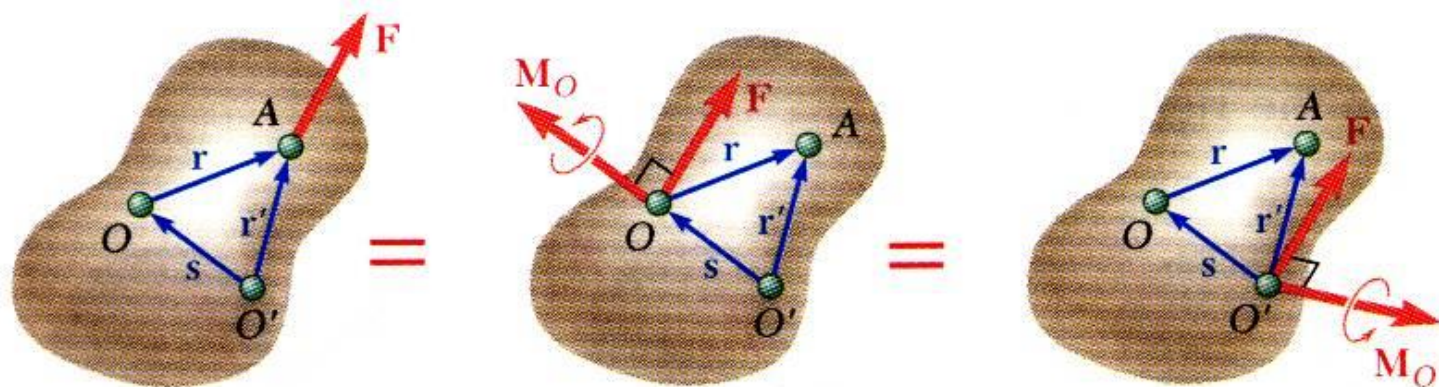
تجزیه یک نیروی معین به کوپل و نیرو در O



- بردار نیروی F نمی تواند به سادگی به نقطه O انتقال داده شود بدون اصلاح رفتارش بر جسم.
- اعمال بردار نیروهای مخالف و مساوی در نقطه O که هیچ اثری بر روی جسم ندارند
- هر سه نیرو ممکن است توسط یک بردار نیروی معادل و بردار کوپل جایگزین شوند. در واقع یک سیستم کوپل نیرو

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تجزیه یک نیروی معین به کوپل و نیرو در O



- حرکت نیروی F از نقطه A به یک نقطه متفاوت O' احتیاج به یک بردار کول متفاوت M_O .

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

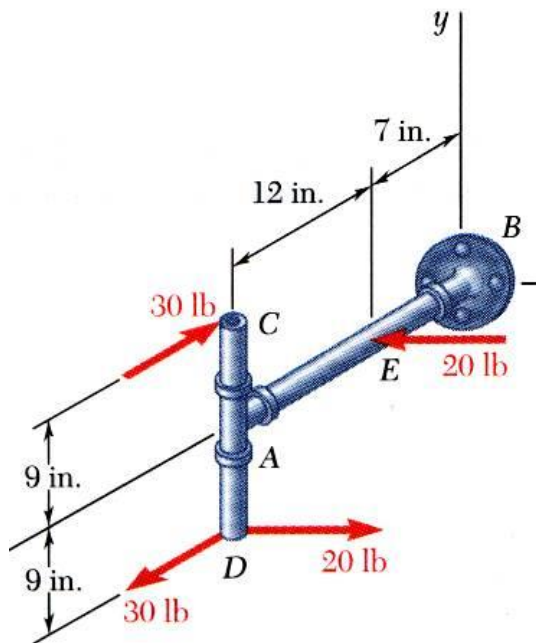
- ممان F حول نقطه O و O' به صورت زیر می باشند

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O'} &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F} \\ &= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}\end{aligned}$$

- حرکت سیستم کوپل نیرو از O به O' احتیاج به اضافه کردن ممان نیرو در O حول O' دارد.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.4



حل:

• اعمال دو نیروی 20 lb مساوی و در جهت خلاف هم در نقطه A در جهت $+x$

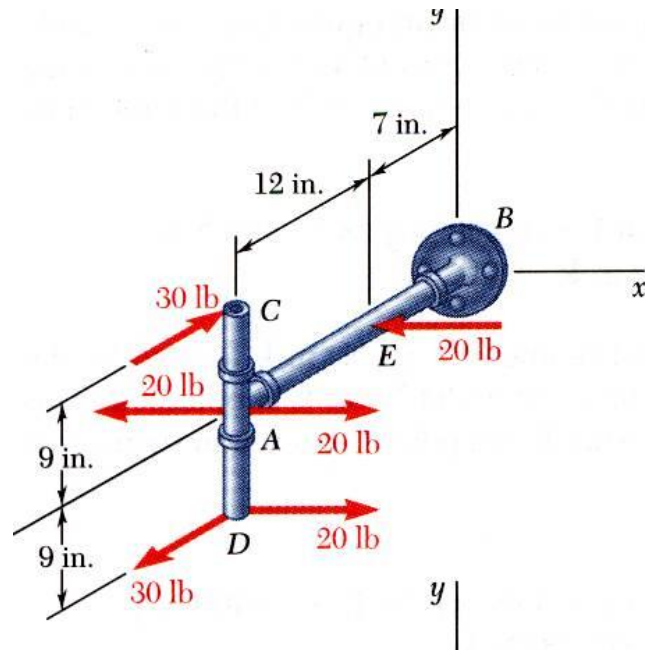
• راه حل دیگر، محاسبه جمع ممان های چهار نیرو حول D

مولفه های کوپل هم ارز با دو کوپل نشان داده شده را بیابید



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.4



- اعمال دو نیروی 20 lb مساوی و در جهت خلاف هم در نقطه A در جهت $\pm x$

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

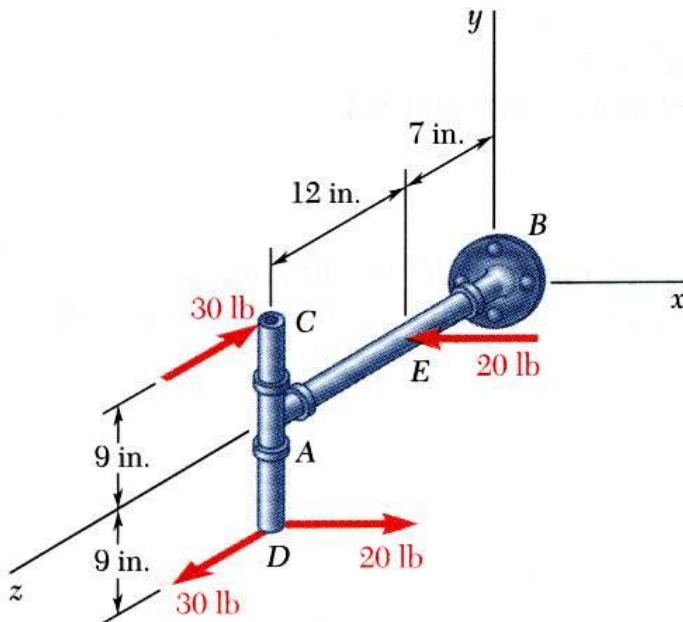
$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.4

- راه حل دیگر، محاسبه جمع ممان های چهار نیرو حول D



$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18 \text{ in.})\vec{j} \times (-30 \text{ lb})\vec{k} + [(9 \text{ in.})\vec{j} - (12 \text{ in.})\vec{k}] \times (-20 \text{ lb})\vec{i}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

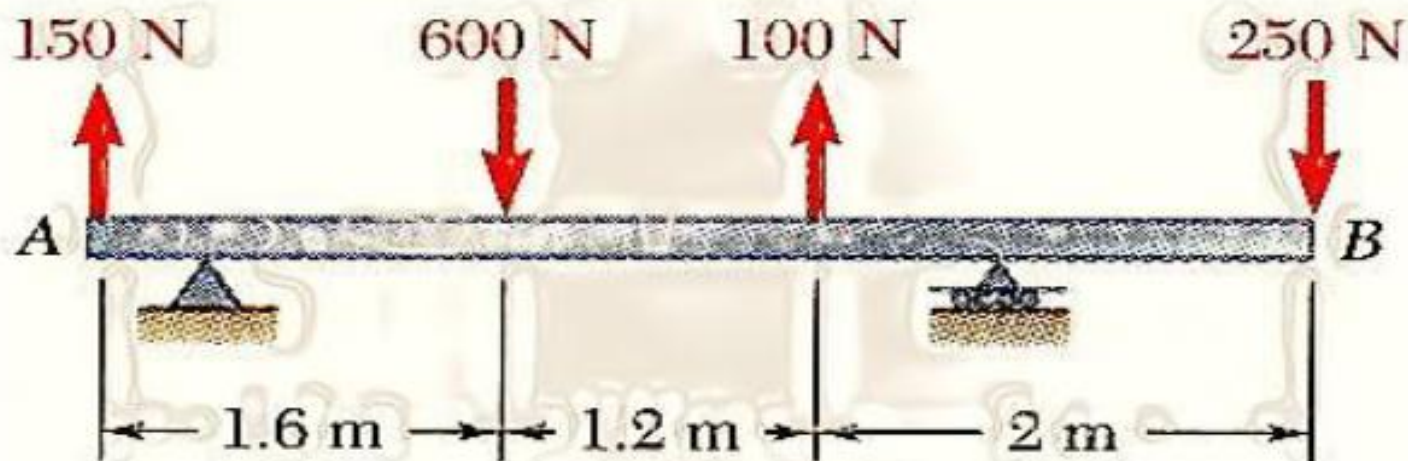
Vector Mechanics for Engineers: Statics

□ برای تیر نشان داده شده مطلوبست ساده سازی سیستم نیروی در:

a. نقطه A

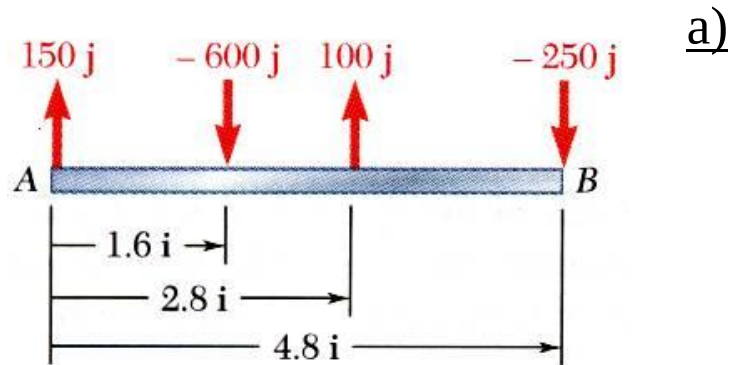
b. در نقطه B

c. تعیین بردار برآیند نیروی کلی
لازم نیست واکنشهای تکیه گاهی را در محاسبات دخالت دهید.



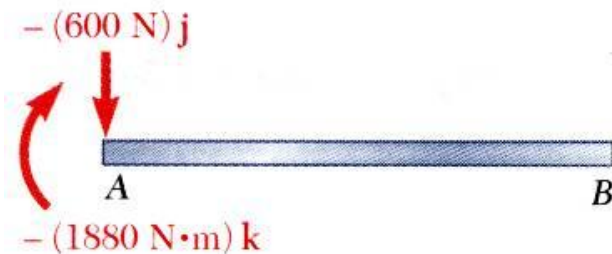
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.5



$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum \vec{F} \\ &= (150 \text{ N})\vec{j} - (600 \text{ N})\vec{j} + (100 \text{ N})\vec{j} - (250 \text{ N})\vec{j}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}}$$



$$\begin{aligned}\vec{M}_A^R &= \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \\ &= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j}) \\ &\quad + (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})\end{aligned}$$

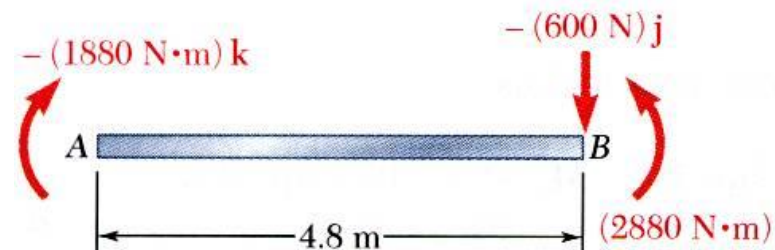
$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 3.5



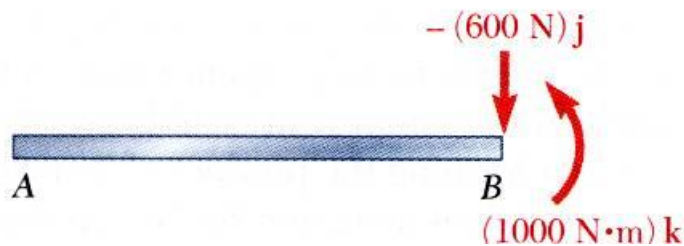
b)



$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_B^R &= \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R} \\ &= -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k} + (-4.8 \text{ m})\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j} \\ &= -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k} + (2880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_B^R = +(1000 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

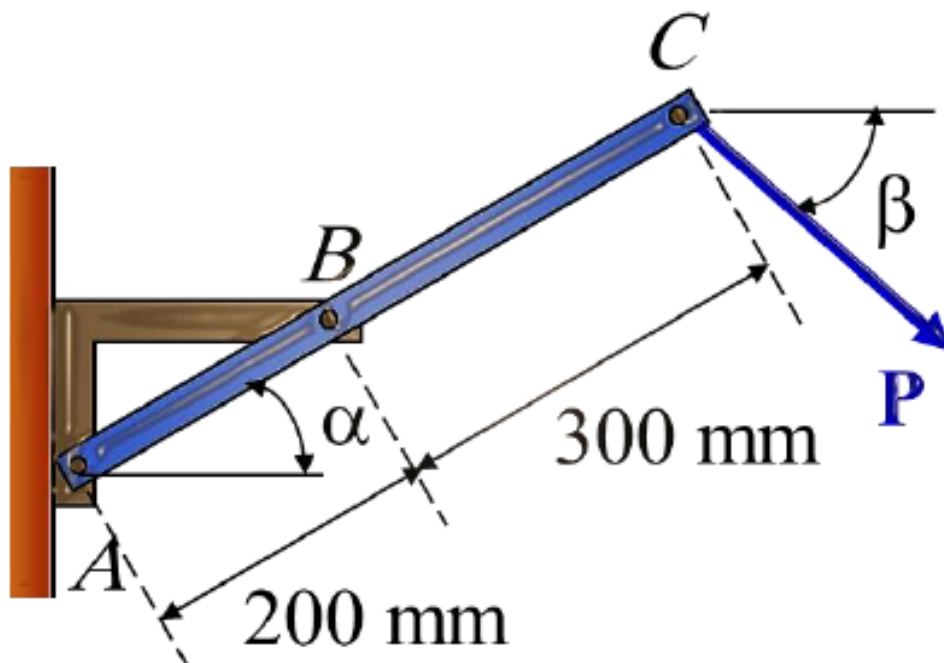


Vector Mechanics for Engineers: Statics

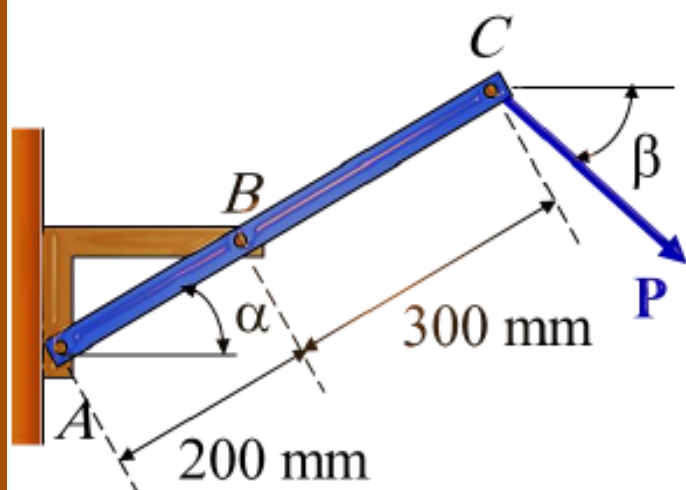
□ نیروی P به بزرگی 250 N به انتهای میله AC بطول 0.5 m که توسط گیره ای در نقاط A و B به تکیه گاه مهار شده است وارد می شود. اگر $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ درجه باشد مطلوبست:

(a) کوپل معادل نیروی P در نقطه B .

(b) سیستم دو نیرویی معادل با P .



Vector Mechanics for Engineers: Statics



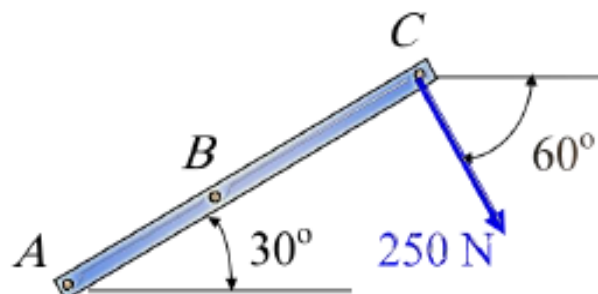
✓ کوپل معادل نیروی P در نقطه B.

$$F = 250 \text{ N}$$

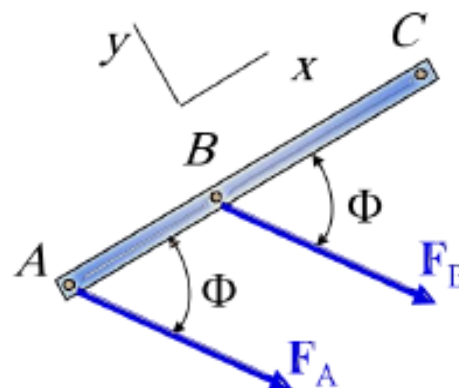
$$\Sigma \mathbf{F} : \mathbf{F} = \mathbf{P}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B : M = - (0.3 \text{ m})(250 \text{ N}) = -75 \text{ N}$$

$$F = 250 \text{ N} \quad 60^\circ, \quad \mathbf{M} = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

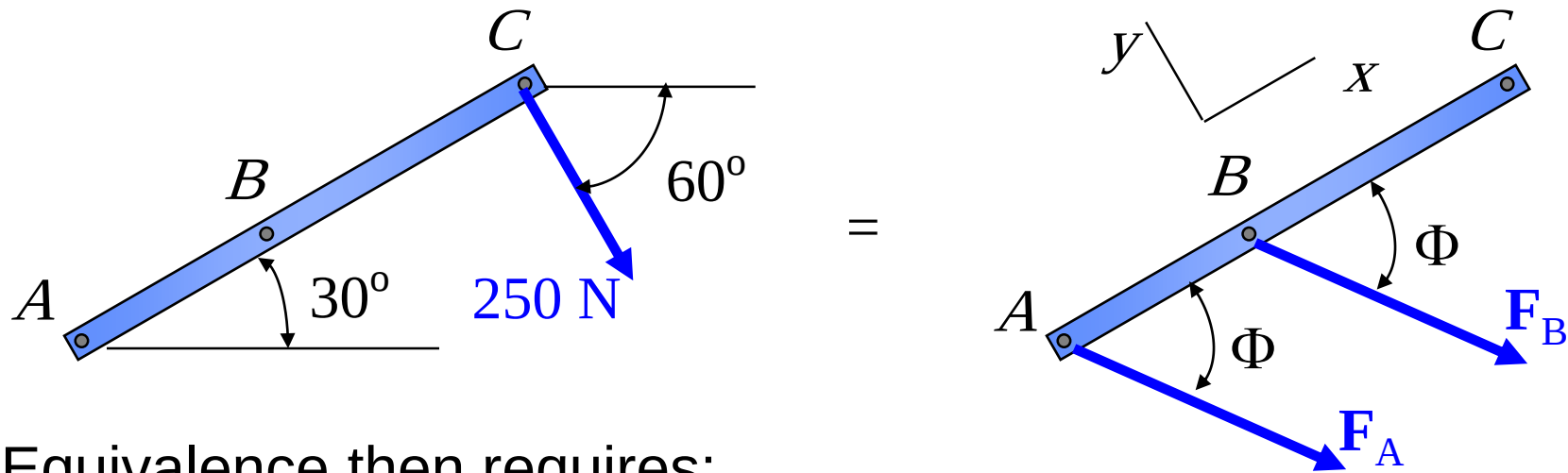


=



✓ سیستم نیرویی معادل با P.

$$F_A + F_B = P = 250$$



Equivalence then requires:

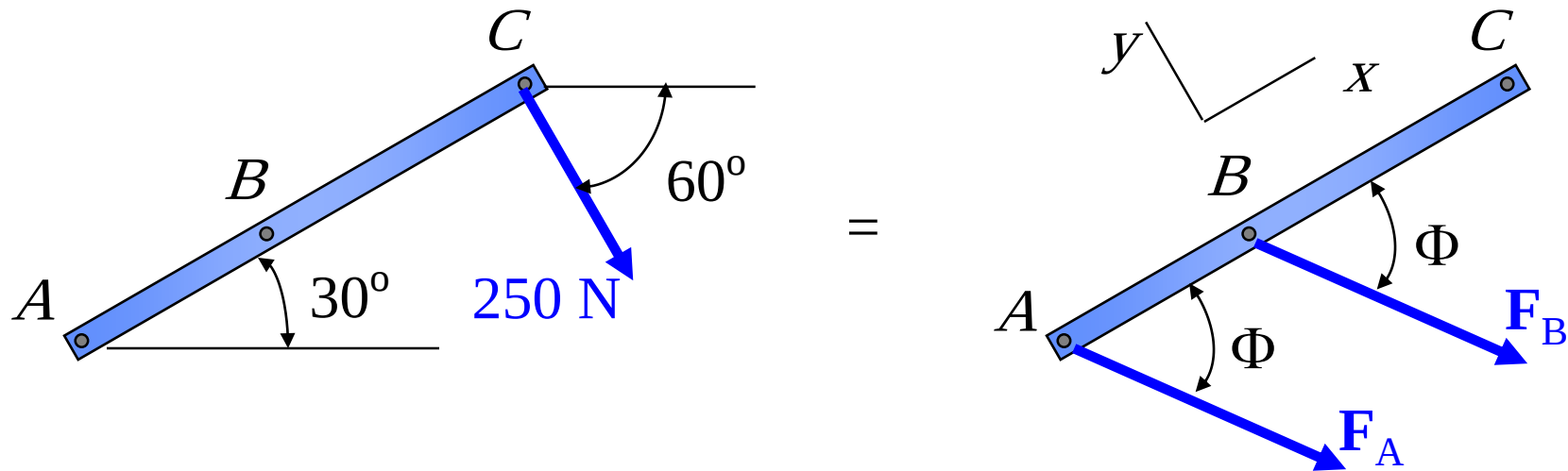
$$\Sigma F_x: \quad 0 = F_A \cos \Phi + F_B \cos \Phi$$

$$F_A = -F_B \quad \text{or} \quad \cos \Phi = 0$$

$$\Sigma F_y: \quad -250 = -F_A \sin \Phi - F_B \sin \Phi$$

If $F_A = -F_B$ then $-250 = 0$ reject

Consequently $\cos \Phi = 0$ or $\Phi = 90^\circ$ and $F_A + F_B = 250$



Also:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B: - (0.3 \text{ m})(250 \text{ N}) = (0.2 \text{ m}) F_A$$

$$\text{or } F_A = -375 \text{ N}$$

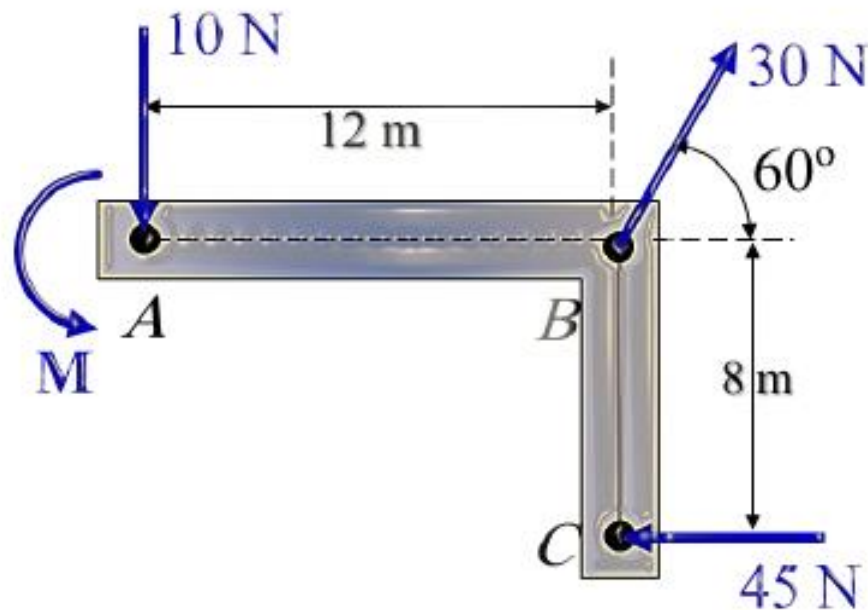
$$\text{and } F_B = +675 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_A = 375 \text{ N} \quad \nearrow 60^\circ, \quad \mathbf{F}_B = 625 \text{ N} \quad \searrow 60^\circ$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

□ یک لنگر به بزرگی $54\text{ N}\cdot\text{m}$ و سه نیرو مطابق شکل به یک نبشی قلاب وارد می شوند، مطلوب است:

- (a) برآیند این سیستم نیرویی.
(b) محل برآیند یا امتداد آن روی دو ضلع.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

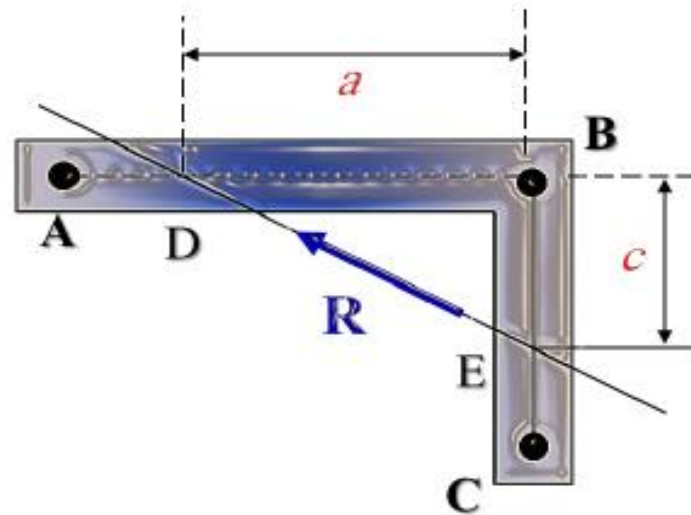
✓ برای تعیین برآیند این سیستم نیرویی باید مولفه های نیرویی را بدست آوریم:

$$\Sigma \mathbf{F} : \mathbf{R} = (-10 \mathbf{j}) + (-45 \mathbf{i}) + (30 \cos 60^\circ \mathbf{i} + 30 \sin 60^\circ \mathbf{j})$$

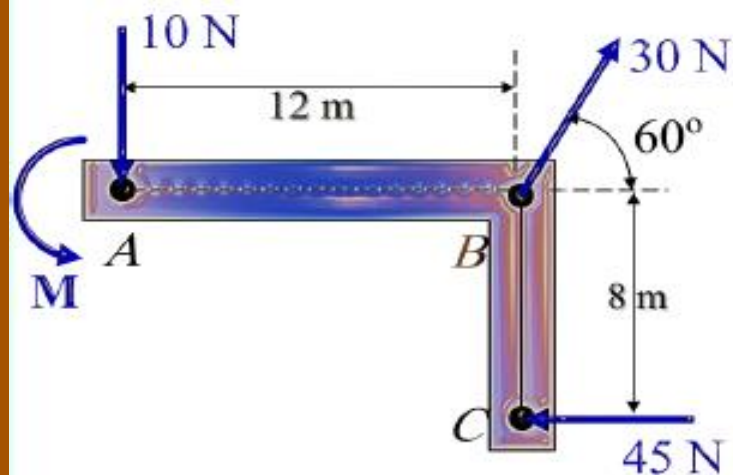
$$= -(30 \text{ N}) \mathbf{i} + (15.98 \text{ N}) \mathbf{j}$$



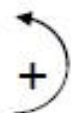
$$R = 34 \text{ N} \quad 28^\circ$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

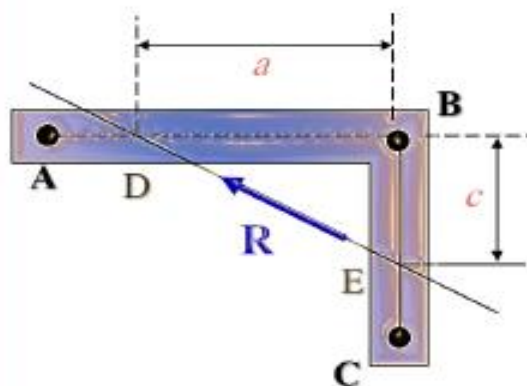


✓ تعیین فواصل a و c (مولفه های R)
ابتدا لنگر را B حساب می کنیم.



$$\Sigma M_B: M_B = (54 \text{ N}\cdot\text{m}) + (12 \text{ m})(10 \text{ N}) - (8 \text{ m})(45 \text{ N})$$

$$= -186 \text{ N}\cdot\text{m}$$



$$R = -(30 \text{ N})\mathbf{i} + (15.98 \text{ N})\mathbf{j}$$



$$\Sigma M_B: -186 \text{ N}\cdot\text{m} = -a (15.98 \text{ N}) \quad a = 11.64 \text{ m}$$



$$\Sigma M_B: -186 \text{ N}\cdot\text{m} = c (30 \text{ N}) \quad c = 6.20 \text{ m}$$

مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

تعادل اجسام صلب

فریدیناند پی. بی. ایر
ای. راسل جانسون

ارائه: سید محمد علی ابطحی



- برای یک جسم صلب در تعادل استاتیکی، نیروهای خارجی و ممانها در حاک تعادل می باشند و هیچ حرکت انتقالی یا دورانی به جسم وارد نخواهند کرد.

- شرایط لازم و کافی برای تعادل جسم استاتیکی یک جسم صلب این است که نیرو و گشتاور معادل از همه نیروهای خارجی از یک سیستم مساوی با صفر باشد

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

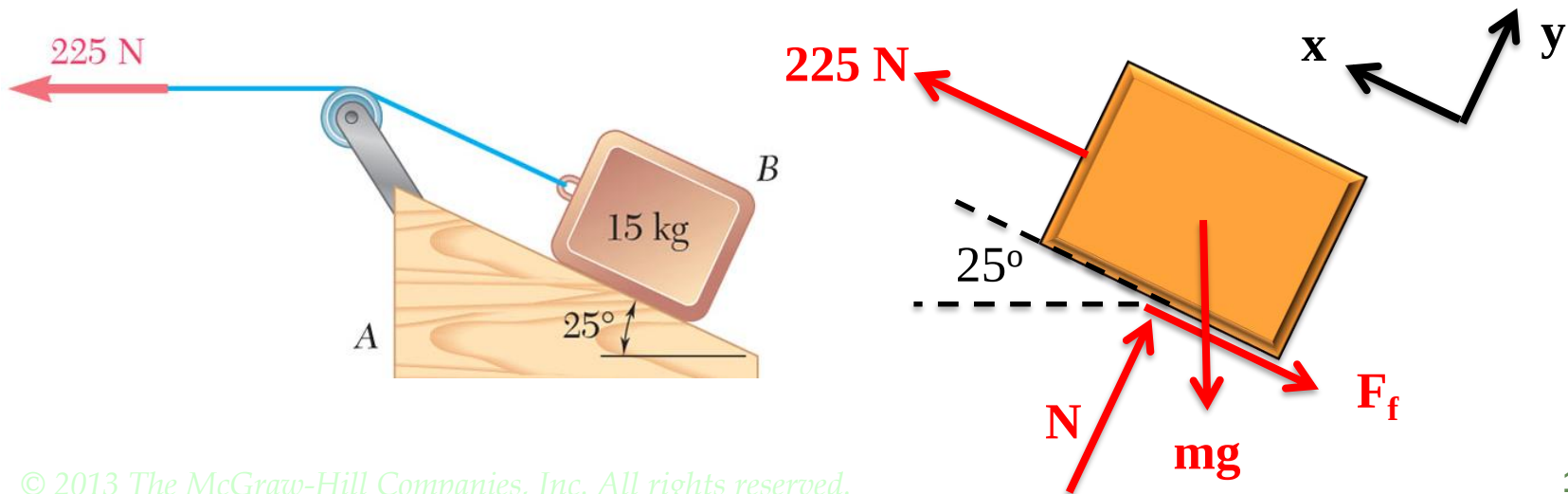
- با تجزیه هر یک از نیروها و ممانها به مولفه های کارتیزینشان شش مولفه اسکالر زیر بدست می آیند که شرایط را برای تعادل استاتیک توصیف می کنند

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

دیاگرام آزاد جسم

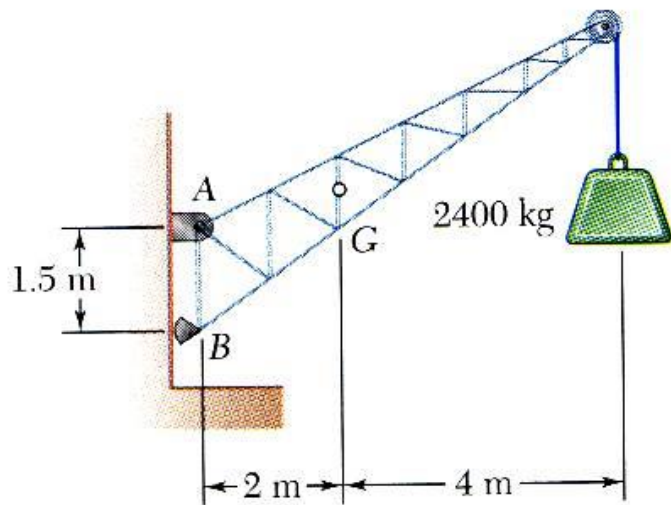
دیاگرام آزاد یک جسم شبیه به کاری است که در استاتیک انجام می دادیم. ما دیاگرام سینتیک در آنالیز دینامیکی خود را اضافه خواهیم کرد

1. جدا کردن جسم مورد نظر (free body)
2. کشیدن سیستم محور مختصات (قطبی، کارتیزین و ...)
3. اضافه کردن نیروهای اعمالی (مانند: وزن، نیروی کشیدن 225 پوندی)
4. جایگذاری تکیه گاهها با نیروها (مثل نیروی نرمال (N))
5. کشیدن بعدهای مناسب (معمولاً زوایای قرارگیری ذرات)



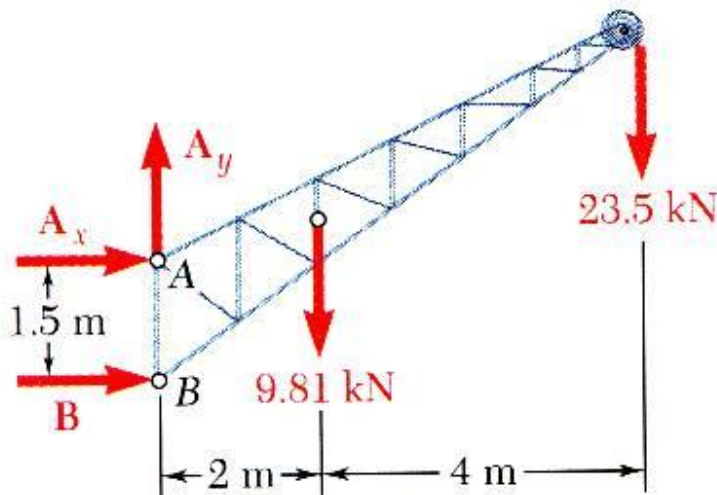
Vector Mechanics for Engineers: Statics

نمودار جسم آزاد



اولین قدم در آنالیز تعادل استاتیک یک جسم صلب، شناسایی همه نیروهای عمل کننده روی یک جسم با یک نمودار جسم آزاد می باشد.

- ابتدا جسم آزاد را انتخاب و آن را از زمین و سایر اجسام جدا می کنیم. سپس مرز جسم منزوی شده را رسم می کنیم
- نشان دادن نقطه اثر، مقدار و جهت نیروهای خارجی معلوم شامل وزن جسم صلب

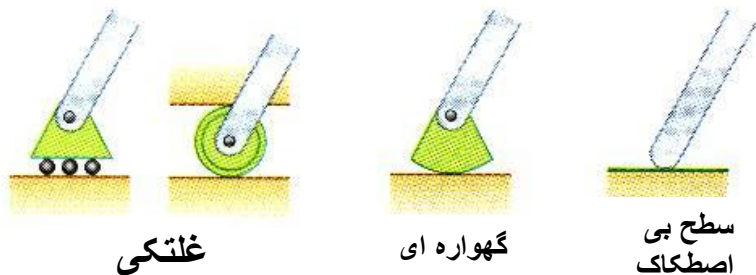


- تعریف نقطه اثر و جهت نیروهای خارجی مجهول که معمولاً از واکنش هایی تشکیل می شوند که زمین و سایر اجسام برای مقابله با حرکت هایی که جسم صلب می تواند دارا باشد بر آن وارد می کنند.

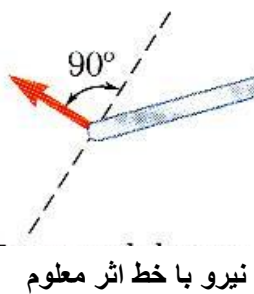
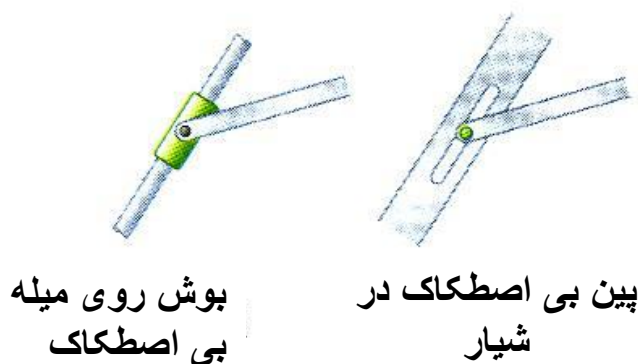
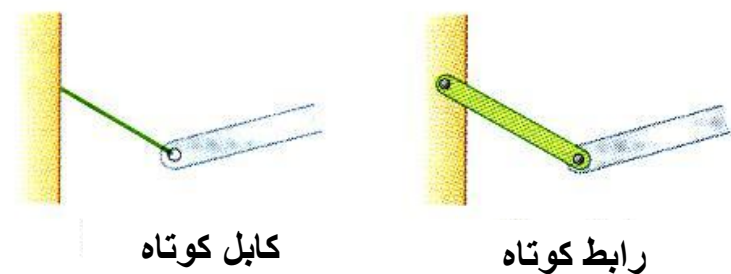
- ابعاد را نیز باید در نمودار جسم آزاد نشان داد، زیرا برای محاسبه لنگر نیروها مورد نیازند. نمودار جسم آزاد نباید حاوی اطلاعاتی بیش از این باشد.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

واکنش ها در تکیه گاه ها و اتصالات سازه دو بعدی



- واکنش های هم ارز یک نیرو با خط اثر معلوم



Vector Mechanics for Engineers: Statics

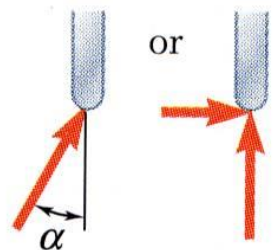
Reactions at Supports and Connections for a Two-Dimensional Structure



پین (مفصل) یا لولای بی اصطکاک

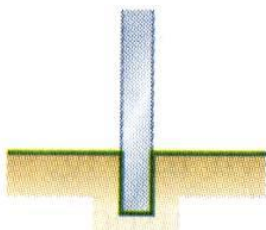


سطح زبر

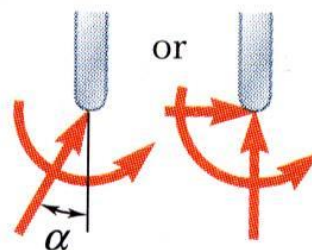


نیرو با جهت مجهول

- واکنش های هم ارز یک نیرویی با جهت و مقدار مجهول



تکیه گاه ثابت

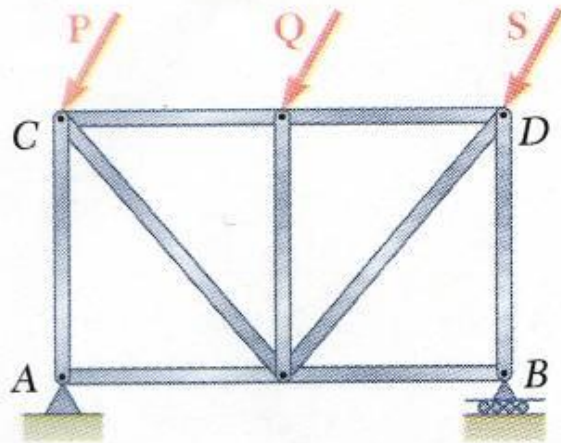


نیرو و کوپل

- واکنش های هم ارز یک نیرویی با جهت و مقدار مجهول و یک کوپل با مقدار مجهول

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعدادل جسم صلب در دو بعد



(a)

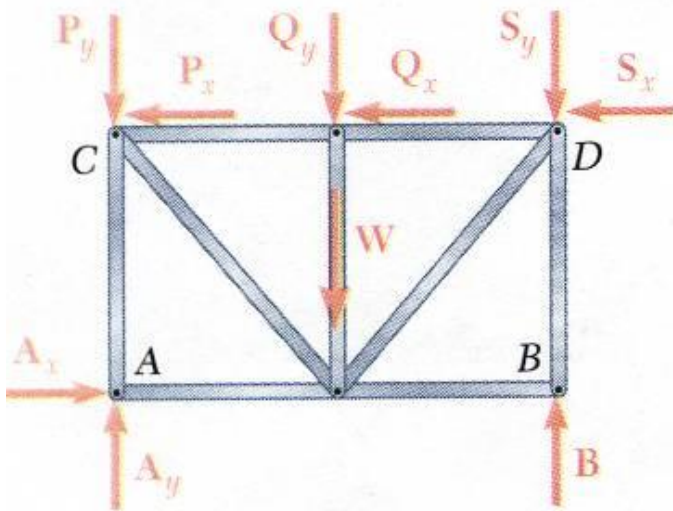
- برای همه نیروها و ممان های عمل کننده بر یک ساختار دوبعدی

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- معادلات تعدادل به صورت زیر می باشند

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

که در آن A یک نقطه اختیاری در صفحه سازه می باشد



(b)

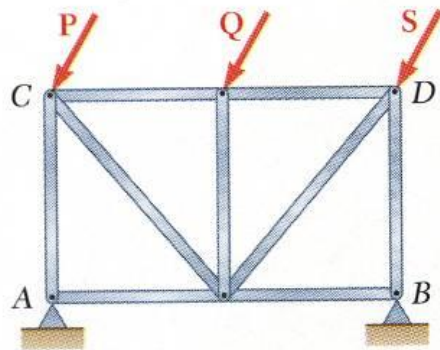
- با حل سه معادله بالا نمی توان بیش از سه مجهول را حل کرد

- گرچه با معادله های اضافی نمی توان بیش از سه معادله مستقل به دست آورد ولی هر یک از آنها را با دیگری می توان جایگزین کرد

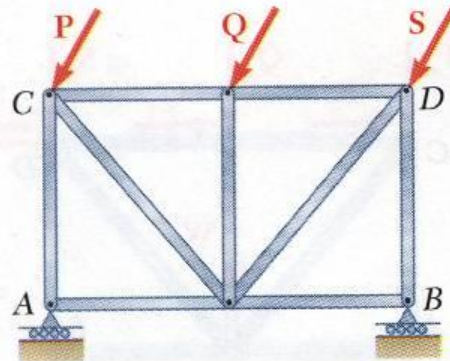
$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

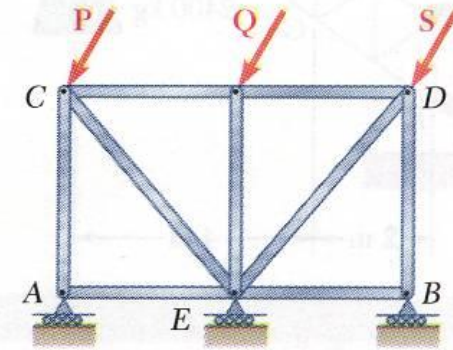
واکنش های نامعین استاتیکی



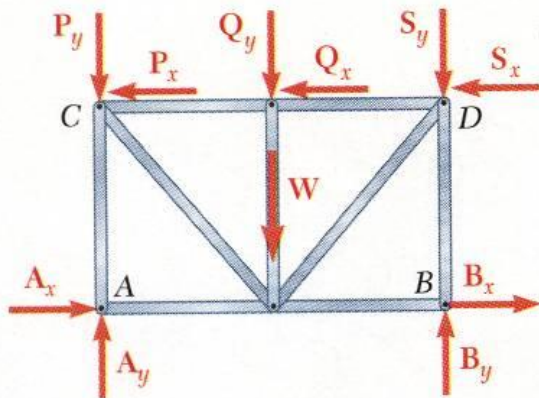
(a)



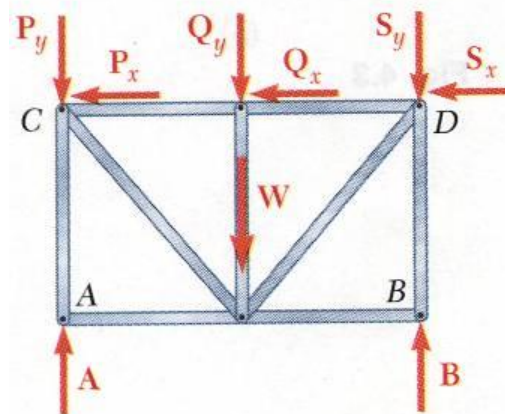
(a)



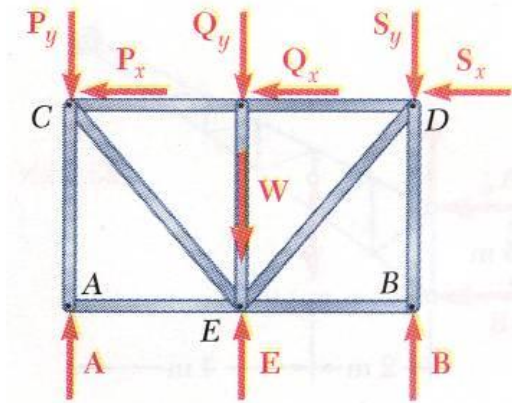
(a)



(b)



(b)



(b)

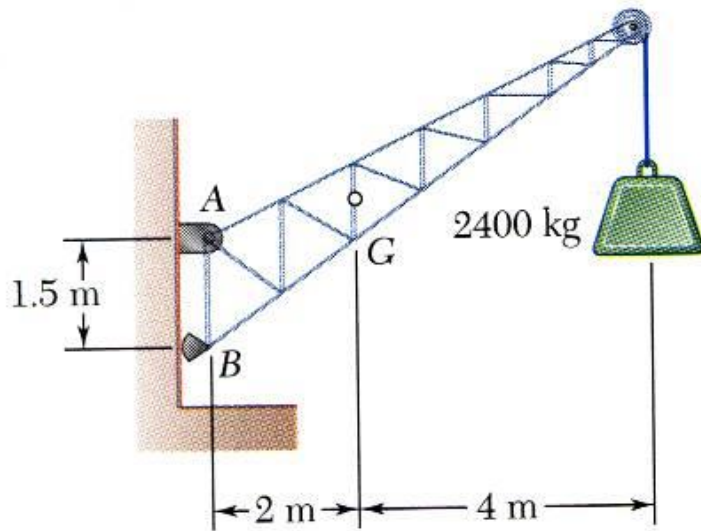
- تعداد مجهولات بیشتر از معادله ها

- تعداد مجهولها از تعداد معادلات کمتر است. مقید ناقص

- تعداد مجهولات و معادلات مساوی می باشد اما قید نامناسب است

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.1



SOLUTION:

- ایجاد نمودار جسم آزاد جرثقیل
- تعیین B توسط حل معادله با جمع ممان ها همه نیروها حول A.

- تعیین واکنش ها در A توسط حل معادلات جمع همه مولفه های نیروی افقی و همه مولفه های نیروی عمودی

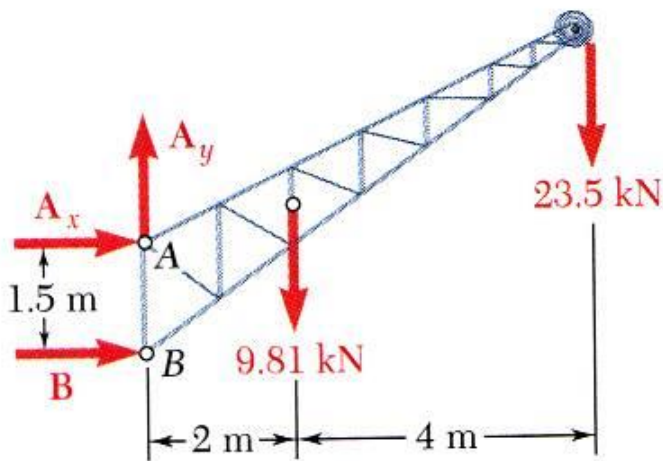
جرثقیل ساکنی، به جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم، وزنه ۲۴۰۰ کیلوگرمی را بالا می برد. جرثقیل توسط تکیه گاه مفصلی A و تکیه گاه گهواره ای B در وضعیت نشان داده شده قرار دارد. مرکز ثقل جرثقیل در G می باشد. مولفه های واکنش های A و B را بیابید

- واریسی، اگر مجموع لنگرهای تمام نیروهای خارجی نسبت به نقطه B صفر باشد. مقادیر واکنش های بدست آمده صحت دارد



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.1



- تعیین B توسط حل معادله با جمع ممان ها همه نیروها حول A.

$$\sum M_A = 0: + B(1.5\text{m}) - 9.81\text{ kN}(2\text{m}) - 23.5\text{ kN}(6\text{m}) = 0$$

$$B = +107.1\text{ kN}$$

- تعیین واکنش ها در A توسط حل معادلات جمع همه مولفه های نیروی افقی و همه مولفه های نیروی عمودی

- کشیدن دیاگرام آزاد

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

$$A_x = -107.1\text{ kN}$$

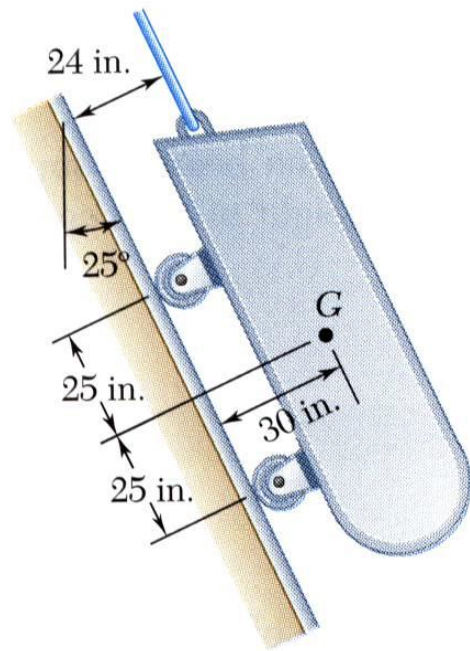
$$\sum F_y = 0: A_y - 9.81\text{ kN} - 23.5\text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33.3\text{ kN}$$

- چک کردن مقادیر بدست آمده

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.2



SOLUTION:

- نمودار جسم آزاد جسم را ترسیم می کنیم

- تعیین واکنش ها در چرخ ها با حل معادلات برای جمع ممانها حول نقطه بالای هر چرخ

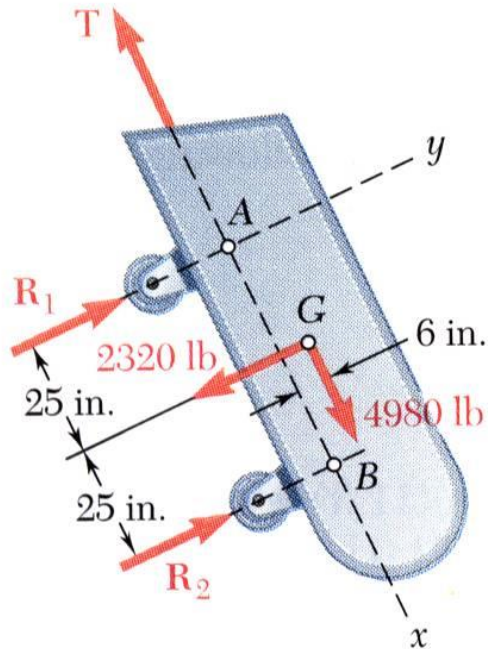
- تعیین کشش کابل با حل معادله برای جمع مولفه های نیرو موازی با گاری

- واریسی نتایج

یک گاری روی سطحی که با عمود زاویه ۲۵ درجه دارد در حالت سکون است. وزن کل گاری و بار آن ۵۵۰۰ lb و نقطه اثر آن به فاصله ۳۰ in. از سطح و در وسط بین دو محور است. گاری با کابلی که به فاصله ۲۴ in. از سطح قرار دارد نگه داشته شده است. کشش کابل و واکنش در هر زوج چرخ را بیابید

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.2



• تعیین عکس العمل ها در چرخ ها

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: & -(2320 \text{ lb})25\text{in.} - (4980 \text{ lb})6\text{in.} \\ & + R_2(50\text{in.}) = 0\end{aligned}$$

$$R_2 = 1758 \text{ lb}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: & +(2320 \text{ lb})25\text{in.} - (4980 \text{ lb})6\text{in.} \\ & - R_1(50\text{in.}) = 0\end{aligned}$$

$$R_1 = 562 \text{ lb}$$

• کشیدن دیاگرام آزاد

$$\begin{aligned}W_x &= +(5500 \text{ lb})\cos 25^\circ \\ &= +4980 \text{ lb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_y &= -(5500 \text{ lb})\sin 25^\circ \\ &= -2320 \text{ lb}\end{aligned}$$

• تعیین کشش کابل

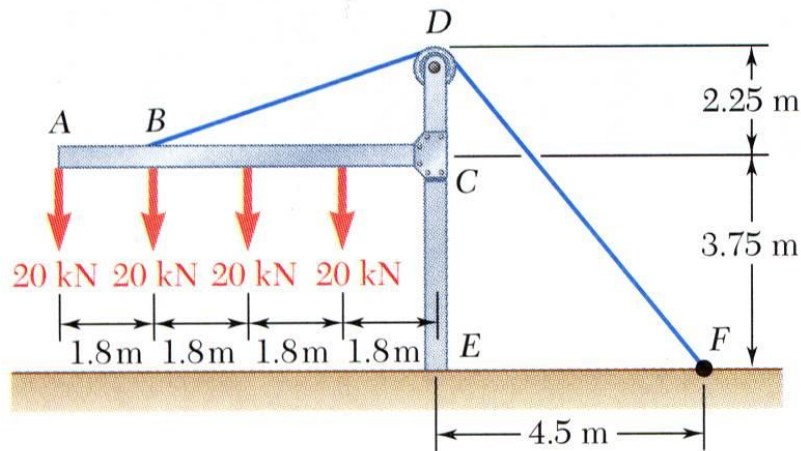
$$\sum F_x = 0: \quad +4980 \text{ lb} - T = 0$$

$$T = +4980 \text{ lb}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.3

حل:



• کشیدن دیاگرام آزاد برای قاب و کابل

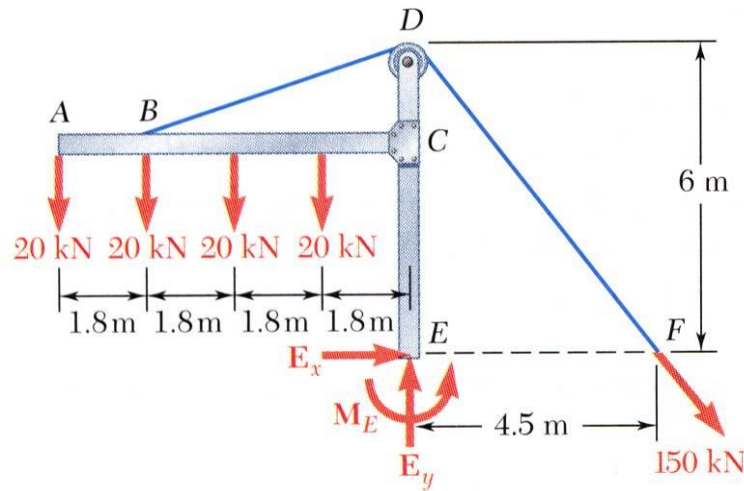
• حل سه معادله تعادل برای مولفه های نیروی واکنش و کوپل در E

قابی، مطابق شکل، قسمتی از سقف ساختمان کوچکی را تحمل می کند. اگر کشش کابل 150kN باشد، واکنش را در تکیه گاه ثابت E بیابید



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.3



- حل سه معادله تعادل برای مولفه های نیروی واکنش و کوپل در E

$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

- کشیدن دیاگرام آزاد برای قاب و کابل

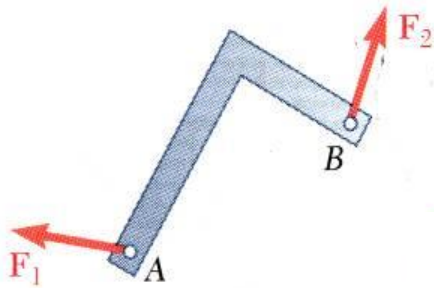
$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: & +20 \text{ kN}(7.2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5.4 \text{ m}) \\ & + 20 \text{ kN}(3.6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1.8 \text{ m}) \\ & - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})4.5 \text{ m} + M_E = 0 \end{aligned}$$

$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

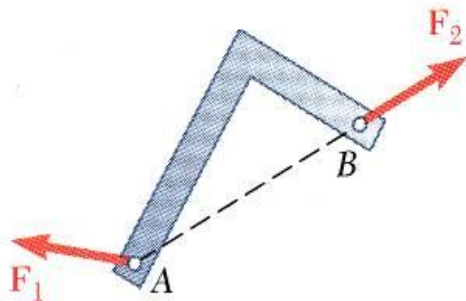
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعادل یک جسم دو نیرویی

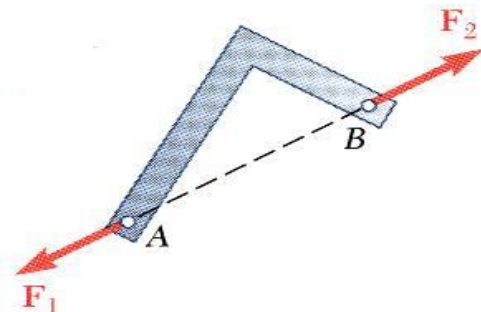
• بررسی یک نبشی تحت اثر دو نیروی F_1 و F_2



- برای تعادل استاتیکی، جمع ممان ها حول نقطه A باید برابر با صفر باشد. ممان F_2 باید برابر با صفر باشد. و به این دلیل، خط اثر F_2 باید از A بگذرد



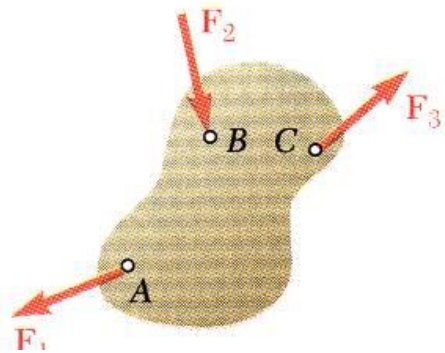
- به طور مشابه، خط اثر نیز باید از B عبور کند تا جمع ممانها حول B برابر صفر شود.



- جسم دو نیرویی را به عنوان جسم صلبی می توان تعریف کرد که نیروها فقط در دو نقطه آن اثر می کنند. در این صورت، برایندهای F_1 و F_2 دارای خط اثر یکسان، مقدار یکسان و با سوی مخالفند

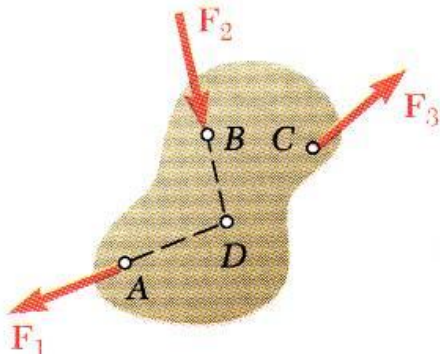
Vector Mechanics for Engineers: Statics

تعادل جسم سه نیرویی

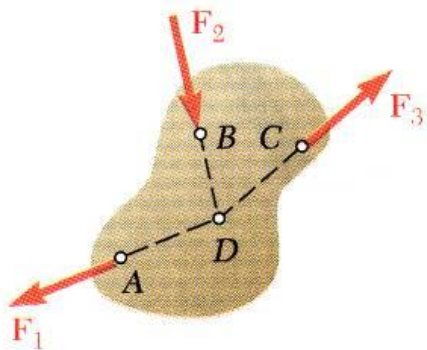


- جسم صلبی که تحت تاثیر سه نیروست یا به عبارت کلی، جسم صلبی که نیروها فقط در سه نقطه آن اثر می کنند

- فرض کنید خط اثرشان متقاطع باشد ممان F_2 و F_1 حول نقطه تقاطع که توسط D نشان داده شده است برابر با صفر می باشد



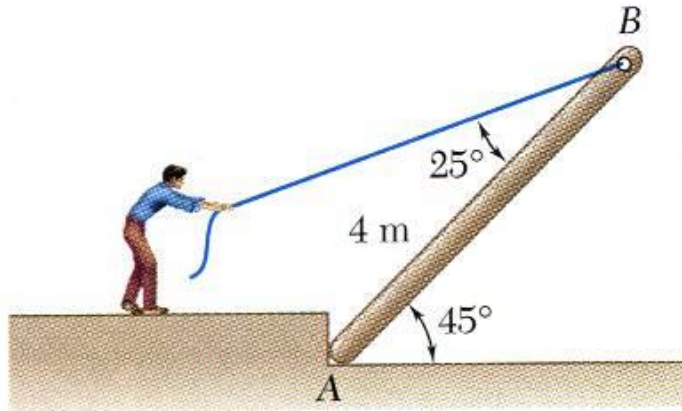
- زمانی که جسم صلب در حال تعادل باشد، جمع ممانهای F_1 , F_2 و F_3 حول هر محوری باید برابر با صفر باشد. این دنبال می کند که نیروی F_3 نسبت به D نیز صفر است و خط اثر F_3 باید از D بگذرد



- این سه خط اثر متقاطعند. اگر خطوط اثر متقاطع نباشند فقط می توانند موازی باشند.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.4



مردی تیر آهنی به جرم ۱۰ کیلوگرم و به طول ۴ متر را با طنابی بالا می برد. کشش T طناب و واکنش را در A بیابید

SOLUTION:

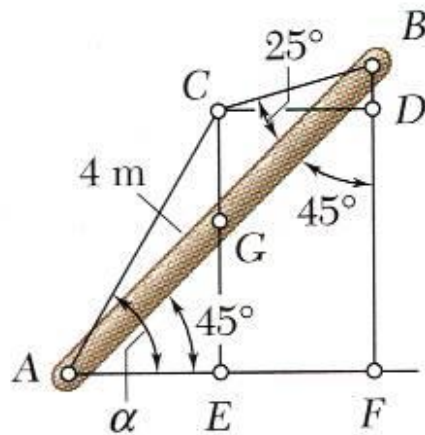
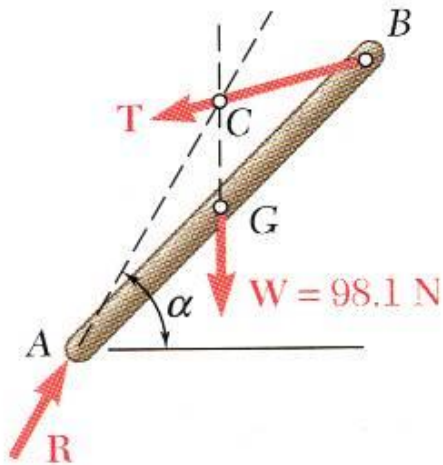
- نمودار جسم آزاد. تیر آهن یک جسم سه نیرویی است زیرا تحت تاثیر سه نیروی زیر قرار دارد. وزن W ، نیروی T وارده از طناب، و واکنش R زمین در A .
- جسم سه نیرویی. چون تیر آهن یک جسم سه نیرویی است نیروهای وارد بر آن متقاطع هستند لذا، واکنش R از نقطه تلاقی خطوط اثر وزن W و نیروی کشش T ، یعنی از نقطه C می گذرد. با توجه به این موضوع، زاویه بین واکنش R و افق را می توان تعیین کرد.
- مثلث نیرو، باید از قانون سینوسها استفاده کنیم.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.4

• کشیدن دیاگرام آزاد

• تعیین جهت نیروی عکس العمل R



$$AF = AB \cos 45 = (4 \text{ m}) \cos 45 = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = AE = \frac{1}{2} AF = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = CD \cot(45 + 25) = (1.414 \text{ m}) \tan 20 = 0.515 \text{ m}$$

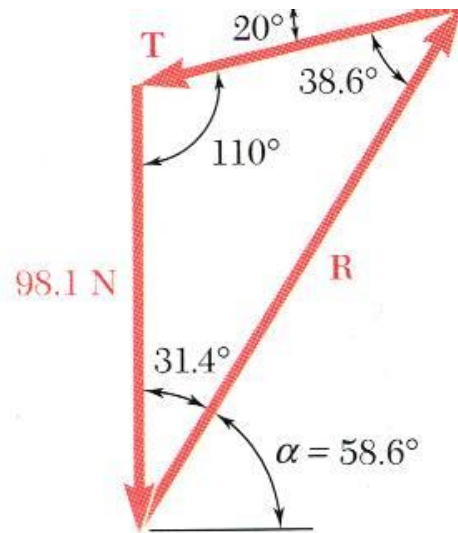
$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515) \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 4.4



• تعیین مقدار نیروی عکس العمل R

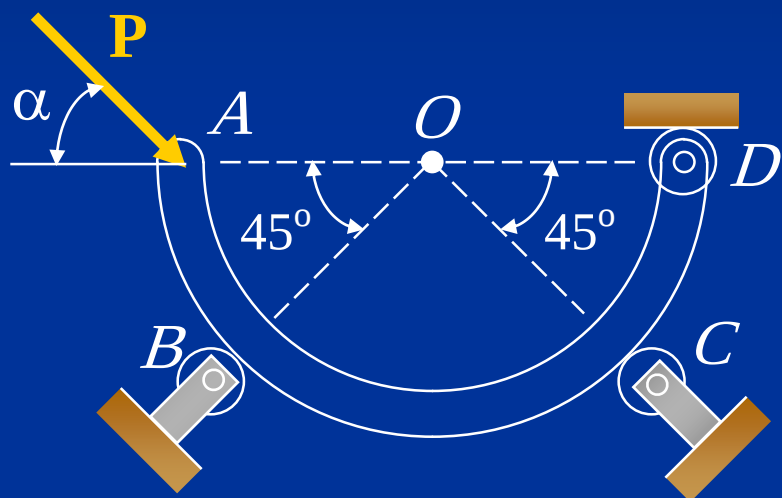
$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N}$$

$$R = 147.8 \text{ N}$$



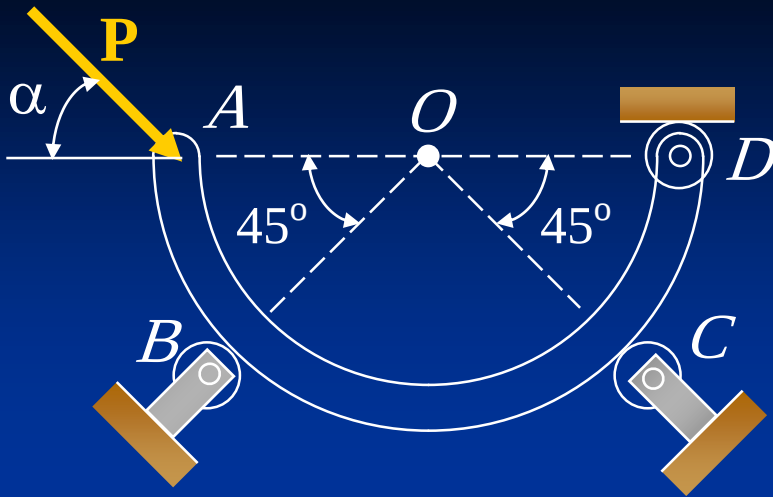
Problem 4.6



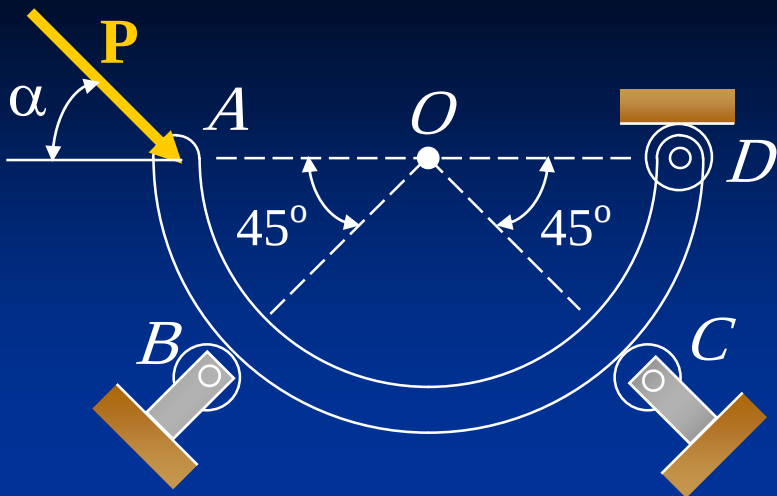
طناب نیم دایره ای $ABCD$ توسط چرخ
کوچکی در D و رولرهایی در B و C
در حال تعادل نگه داشته شده اند. می
دانیم $\alpha = 45^\circ$ تعیین نیروی عکس
العمل در C ، B و D

Solving Problems on Your Own

طناب نیم دایره ای $ABCD$ توسط چرخ کوچکی در D و رولرهایی در B و C در حال تعادل نگه داشته شده اند. می دانیم $\alpha = 45^\circ$ تعیین نیروی عکس العمل در C ، B و D



کشیدن دیاگرام آزاد



طناب نیم دایره ای $ABCD$ توسط چرخ کوچکی در D و رولرهایی در B و C در حال تعادل نگه داشته شده اند. می دانیم $\alpha = 45^\circ$ تعیین نیروی عکس العمل در D و C, B

2- نوشتن معادلات تعادل و بدست آوردن مجهولات

For two-dimensional structure the three equations might be:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

where O is an arbitrary point in the plane of the structure

or

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

where point B is such that line AB is not parallel to the y axis

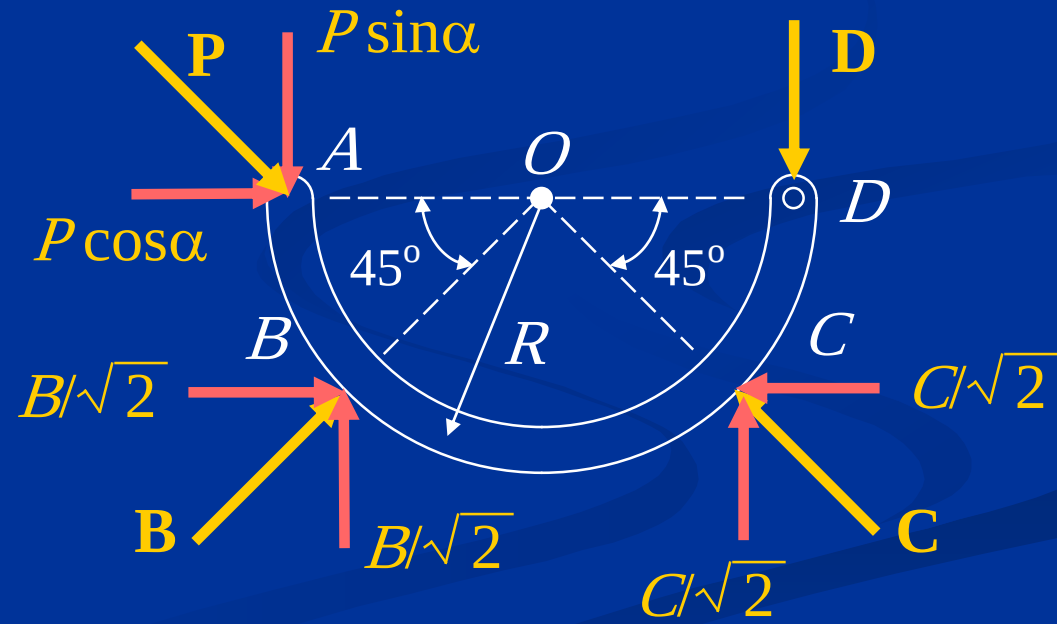
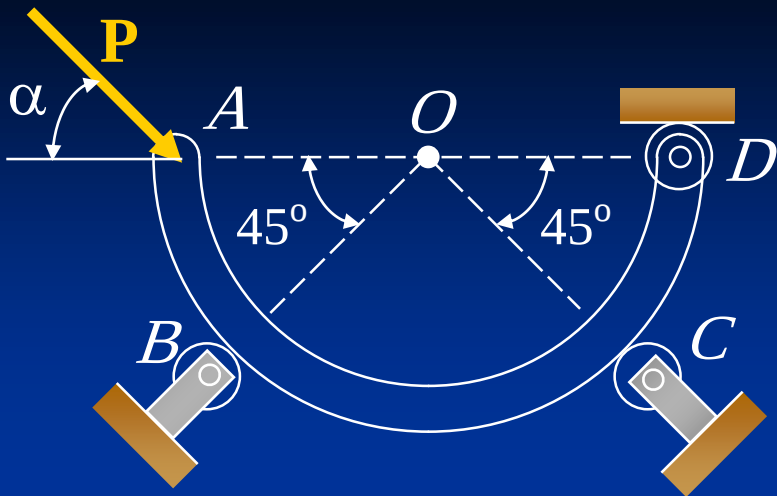
or

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$$

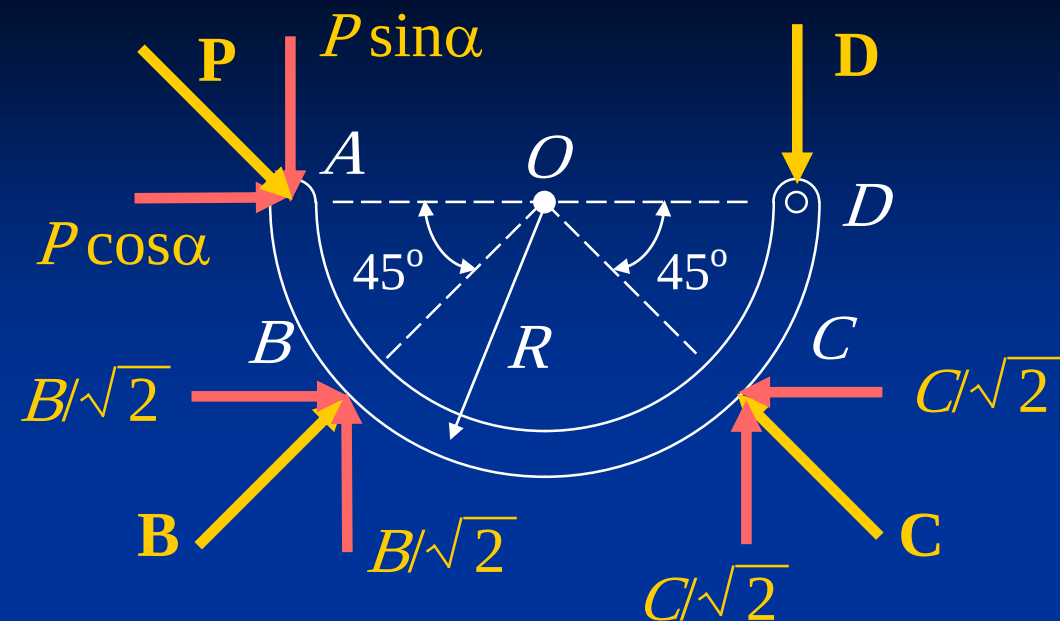
where the points A , B , and C do not lie in a straight line.

Problem 4.6 Solution

کشیدن دیاگرام آزاد جسم



نوشتن سه معادله تعادل

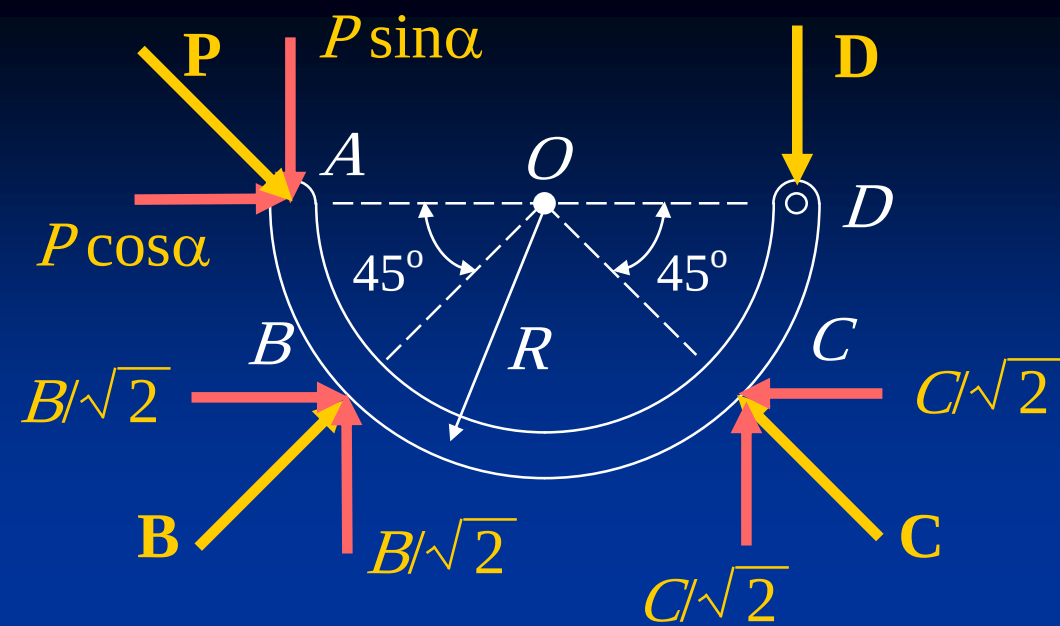


$$+\curvearrowright \Sigma M_O = 0: (P \sin \alpha) R - D(R) = 0 \quad D = P \sin \alpha \quad (1)$$

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: P \cos \alpha + B/\sqrt{2} - C/\sqrt{2} = 0 \quad (2)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: -P \sin \alpha + B/\sqrt{2} + C/\sqrt{2} - P \sin \alpha = 0$$

$$-2P \sin \alpha + B/\sqrt{2} + C/\sqrt{2} = 0 \quad (3)$$



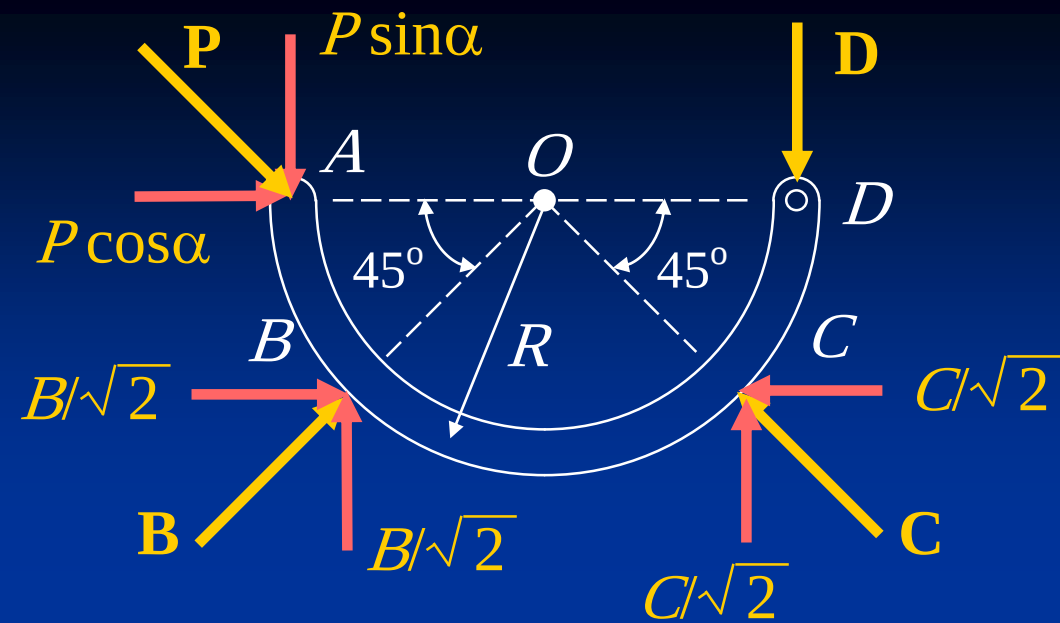
$$(2) + (3) \quad P(\cos \alpha - 2 \sin \alpha) + 2 B / \sqrt{2} = 0$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \sin \alpha - \cos \alpha) P \quad (4)$$

$$(2) - (3) \quad P(\cos \alpha + 2 \sin \alpha) - 2 C / \sqrt{2} = 0$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \sin \alpha + \cos \alpha) P \quad (5)$$

Problem 4.6 Solution



For $\alpha = 45^\circ$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = 1/\sqrt{2}$$

$$\text{EQ. (4): } B = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) P = \frac{1}{2} P;$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} P \nearrow 45^\circ$$

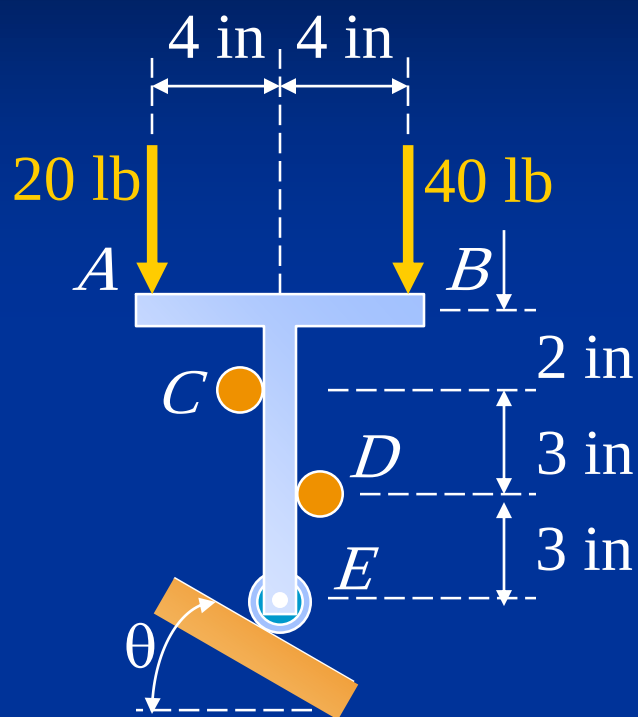
$$\text{EQ. (5): } C = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) P = \frac{3}{2} P;$$

$$\mathbf{C} = \frac{3}{2} P \nwarrow 45^\circ$$

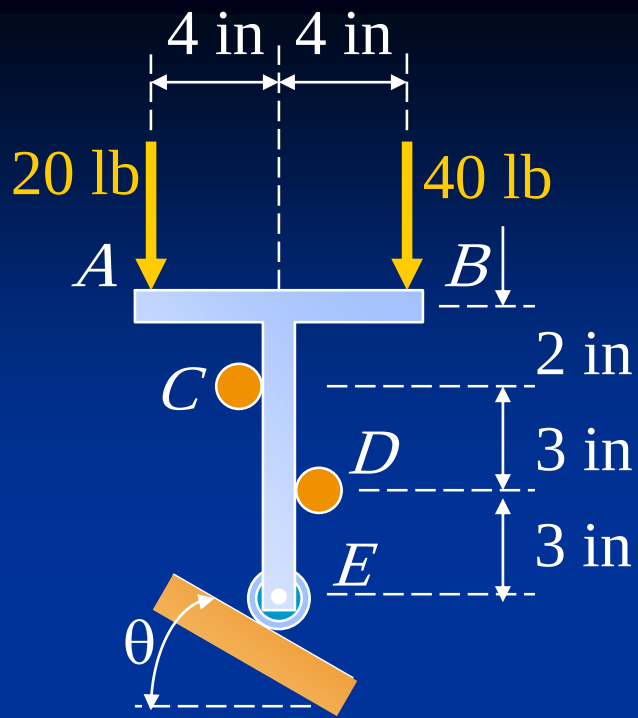
$$\text{EQ. (1): } D = P/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{D} = P/\sqrt{2} \downarrow$$

Problem 4.7

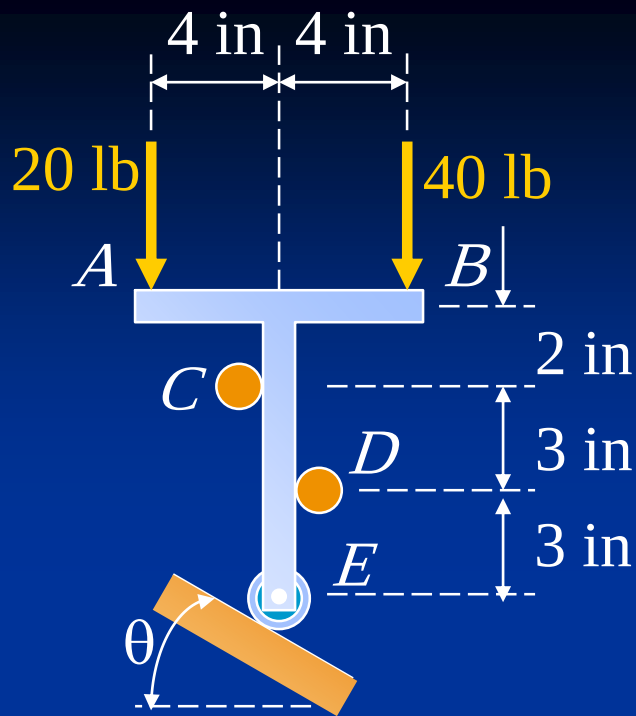


نمایشی T شکل نشان داده شده در شکل زیر
توسط یک چرخ کوچک E و دو پایه در C و
D ساپرت می شود. اگر اثر اصطکاک را در
نظر نگیریم، واکنش در نقاط C، D و E را
زمانی که $\theta = 30^\circ$ بدست آورید.



نمایشی T شکل نشان داده شده در شکل زیر
توسط یک چرخ کوچک E و دو پایه در C و
D ساپرت می شود. اگر اثر اصطکاک را در
نظر نگیریم، واکنش در نقاط C، D و E را
زمانی که $\theta = 30^\circ$ بدست آورید.

کشیدن دیاگرام آزاد



نمایشی T شکل نشان داده شده در شکل زیر توسط یک چرخ کوچک E و دو پایه در C و D ساپرت می شود. اگر اثر اصطکاک را در نظر نگیریم، واکنش در نقاط C، D و E را زمانی که $\theta = 30^\circ$ بدست آورید.

2- نوشتن معادلات تعادل

For two-dimensional structure the three equations might be:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

where O is an arbitrary point in the plane of the structure

or

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

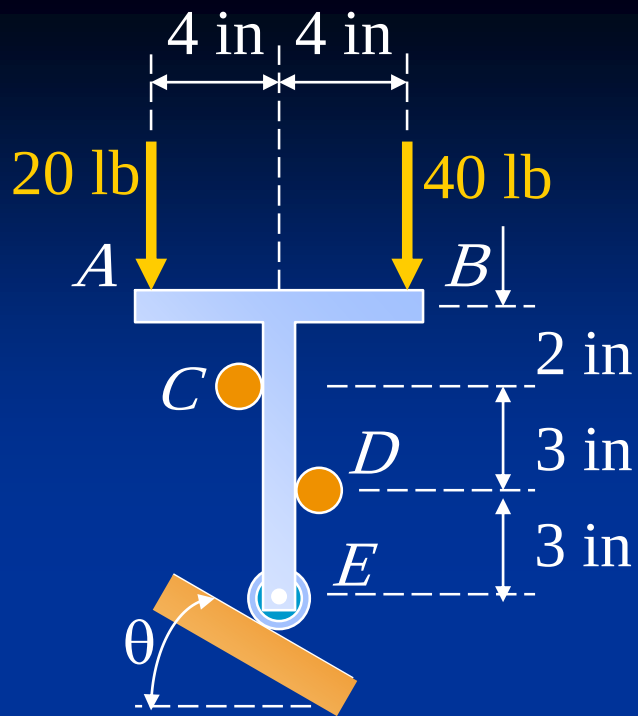
where point B is such that line AB is not parallel to the y axis

or

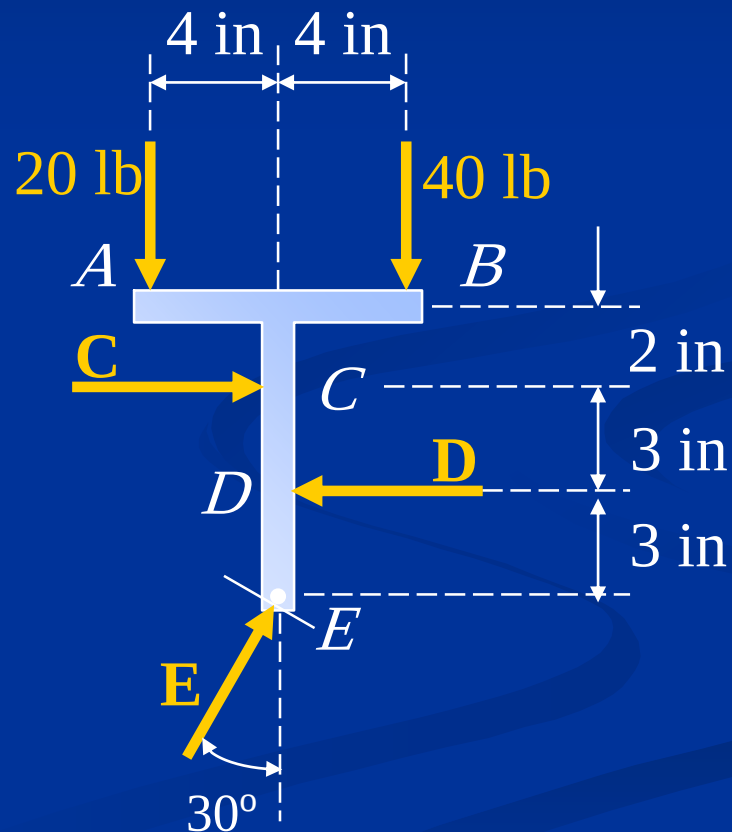
$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$$

where the points A , B , and C do not lie in a straight line.

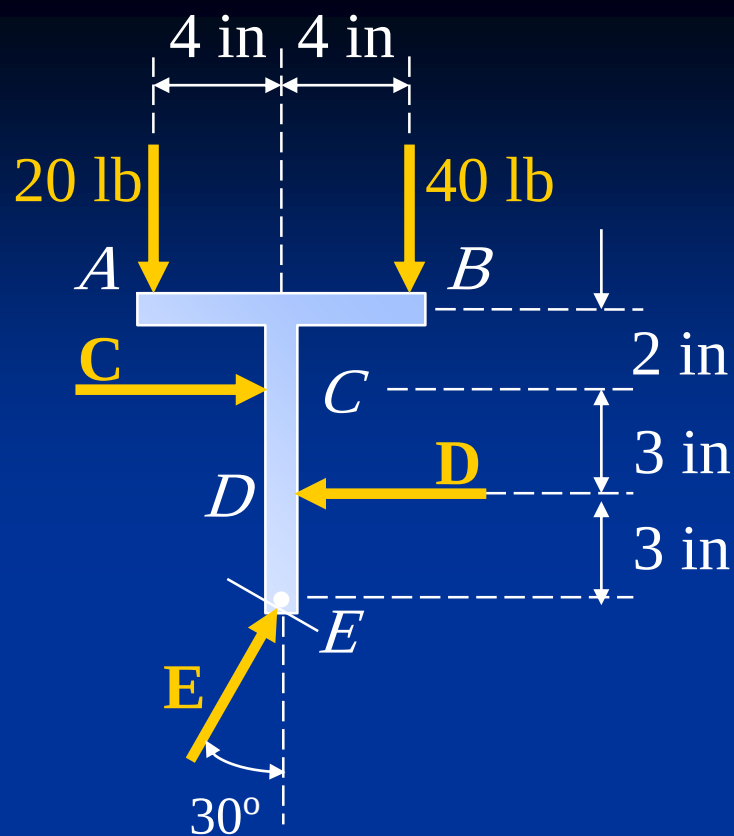
Problem 4.7 Solution



کشیدن دیاگرام آزاد



Problem 4.7 Solution

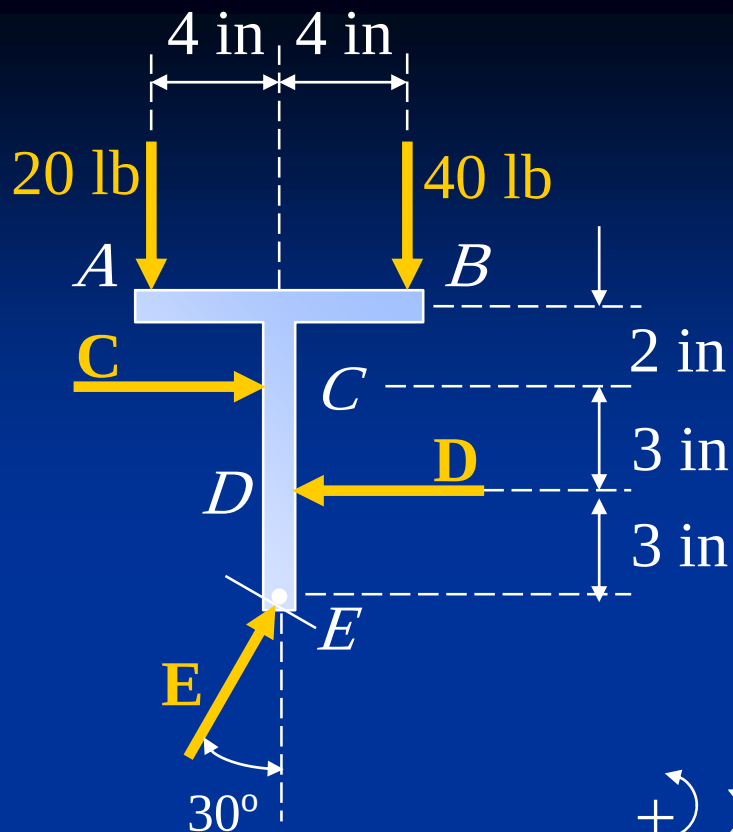


نوشتن معادلات تعادل

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E \cos 30^\circ - 20 - 40 = 0$$

$$E = \frac{60 \text{ lb}}{\cos 30^\circ} = 69.28 \text{ lb}$$

$$E = 69.3 \text{ lb} \quad \angle 60^\circ$$



$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0:$$

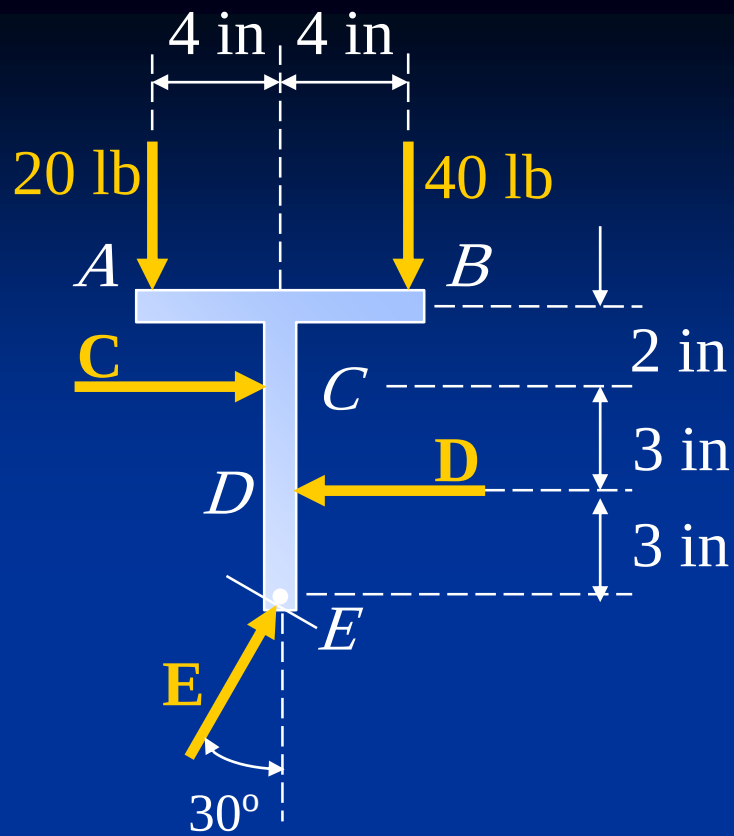
$$(20 \text{ lb})(4 \text{ in}) - (40 \text{ lb})(4 \text{ in}) - C(3 \text{ in}) + E \sin 30^\circ (3 \text{ in}) = 0$$

$$-80 - 3C + 69.28(0.5)(3) = 0$$

$$C = 7.974 \text{ lb}$$

$$C = 7.97 \text{ lb} \longrightarrow$$

Problem 4.7 Solution



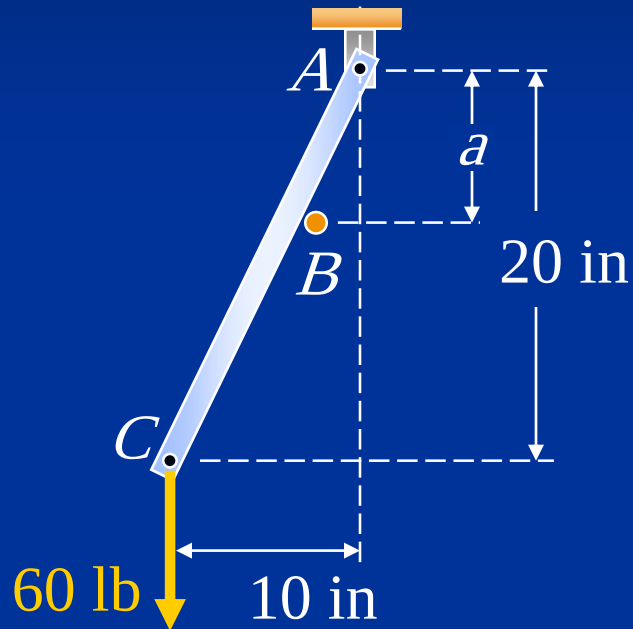
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$E \sin 30^\circ + C - D = 0$$

$$(69.28 \text{ lb})(0.5) + 7.974 \text{ lb} - D = 0$$

$$\mathbf{D = 42.6 \text{ lb} \leftarrow}$$

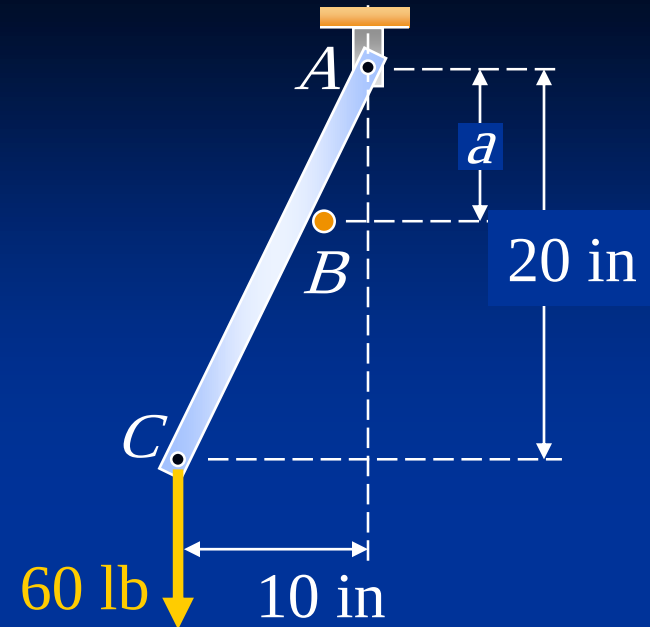
Problem 4.9



میله AC توسط یک پین در نقطه A و یک میخ در نقطه B در حالت سکون قرار گرفته است. اثر اصطکاک را نادیده گرفته و الف) واکنش در A و B را زمانی که $a=8\text{in}$ باشد تعیین کنید ب) مقدار a که در آن واکنش در A افقی و مقدار واکنش در A و B را بدست آورید.

Problem 4.9

Solving Problems on Your Own

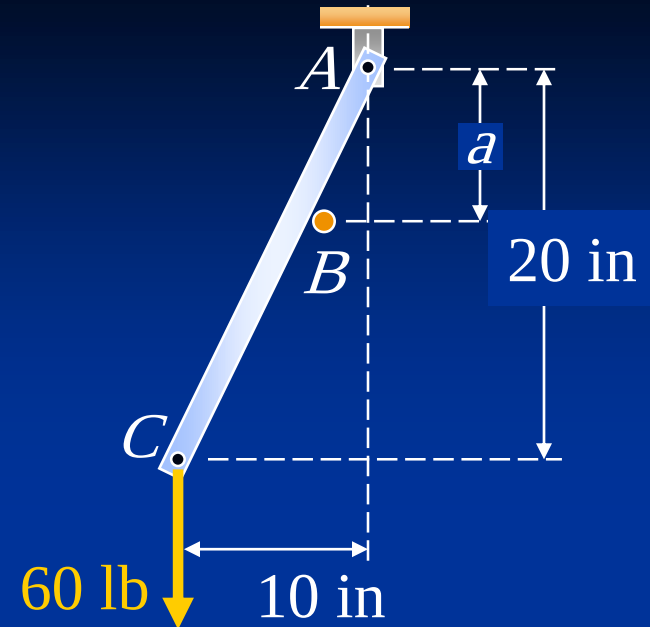


میله AC توسط یک پین در نقطه A و یک میخ در نقطه B در حالت سکون قرار گرفته است. اثر اصطکاک را نادیده گرفته و الف) واکنش در A و B را زمانی که $a=8\text{in}$ باشد تعیین کنید ب) مقدار a که در آن واکنش در A افقی و مقدار واکنش در A و B را بدست آورید.

کشیدن دیاگرام آزاد جسم

Problem 4.9

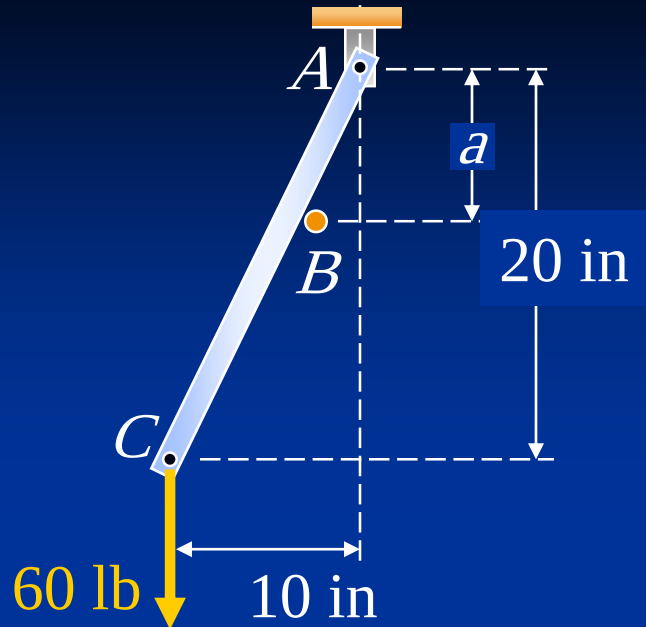
Solving Problems on Your Own



میله AC توسط یک پین در نقطه A و یک میخ در نقطه B در حالت سکون قرار گرفته است. اثر اصطکاک را نادیده گرفته و الف) واکنش در A و B را زمانی که $a=8\text{in}$ باشد تعیین کنید ب) مقدار a که در آن واکنش در A افقی و مقدار واکنش در A و B را بدست آورید.

2. For a three-force body, solution can be obtained by constructing a force triangle. The resultants of the three forces must be concurrent or parallel. To solve a problem involving a three-force body with concurrent forces, draw the free-body diagram showing that the three forces pass through the same point. Complete the solution by using a force triangle.

Problem 4.9 Solution

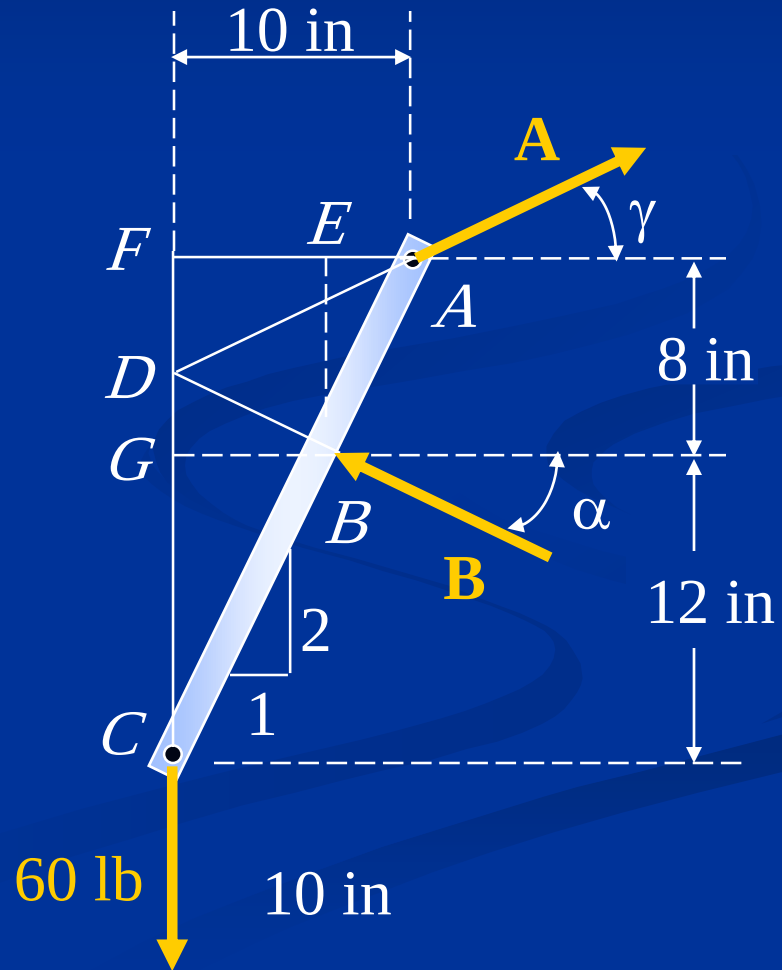


(a) $a = 8 \text{ in}$

Draw a free-body diagram of the body.

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 26.57^\circ$$



Problem 4.9 Solution

Construct a force triangle.

3 - FORCE BODY

Reaction at *A* passes through *D*
where *B* and 60-lb load intersect

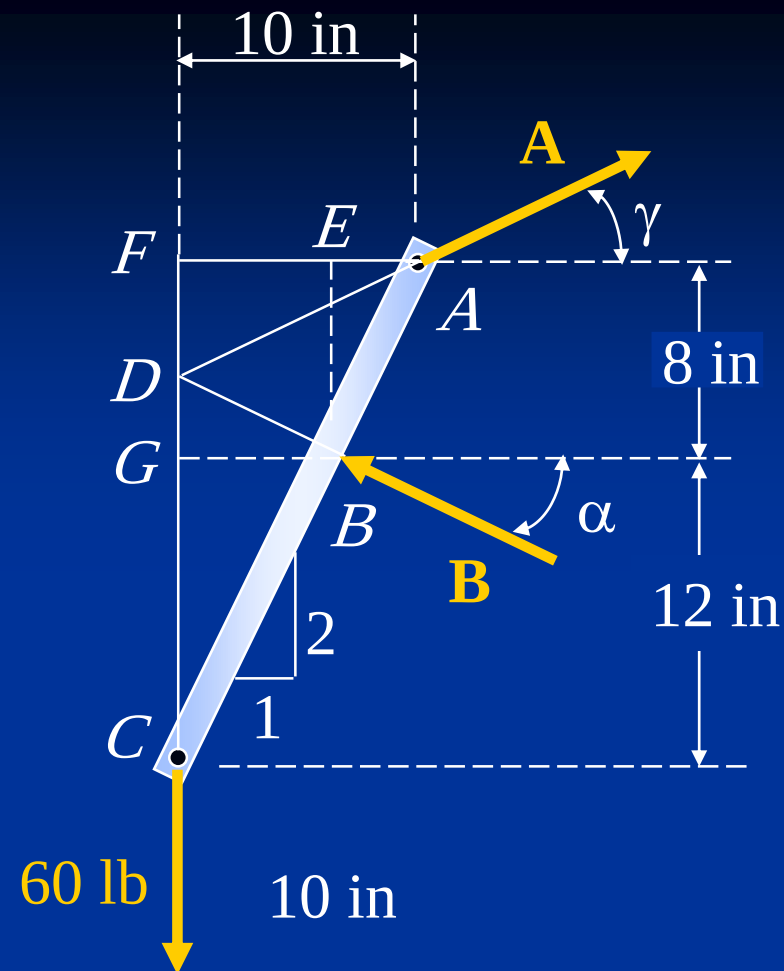
$$AE = \frac{1}{2} \quad EB = \frac{1}{2} (8) = 4 \text{ in.}$$

$$EF = BG = 10 - 4 = 6 \text{ in}$$

$$DG = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{2} (6) = 3 \text{ in.}$$

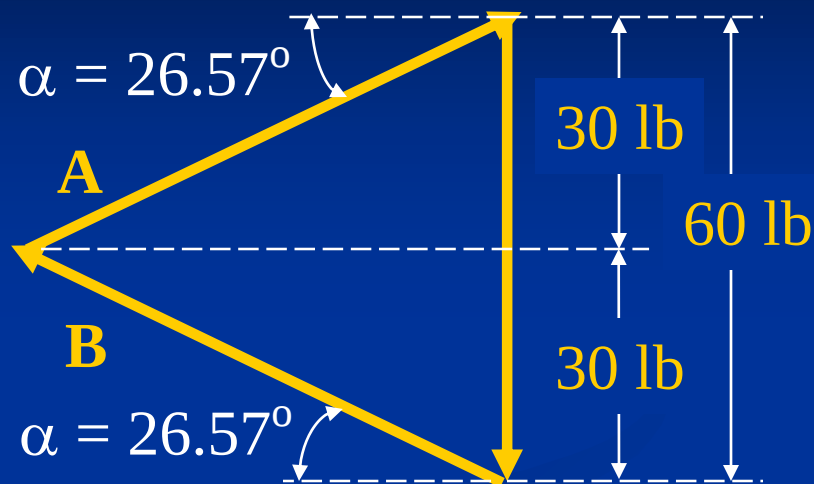
$$FD = FG - DG = 8 - 3 = 5 \text{ in.}$$

$$\tan \gamma = \frac{FD}{AF} = \frac{5}{10} ; \quad \gamma = 26.57^\circ$$



Problem 4.9 Solution

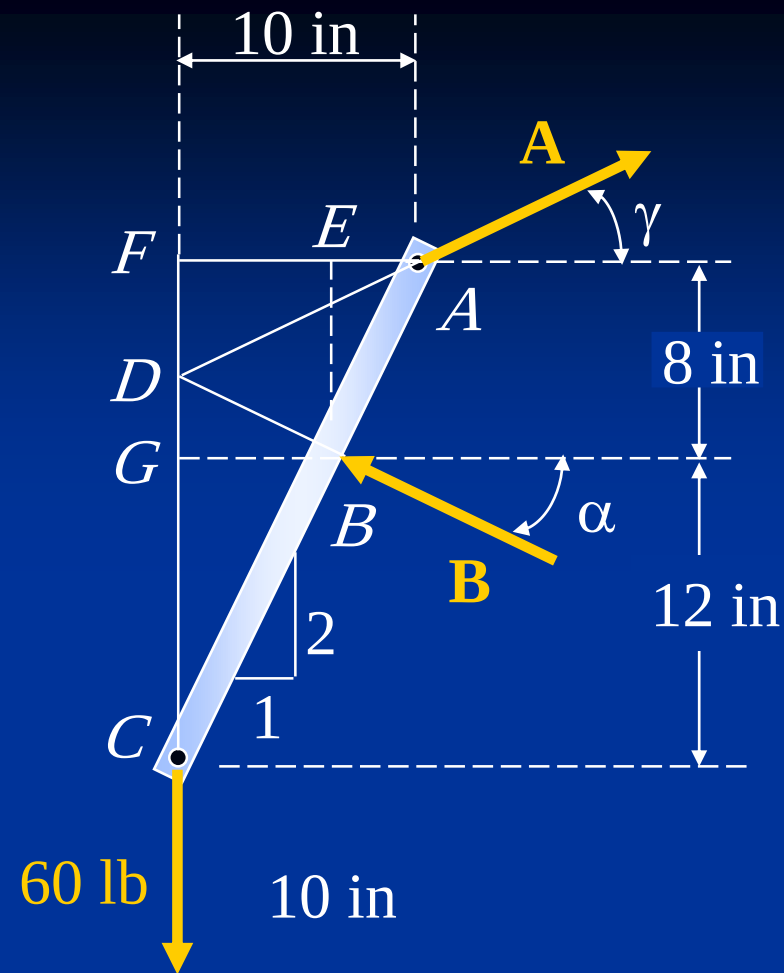
FORCE TRIANGLE



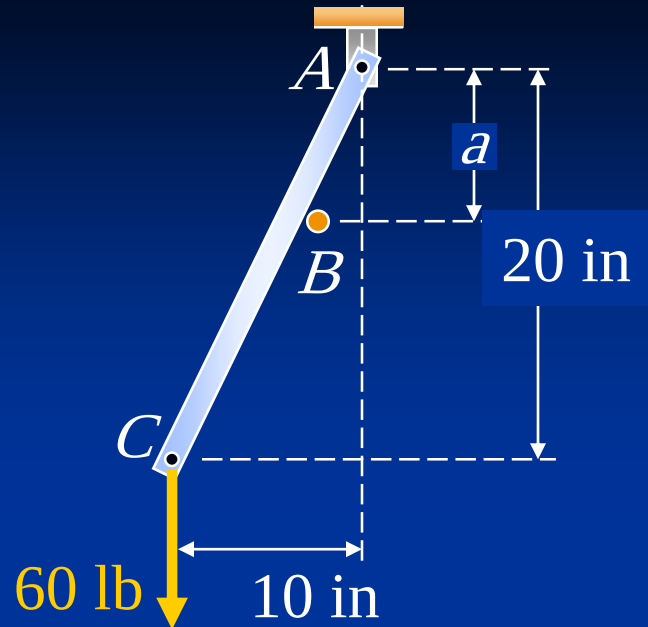
$$A = B = \frac{30 \text{ lb}}{\sin 26.57^\circ} = 67.08 \text{ lb}$$

$$\mathbf{A} = 67.1 \text{ lb} \quad \nearrow 26.6^\circ$$

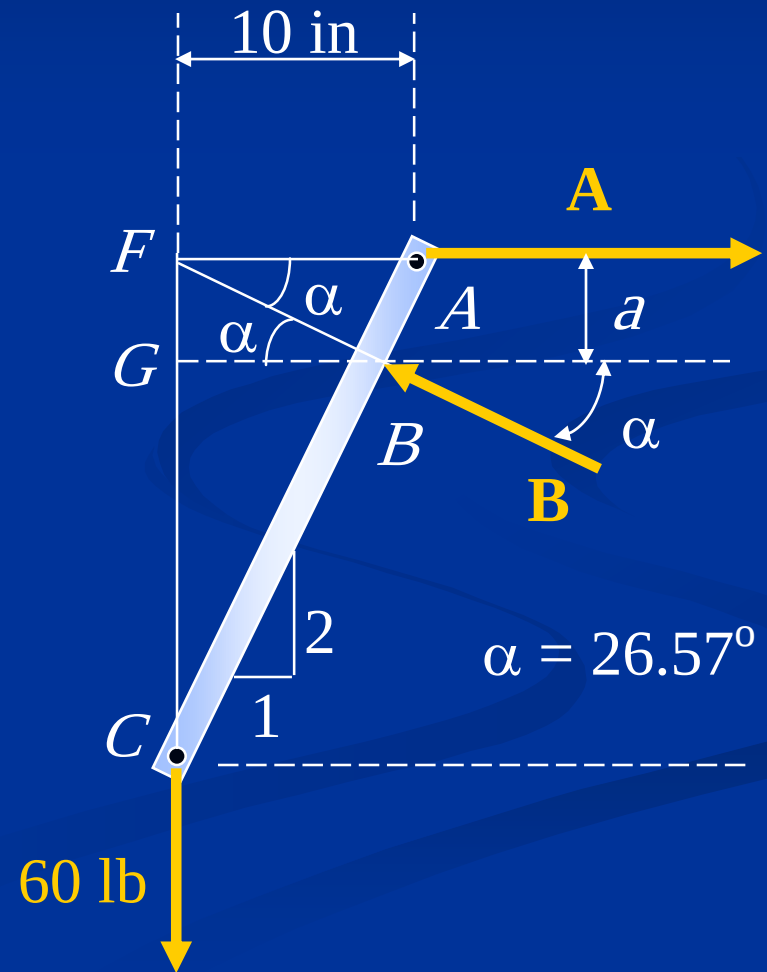
$$\mathbf{B} = 67.1 \text{ lb} \quad \searrow 26.6^\circ$$



Problem 4.9 Solution



- (b) For A horizontal
Draw a free-body diagram of the body.



Problem 4.9 Solution

Construct a force triangle.

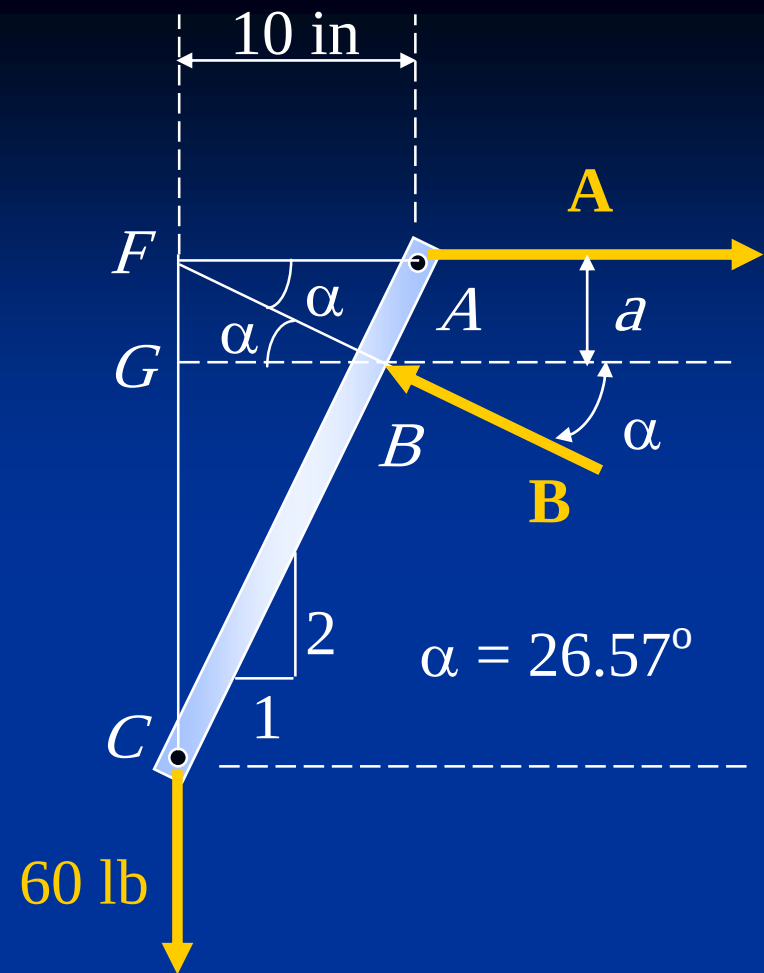
$$\Delta ABF: BF = AF \cos \alpha$$

$$\Delta BFG: FG = BF \sin \alpha$$

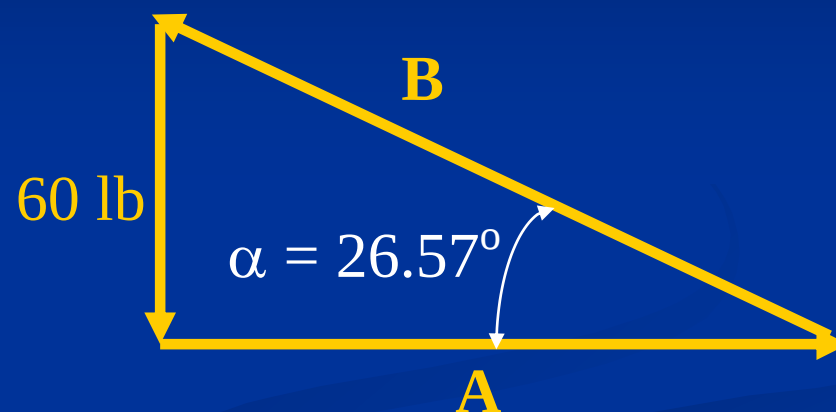
$$a = FG = AF \cos \alpha \sin \alpha$$

$$a = (10 \text{ in.}) \cos 26.57^\circ \sin 26.57^\circ$$

$$a = 4.00 \text{ in.}$$

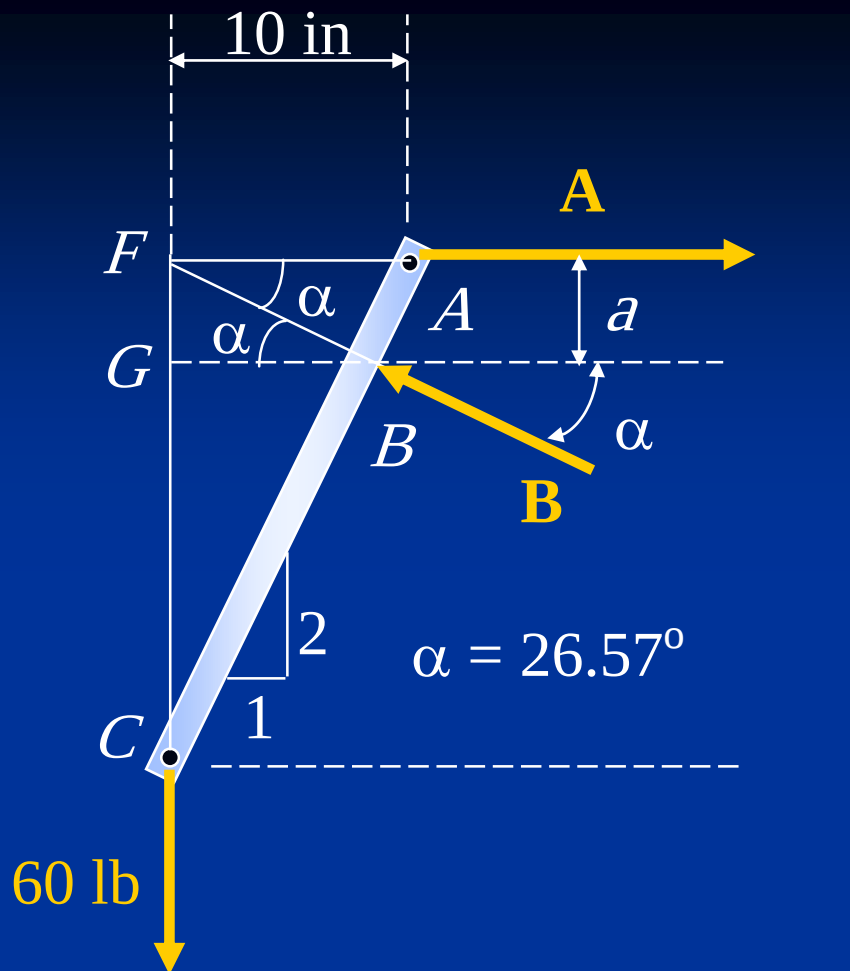


FORCE TRIANGLE



$$\mathbf{A} = 120.0 \text{ lb} \longrightarrow$$

$$\mathbf{B} = 134.2 \text{ lb} \nearrow 26.6^\circ$$



$$A = \frac{60 \text{ lb}}{\tan \alpha} = 120 \text{ lb}$$

$$B = \frac{60 \text{ lb}}{\sin \alpha} = 134.16 \text{ lb}$$

مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

نیروها در تیرها و کابل ها

فریدیناند پی. بی. یر

ای. راسل جانسون

ارائه: سید محمد علی ابطحی



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Contents

[Introduction](#)

[Internal Forces in Members](#)

[Sample Problem 7.1](#)

[Various Types of Beam Loading and Support](#)

[Shear and Bending Moment in a Beam](#)

[Sample Problem 7.2](#)

[Sample Problem 7.3](#)

[Relations Among Load, Shear, and Bending Moment](#)

[Sample Problem 7.4](#)

[Sample Problem 7.5](#)

[Cables With Concentrated Loads](#)

[Cables With Distributed Loads](#)

[Parabolic Cable](#)

[Sample Problem 7.6](#)

[Catenary](#)



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Introduction

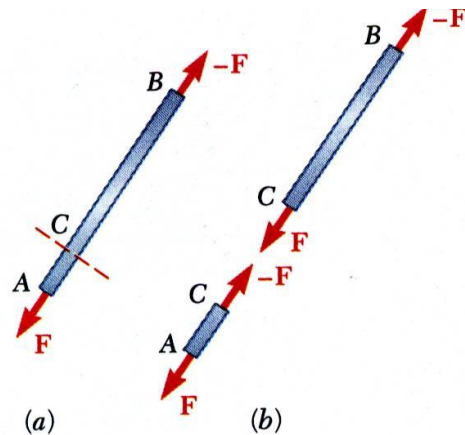
- دو موضوع را در فصول قبل مورد بررسی قرار دادیم
- الف) تعیین نیروهای خارجی وارد بر یک سازه
- ب) تعیین نیروهای بین عضوهای مختلف یک سازه
- در این فصل نیروهای داخلی (مانند کشش یا فشار، برش و خمش) بین قسمت های مختلف یک عضو را بیابیم
- در این فصل، عمدتاً نیروهای داخلی در دو سازه مهم مهندسی زیر را تحلیل می کنیم:
- الف) تیرها، که معمولاً عضوهای بلند و منشوری هستند و برای تحمل بارهای وارده در نقاط مختلف طول عضو طراحی می شوند
- ب) کابل ها، که عضوهای انعطاف پذیری هستند و فقط در برابر کشش مقاومت می کنند و برای تحمل بارهای متمرکز یا توزیعی طراحی می شوند. از کابل ها در اغلب کاربردهای مهندسی، مانند پل های معلق و خطوط انتقال نیرو، استفاده می شود



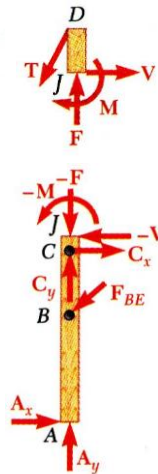
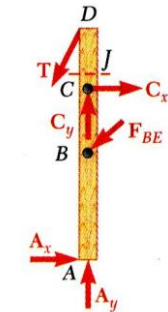
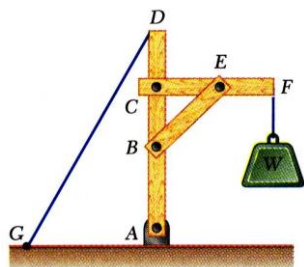
Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروهای داخلی در اعضاها

- عضو مستقیم دو نیرویی AB در تعادل هستند تحت اعمال دو نیروی F و $-F$

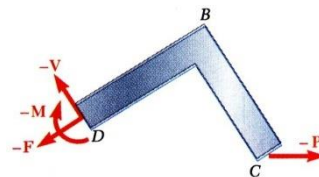
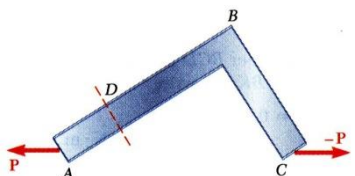


- نیروهای داخلی هم ارز با F و $-F$ مورد نیاز است برای تعادل در جسم آزاد AC و CB

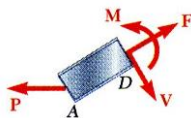


- عضو چند نیرویی ABCD تحت اثر کابل و نیروهای تماسی عضو در تعادل می باشند

- نیروهای داخلی هم ارز یک سیستم کوپل نیرو که برای تعادل نمودار آزاد JD و ABCJ ضروری می باشد

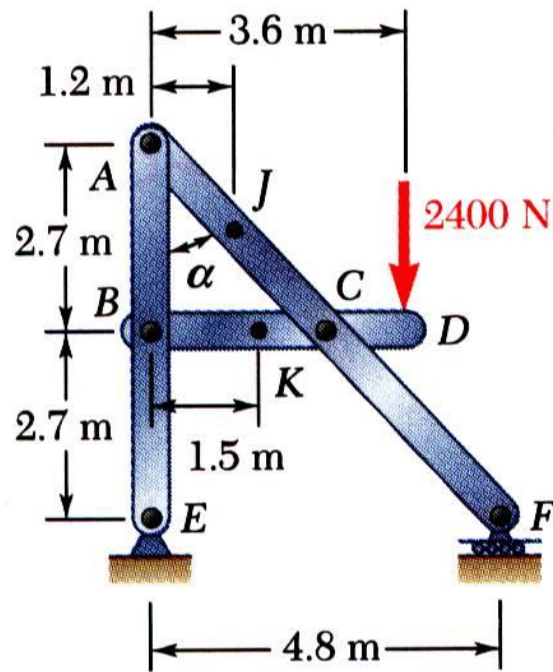


- نیروهای داخلی در یک عضو دو نیرویی مستقیم نیز با یک سیستم نیرو-کوپل هم ارزند



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.1



SOLUTION:

- محاسبه نیروها و واکنش ها در اتصالات

- نیروی داخلی در J: عضو ACF را در نقطه J قطع می کنیم و دو قسمت حاصل را نشان می دهیم. نیروهای داخلی در J را با سیستم نیرو-کوپل هم ارز نشان می دهیم. با در نظر گرفتن جسم آزاد AJ

- نیروهای داخلی در K.

در قاب نشان داده شده، مطلوبست نیروهای داخلی: الف) در عضو ACF در نقطه J، ب) در عضو BCD در نقطه K

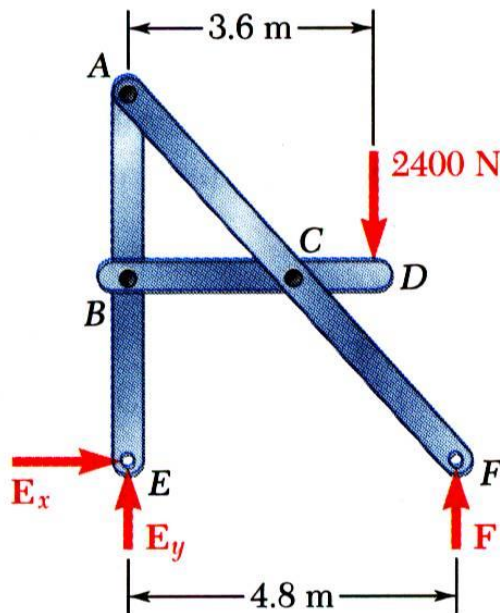
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.1

SOLUTION:

• محاسبه نیروها و واکنش ها در اتصالات

بررسی کل قاب به عنوان نمودار آزاد



$$\sum M_E = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0 \quad F = 1800 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-2400 \text{ N} + 1800 \text{ N} + E_y = 0 \quad E_y = 600 \text{ N}$$

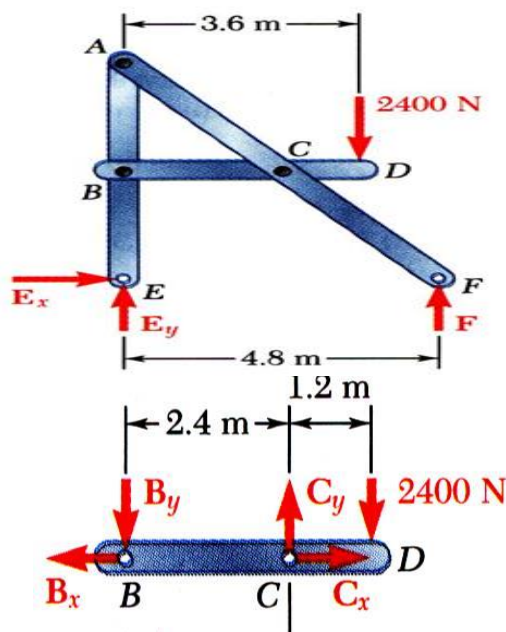
$$\sum F_x = 0:$$

$$E_x = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

5.1

بررسی عضو BCD توسط دیاگرام آزاد



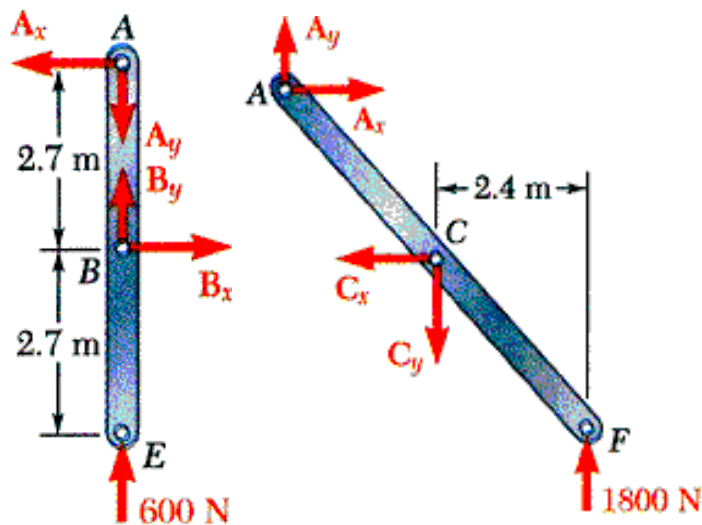
$$\sum M_B = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad C_y = 3600 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad B_y = 1200 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0$$



بررسی نمودار آزاد ABE

$$\sum M_A = 0: \quad B_x(2.7 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad B_x - A_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 600 \text{ N} = 0 \quad A_y = 1800 \text{ N}$$

از عضو BCD

$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \quad C_x = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.1

- نیروی داخلی در J: عضو ACF را در نقطه J قطع می کنیم و دو قسمت حاصل را نشان می دهیم. نیروهای داخلی در J را با سیستم نیرو-کوپل هم ارز نشان می دهیم. با در نظر گرفتن جسم آزاد AJ

بررسی نمودار آزاد AJ

$$\sum M_J = 0:$$

$$-(1800 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + M = 0$$

$$M = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_x = 0:$$

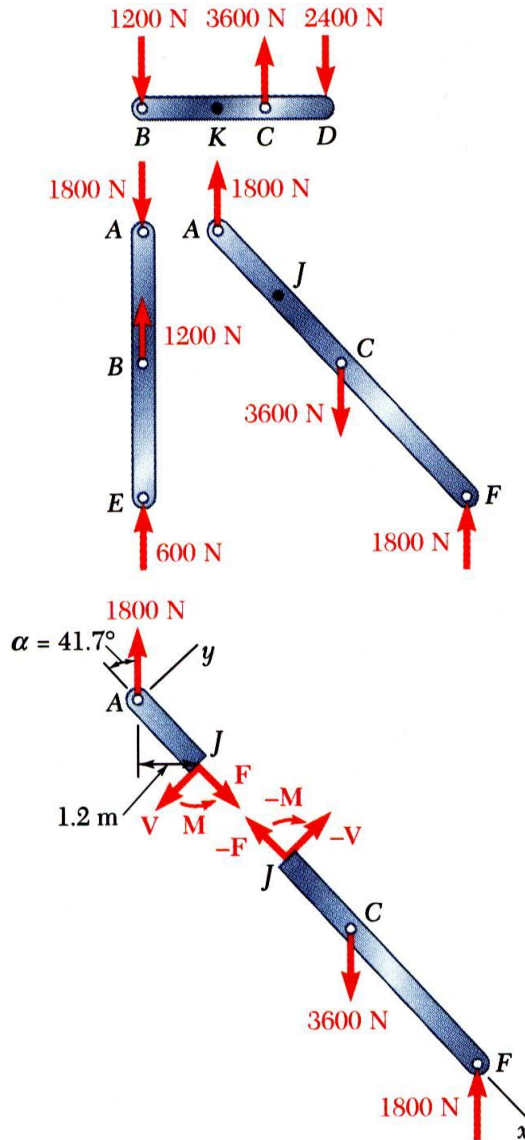
$$F - (1800 \text{ N})\cos 41.7^\circ = 0$$

$$F = 1344 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-V + (1800 \text{ N})\sin 41.7^\circ = 0$$

$$V = 1197 \text{ N}$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.1

- قطع عضو BCD در K. تعیین یک سیستم کوپل نیروی معادل با نیروهای داخلی در K

بررسی دیاگرام آزاد BK

$$\sum M_K = 0:$$

$$(1200 \text{ N})(1.5 \text{ m}) + M = 0$$

$$M = -1800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

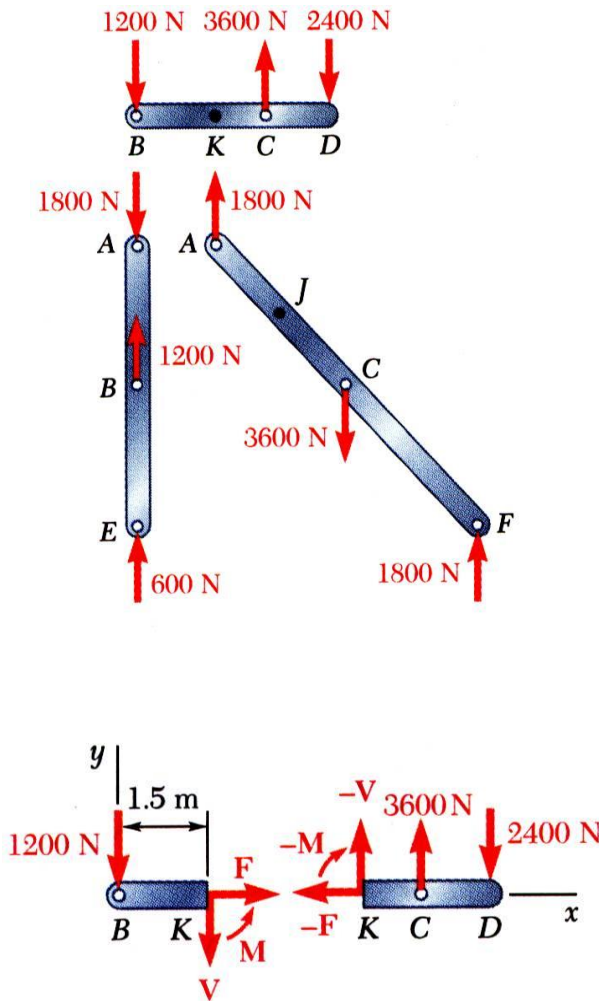
$$\sum F_x = 0:$$

$$F = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

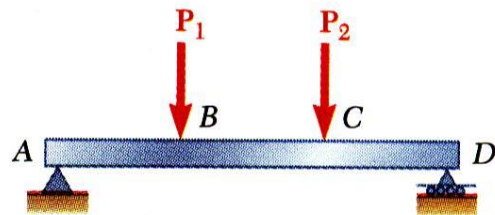
$$-1200 \text{ N} - V = 0$$

$$V = -1200 \text{ N}$$

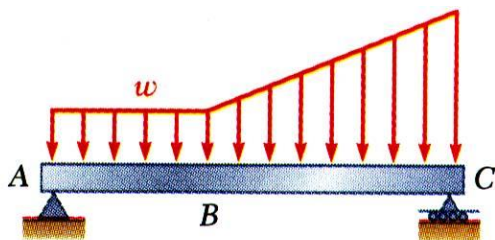


Vector Mechanics for Engineers: Statics

انواع مختلف بارگذاری و تکیه گاه



(a) Concentrated loads



(b) Distributed load

• تیر: یک عضو ساختمانی است که برای تحمل بارهای وارده در نقاط مختلف طول خود طراحی می شود

• تیر می تواند تحت بارهای متمرکز یا تحت بارهای گسترده (توزیعی) یا ترکیبی از هر دو باشد.

• طراحی تیر دارای دو پروسه می باشد:

(1) تعیین نیروهای برشی و ممانهای خمشی که توسط نیروهای اعمالی بوجود می آید.

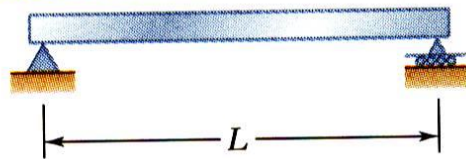
(2) انتخاب بهترین مقطع عرضی برای مقاومت در برابر نیروهای برشی و لنگرهای خمشی

Vector Mechanics for Engineers: Statics

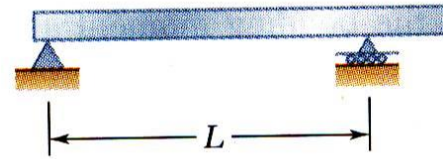
انواع مختلف بارگذاری و تکیه گاه

Forces in Beams and Cables

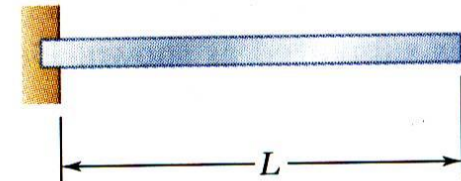
تیر معین
استاتیکی



(a) تیر با تکیه گاه ساده

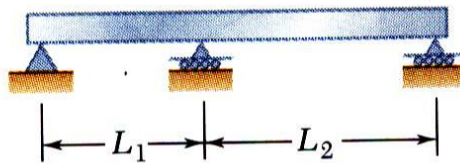


(b) تیر سرآویز

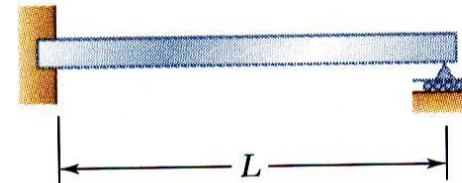


(c) تیر یک سر گیردار

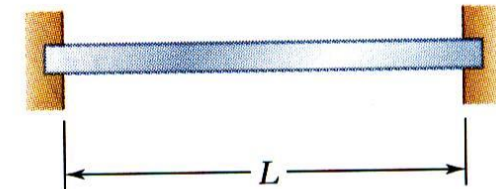
تیر
نامعین
استاتیکی



(d) تیر پیوسته



(e) تیر یک سر گیردار
و یک سر با تکیه گاه
ساده



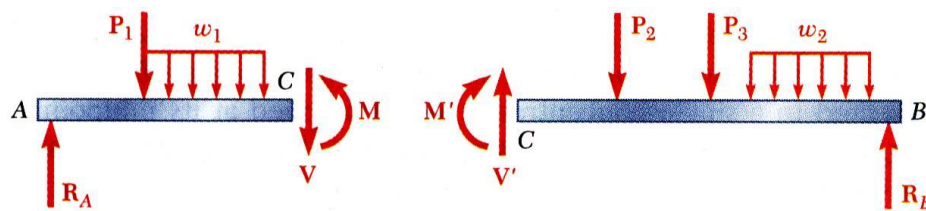
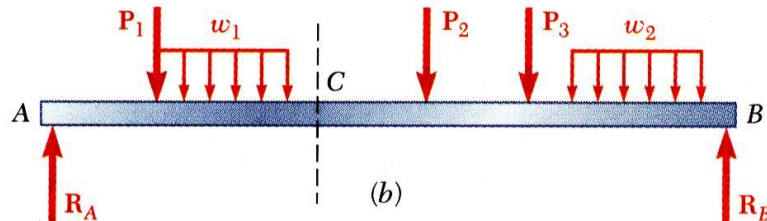
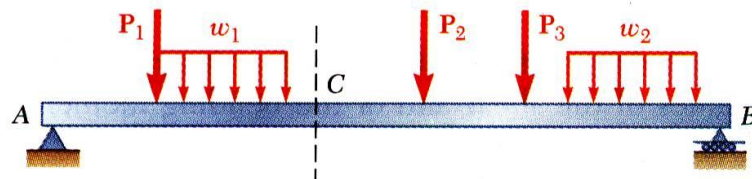
(f) دو سر گیردار

• تیرها بر حسب نوع تکیه گاهشان دسته بندی می شوند.

• تکیه گاههایی که فقط سه مجهول دارند معین اند و اگر بیش از سه مجهول داشته باشند نامعین استاتیکی هستند

Vector Mechanics for Engineers: Statics

برش و لنگر خمشی در تیر



• می خواهیم ممان خمشی و نیروی برشی در هر نقطه از یک تیر تحت اثر نیروهای ساده و گسترده را بیابیم

• تعیین عکس العملها در تکیه گاهها توسط در نظر گرفتن کل تیر به عنوان جسم آزاد

• برش تیر در نقطه C و کشیدن دیاگرام جسم آزاد برای AC و CB. با توجه به تعریف، جهت های مثبت برای سیستم های نیرو-کوپل داخلی مانند شکل زیر می باشد

• از بررسی های تعادلی، M و V یا M' و V' را تعیین می کنیم.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

نمودارهای برش و لنگر خمشی

• تغییرات ممان خمشی و برشی در طول تیر ممکن است ترسیم شود.

• تعیین عکس العمل ها در تکیه گاهها

• برش تیر در نقطه C و بررسی عضو AC

$$V = +P/2 \quad M = +Px/2$$

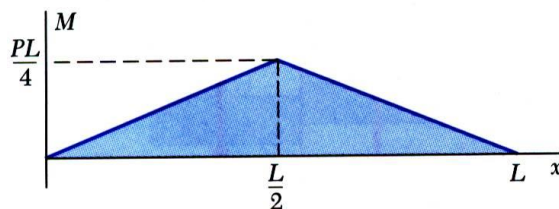
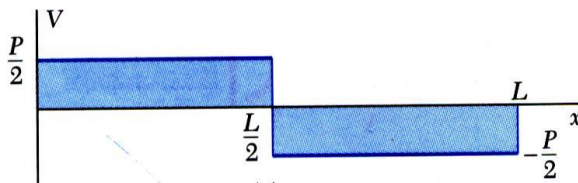
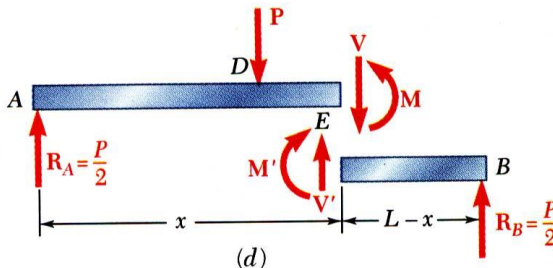
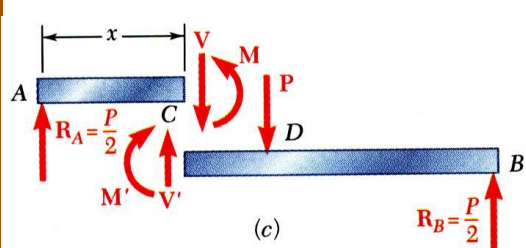
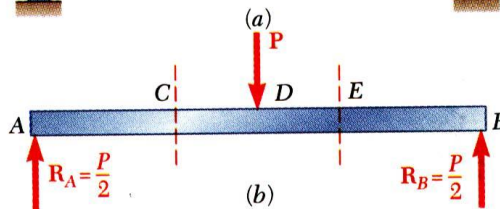
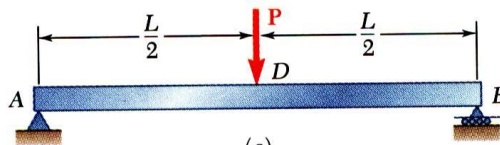
• برش تیر در E و بررسی عضو EB

$$V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$$

• گفتنی است که وقتی تیری فقط تحت

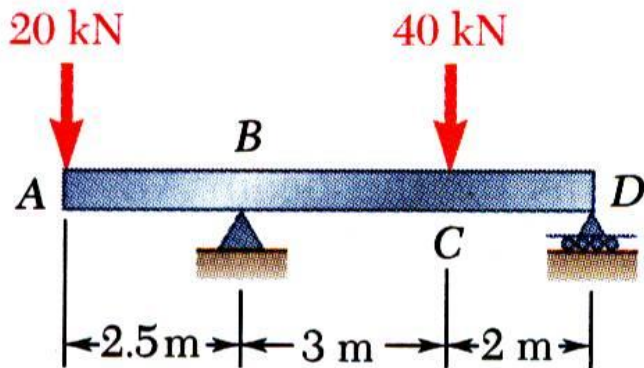
تاثیر بارهای متمرکز هست، برش بین این بارها دارای مقدار ثابت است و لنگر خمشی بین این بارها به طور خطی

تغییر می کند



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.2



SOLUTION:

- جسم آزاد تمام تیر
- برش و لنگر خمشی
- ترسیم دیاگرام

نمودارهای برش و لنگر خمشی را برای تیر و بارگذاری نشان داده شده رسم کنید

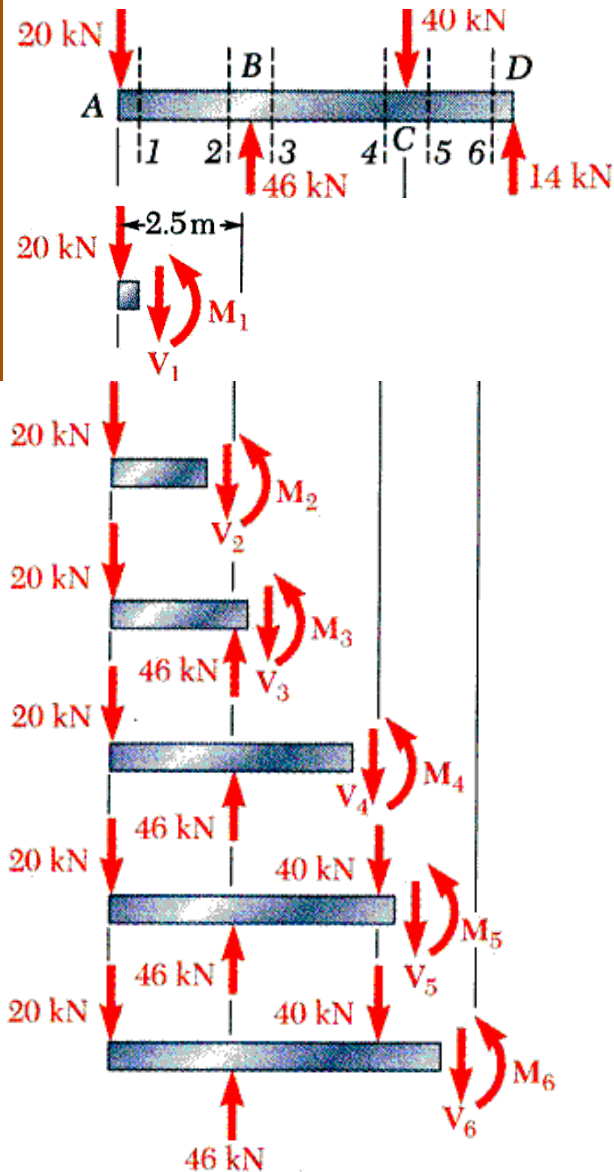
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.2

SOLUTION:

• جسم آزاد تمام تیر

• برش و لنگر خمشی



$$\sum F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0$$

$$V_1 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0$$

$$M_1 = 0$$

به طور مشابه

$$V_3 = 26 \text{ kN} \quad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

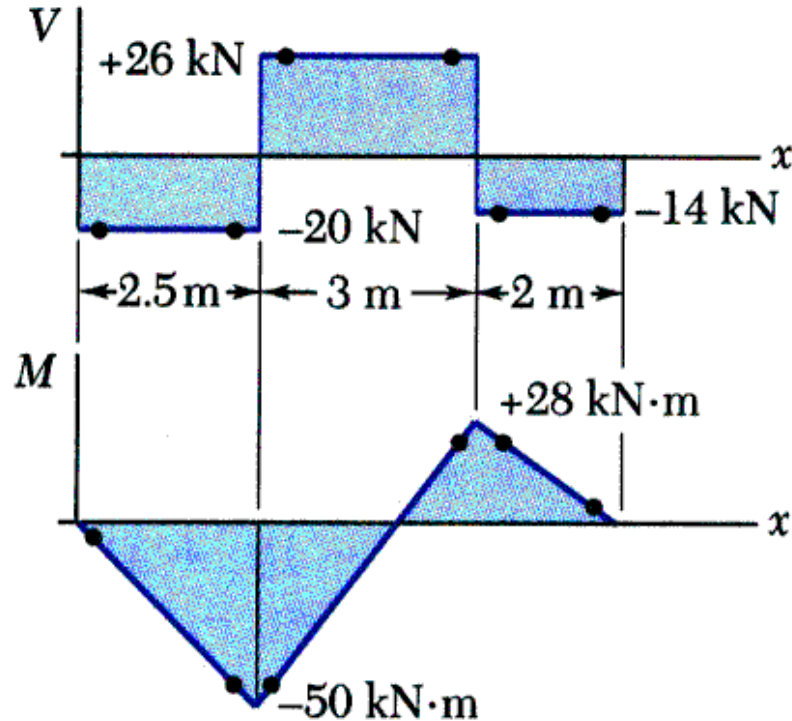
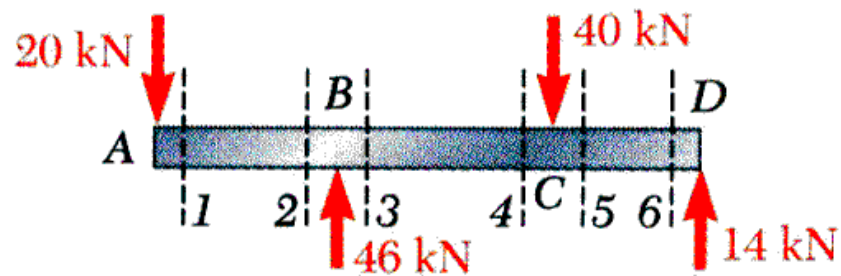
$$V_4 = 26 \text{ kN} \quad M_4 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_5 = 26 \text{ kN} \quad M_5 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_6 = 26 \text{ kN} \quad M_6 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.2

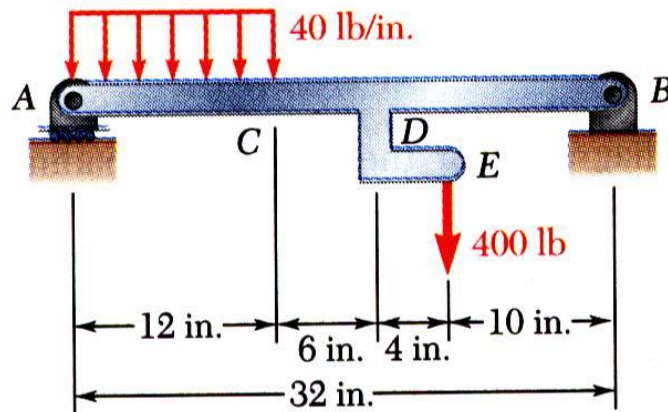


- رسم دیاگرام

توجه کنید که برش مقدار ثابت بین بارهای متمرکز می باشد و ممان خمشی به صورت خطی تغییر می کند

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.3



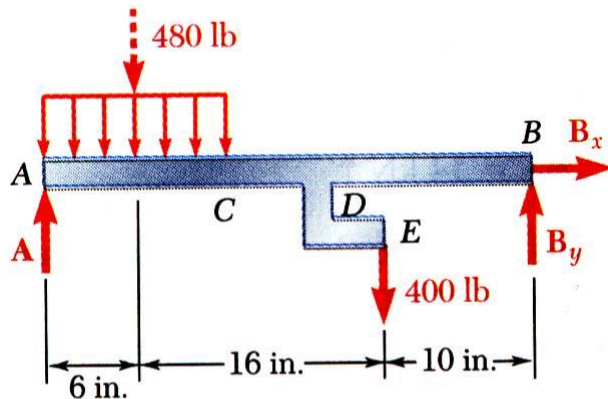
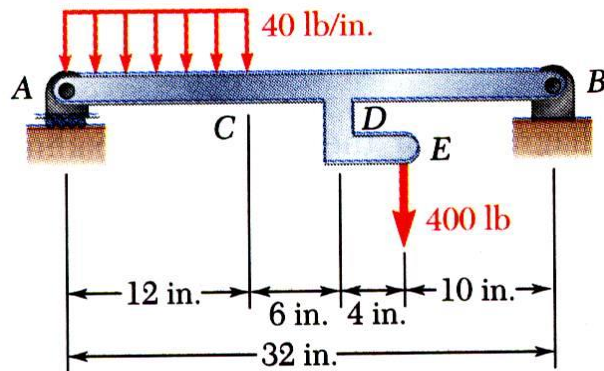
SOLUTION:

- جسم آزاد تمام تیر
- تعیین سیستمهای کوپل نیرو داخلی هم ارز در بخش های AC، CD، DB
- ترسیم دیاگرام

نمودارهای برش و خمش تیر AB را رسم کنید.
 بار گسترده 40lb/in در طول 12 in از تیر، از A تا C و بار 400 lb در E وارد شده است.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.3



SOLUTION:

• جسم آزاد تمام تیر

$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0$$

$$B_y = 365 \text{ lb}$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$(480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0$$

$$A = 515 \text{ lb}$$

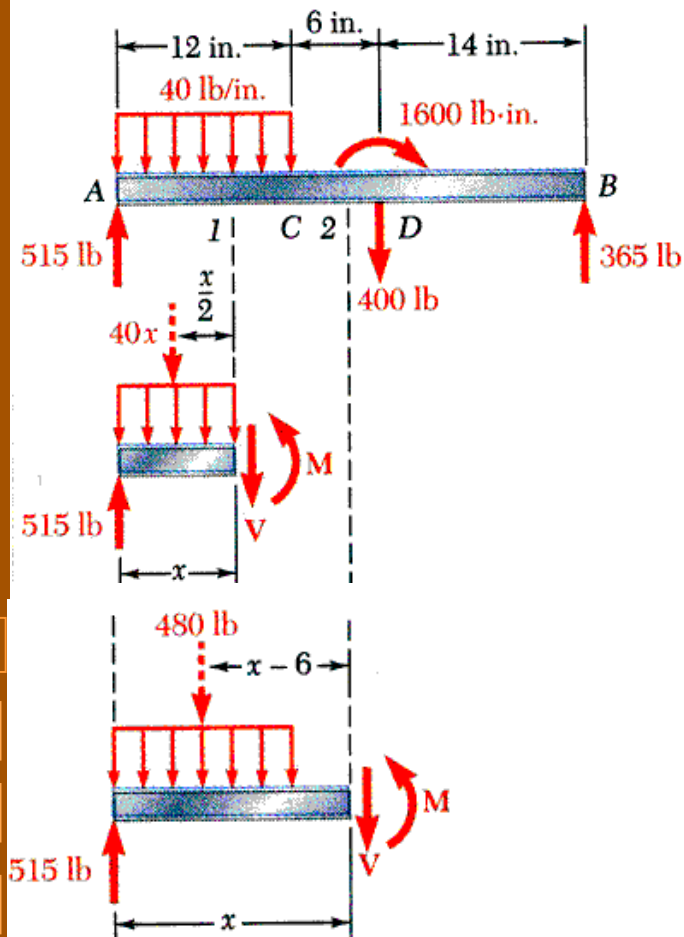
$$\sum F_x = 0:$$

$$B_x = 0$$

- Note: The 400 lb load at E may be replaced by a 400 lb force and 1600 lb-in. couple at D.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.3



- تعیین سیستمهای کوپل نیرو داخلی هم ارز در بخش های AC، DB، CD

From A to C:

$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0$$

$$V = 515 - 40x$$

$$\sum M_1 = 0: \quad -515x - 40x\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0$$

$$M = 515x - 20x^2$$

From C to D:

$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0$$

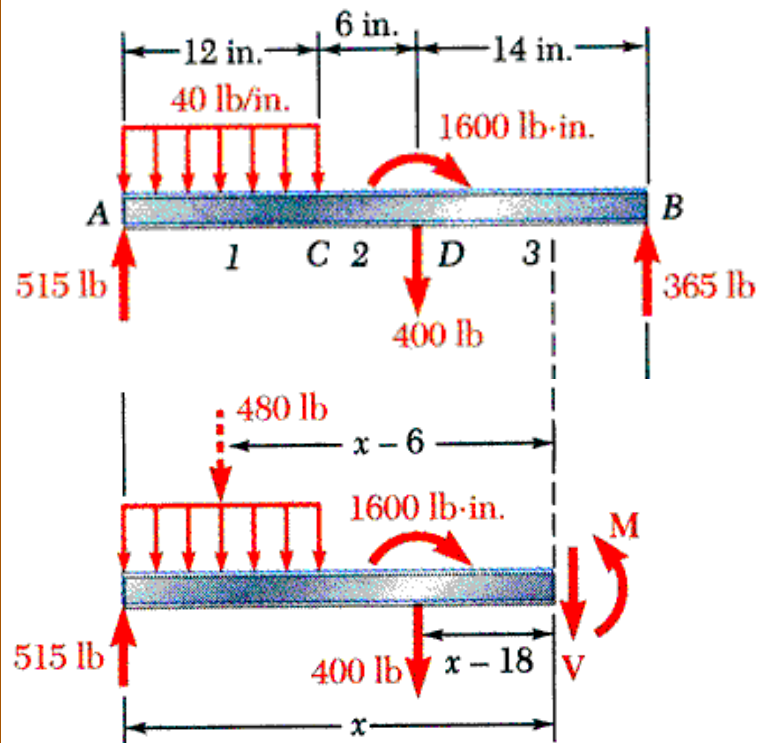
$$V = 35 \text{ lb}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) + M = 0$$

$$M = (2880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.3



- تعیین سیستمهای کوپل نیرو داخلی هم ارز در بخش های DB ،CD ،AC

From D to B :

$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0$$

$$V = -365 \text{ lb}$$

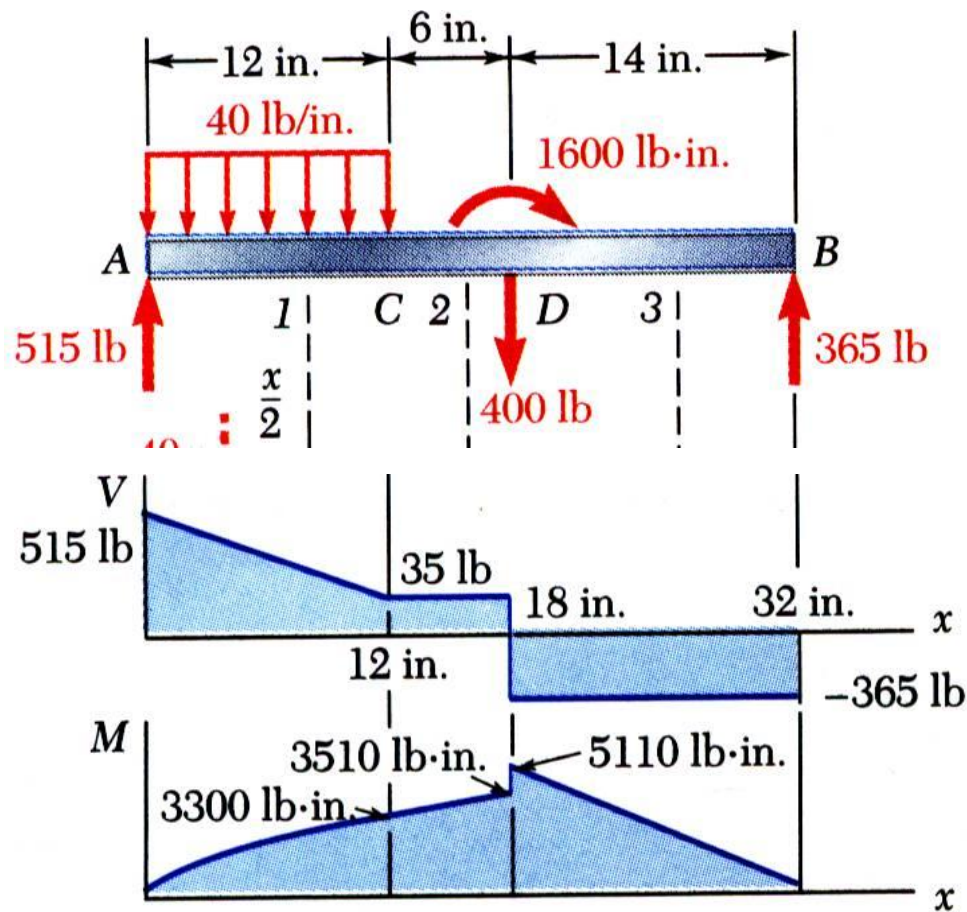
$$\sum M_2 = 0:$$

$$-515x + 480(x - 6) - 1600 + 400(x - 18) + M = 0$$

$$M = (11,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.3



• رسم دیاگرام

From A to C:

$$V = 515 - 40x$$

$$M = 515x - 20x^2$$

From C to D:

$$V = 35 \text{ lb}$$

$$M = (2880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

From D to B:

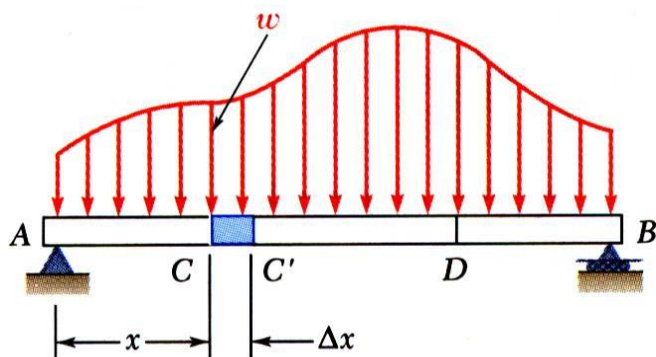
$$V = -365 \text{ lb}$$

$$M = (11,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

روابط میان بار، برش و لنگر خمشی

• رابطه بین نیرو و برش

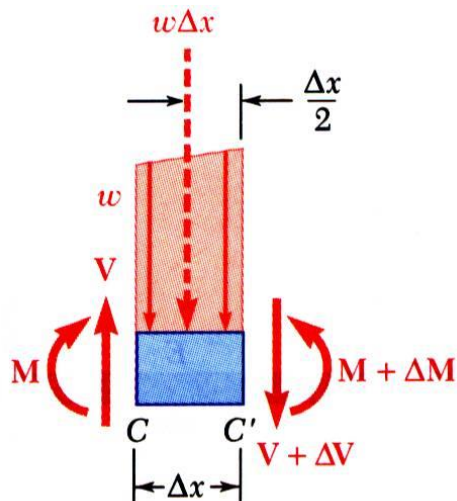


$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w$$

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w dx = -(\text{area under load curve})$$

• رابطه بین برش و ممان خمشی



$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(V - \frac{1}{2} w\Delta x \right) = V$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx = (\text{area under shear curve})$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

روابط میان بار، برش و لنگر خمشی

- Reactions at supports, $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$

- Shear curve,

$$V - V_A = -\int_0^x w dx = -wx$$

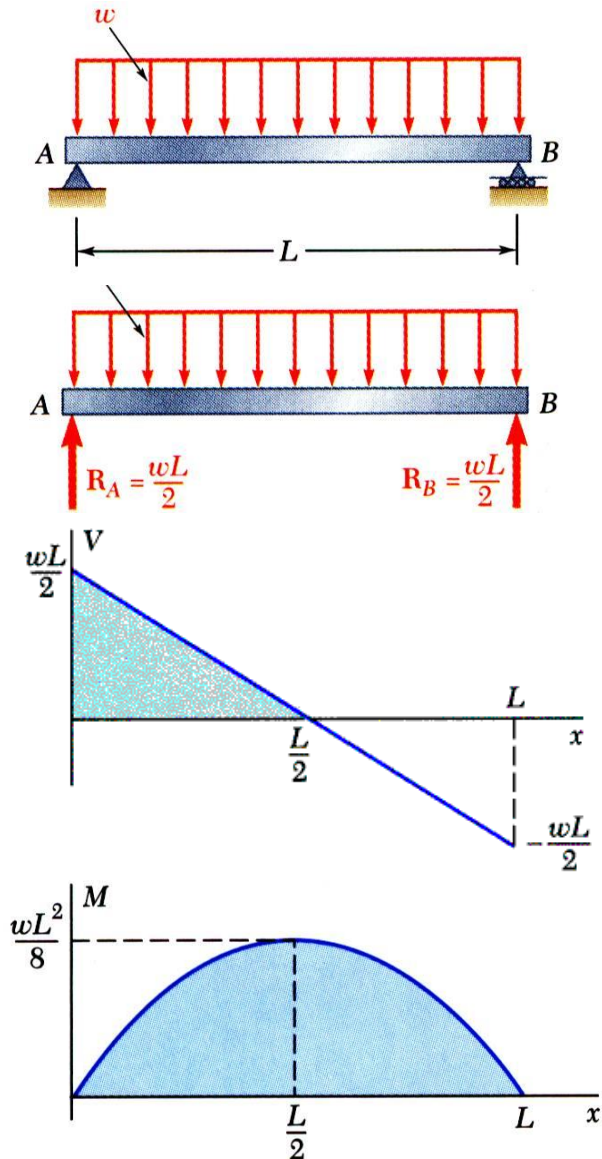
$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- Moment curve,

$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

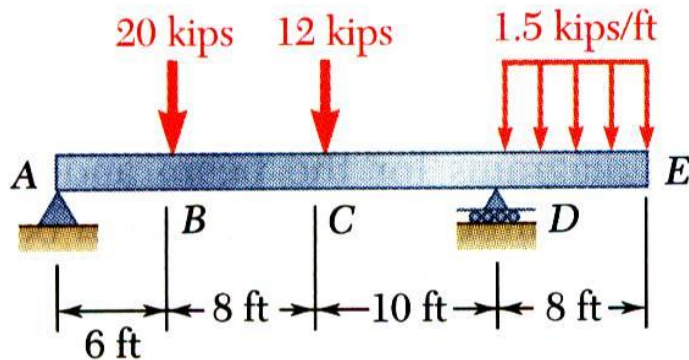
$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0 \right)$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.4



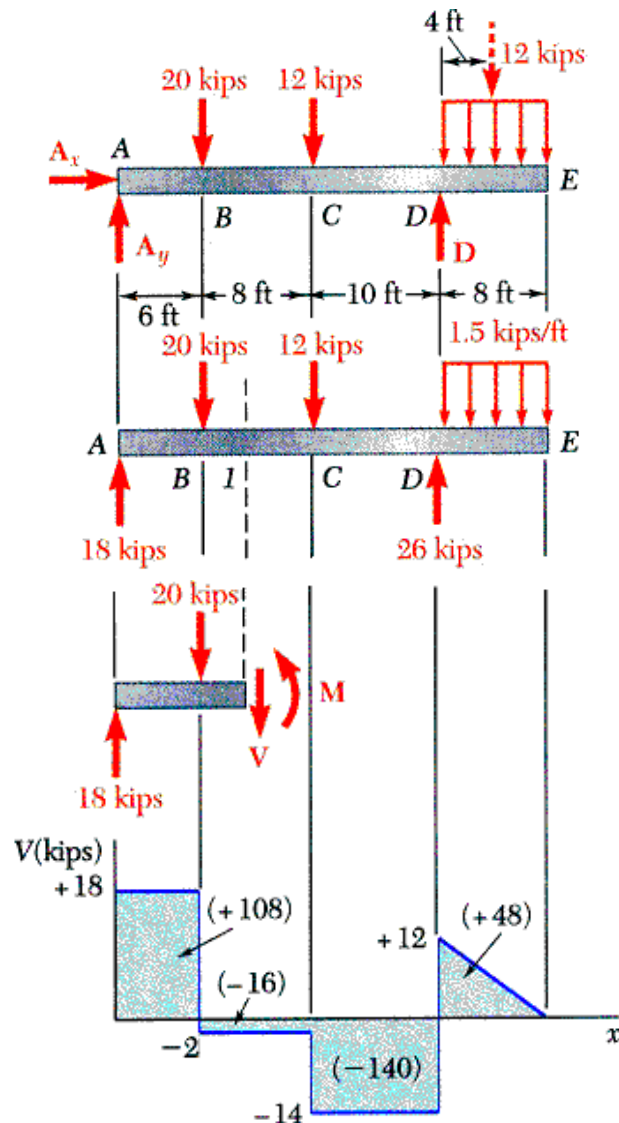
Draw the shear and bending-moment diagrams for the beam and loading shown.

SOLUTION:

- Taking entire beam as a free-body, determine reactions at supports.
- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.
- With uniform loading between D and E , the shear variation is linear.
- Between concentrated load application points, $dM/dx = V = \text{constant}$. The change in moment between load application points is equal to area under shear curve between points.
- With a linear shear variation between D and E , the bending moment diagram is a parabola.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.4



SOLUTION:

- Taking entire beam as a free-body, determine reactions at supports.

$$\sum M_A = 0 :$$

$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$

$$D = 26 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = 0 :$$

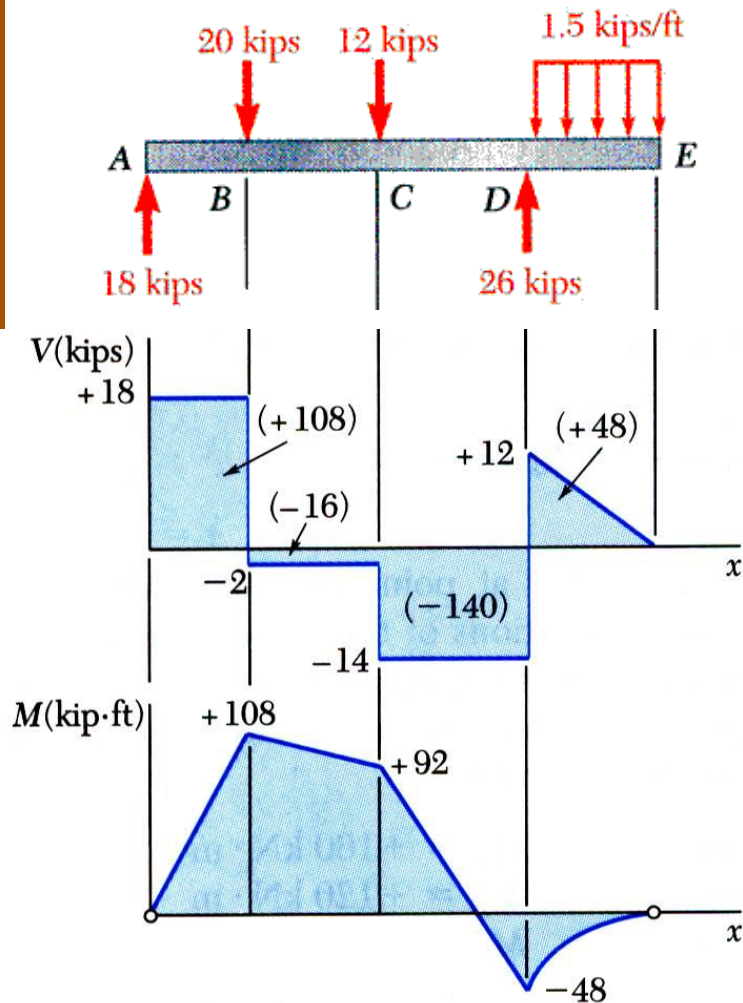
$$A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$$

$$A_y = 18 \text{ kips}$$

- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.
- With uniform loading between D and E , the shear variation is linear.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 5.4



- Between concentrated load application points, $dM/dx = V = \text{constant}$. The change in moment between load application points is equal to area under the shear curve between points.

$$M_B - M_A = +108 \quad M_B = +108 \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

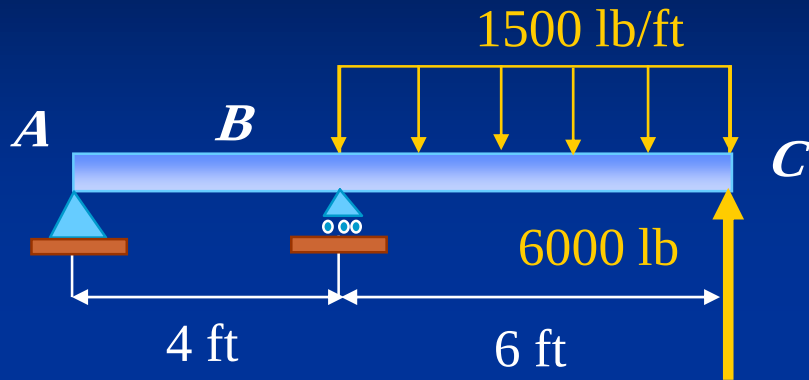
$$M_C - M_B = -16 \quad M_C = +92 \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_D - M_C = -140 \quad M_D = -48 \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

$$M_E - M_D = +48 \quad M_E = 0$$

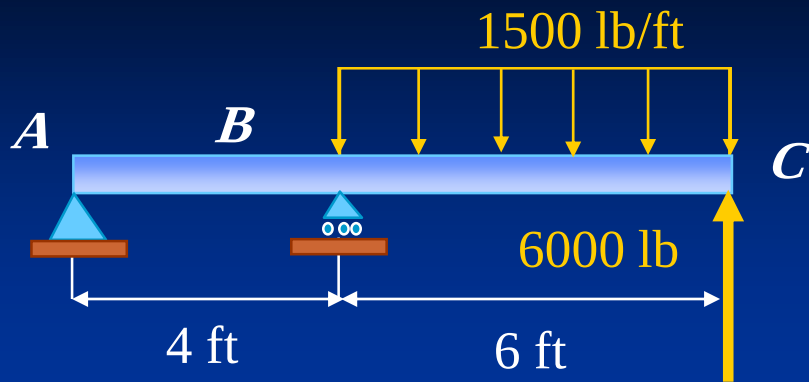
- With a linear shear variation between D and E , the bending moment diagram is a parabola.

Problem 5.13



For the beam and loading shown, (a) draw the shear and bending-moment diagrams, (b) determine the magnitude and location of the maximum absolute value of the bending moment.





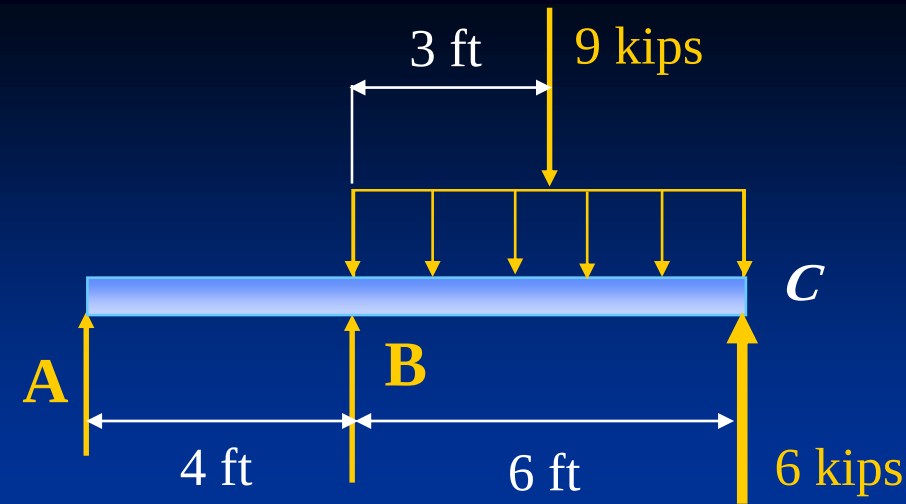
Solving Problems on Your Own

For the beam and loading shown, (a) draw the shear and bending-moment diagrams, (b) determine the magnitude and location of the maximum absolute value of the bending moment.

1. *Draw a free-body diagram for the entire beam,* and use it to determine the reactions at the beam supports.

2. *Draw the shear diagram.*

3. *Draw the bending-moment diagram by computing the area under each portion of the shear curve.*



Draw a free-body diagram for the entire beam, and use it to determine the reactions at the beam supports.

$$+\left(\sum M_A = 0 : (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - (9 \text{ kips})(7 \text{ ft}) + B(4 \text{ ft}) = 0\right.$$



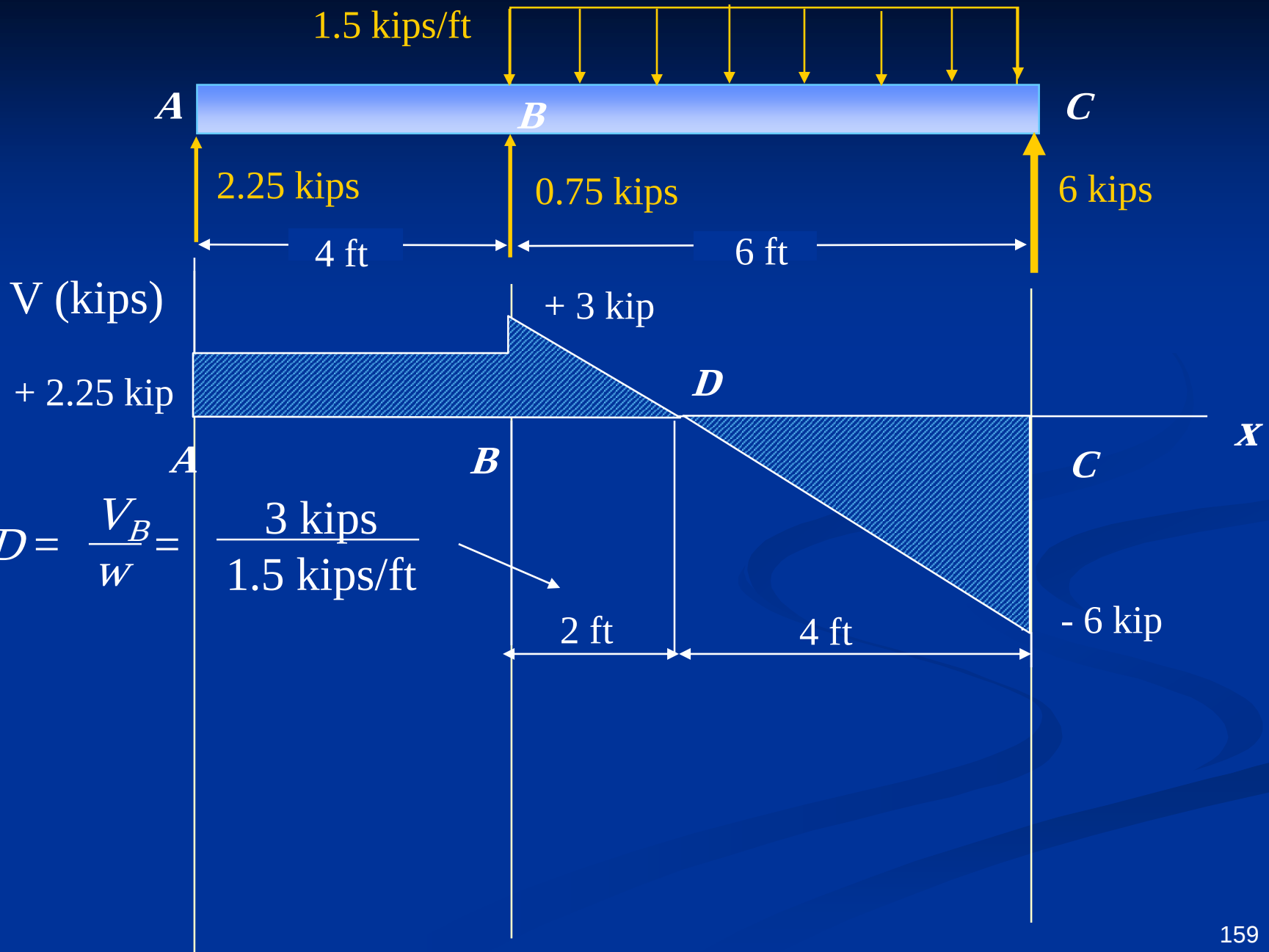
$$B = 0.75 \text{ kips} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A + 0.75 \text{ kips} + 6 \text{ kips} - 9 \text{ kips} = 0$$

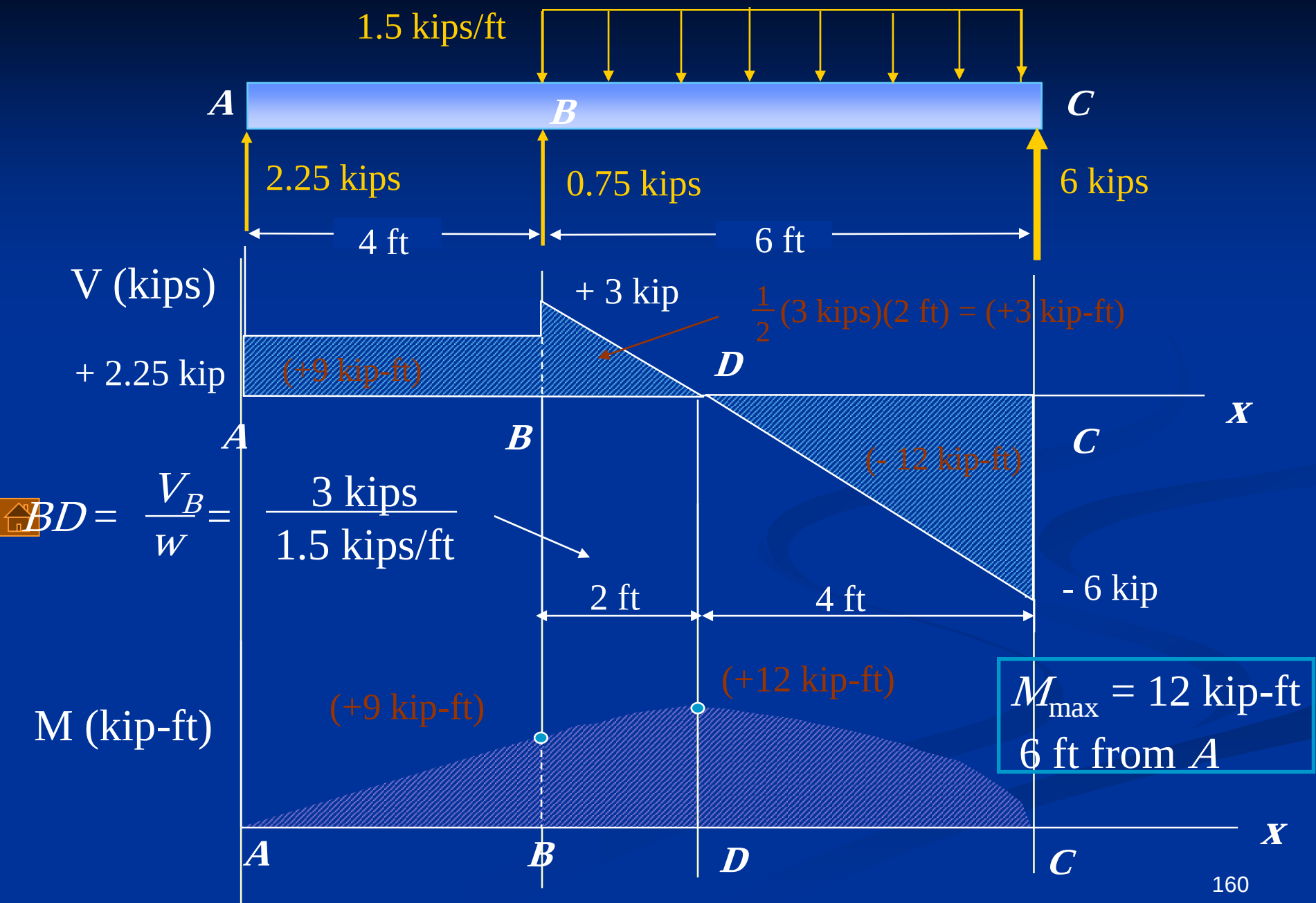
$$A = 2.25 \text{ kips} \uparrow$$

Draw the shear diagram.

Problem 7.163 Solution



Draw the bending-moment diagram.



مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

نیروهای توزیع شده:

مرکز گرانش و مرکز جرم

فریدیناند پی. بی. ایر

ای. راسل جانسون

ارائه: سید محمد علی ابطحی



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Contents

[Introduction](#)

[Center of Gravity of a 2D Body](#)

[Centroids and First Moments of Areas
and Lines](#)

[Centroids of Common Shapes of Areas](#)

[Centroids of Common Shapes of Lines](#)

[Composite Plates and Areas](#)

[Sample Problem 7.1](#)

[Determination of Centroids by
Integration](#)

[Sample Problem 7.2](#)

[Theorems of Pappus-Guldinus](#)

[Sample Problem 7.3](#)

[Distributed Loads on Beams](#)

[Sample Problem 7.4](#)

[Center of Gravity of a 3D Body:
Centroid of a Volume](#)

[Centroids of Common 3D Shapes](#)

[Composite 3D Bodies](#)

[Sample Problem 7.5](#)



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Introduction

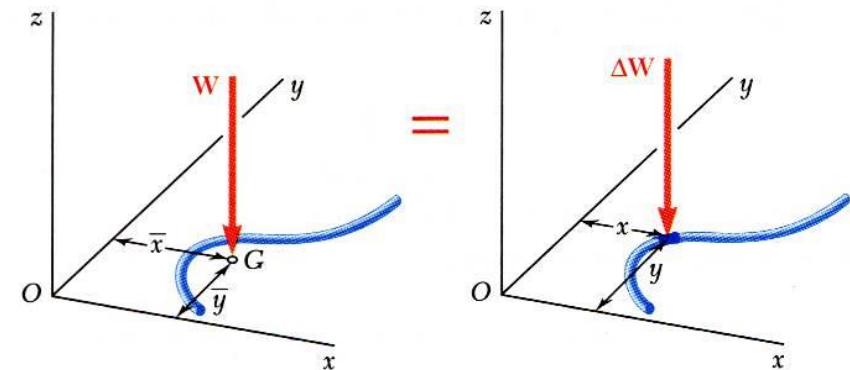
- زمین به هر ذره تشکیل دهنده یک جسم یک نیروی گرانش اعمال می کند. این نیروها می تواند توسط یک تک نیروی معادل با وزن جسم جایگزین شود و به **مرکز گرانش** جسم وارد شود.
- مرکز یک سطح مشابه با مرکز جرم یک جسم می باشد. مفهوم اولین ممان یک سطح در مرکز جرم استفاده می شود.
- محاسبه مساحت یک سطح دوار یا حجم یک جسم دوار با تعیین مرکز جرم خط یا مساحتی که برای تولید آن سطح یا جسم دوار به کار می رود ارتباط مستقیم دارد (قضایای پاپوس-گولدینوس)



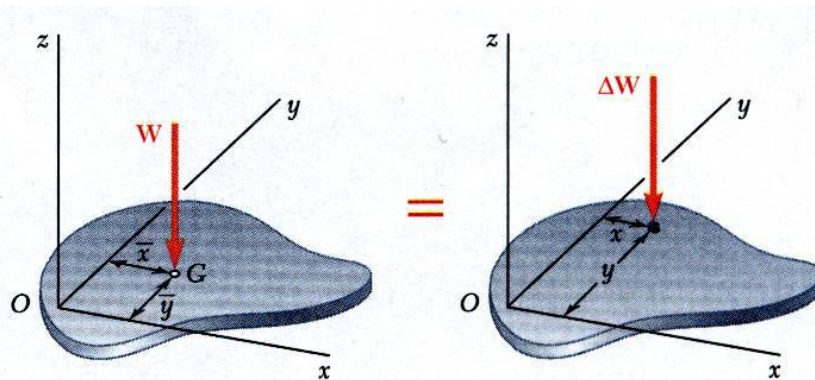
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل جسم دو بعدی

• مرکز ثقل یک سیم



• مرکز ثقل یک ورق



$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x\Delta W$$

$$= \int x dW$$

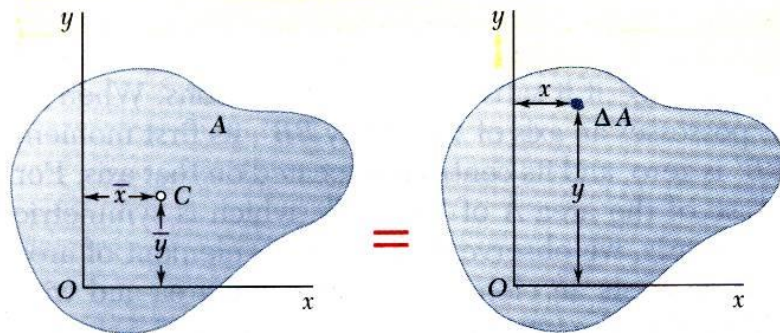
$$\sum M_x \quad \bar{y}W = \sum y\Delta W$$

$$= \int y dW$$

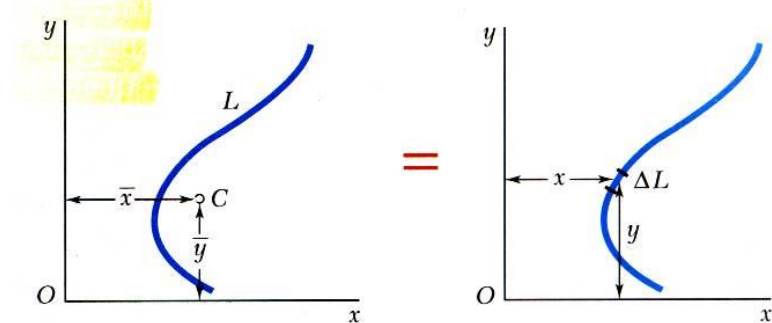
Vector Mechanics for Engineers: Statics

Centroids and First Moments of Areas and Lines

• مرکز جرم (مرکزوار) یک سطح



• مرکز جرم (مرکزوار) یک خط



$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x}(\gamma A t) = \int x(\gamma t) dA$$

$$\bar{x}A = \int x dA = Q_y$$

= first moment with respect to y

$$\bar{y}A = \int y dA = Q_x$$

= first moment with respect to x

$$\bar{x}W = \int x dW$$

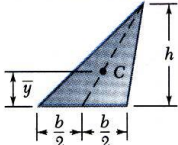
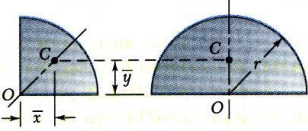
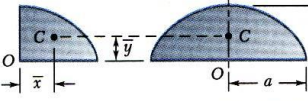
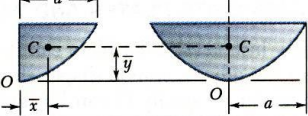
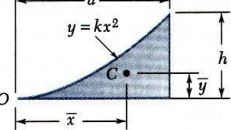
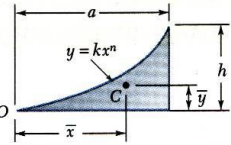
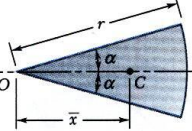
$$\bar{x}(\gamma L a) = \int x(\gamma a) dL$$

$$\bar{x}L = \int x dL$$

$$\bar{y}L = \int y dL$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Centroids of Common Shapes of Areas

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
سطح مثلثی			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
سطح ربع و نیم دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
سطح ربع و نیم بیضی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
سطح ربع و نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
سهمی درجه دوم کلی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
سهمی درجه nام کلی		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع دایره		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Centroids of Common Shapes of Lines

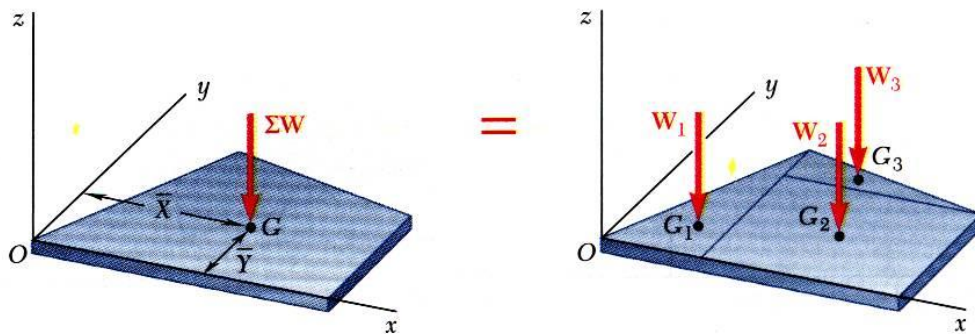
Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
ربع دایره		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
نیم دایره		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
کمان دایره ای		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Composite Plates and Areas

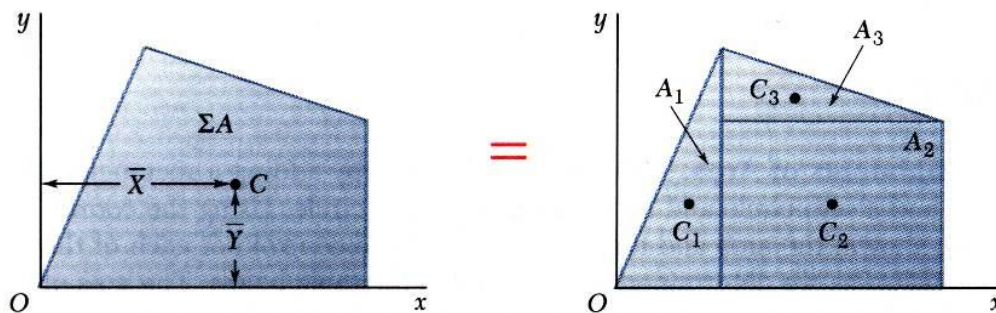
• ورق های مرکب



$$\bar{X} \Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

$$\bar{Y} \Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

• سطوح مرکب



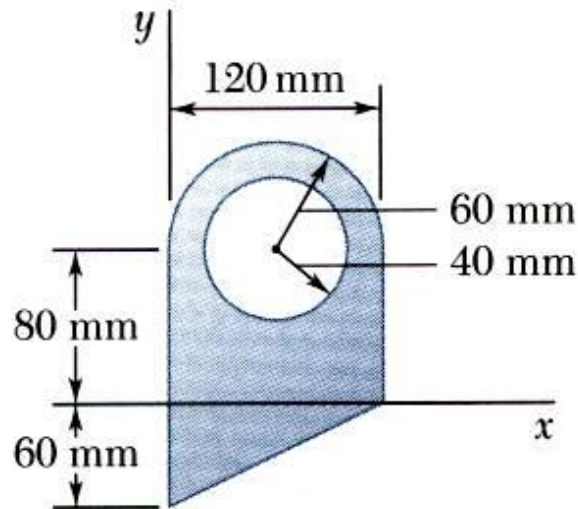
$$\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.1



SOLUTION:

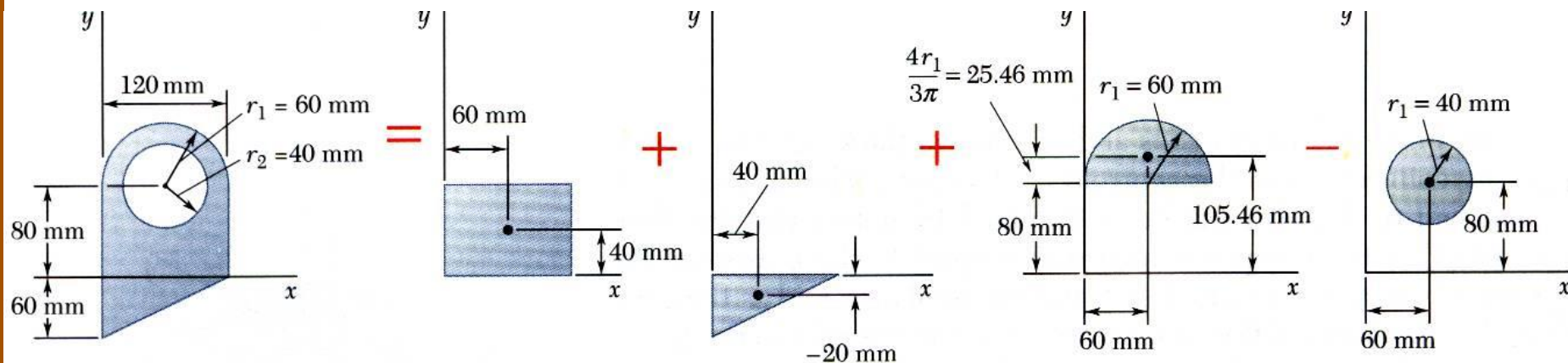
- این سطح را از مجموع یک مستطیل، یک مثلث، و یک نیم دایره و تفریق یک دایره می توان بدست آورد
- ممان های اول این سطوح نسبت به محورهای مختصات را محاسبه می کنیم

برای سطوح نشان داده شده مطلوبست الف)
ممان های اول نسبت به محورهای x و y ب)
مکان مرکزوار



Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.1



Component	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

• ممان های اول سطح مرکب: این سطح را از مجموع یک مستطیل، یک مثلث، و یک نیم دایره و تفریق یک دایره می توان بدست آورد

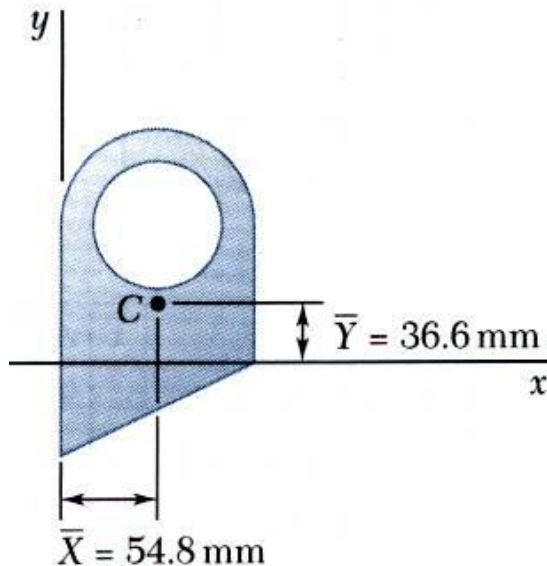
$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.1

• مکان مرکزوار



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

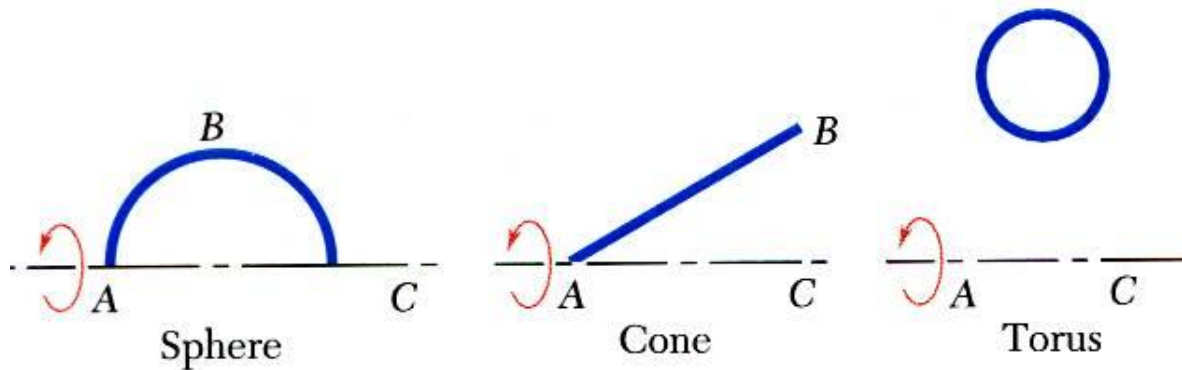
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

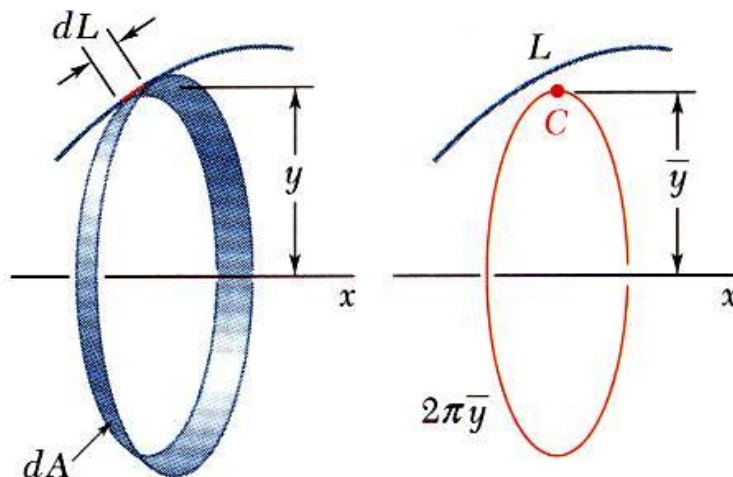
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تئوری پاپوس-گلدینوس



- سطح دوار سطحی است که از دوران یک منحنی صفحه ای حول یک محور ثابت به وجود می آید

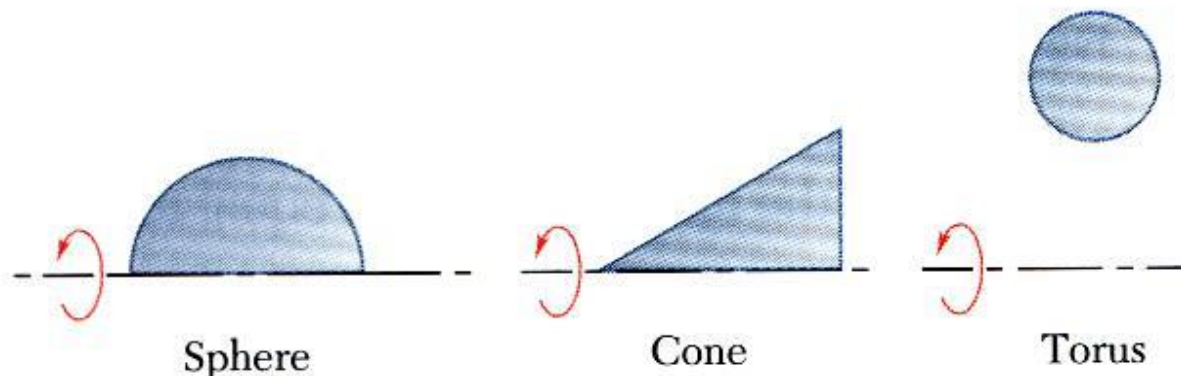


- مساحت یک سطح دوار برابر است با طول منحنی مولد، ضرب در فاصله ای که مرکزوار منحنی ضمن ایجاد این سطح طی می کند

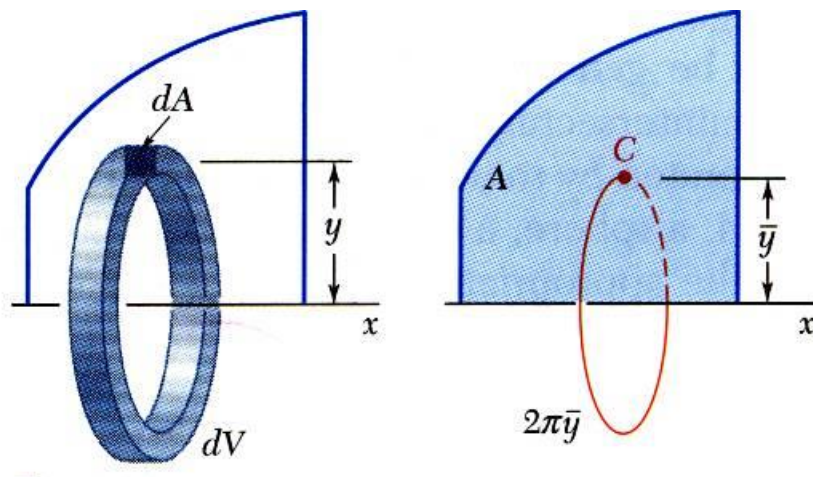
$$A = 2\pi \bar{y} L$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Theorems of Pappus-Guldinus



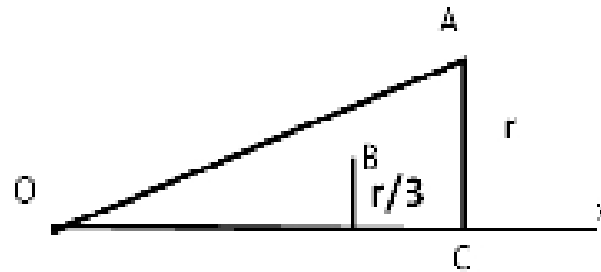
- جسم دوار جسمی است که از دوران یک سطح مستوی حول یک محور ثابت به وجود می آید



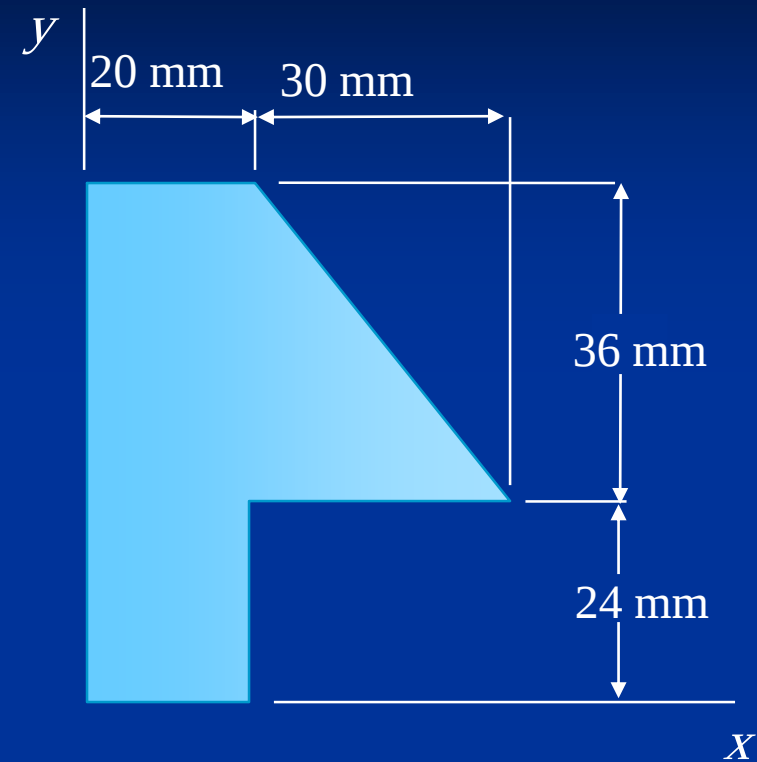
- حجم یک جسم دوار برابر است با مساحت مولد، ضرب در فاصله ای که مرکزوار سطح در ضمن ایجاد جسم طی می کند

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

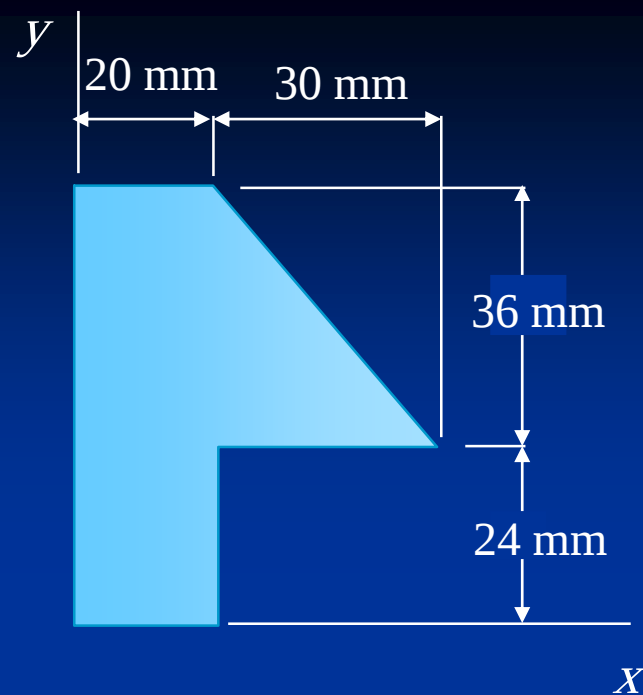
- مثال) حجم حادث از دوران صفحه OAC حول محور X (حجم مخروط) کدام است



Problem 7.6



Locate the centroid of the plane area shown.

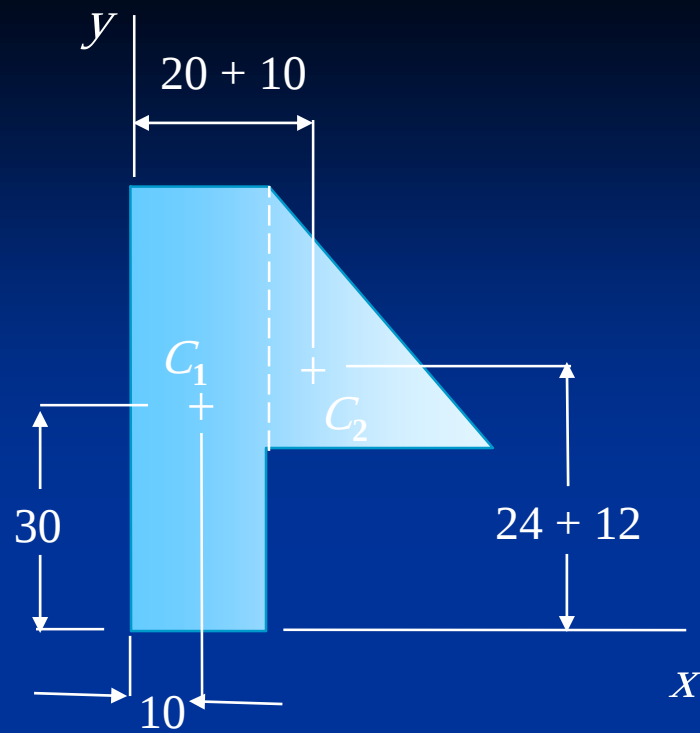


Solving Problems on Your Own

Locate the centroid of the plane area shown.

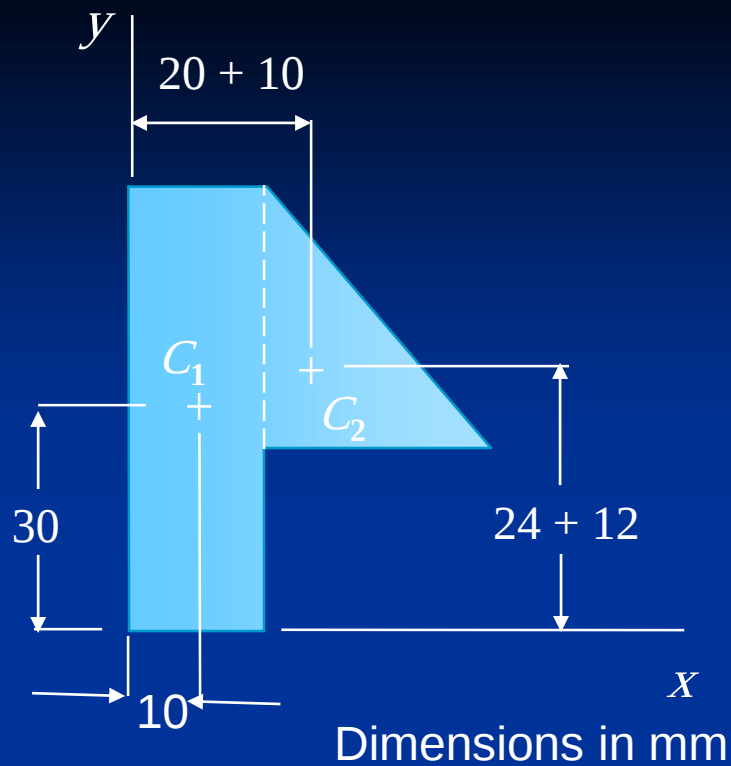
Several points should be emphasized when solving these types of problems.

1. *Decide how to construct the given area from common shapes.*
2. It is strongly recommended that you *construct a table containing areas or length and the respective coordinates of the centroids.*
3. When possible, *use symmetry to help locate the centroid.*



Dimensions in mm

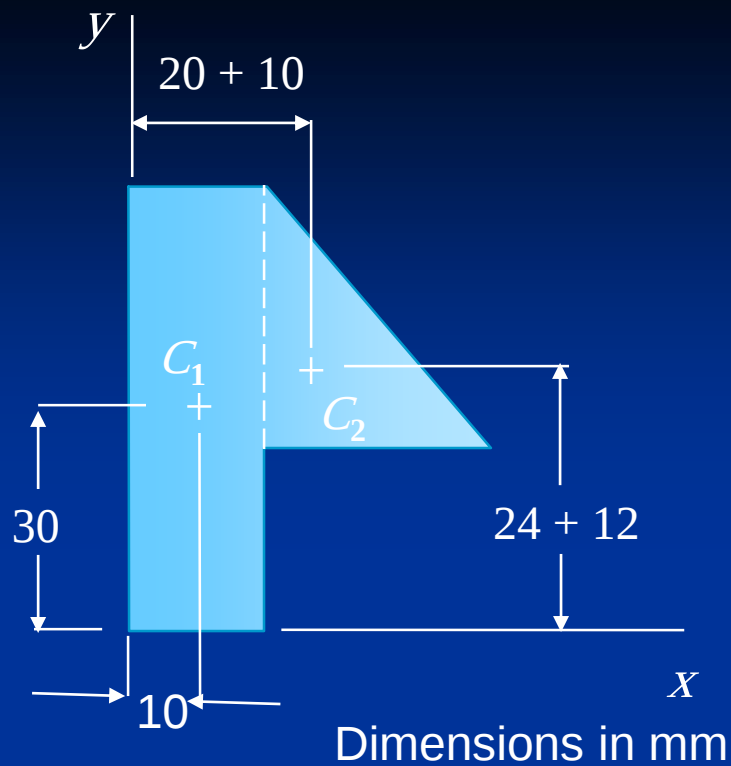
Decide how to construct the given area from common shapes.



Construct a table containing areas and respective coordinates of the centroids.

	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
1	$20 \times 30 = 600$	10	15	9,000	9,000
2	$(1/2) \times 10 \times 24 = 120$	20	36	7,200	4,320
Σ	720			16,200	13,320

Problem 7.6 Solution



Then $\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x} A$
 $\bar{X} (1740) = 28,200$

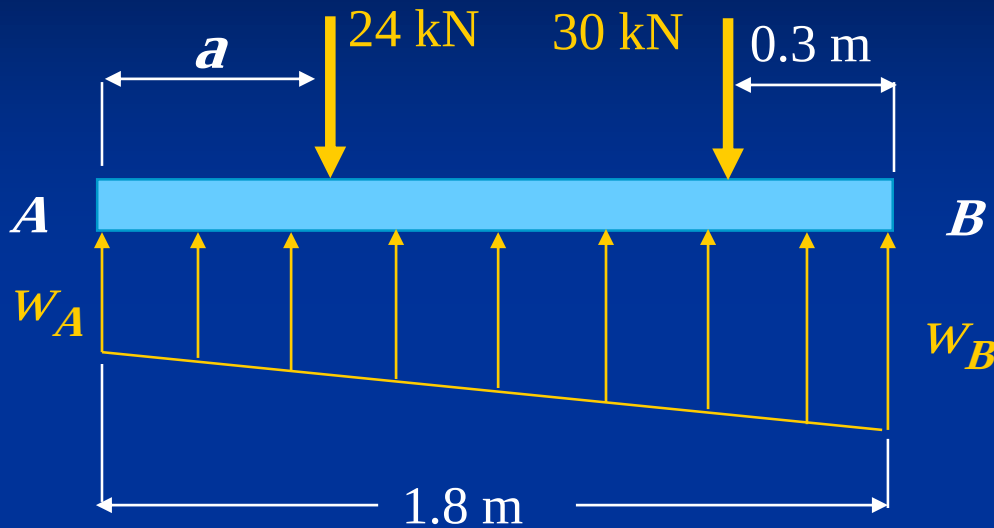
or $\bar{X} = 16.21 \text{ mm}$

and $\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$
 $\bar{Y} (1740) = 55,440$

or $\bar{Y} = 31.9 \text{ mm}$

	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
1	$20 \times 60 = 1200$	10	30	12,000	36,000
2	$(1/2) \times 30 \times 36 = 540$	30	36	16,200	19,440
Σ	1740			28,200	55,440

Problem 7.7



The beam AB supports two concentrated loads and rests on soil which exerts a linearly distributed upward load as shown. Determine (a) the distance a for which $w_A = 20$ kN/m, (b) the corresponding value w_B .