

فصل ۹۱

کشش و فشار

۱-۱ مقدمه

مقاومت مصالح شاخه‌ای از مکانیک کاربردی است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌کند. اجسام جامدی که در این درس مطالعه می‌شود عبارتند از میله‌های با بارگذاری محوری، محورها مکانیکی، تیرها، ستون‌ها و همچنین سازه‌هایی که از مجموعه‌ای از این اجزاء ساده تشکیل می‌شود. معمولاً هدف از تحلیل تعیین تنش، کرنش و تغییر شکل ایجاد شده بوسیله بارها در قطعات ساختمان و به طور کلی اجزاء یک سازه می‌باشد. اگر بتوانیم این کمیت‌ها را برای تمام مقادیر بار تا بار شکست حساب کنیم در این صورت تصویر کاملی از رفتار مکانیکی جسم یا سازه مورد نظر خواهیم داشت.

تحلیل‌های نظری و نتایج تجربی در مطالعه مقاومت مصالح اهمیت مساوی دارند. در بسیاری از مواقع ما با استدلال منطقی فرمول‌ها و معادلاتی برای تخمین رفتار مکانیکی سازه‌ها بدست می‌آوریم ولی در عین حال باید آگاه باشیم بدون در نظر گرفتن خواص ماده یا مصالح مصرفی نمی‌توان این فرمول‌ها را به طور واقع بینانه‌ای بکار برد. خواص مکانیکی مصالح فقط بعد از انجام آزمایش‌های مناسب در آزمایشگاه بدست خواهند آمد. همچنین بسیاری از مسائل مهم مهندسی را نمی‌توان با استفاده از روش‌های تئوری به‌طور موثری حل نمود و اندازه‌گیری‌های تجربی عملاً مورد نیاز می‌گردد. پیشرفت مقاومت مصالح در طول تاریخ مخلوط حالایی از تئوری و تجربه می‌باشد به طوریکه در بعضی از مواقع

نام کتاب : مقاومت مصالح

نام مؤلف : دکتر حجت‌الله عادل

نام ناشر : انتشارات دهخدا تلفن : ۶۴۶۰۱۸۵

نوبت چاپ : هفتم و بهار ۱۳۷۵

تیراژ : چهار هزار نسخه

قطع و صفحه : وزیری ۱۰+۷۶۰ صفحه

چاپ : مروی

صحافی : ایران هنر

۳

غوطه‌ور، روی سطح مقطع به طور پیوسته توزیع شده‌اند. شدت نیرو، یعنی نیرو در واحد سطح، به نام تنش نامیده می‌شود و معمولاً با حرف یونانی σ نشان داده می‌شود. با فرض اینکه تنش توزیع یکنواختی روی مقطع داشته باشد (شکل ۱-۱ b) برآورد نیروهای فوق براساس با حاصل ضرب شدت σ و مساحت سطح مقطع میله A . علاوه از شرایط تعادل جسم نشان داده شده در شکل ۱-۱ b نتیجه می‌نود که برآورد مربوط باید برابر با P باشد. در نتیجه داریم

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

بدین ترتیب معادله تنش یکنواخت در یک میله مستوری بدست می‌آید. این معادله نشان می‌دهد که تنش واحد نیرو بر سطح دارد. در مقاومت مصالح سه سیستم اتحاد مورد استفاده می‌باشد. در سیستم انگلیسی نیرو بر حسب پاوند (lb) و سطح بر حسب اینچ مربع (in^2) اندازه گیری می‌شود، از این رو واحد تنش پاوند در اینچ مربع می‌باشد که با psi نشان داده می‌شود. در سیستم اتحاد بین المللی با SI واحد نیرو و نیوتن (N) و واحد سطح متر مربع می‌باشد. واحد تنش در این سیستم نیوتن در متر مربع موسوم به پاسکال (Pa) می‌باشد. چون از لحاظ مقاومت مصالح پاسکال واحد کوچکی است غالباً "مگا پاسکال" (MPa) کاربرد می‌شود که معادل نیوتن در میلی متر مربع (N/mm^2) می‌باشد. بالاخره سیستم MKS که در آن واحدهای اصلی متر و کیلو گرم نیرو و ثانیه می‌باشند. در این سیستم واحد متداول تنش کیلو گرم بر سانتیمتر مربع (Kg/cm^2) است.

موقعی که میله فوی کشیده می‌شود تنش ایجاد شده به نام تنش کششی نامیده می‌شود. اگر جهت نیروها را عوض کنیم میله تحت فشار قرار می‌گیرد و تنش ایجاد شده تنش فشاری خوانده می‌شود. در مقاومت مصالح معمولاً "تنش کششی را منته و تنش فشاری را منفی فرض می‌کند. اشکال ۱-۲ و ۱-۳ به خواننده کمک می‌کند تا برای تنش‌های کششی و فشاری احساس پیدا کند.

1- Système International.

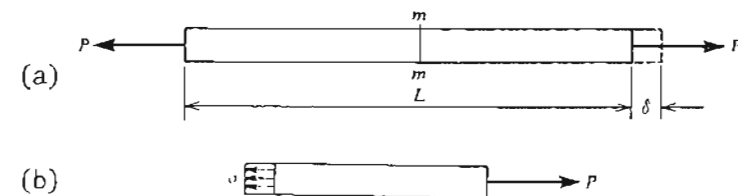
۲

آزمایش منحنی به نایج جالبی گردیده و در مواقع دیگر نتایج جدیدی ارائه داده است. اشخاص مشهوری همچون لئوناردو داوینچی (۱۵۱۹ - ۱۴۵۲) و گالیله (۱۶۴۲ - ۱۵۶۴) آزمایش‌هایی برای تعیین مقاومت سیم‌ها، میله‌ها و نیرها انجام دادند هر چند که آنها با استاندارد امروزه هیچ گونه تئوری برای توجیه نتایج آزمایش‌های خود ارائه ندادند.

در مقابل، ریاضی دان معروف لئونارد اولر (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷) تئوری ریاضی ستون‌ها را توسعه داد و در سال ۱۷۴۴ بار بحرانی یک ستون را مدت ها قبل از اینکه هیچ گونه نتایج تجربی وجود داشته باشد حساب کرد. بدین ترتیب نتایج تئوری اولر سالها بدون استفاده باقی ماند هر چند که این نتایج امروزه اساس تئوری ستون‌ها را تشکیل می‌دهد.

۲-۱ تنش و کرنش

مفاهیم تنش و کرنش را می‌توان به طور ساده با مطالعه یک میله مستوری تحت کشش بیان نمود. میله مستوری میله‌ایست که در برابر طولش و یک محور مستقیم دارای سطح مقطع ثابت باشد. در شکل ۱-۱ فرض می‌شود که میله در دو انتهایش با نیروهای محوری P بارگذاری شده باشد که در آن ایجاد یک کشش یکنواخت می‌کند. بوسیله یک برش مصنوعی در مقطعی عمود بر محور میله، مثل مقطع mm ، می‌توانیم قسمتی از میله را به صورت جسم آزاد جدا کنیم (شکل ۱-۱ b). در انتهای راست نیروی کششی P وارد شده و در انتهای دیگر نیروهایی وجود دارد که معرف عمل فسمت جدا شده روی قسمت مورد نظر می‌باشد. این نیروها، مشابه توزیع پیوسته فشار هیدروستاتیکی روی یک جسم



شکل ۱-۱ میله مستوری تحت کشش

۵

اگر مختصات نقطه اثر نیروی P را که در امتداد برآیند نیروهای σ می باشد با x_p و y_p نشان دهیم از معادلات تعادل روابط زیر نتیجه می شود :

$$Px_p = \int_A (\sigma dA) x \quad (1-4)$$

لنگر نیروهای σ حول y = لنگر برآیند حول y

$$Py_p = \int_A (\sigma dA) y \quad (1-5)$$

لنگر نیروهای σ حول x = لنگر برآیند حول x

از این روابط مختصات نقطه اثر نیروی P بدست می آید .

$$x_p = \frac{\int_A \sigma x dA}{P} \quad (1-6)$$

$$y_p = \frac{\int_A \sigma y dA}{P} \quad (1-7)$$

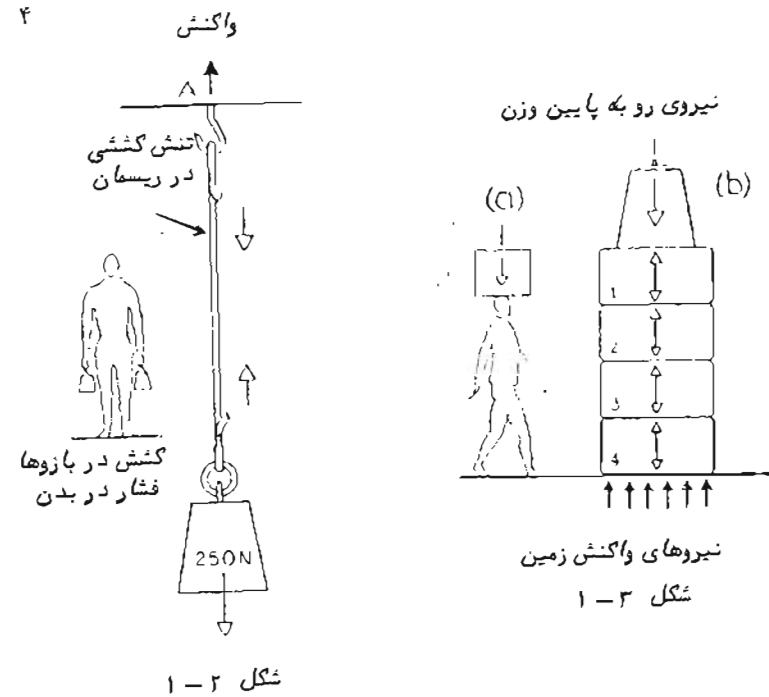
اگر σ در مقطع ثابت باشد رابط 1-1 صاف است و با استفاده از این رابطه معادلات 1-6 و 1-7 به معادلات 1-2 و 1-3 منجر می شوند، به عبارت دیگر $x_c = x_p$ و $y_c = y_p$ از مرکز سطح مقطع عبور می کند .

موقعی که بار P در مرکز سطح مقطع اثر نکند میله تحت خمش خواهد بود و تحلیل مفصل تری لازم می گردد که بعداً در این کتاب مورد بحث قرار خواهد گرفت . در سراسر این کتاب فرض می شود که نیروهای محوری در مرکز سطح مقطع اثر کنند مگر در مواردی که عکس این مطلب ذکر شده باشد . همچنین بجز در مواردی که صریحاً ذکر خواهد شد به طور کلی از وزن اجسام (مانند مثال شکل ۱-۱) صرف نظر می شود .

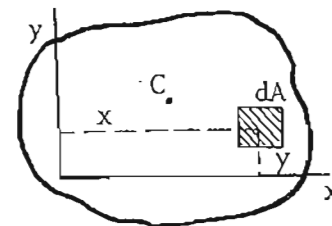
اضافه طول (یا کاهش طول) یک میله تحت نیروهای محوری را با حرف یونانی ϵ نشان می دهیم (شکل ۱-۱) . اضافه طول (یا کاهش طول) در واحد طول به نام کرنش خوانده می شود که از رابطه زیر بدست می آید :

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1-8)$$

۴



شرط لازم برای درستی معادله 1-1 این است که تنش روی سطح مقطع به طور یکنواخت توزیع شده باشد . این شرط موقعی برقرار خواهد شد که نیروی محوری P در مرکز سطح مقطع میله وارد شود . این نکته را می توان با استفاده از معادلات تعادل تحقیق نمود . در شکل ۱-۴ یک شکل احتمالی برای مقطع میله منشوری فرض شده است . مختصات مرکز سطح C از روابط زیر بدست می آید :



$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A} \quad (1-2)$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A} \quad (1-3)$$

شکل ۱-۴

۷

خطی است. بعد از A بین تنش و کرنش دیگر رابطه خطی وجود ندارد، از این جهت نقطه A حد تناسب نامیده می شود. تنش حد تناسب برای فولادهای سازه‌ای با کرنش کم معمولاً 2100 Kg/cm^2 تا 2500 Kg/cm^2 می باشد ولی برای فولاد های با مقاومت زیاد می تواند خیلی بیشتر باشد. با ادامه سودن بار، کرنش نسبت به تنش سریع تر اضافه می شود تا اینکه در نقطه B بدون افزایش قابل ملاحظه نیروی کششی ازدیاد طول قابل ملاحظه شروع می شود. این پدیده به "تسلیم شدن ماده" معروف است و تنش نقطه B به نام تنش تسلیم خوانده می شود. در ناحیه BC ماده بصورت خمیری در می آید و میله ممکن است به حالت خمیری به مقدار ۱۰ تا ۱۵ برابر حد تناسب افزایش طول پیدا کند. در نقطه C ماده شروع به سخت شدن و در مقابل ازدیاد بار مقاومت می کند. این پدیده موسوم به "سخت سوبندگی کرنش" می باشد. بدین ترتیب همراه با افزایش طول بیشتر، تنش نیز افزایش می یابد تا اینکه در نقطه D به یک حد نهایی می رسد. تنش نقطه D به نام تنش نهایی نامیده می شود. بعد از این نقطه افزایش طول میله با کاهش بار همراه می باشد که بالاخره در نقطه E به گسیختن شدن میله منجر می شود. ازدیاد طول میله با انقباض جانی آن همراه است که منجر به کم شدن مساحت سطح مقطع می گردد. این پدیده تا نقطه C اثر محسوسی در روی منحنی تنش - کرنش ندارد ولی بعد از نقطه C کاهش مساحت سطح مقطع اثر قابل توجهی در مقدار تنش محاسبه شده خواهد داشت. میله در وسط طولش باریک شده در محاسبه σ بکار رود منحنی تنش - مساحت سطح مقطع واقعی واقعی در قسمت باریک شده در محاسبه σ بکار رود منحنی تنش - کرنش واقعی بدست می آید (منحنی OABCE)، با وجود اینکه بار کلی که میله تحمل می کند پس از تنش نهایی کاهش می یابد (منحنی DE)، کاهش مزبور در اثر کم شدن سطح مقطع می باشد به به علت از بین رفتن مقاومت خود ماده. ماده در واقع امرانش تنش را تحمل می کند تا اینکه نمونه پاره شود. برای اکثر کار برده های عملی می توان منحنی معمول تنش - کرنش OABCDE را بر اساس سطح مقطع اولیه نمونه بکار برد.



شکل ۶-۱ باریک شدن میله در اثر کشش

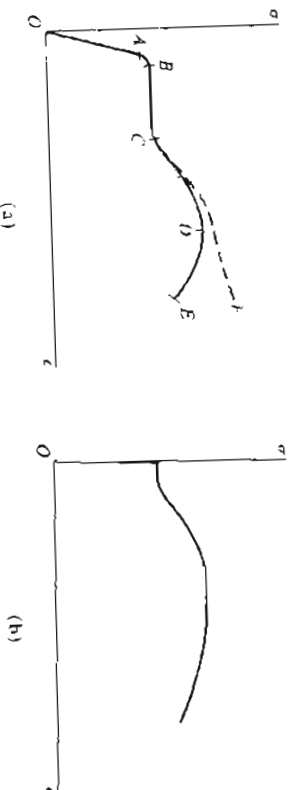
۸

با در این رابطه طول کل میله می باشد. کرنش وقتی از رابطه ۸-۱ با دقت به دست می آید که مقدار آن در تمام طول میله یکپارخت باشد. توجه کنید که کرنش یک کمیت بدون بعد است. موقعی که میله سخت کش است کرنش کششی و موقعی که میله تحت فشار است کرنش فشاری می باشد. در حالت اخیر مقاطع مجاور هم به یکدیگر نزدیک می شوند. در مقاومت مصالح معمولاً "کرنش کششی" را مثبت و "کرنش فشاری" را منفی فرض می کنند.

۳-۱ آزمایش کشش

رابطه بین تنش و کرنش در یک ماده مورد نظر با آزمایش کشش تعیین می شود. نمودار از ماده مزبور معمولاً به شکل یک میله گرد (میله با مقطع دایره ای) در داخل ماشین کشش قرار داده می شود و تحت کش قرار می گیرد. نیرو و ازدیاد طول معلوم اضافه کردن تدریجی بار اندازه گیری می شود. با تقسیم نیرو بر مساحت سطح مقطع تنش و با تقسیم ازدیاد طول میله بر طول میله کرنش پیدا می شود. بدین طریق منحنی کامل تنش - کرنش برای ماده مورد نظر بدست می آید.

منحنی تنش - کرنش برای فولاد سازه ای در شکل ۵-۱ مشاهده می گردد (منحنی OABCDE). از A تا O تنش و کرنش مستقیماً متناسب می باشند و منحنی



شکل ۵-۱

۹

برای اغلب مصالح شکننده تنش‌های مشخصه در فشار خیلی بیشتر از مقادیر نظیر در کشش می‌باشند.

منحنی‌های تنش - کرنش در نکل‌های ۵-۱، ۷-۱ و ۸-۱ رفتار مصالح مختلف را در حالت بارگذاری کششی نشان می‌دهد. موفقی که نمونه‌ای از ماده مورد نظر بار برداری می‌شود، یعنی اینکه بار به تدریج کم شده و به صفر رسانده می‌شود، تمام یا قسمتی از اضاغه طولی که در موقع بارگذاری ایجاد شده است از بین می‌رود. این خاصیت مواد که در اثر آن ماده به شکل اولیه باز می‌گردد به نام خاصیت ارتجاعی خوانده می‌شود. اگر مقدار بارگذاری کم باشد پس از بار برداری میله به طور کامل به حالت اولیه برمی‌گردد، اما اگر مقدار بارگذاری زیاد باشد طوری که از حد ارتجاعی تجاوز کند میله مقداری تغییر شکل دائمی پیدا خواهد کرد. برای فولاد و بسیاری از فلزات دیگر حد ارتجاعی و حد تناسب تقریباً "منطق می‌باشند. اما در مواد لاستیک - مانند خاصیت ارتجاعی مقدار زیادی پس از حد تناسب ادامه پیدا می‌کند.

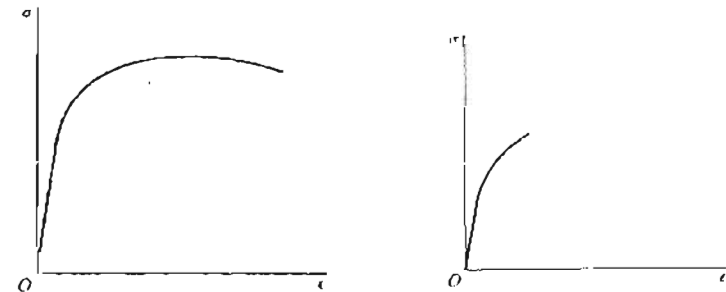
در طرح یک سازه لازم است مطمئن شویم که سازه برای وظایف در نظر گرفته شده تحت شرایط بهره برداری بطور صحیح انجام وظیفه می‌کند. معمولاً "سازه طوری طرح می‌شود که حداکثر تنش زیر حد تناسب (یا حد ارتجاعی) باقی بماند زیرا فقط در این صورت است که هیچ گونه تغییر شکل دائمی در سازه پیدا نخواهد شد. به منظور در نظر گرفتن بارگذاری‌های بیش از اندازه تصادفی یا بی دقتی‌های ممکن در اجرای ساختمان و همچنین برای منبرهای نامعلوم احتمالی در تحلیل سازه غالباً "ضریب اطمینانی در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب که بیش حد تناسب بر عددی بزرگتر از واحد به نام ضریب اطمینان تقسیم می‌شود تا تنش مجاز بدست آید و سعی می‌شود که در هیچ نقطه از سازه تنش از تنش مجاز تجاوز نکند. برای مثال در طرح سازه‌های فولادی برای فولادی که تنش تسلیم آن 2300 Kg/cm^2 می‌باشد تنش مجاز 1400 Kg/cm^2 بکار برده می‌شود. بنابراین ضریب اطمینان مربوطه در مقابل تسلیم 1.64 می‌باشد. برای مواد شکل پذیر معمولاً "ضریب اطمینان در مقابل تسلیم حساب می‌شود. ولی برای مواد شکننده مانند بتن تنش مجاز در مقابل تنش نهایی حساب می‌شود. به طور کلی در موقع طرح بر اساس تنش‌های مجاز یکی از دو معادله زیر را می‌توان برای تعیین تنش مجاز بکار برد:

۸

منحنی ۵-۱ برای نشان دادن خصوصیات کلی منحنی تنش - کرنش فولاد رسم شده است ولی اندازه‌هایش با واقعیت مطابقت نمی‌باشد زیرا همانطور که قبلاً تذکر داده شد کرنش از B تا C ممکن است ۱۵ برابر کرنش از O تا A باشد. همچنین کرنش از C تا E حتی بیشتر از کرنش از B تا C می‌باشد. منحنی تنش - کرنش با مقیاس صحیح در شکل ۵-۱ رسم شده است. در این شکل کرنش از O تا A در مقابل کرنش A تا E آنقدر کوچک است که قابل دیدن نیست و قسمت خطی منحنی به صورت یک خط عمودی به نظر می‌رسد.

وجود نقطه تسلیم مشخص و کرنش حمیری زیاد به دنبال آن تا حدودی منحصر به فولاد است که امروزه رایج‌ترین فلز سازه‌ای می‌باشد. در آلیاژهای آلومینیوم انتقال از درجه سختی به قسمت خطی به قسم غیر خطی به صورت تدریجی تری صورت می‌گیرد (شکل ۷-۱). فولاد و بسیاری از آلیاژهای آلومینیوم قبل از گسیختگی تغییر شکل زیادی می‌دهند و از این رو به مواد شکل پذیر موسوم می‌باشند. از طرف دیگر موادی که شکننده هستند در کرنش‌های نسبتاً کوچک گسیخته می‌شوند (شکل ۸-۱). از مواد شکننده می‌توان سفال، چدن، بتن، شیشه و بعضی از آلیاژهای فلزی را نام برد.

برای حالت فشار نیز می‌توان منحنی‌هایی شبیه منحنی‌های فوق برای مصالح مختلف بدست آورد و حد تناسب، حد تسلیم و تنش نهایی را برای آنها تعریف کرد. در مورد فولاد مشاهده می‌شود که حد تناسب و تنش تسلیم در کشش و فشار تقریباً یکسان می‌باشد.



شکل ۷-۱ منحنی نمونه تنش - کرنش برای آلیاژهای آلومینیوم سازه‌ای

شکل ۸-۱ منحنی نمونه تنش - کرنش برای یک ماده شکننده

قالب فشرده می‌گردند. آجرپس در کوره آجر پزی تا درجه حرارت 1000°C حرارت داده می‌شود. از آنجایی که انواع مختلف خاک رس یافت می‌شوند انواع زیادی آجر با مقاومت‌های گوناگون وجود دارند.

مقاومت فشاری آجر خیلی بیشتر از مقاومت کشی آن می‌باشد. مقاومت کشی آجر به قدری پایین است که نمی‌توان آن را برای تحمل نیروهای کشی بکار برد. مقاومت فشاری آجر کاری را نمی‌توان با آزمایش مقاومت فشاری یک آجر تنها با دست بدست آورد زیرا نوع ملاط و کیفیت اجرای کار در روز، مقاومت آجر کاری تأثیر می‌گذارد. تنش مجاز فشاری آجر کاری‌های معمولی بین 5Kg/cm^2 تا 35Kg/cm^2 می‌باشد.

۳-۴-۱ سنگ

استفاده از سنگ در کارهای ساختمانی قدیمی‌تر از آجر می‌باشد. با وجود اینکه امروزه استفاده از سنگ برای حمل بار در ساختن بناها رایج نمی‌باشد در نواحی که سنگ زیاد و ارزان است خانه‌های کوچک را هنوز می‌توان با دیوارهای سنگی ساخت. پایه‌های پل را می‌توان از سنگ ساخت. پایه‌های بسیاری از پل‌های راه آهن قرن سوزدهم در اروپا از سنگ می‌باشد. سنگ مانند آجر شکننده است و دارای مقاومت فشاری زیاد ولی مقاومت کشی ضعیف می‌باشد. مقاومت فشاری سنگ‌ها بستگی به نوع آنها دارد. برای مثال تنش مجاز فشاری سنگ گرانیت در حدود 50Kg/cm^2 و تنش مجاز فشاری سنگ آهک مرعوب در حدود $15-20\text{Kg/cm}^2$ می‌باشد.

۳-۴-۲ چوب

چوب مانند سنگ از زمان‌های باستان به عنوان یک ماده طبیعی برای تحمل بار بکار رفته است. پل‌های اولیه در عرض رودهای کوچک یک لوحه سنگی و یا یک کنده چوب بودند.

چون انواع مختلف چوب وجود دارند طرفت بار بری آنها متغیر است. بر خلاف آجر و سنگ که دارای بافت دانه‌ای و در نتیجه شکسته می‌باشد، چوب دارای بافت لیمنی و رشته‌ای و مقاومت کشی و فشاری خوب می‌باشد. برای هر نوع چوب مقاومت آن بر حسب اینکه بار وارده در امتداد رشته‌های چوب و یا عمود بر آن باشد فرق می‌کند. چوب‌های نرم از فصل چوب سفید، صنوبر و کاج غالباً "بمعنا تیرچه برای پوشاندن سقف خانه‌ها بکار

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n_1} \quad (9-1) \quad (\text{برای مواد شکننده})$$

$$\sigma_w = \frac{\sigma_u}{n_2} \quad (10-1) \quad (\text{برای مواد کشنده})$$

در این روابط σ_y و σ_u به ترتیب معرف تنش تسلیم و تنش نهایی و n_1 و n_2 ضرایب اطمینان می‌باشند. تعیین ضریب اطمینان مناسب مسئله پیچیده است زیرا بستگی به نوع ماده مورد نظر و همچنین شرایط بهره برداری دارد. ضرایب اطمینان معمولاً به وسیله آیین نامه‌های ساختمانی تعیین می‌گردد.

روش مورد بحث در بالا برای تحلیل سازه‌ها موسوم به "روش تنش‌های مجاز" می‌باشد. روش دیگری برای تحلیل سازه‌ها وجود دارد که موسوم به "روش بار نهایی" است. در این روش تعیین می‌کنند سازه مورد نظر تحت چه باری فرو می‌ریزد. این بار موسوم به بار نهایی می‌باشد. بار مجاز از تقسیم نمودن بار نهایی بر ضریبی بزرگتر از واحد موسوم به ضریب بار بدست می‌آید. در طرح سازه‌های فلزی هر دو روش تنش‌های مجاز و بار نهایی متداول می‌باشند. تعیین بار نهایی برای سازه‌های ساده در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۴-۱ انواع مصالح سازه‌ای

مصالح سازه‌ای اصلی عبارتند از آجر، سنگ، چوب، بتن، فولاد و بتن مسلح. در سال‌های اخیر آلیاژهای آلومینیوم برای بعضی از انواع سازه‌ها بکار رفته‌اند. بعضی از پلاستیک‌ها نیز به طور سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

۴-۱-۱ آجر

آجر در طول هزاران سال در ساختن ساختمان‌ها بکار رفته است. مصری‌های باستان آجر را از مخلوط کردن گل و حرد گاه می‌ساختند. گاه باعث تقویت آجر می‌شود و مانع حرد شدن آن در هنگام خشک شدن در آفتاب می‌گردد.

امروزه اکثر آجرها از خاک رس ساخته می‌شود که با فشار دست یا ماشین در داخل

۱۲

می‌روند. برای این چوب‌ها تنش‌های مجاز فشاری و کششی در امتداد رشته‌های چوب به ترتیب در حدود 60 Kg/cm^2 و 80 Kg/cm^2 می‌باشد. چوب‌های سخت مانند بلوط قوی تر می‌باشد ولی به علت گرانی کمتر بکار می‌روند. در سال‌های اخیر سازه‌های قوسی و قاب‌های پرتال از چوب‌های ورق ساخته شده‌اند.

۴-۴-۱ بتن

بتن از مخلوطی از سیمان، خرده‌سنگ‌های ریز و درشت و آب ساخته می‌شود که تشکیل ماده سخت سنگ ماندی می‌دهند. خواص مکانیکی بتن بستگی به کیفیت و مقدار این اجزاء در مخلوط دارد. سیمان مورد استفاده معمولاً "سیمان پرتلند" می‌باشد. خرده سنگ‌های ریز و درشت معمولاً "تن و ماسه و سنگ ریزه می‌باشند که نباید به نمک آلوده باشند. در مخلوط بتن لازم است که خرده سنگ‌ها اندازه‌های مختلف داشته باشند تا در هنگام مخلوط شدن درات ریز فضاهای خالی بین سنگ‌های درشت‌تر را پر کنند و بتن منراکمی با مقدار اقتصادی سیمان بدست آید. یک نوع متداول بتن مخلوط ۱ : ۲ : ۴ می‌باشد. این بدان معنی است که یک حجم سیمان با دو حجم ماسه و چهار حجم سنگ ریزه مخلوط می‌شود.

مقاومت بتن بستگی به عوامل زیادی دارد. یکی از مهم‌ترین عوامل نسبت آب به سیمان می‌باشد. اگر تمام عوامل یکسان باشد هر چه سیمان بیشتری بکار رود بتن مقاوم‌تری بدست می‌آید. بعضی از مواقع بتن را گراپیت یا ماسه سنگ حرد شده ساخته می‌شود. با استفاده از سنگ پا یا تفاله کوره ذوب آهن می‌توان بتن سبک وزن ساخت. مقاومت کششی بتن مانند سنگ ضعیف می‌باشد. مقاومت فشاری بتن‌های متداول بین 200 Kg/cm^2 تا 500 Kg/cm^2 است. مقاومت کششی بتن در حدود ۱۵ - ۱۰٪ مقاومت فشاری آن است.

۴-۴-۲ فولاد

ماده اصلی برای تولید انواع مختلف آهن و فولاد سنگ معدن آهن می‌باشد. برای جدا کردن آهن از سنگ معدن باید آن را حرارت داد. فلزات آهنی بطور کلی به سه دسته تقسیم می‌شوند: چدن، آهن خمیری و فولاد. با وجود اینکه این مواد تقریباً "تماماً" از آهن می‌باشند وجود مقادیر کوچکی از عناصر دیگر تاثير مهمی در روی خواص آنها دارد. یکی از عناصر مهم در آهن و فولاد کربن می‌باشد. وقتی در صد کربن کم است فلز

۱۳

نرم و شکل پذیر است و وقتی در صد کربن زیاد است فلز سخت و شکننده می‌باشد. با وجود اینکه صدها سال است که فولاد ساخته شده است تا نیمه دوم قرن نوزدهم تهیه آن گران بود و فقط به مقادیر کم برای ساختن شمیر و منر بکار می‌رفت. در روش‌های جدید تولید فولاد اولین مرحله گرم کردن سنگ معدن در کوره بلند فولاد سازی می‌باشد که از آن آهن لخته بدست می‌آید. آهن لخته در صد زیادی کربن دارد که آن را شکننده می‌سازد و سیز دارای ناخالصی‌های دیگر مانند سیلیسیم، منگنز، فسفر و گوگرد می‌باشد. چدن از ذوب مجدد آهن لخته بدست می‌آید و بر حسب عملیات تصفیه و موادی که به آن اضافه می‌شود انواع مختلف چدن با شکنندگی‌های مختلف وجود دارد. آهن خمیری نیز از تصفیه آهن لخته بدست می‌آید ولی عملیات تولید آن دشوار است و تولید انبوه آن مانند فولاد به سهولت امکان ندارد. درجه حرارتی که آهن خمیری در آن تولید می‌شود آنددر زیاد نیست که فلز را به حالت مذاب نگه دارد. آهن خمیری که از داخل کوره در می‌آید با چکنی کاری کردن یا نورد دادن به صورت صفحه، میل و غیره درآورده می‌شود. بر خلاف چدن که شکننده می‌باشد آهن خمیری بسیار چکن خوار است. قرن‌هاست که آهن خمیری برای وسائل ترئینی از قبیل دروازه حیاط و همچنین حلقه‌های زنجیر بکار رفته است.

برای تولید فولاد آهن لخته را با حرارت دادن تصفیه می‌کنند تا ناخالصی‌های آن از قبیل کربن و فسفر و غیره جدا شود. به فلز مایعی که بدین ترتیب به حالت خالص در می‌آید مقادیر دقیق مواد لازم (از جمله کربن) اضافه می‌شود تا فولاد با خواص مطلوب بدست آید. فولاد به حالت مایع در قالب ریخته می‌شود تا به صورت شمش در آید. با حرارت دادن مجدد شمش و نورد دادن آن می‌توان فولاد را به صورت صفحه، میل و شکل‌های دیگر در آورد. فولاد مایع را همچنین می‌توان مستقیماً "در قالب‌های به شکل معین ریخت تا شکل‌های مطلوب حاصل شود.

فولاد سازه‌ای که برای تهیه نیر و ستون در ساختمان‌ها و میله‌های بتن مسلح بکار می‌رود مقدار کمی (در حدود ۲/۵ درصد) کربن دارد و در نتیجه نرم و شکل‌پذیر می‌باشد. انواع مختلف فولاد سازه‌ای وجود دارد. متداول‌ترین آنها فولاد نرم است که تنش تسلیم آن در حدود $2500-3000 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش‌هایی آن در حدود $4500-5000 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد. با اضافه نمودن بعضی از مواد مانند مس در موقع تولید فولاد می‌توان مقاومت آن را اضافه نمود. تنش‌هایی فولادهای با مقاومت زیاد

می باشد. سن نهایی بعضی از آلبازهای فولاد سه $6000-7000 \text{ Kg} / \text{cm}^2$ می رسد. سنهای محاز برای اینگونه فولادها بیشتر از مقدار زیر نظر برای فولاد نرم معمولی است و در نتیجه می توان مقاطع کوچکتری از آنها را بکار برد.

۶-۴-۱ آلیاژهای آلومینیوم

رایج ترین مسع آلومینیوم سنگ معدنی موسوم به بوکسیت می باشد که برای اولین بار در سال ۱۸۲۱ در فرانسه پیدا شد. آلومینیوم فلز بیش از اندازه نرمی می باشد ولی با اضافه نمودن مواد دیگر به آن از قبیل مس، منگنز، سیلیسیم، نیکل و روی می توان بر مقاومت آن افزود. امروزه تولید آلبازهای آلومینیوم که مقاومت کششی در حدود مقاومت کششی فولاد داشته باشند امکان پذیر است. از آنجایی که وزن مخصوص آلومینیوم در حدود $\frac{1}{3}$ وزن مخصوص فولاد ($2.75 \text{ T} / \text{m}^3$ در مقابل $7.7 \text{ T} / \text{m}^3$) می باشد در مقایسه با فولاد نرم با آلبازهای آلومینیوم می توان سازه های سبکتری ساخت. اما آلومینیوم دو عیب دارد. اولاً "مخارج تولید آن زیاد می باشد. ثانیاً "ضریب ارتجاعی آن (به بخش ۵-۱ رجوع کنید) خیلی کمتر از ضریب ارتجاعی فولاد است و این به معنی تغییر شکل بیشتر تحت یک بار معین می باشد. چون آلیاژهای آلومینیوم نسبت به فولاد تغییر شکل بیشتری می دهند بهر س کار برد آنها در سازه هایست که تغییر شکل های زیاد لزوماً به معنای بکار بردن مصالح بیشتر نمی باشد. برای پوشاندن بعضی از سقف های با دهانه زیاد (مثلاً گنبد ها) استفاده از آلومینیوم بسیار مناسب می باشد.

۷-۴-۱ بتن مسلح

همان طوریکه قبلاً ذکر شد بتن دارای مقاومت فشاری زیاد ولی مقاومت کششی کم می باشد. با ترکیب کردن مقاومت فشاری بتن با مقاومت کششی فولاد می توان از هر دو مصالح به نحو اقتصادی استفاده نمود. بتن مسلح نسبت به فولاد دارای دو مزیت می باشد. یکی اینکه می توان آن را در قالب های با شکل های مختلف ریخت و بدین ترتیب می توان سازه هایی با شکل های پیچیده بنا نمود. دیگر اینکه مقاومت بتن مسلح در مقابل آتش از مقاومت فولاد بیشتر است. در هنگام آتش سوزی اسکلت فولادی در مدت کمی دوب می شود و فرو می ریزد در حالی که پوشش بتنی در ساختمان های بتن مسلح در مقابل آتش مقاوم می باشد.

۸-۴-۱ پلاستیک ها و مصالح مصنوعی

پلاستیک ها و مصالح مصنوعی که در آنها از مواد آلی بعنوان چسبنده استفاده میشود به تدریج در ساختمان ها کار برد وسیعی پیدا می کنند ولی به علت مخارج نسبتاً زیاد آنها هنوز به عنوان مصالح سازه ای مصرف زیادی ندارند. بیشتر پلاستیک های سازه ای به وسیله شیشه مسلح می شوند. رشته های شیشه با مقاومت خیلی زیاد برای تقویت صمغ اپاکسی بکار می رود. این نوع پلاستیک ها برای ساختن قطعات هواپیما کار برد دارد. رشته های شیشه به صمغ های اپاکسی، پولی استر، پولی وینیل و مواد پلاستیک دیگر مقاومت کتشی می دهند. این نوع مواد بعنوان غشاء در سقف هایی که با فشار هوا کار می کنند از قبیل سقف های متکی بر هوا یا باد شده (به مرجع ۳۷ رجوع شود) بکار می رود. به سطر می رسد در سازه های آینده با پیشرفت هایی که در زمینه پلاستیک ها خواهد شد این مواد به تدریج با مصالح سازه ای سنتی قابل رقابت تر خواهند بود.

۵-۱ خاصیت ارتجاعی خطی و قانون هوک

در محلی تنش - کرنش بیشتر مصالح سازه ای یک قسمت اولیه خطی وجود دارد که در آن ماده به صورت ارتجاعی عمل می کند (ناحیه O تا A در منحنی تنش - کرنش فولاد در شکل ۵-۱). موقعی که ماده به صورت ارتجاعی عمل می کند و رابطه بین تنش و کرنش نیز خطی می باشد به آن ماده ارتجاعی خطی می گویند. این خاصیت از خواص مکانیکی خیلی مهم بسیاری از مصالح حامد شامل اکثر فلزها، چوب، بتن، سفال و پلاستیک ها می باشد.

رابطه خطی بین تنش و کرنش برای یک میله تحت کشش به صورت معادله ساده زیر بیان می شود:

$$\sigma = E \epsilon \quad (1-11)$$

E در این رابطه ضریب تناسب و موسوم به ضریب ارتجاعی ماده می باشد. ضریب ارتجاعی ضریب منحنی تنش - کرنش در ناحیه ارتجاعی خطی و از خصوصیات مصالح است. ضریب

۱۷

ارتجاعی برای مصالح مختلف در جدول ۱-۱ خلاصه شده است. توجه کنید واحد E همان واحد تنش است. برای عالی فلزات ضریب ارتجاعی در کتب و فشار یکسان می باشد. ضریب ارتجاعی بعضی ذرات به ضریب پاتک (به نام دانشمند انگلیسی، ۱۸۲۹-۱۷۷۳) نیز خوانده می شود. ماده 1-11 معمولاً به نام قانون هوک (یک دانشمند دیگر انگلیسی، ۱۷۰۳-۱۶۴۵) نامیده می شود. هوک برای اولین بار رابطه خطی بین بار و ازدیاد (یا کاهش) طول را به طور تجربی بدست آورد.

موقی که میلای تحت کشش ساده می باشد (شکل 1-1) تنش محوری و کرنش محوری به ترتیب از معادلات 1-1 و 1-8 بدست می آیند. هرگاه معادلات مزبور را با قانون هوک ترکیب کنیم معادله زیر برای تغییر طول یک میله تحت کشش یا فشار بدست می آید:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (1-12)$$

این معادله نشان می دهد که تغییر طول (از دیاد طول یا کاهش طول) میلای از ماده ارتجاعی خطی مستقیماً با بار و طول آن و معکوساً با ضریب ارتجاعی و مساحت سطح مقطع آن متناسب می باشد. کمیت AE ضریب محوری میله نامیده می شود. هر چه ضریب محوری میله بیشتر باشد میله تحت بار معینی تغییر شکل کمتری خواهد داد.

۱-۶ ضریب بواسون

موقی که میلای تحت کشش می باشد اضافه طول محوری آن همراه با انقباض جانبی می باشد. به عبارت دیگر با اضافه شدن طول میله عرض آن کاهش می یابد. تا زمانی که میله به صورت ارتجاعی عمل میکند نسبت کرنش در جهت عرض به کرنش در جهت طول میله ثابت و به ضریب بواسون (ν) موسوم می باشد.

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \quad (1-13)$$

۱۶

جدول ۱-۱ خواص مکانیکی نمونه مصالح

(به جز موارد ذکر شده خواص نوشته شده برای حالت کشش می باشد)

تنش نهایی σ_u Kg/cm ²	تنش تسلیم σ_y Kg/cm ²	ضریب ارتجاعی برشی $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Kg/cm ²	ضریب ارتجاعی E Kg/cm ²	وزن مخصوص t / m ³	مصالح
۲۱۰۰	۱۴۰۰	۲۸۰۰۰۰	0.7×10^6	۲/۷۵	الومینیوم آلیاژهای
۱۴۰۰-۴۲۰۰	۱۰۵۰-۳۵۰۰	۲۸۰۰۰۰	0.7×10^6	۲/۷۵-۸/۳	الومینیوم
۲۸۰۰-۵۲۵۰	۱۰۵۰-۴۲۰۰	۳۸۵۰۰۰	0.98×10^6	۸/۳	برنج
۲۱۰۰-۴۲۰۰	۷۰۰-۳۸۵۰	۳۸۵۰۰۰	0.98×10^6	۸/۳	برنز
۱۴۰-۷۰۰			$0.14-0.28 \times 10^6$	۲/۳۵	بتن (فشار)
۲۱۰۰-۴۲۰۰	۷۰۰-۳۱۵۰	۴۲۰۰۰۰	1.05×10^6	۸/۸۵	مس
۱۱۲۰-۴۲۰۰	۴۲۰-۲۸۰۰	۴۲۰۰۰۰	1.05×10^6	۷/۷۵	چدن
۱۴۰۰-۲۱۰۰	۸۴۰-۱۲۶۰	۱۶۸۰۰۰	0.42×10^6	۱/۷۷	منیزیم
۳۵۰۰-۷۰۰۰	۲۱۰۰-۴۲۰۰	۷۷۰۰۰۰-۸۴۰۰۰۰	$2-2.1 \times 10^6$	۷/۷	فولاد نرم فولاد با مقاومت
۷۰۰۰-۱۹۶۰۰	۳۵۰۰-۱۱۲۰۰	۷۷۰۰۰۰-۸۴۰۰۰۰	$2-2.1 \times 10^6$	۷/۷	زیباد
۲۸۰-۷۰۰			$0.07-0.14 \times 10^6$	۰/۲۸-۰/۸۳	چوب سازمای (فشار)

با حجم نهایی منهای حجم اولیه آنست. بنابراین

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\nu) \quad (1-14)$$

در این عبارت معرفانست تغییر حجم (ΔV) به حجم اولیه (V) میباشد. چون کاهش حجم یک میله تحت کشش تا معقول به نظر می رسد از معادله 1-14 می توان نتیجه گرفت که ν باید همواره کمتر از 0.5 باشد. لاستیک و پارامین جامد عملاً تحت کشش تغییر حجمی نمی دهند از این رو در این مصالح ν نزدیک حد 0.5 می باشد. از طرف دیگر برای چوب پنبه ν عملاً صفر می باشد. ضریب پواسون پس در حدود 0.1 و ضریب پواسون فلزات در حدود 0.25-0.35 است.

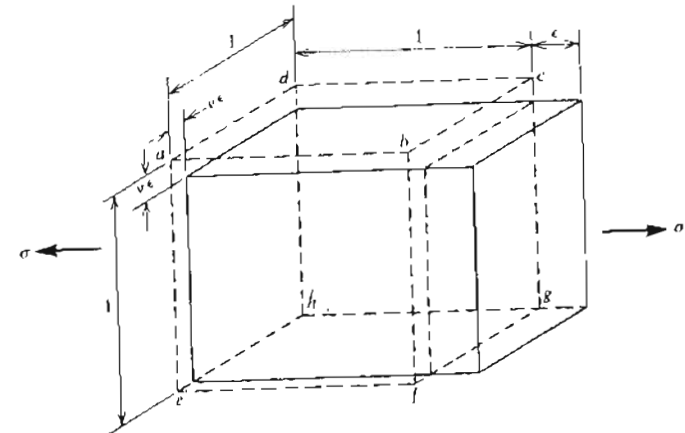
بحث بالا در مورد انقباض جانبی میله تحت کشش را می توان برای حالت فشار نیز بکار برد با این تفاوت که فشار طولی با اسباط جانبی همراه می باشد. برای کارهای عملی مقدار عددی ν در کشش و فشار را می توان یکسان فرض نمود.

۱-۷ تغییر طول میله های با بار گذاری محوری

در حالات زیادی تغییر طول میله ها را می توان از رابطه 1-12 به دست آورد. مثلاً وقتی که بارها نه تنها در انتها بلکه در یک یا چند نقطه در طول میله سوزارد می شوند (شکل ۱-۱۰) و با اینکه سطح مقطع میله به طور ناگهانی تغییر می کند می توان از رابطه مزبور برای محاسبه تغییر طول میله ها استفاده نمود. برای محاسبه تغییر طول میله شکل ۱-۱۰ ابتدا نیروی محوری را در هر یک از قسمت های میله (قسمت های AB، BC و CD) تعیین می کنیم. سپس تغییر طول (اضافه طول یا کاهش طول) هر قسمت را حساب می کنیم. بالاخره با جمع جبری تغییر طول های قسمت های مختلف تغییر طول کل میله بدست می آید. همین روش را می توان در مورد میله شکل ۱-۱۱ بکار برد. بدین ترتیب به طور کلی تغییر طول کل میله هایی که از چند قسمت با سطح مقطع و بار گذاری های مختلف تشکیل شده اند از معادله زیر بدست می آید:

پواسون ریاضی دان فرانسوی (۱۸۴۰ - ۱۷۸۱) با استفاده از تئوری مولکولی مواد سعی نمود مقدار ضریب مزبور را بدست آورد. برای مواد متجانسی (موادی که خواص ارتجاعی آنها در همه جهات یکسان می باشد) پواسون ضریب مزبور را $\nu = 0.25$ پیدا کرد. آزمایش های واقعی در روی فلزات نشان می دهد که ν در واقع بین 0.25 تا 0.35 می باشد.

تغییر حجم یک میله تحت کشش را با دانستن ضریب پواسون و ضریب ارتجاعی ماده میله می توان بدست آورد. تعبیرات حجم در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. این شکل جزء کوچکی از ماده را که از میله تحت کشش بریده شده است نشان می دهد. شکل اولیه جزء مزبور مکعب abcdefgh می باشد که فرض می شود طول اضلاع آن برابر واحد باشد. جهت نیروی محوری در شکل به وسیله تنش های σ نشان داده شده است. اضافه طول مکعب مزبور در جهت بار گذاری $\epsilon = \sigma / E$ و کاهش طول اضلاع مکعب در دو جهت جانبی $\nu\epsilon$ می باشد. بنابراین مساحت سطح مقطع مکعب در جهت عمود بر بار به اندازه $(1 - \nu\epsilon)^2 / 1$ کاهش و حجم آن به نسبت $(1 + \epsilon)(1 - \nu\epsilon)^2 / 1$ افزایش یافته است. اگر حاصل ضرب این عبارت بسط داده شود و از جملات توان دوم و سوم ϵ که مقادیر بسیار کوچکی می باشند صرف نظر شود نسبت مزبور به صورت $(1 + \epsilon - 2\nu\epsilon) / 1$ ساده می شود. تغییر حجم مکعب برابر



شکل ۱-۱ تغییر حجم مکعبی به اضلاع واحد تحت کشش

و اضافه طول کل میله از انتگرال زیر حاصل می شود :

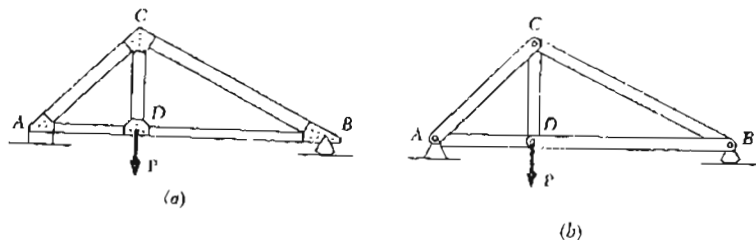
$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} \quad (1-17)$$

در مواقعی که نتوان جواب انتگرال فوق را به صورت بسته دست آورد باید از روش های عددی انتگرال گیری استفاده نمود. در صورتی رابطه 1-17 جواب دقیق می دهد که زاویه بین اضلاع میله با مقطع باریک شونده کوچک باشد. به عنوان مثال اگر زاویه بین اضلاع 20° باشد حداکثر خطای محاسبه در تنش عمودی $\sigma = P/A$ حدود 3 درصد می باشد. برای زوایای کوچکتر خطا کمتر است. اگر زاویه بین اضلاع بیشتر باشد روش های تحلیل دقیق تری لازم می گردد (مرجع 26).

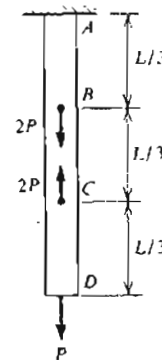
۸-۱ خراباهای ایزواستاتیک

۱-۸-۱ تعریف خرابی

خرابی یکی از انواع اصلی سازه های مهندسی است که بخصوص در ساختمان ها و پلها کاربرد زیادی دارد. خرابی شامل اعضا مستقیم می باشد که در محل اتصالات به یکدیگر وصل می شوند. یک خرابی نمونه در شکل ۱-۱۳a مشاهده می شود. اعضا خرابی در انتهاهاشان به یکدیگر متصل می شوند و هیچ عضوی در روی اتصال پیوسته نمی باشد.



شکل ۱-۱۳



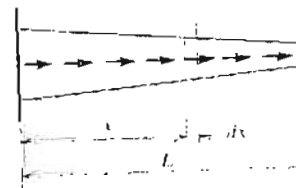
شکل ۱-۱۰

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \quad (1-15)$$

در این رابطه P_i ، L_i ، E_i و A_i به ترتیب نیروی محوری، طول، ضریب ارتجاعی و مساحت سطح مقطع قسمت i و n تعداد کل قسمت ها می باشد.

موقعی که نیروی محوری یا مساحت سطح مقطع در طول محور میله به طور پیوسته تغییر می کند معادله 1-15 قابل استفاده نمی باشد. برای پیدا کردن تغییر طول در این حالت جز دیفرانسیلی از میله به طول dx به فاصله x از انتهای چپ میله را در نظر می گیریم (شکل ۱-۱۴). این جز کوچک را از میله جدا می کنیم. نیروی محوری P_x در طول جز کوچک و سطح مقطع A_x را باید بر حسب تابعی از x تعیین کنیم. در این صورت معادله اضافه طول جز مزبور به صورت زیر در می آید:

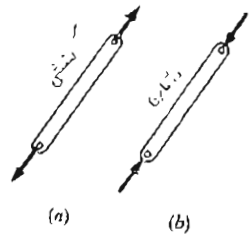
$$d\delta = \frac{P_x dx}{EA_x} \quad (1-16)$$



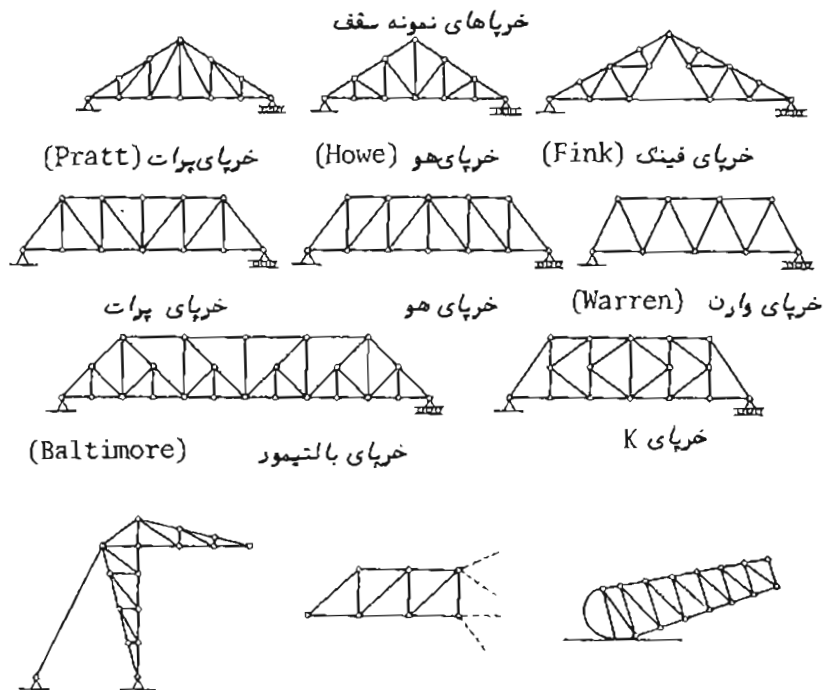
شکل ۱-۱۲ میله با سطح مقطع و نیروی محوری متغیر

۲۳

در تحلیل‌های دقیق تر خرپاها لنگرهای ایجاد شده در اثر گیر داری اتصالات خرپا به حساب آورده می‌شوند ولی این موضوع خارج از بحث مقاومت مصالح مقدماتی می‌باشد (مرجع ۱۷ را ببینید). شکل ۱۶ - ۱ چند نوع متداول خرپاها را نشان می‌دهد.



شکل ۱۵ - ۱



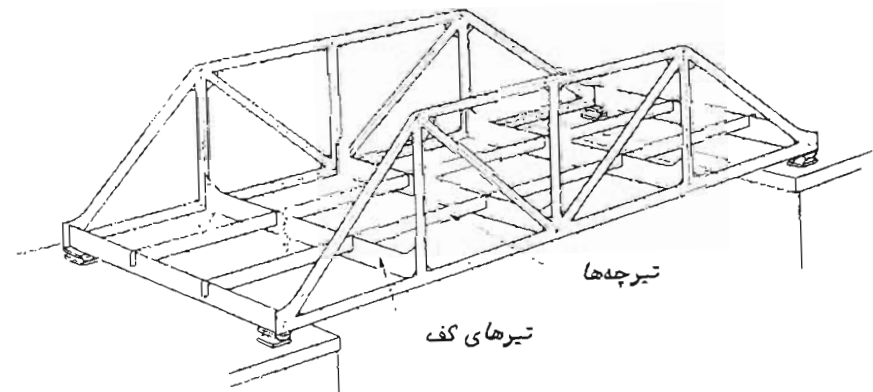
خرپای استادیوم قسمت طره‌ای یک خرپا خرپای یک پل متحرک

شکل ۱۶ - ۱ انواع مختلف خرپاها

۲۲

برای مثال در شکل ۱۳a - ۱ AB پیوسته می‌باشد لکه از دو عضو AD و DB تشکیل شده است که در نقطه D به یکدیگر متصل شده‌اند. خرپاها برای بارهای وارد در صفحه آنها طرح می‌شوند از این رو می‌توان آنها را به صورت سازه‌های دو بعدی محاسبه نمود.

به طور کلی اعضاء خرپا باریک می‌باشند و بار جانبی کمی را می‌توانند تحمل کنند از این رو تمام بارها باید در محل اتصالات وارد شوند نه مستقیماً بر روی اعضاء. موقعی که بار گسترده‌ای باید بوسیله خرپایی حمل شود (مانند خرپای یک پل در شکل ۱۴ - ۱) سیستم کف از تیر و تیرچه تشکیل می‌یابد که بارها را به محل اتصالات منتقل می‌کنند. همچنین فرض می‌شود وزن اعضاء خرپا در محل اتصالات وارد می‌گردد بدین ترتیب که نیمی از وزن هر عضو در هر استه‌ا وارد می‌شود. با وجود اینکه اعضاء در عمل با پرچ یا جوش به یکدیگر متصل می‌باشند معمولاً "اتصال اعضاء مفصلی فرض می‌شود" (شکل ۱۳b - ۱). در نتیجه در هر انتهای هر عضو فقط یک نیرو وجود دارد بدون اینکه لنگری بر آن اثر کند. بدین ترتیب هر عضو به صورت دو نیروی می‌باشد و نیروها باید در اعداد اعضاء وارد شوند (شکل ۱۵ - ۱).

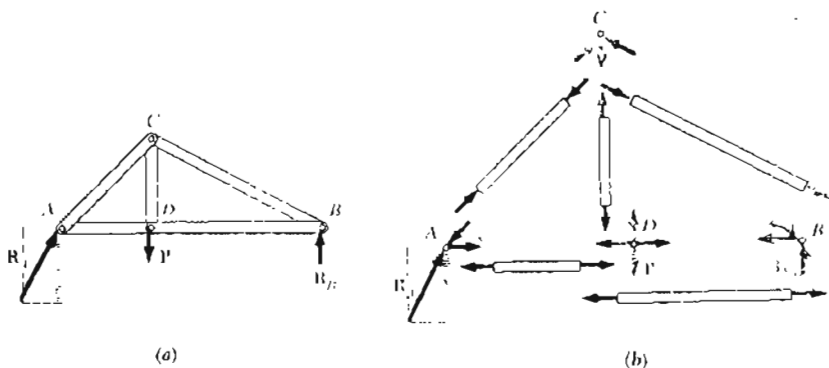


شکل ۱۴ - ۱

می‌باشد (برای خرپای K مثلث بلندی را با یکی از مثلث‌های میانی شروع کنید).
با مراجعه مجدد به خرپای مثلثی پایه شکل b ۱۷-۱ مشاهده می‌شود که این
خرپا سه عضو و سه مفصل دارد. خرپای شکل c ۱۷-۱ دو عضو و یک مفصل بیشتر دارد
و جمعاً " پنج عضو و چهار مفصل دارد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که با افزودن هر دو
عضو جدید بر تعداد مفصل‌ها یکی اضافه می‌شود. بنابراین در خرپایی که تعداد مفصل‌ها
n می‌باشد تعداد اعضا $m = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ می‌باشد.

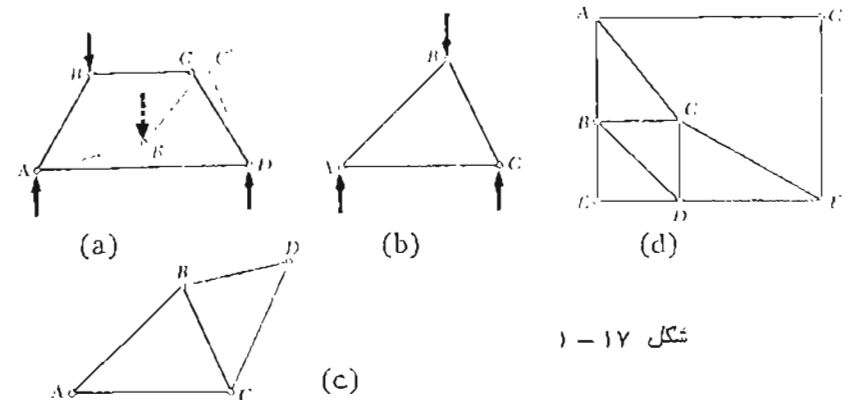
۳-۸-۱ تحلیل خرپاهای ایزو استاتیک با روش مفاصل

منظور از تحلیل یک خرپا (و به طور کلی یک سازه) بدست آوردن نیروها (یا
تنش‌ها) داخلی و تغییر شکل‌های آن تحت یک بار گذاری معین می‌باشد. هر گاه بتوان
تمام نیروهای داخلی یک سازه را فقط با استفاده از معادلات تعادل و بدون در نظر گرفتن
تغییر شکل‌های آن بدست آورد آن سازه را ایزو استاتیک می‌نامند و در غیر این صورت
سازه موسوم به هیپر استاتیک می‌باشد. خرپاهای ساده که در بخش قبل نحوه ساختن آنها
شرح داده شد ایزو استاتیک می‌باشند. نمودار جسم آزاد خرپای شکل ۱۳-۱ در شکل
a ۱۸-۱ رسم شده است. در شکل b ۱۸-۱ نمودار جسم آزاد برای مفصل‌ها و اعضا
خرپا رسم شده است. در هر مفصل دو معادله تعادل می‌توان نوشت. اگر تعداد مفصل‌های



شکل ۱۸-۱

خرپای شکل a ۱۷-۱ را که از چهار عضو متصل در نقاط A, B, C, D بصورت
مفصلی تشکیل شده است در نظر بگیرید. اگر باری در نقطه B وارد شود خرپا به مقدار
ریادی تغییر شکل داده و شکل اولیه خود را کاملاً از دست می‌دهد. از طرف دیگر خرابی
شکل b ۱۷-۱ که از سه عضو متصل بهم در نقاط A, B, C تشکیل شده است تحت
بار وارد در B تغییر شکل مخصری می‌دهد. تنها تغییر شکل ممکن برای این خرپا
تغییرات کوچک در طول اعضا می‌باشد. خرپای شکل b ۱۷-۱ پایدار است ولی
خرپای شکل a ۱۷-۱ پایدار می‌باشد و در اثر بار گذاری فرو خواهد ریخت.



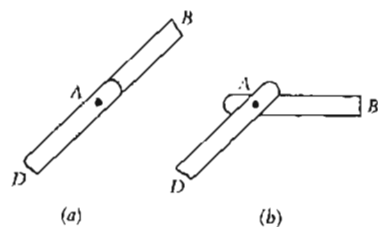
شکل ۱۷-۱

همچنانکه در شکل c ۱۷-۱ مشاهده می‌شود خرپای پایدار بزرگتری را می‌توان
با اضافه نمودن دو عضو BD و CD به خرپای مثلثی پایه شکل b ۱۷-۱ بدست آورد.
این عمل را می‌توان تکرار نمود. خرابایی که بدین صورت بدست می‌آید خرپای ساده
نامیده می‌شود. اگر هر بار دو عضو جدید به دو مفصل مختلف متصل کرده و خود آنها را
بهم وصل کنیم بطوریکه سه مفصل در یک امتداد نباشند خرپای حاصله یک خرپای پایدار
خواهد بود.

باید توجه نمود خرپای ساده لازم نیست فقط از مثلث ساخته شود. برای مثال
خرپای شکل d ۱۷-۱ یک خرپای ساده می‌باشد. از طرف دیگر خرابی‌های
پایدار همیشه سه صورت خرپای ساده می‌باشند. برای مثال
خرپاهای فینک و بالسمور در شکل ۱۶-۱ خرپاهای ساده نمی‌باشند زیرا می‌توان آنها
را از یک مثلث با روش بالا ساخت. همه خرپاهای دیگر در شکل ۱۶-۱ خرپای ساده

۲۷

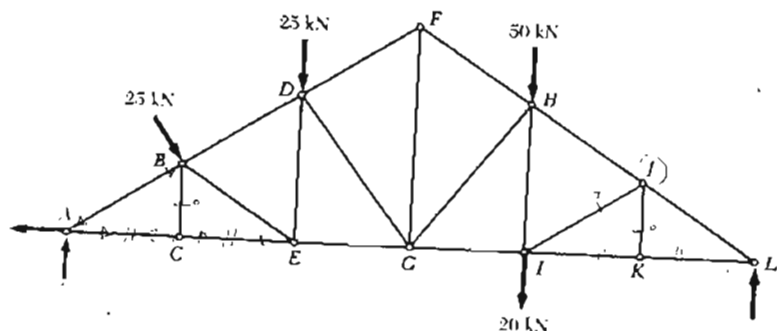
که در یک امتداد نیستند صفر می باشد. در موقع حل خرپاها با توجه به مفصل های تحت بارگذاری ویژه می توان اعضاء بدون نیرو (یا نیروی داخلی برابر صفر) را در ابتدای کار تعیین نمود. واضح است که اعضاء بدون نیرو اعضاء بی فایده ای نیستند. این اعضاء فقط تحت بار گذاری (یا بارگذاری های) خاص بدون نیرو می باشند و تحت بعضی از بارگذاری های دیگر در آنها ممکن است نیرو ایجاد شود. بعلاوه این اعضا معمولاً برای تحمل وزن خرپا که غالباً از آن در محاسبات صرف نظر می شود لازم می باشد.



شکل ۱-۲۱

مثال ۱-۱

در خرپای شکل ۱-۲۲ اعضاء بدون نیرو را پیدا کنید.



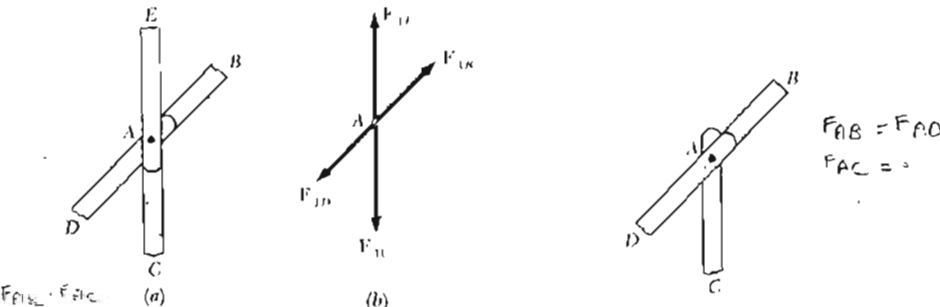
شکل ۱-۲۲

۲۶

خرپا n باشد تعداد معادلات موجود $2n$ خواهد بود که می توان آنها را برای $2n$ مجهول حل نمود. در مورد خرپاهای ساده رابطه $m=2n-3$ موجود است. بنابراین $2n=m+3$ تعداد مجهولاتی است که می توان از نمودارهای جسم آزاد مفصل ها بدست آورد. بنابراین با توجه به آنکه تعداد واکنش های مجهول خرپا سه می باشد با نوشتن $2n$ معادله تعادل می توان تمام نیروهای داخلی اعضاء (m عدد) و واکنش های مجهول را بدست آورد. قبل از اینکه به ذکر مثالی بپردازیم لازم است که مفصل های تحت بارگذاری ویژه را بررسی کنیم.

۱ اتصال شکل ۱-۱۹a را در نظر بگیرید که در آن چهار عضو که دو بدو در یک امتداد می باشند در نقطه A به یکدیگر متصل شده اند. نمودار جسم آزاد اتصال مزبور در شکل ۱-۱۹b رسم شده است. هرگاه تعادل نیروها را در امتداد عمود بر DAB در نظر بگیریم نتیجه می شود: $F_{AE} = F_{AC}$. همین طور اگر تعادل نیروها را در امتداد عمود بر CAE در نظر بگیریم نتیجه می شود: $F_{AB} = F_{AD}$. بنابراین در چنین اتصالاتی عضوهایی که در یک امتداد قرار دارند دارای نیروی یکسان می باشند.

۲ حال اتصال شکل ۱-۲۰ را در نظر بگیرید. هرگاه در اتصال A نیروی واردنشود اتصال مزبور حالت خاصی از اتصال شکل ۱-۱۹a می باشد. بنابراین نیروی عضو AC برابر صفر و نیروهای عضوهای AD و AB مساوی می باشد.



شکل ۱-۱۹

شکل ۱-۲۰

۲۹

هرگاه جهت نیروی یک عضو به مفصل نزدیک شود آن نیرو فشاری و هرگاه از مفصل دور شود آن نیرو کششی می‌باشد. با نوشتن معادلات تعادل اتصال F نیروهای F_{FB} و F_{FG} بدست می‌آیند.

$$\sum F_x = 0 : F_{FG} - 6.93 = 0 : F_{FG} = 6.93 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{FB} - 4 = 0 : F_{FB} = 4 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

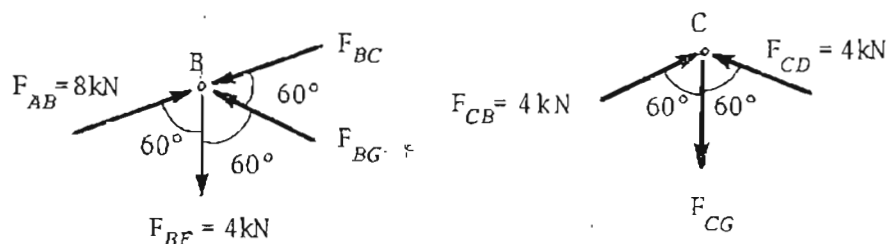
با نوشتن معادلات تعادل اتصال B نیروهای F_{BG} و F_{BC} به دست می‌آیند. از تعادل نیروها در امتداد عمود بر نیروهای F_{AB} و F_{BC} حاصل می‌شود.

$$F_{BG} \cos 30^\circ - 4 \cos 30^\circ = 0 : F_{BG} = 4 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

$$\sum F_x = 0 : 8 \cos 30^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ - F_{BG} \cos 30^\circ = 0 : F_{BC} = 4 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

بالاخره با نوشتن معادلات تعادل اتصال C نیروی F_{CG} بدست می‌آید.

$$-\sum F_y = 0 : F_{CG} - 4 \cos 60^\circ - 4 \cos 60^\circ = 0 : F_{CG} = 4 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

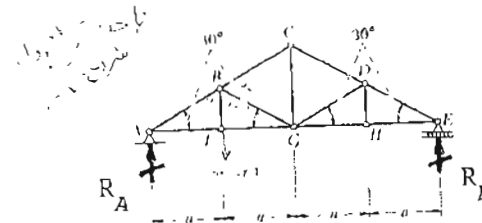


۲۸

حل: پیدا کردن اتصالاتی از خرپا که تحت شرایط بار گذاری ویژه هستند تحلیل خرپاها را آسان می‌کند. از بررسی مفصل C نتیجه می‌شود که عضو BC بدون نیرو می‌باشد. از بررسی مفصل K مشاهده می‌شود که عضو JK بدون نیرو است. بالاخره با در نظر گرفتن تعادل مفصل J نتیجه می‌شود که عضو IJ نیز بدون نیرو می‌باشد.

مثال ۲-۱

نیروهای داخلی خرپای شکل ۲۳-۱ را با استفاده از روش مفاصل تعیین کنید.



شکل ۲۳-۱

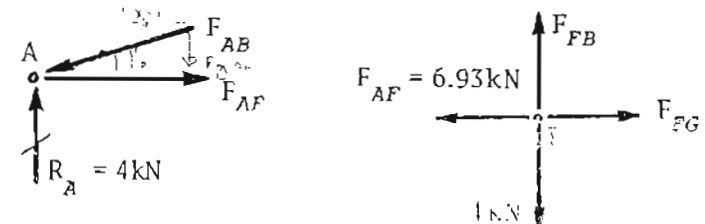
حل: به علت تقارن کافی است فقط نصف خرپا را در نظر بگیریم. از تعادل خرپا در امتداد قائم واکنش‌های R_A و R_E بدست می‌آیند.

$$R_A = R_E = 4 \text{ kN}$$

با نوشتن معادلات تعادل اتصال A نیروهای F_{AF} و F_{AB} بدست می‌آیند.

$$\sum F_y = 0 : 4 - F_{AB} \cos 60^\circ = 0 : F_{AB} = 8 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{AF} - F_{AB} \cos 30^\circ = 0 : F_{AF} = 6.93 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$



نمودار جسم آزاد مفصل A

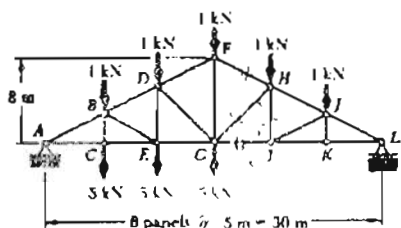
نمودار جسم آزاد مفصل F

۳۱

سعی شود که هر مقطع بیش از سه عضو را قطع نکند چه در غیر این صورت معمولاً نمی‌توان نیروهای داخلی اعضاء بریده شده را فقط با یک مقطع بدست آورد (برای در صفحه فقط سه معادله تعادل موجود می‌باشد که وسیله آنها می‌توان به مجهول را پیدا کرد).

مثال ۳-۱

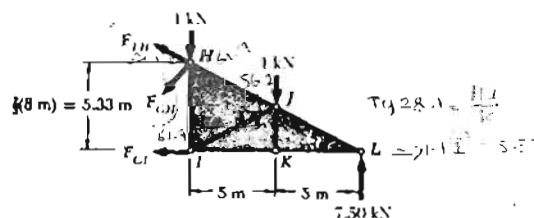
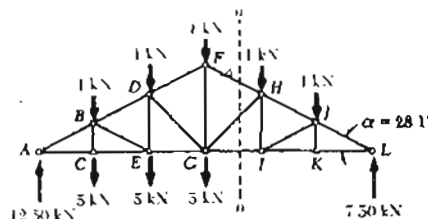
نیروهای عضوهای FH، GH و GI خرپای شکل ۱-۲۵ را بدست آورید.



شکل ۱-۲۵

حل: مقطع n-n مطابق شکل زیر از خرپا عبور داده می‌شود. قسمت سمت راست خرپا (قسمت HLI) به عنوان جسم آزاد در نظر گرفته می‌شود. ولی واکنش تکیه گاه L (R_L) را باید با در نظر گرفتن تعادل لنگری تمام خرپا حول نقطه A بدست آورد.

$$\sum M_A = 0 : R_L = 7.50 \text{ kN}$$



۳۰

بعلمت تقارن خرپا و بارگذاری می‌توانیم نیروهای داخلی سایر اعضاء خرپا را بدون محاسبه تعیین کنیم.

$$F_{GD} = 4 \text{ kN} \quad \text{فشاری} \quad F_{GH} = 6.93 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$F_{DH} = 4 \text{ kN} \quad \text{کششی} \quad F_{DE} = 8 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

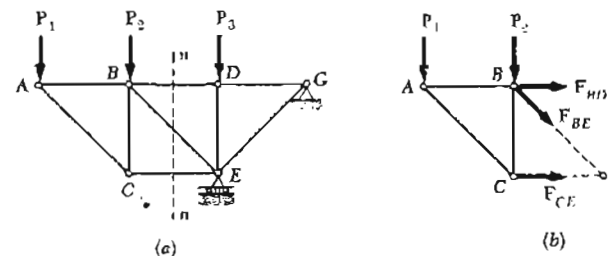
$$F_{EH} = 6.93 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

در محاسبه خرپاها هرگاه کمیت بدست آمده برای یک نیرو صفر باشد جهت فرض شده برای آن نیرو باید عوض شود.

۱-۸-۴ تحلیل خرپاهای ایزو استاتیک با روش مقاطع

معمولاً روش معادل وقتی مفید است که نیروهای داخلی تمام اعضاء خرپا مطلوب باشد. ولی اگر فقط نیروهای داخلی یک یا چند عضو خرپا مطلوب باشد با روش مقاطع می‌توان سریع تر به جواب رسید.

فرض کنیم بخواهیم نیروی داخلی عضو BD خرپای شکل ۱-۲۴ را تعیین کنیم. در روش مقاطع با مقطعی مانند n-n که عضو BD را قطع می‌کند خرپا را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد قسمت ABC خرپا را مطابق شکل ۱-۲۴b رسم می‌کنیم. در روی نمودار جسم آزاد مزبور سه مجهول F_{BD} ، F_{BE} و F_{CE} مشاهده می‌شود. چون معادله تعادل لنگری F_{BD} مستقیماً بدست می‌آید. توجه کنید در روش مقاطع باید



شکل ۱-۲۴

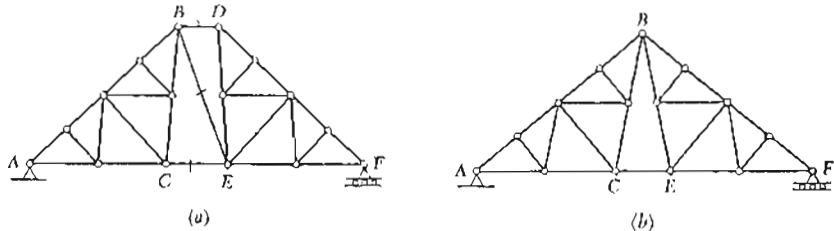
۲۲

۵-۸-۱ خرپاهای مرکب و پایداری خرپاها

دو خرپای ساده ABC و DEF (شکل ۲۶-۱) را در نظر بگیرید. اگر دو خرپای مزبور بوسیله سه میله BD، BE و CE به یکدیگر متصل شوند خرپای پایدار شکل ۲۶-۲ ا بدست می آید. خرپاهای ABC و DEF را همچنین می توان با وصل کردن مفصل های B و D به یکدیگر و متصل کردن مفصل های C و E با میله CE با یکدیگر ترکیب نمود (شکل ۲۶-۲ ب). خرپایی که بدین ترتیب بدست می آید به خرپای فینک موسوم است. خرپاهای شکل های ۲۶-۲ ا و ۲۶-۲ ب خرپاهای ساده نمی باشند زیرا نمی توان آنها را از یک خرپای مثلی با اضافه نمودن متوالی اعضا به صورت دو بدو مطابق آنچه که در بخش ۸-۱ شرح داده شد بدست آورد. اما خرپاهای مزبور خرپاهای پایداری هستند. خرپاهایی که از بهم پیوستن چند خرپای ساده ساخته می شوند به خرپاهای مرکب موسوم می باشند.

بین تعداد اعضای یک خرپای مرکب و تعداد مفصل های آن همان رابطه $m = 2n - 3$ برقرار است. خرپاهای مرکبی که بوسیله یک تکیه گاه مفصلی و یک تکیه گاه غلطکی (یا بوسیله یک سیستم معادل تکیه گاهها) تحمل می شوند خرپاهای ایستاتیک می باشند و نیروهای داخلی آنها را می توان مستقیماً از معادلات تعادل به دست آورد.

حال فرض کنید خرپاهای ABC و DEF بوسیله چهار میله BD، BE، CE و CD (شکل ۲۷-۱) به یکدیگر متصل شده باشند. تعداد اعضا m در این صورت از $2n - 3$ بزرگتر است. تعداد مجهولات خرپای مزبور از $2n$ معادله تعادل مستقل موجود بیشتر می باشد و در نتیجه خرپا به طور ایستاتیکی نامعین و هیپر ایستاتیک است. اکنون فرض کنید دو خرپای ساده ABC و DEF مطابق شکل ۲۸-۱ فقط در



شکل ۲۶-۱

۲۲

از تعادل لنگری قسمت HLI خرپا حول نقطه H کمیت F_{GI} بدست می آید.

$$\sum M_H = 0 \quad (7.5)(10) - (1)(5) - F_{GI}(5.33) = 0 \quad F_{GI} = 13.13 \text{ kN کششی}$$

۲. نیروی F_{FH} با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه G بدست می آید. نیروی F_{FH} را در امتداد خط اثرش به نقطه F منتقل و در آنجا به دو مؤلفه در امتداد افق و قائم تجزیه می کنیم. در این صورت لنگر F_{FH} حول نقطه G برابر $(F_{FH} \cos \alpha)(8)$ می باشد.

$$\sum M_G = 0 \quad (7.5)(15) - (1)(10) - (1)(5) + (F_{FH} \cos \alpha)(8) = 0$$

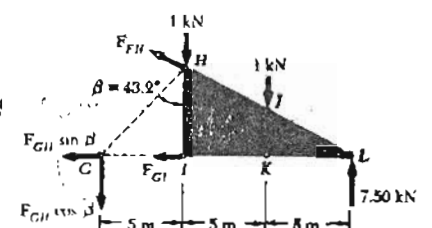
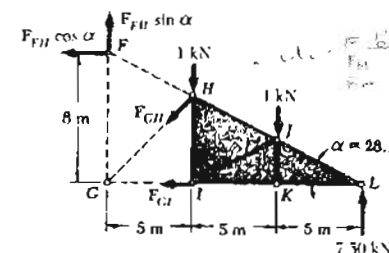
$$F_{FH} = -13.82 \text{ kN فشاری}$$

۳. برای تعیین نیروی F_{GH} ابتدا آن را در امتداد اثرش به نقطه G منتقل و در آنجا به دو مؤلفه افقی و قائم تجزیه می کنیم. از نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه L نیروی F_{GH} بدست می آید.

$$\sum M_L = 0$$

$$(1)(10) + (1)(5) + (F_{GH} \cos \beta)(15) = 0$$

$$F_{GH} = -1.37 \text{ kN فشاری}$$



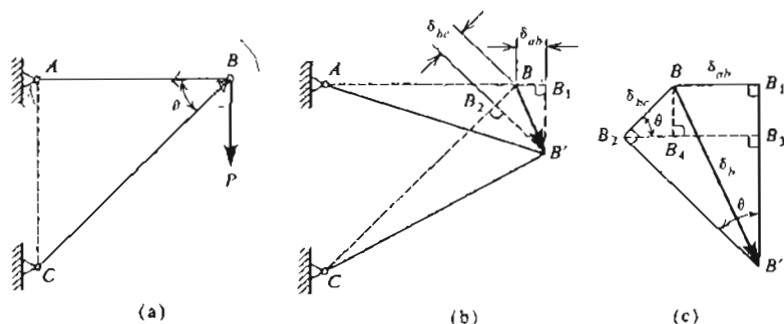
نماینده نیروهای داخلی در خرپا

۹-۱ تغییر شکل خرپاهای ایزواستاتیک

برای تعیین کردن تغییر مکان مفصل‌های خرپاهای ساده ابتدا باید نیروهای داخلی اعضاء آن را تعیین نمود. سپس با استفاده از رابطه ۱-۱۲ از دیاد یا گاهش طول هر یک از اعضاء را می‌توان محاسبه نمود. با داشتن تغییر طول اعضاء تغییر مکان مفصل‌های خرپا با استفاده از همدسته بدست می‌آید. برای نشان دادن روش ترسیمی تعیین تغییر شکل خرپاها به دکر مثالی می‌پردازیم.

مثال ۴-۱

تغییر مکان اتصال B خرپای شکل ۱-۲۹ a را بدست آورید.

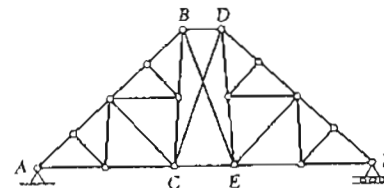


شکل ۱-۲۹

حل: نیروهای F_{BC} و F_{AB} در دو عضو خرپا از معادلات تعادل مفصل B بدست می‌آیند.

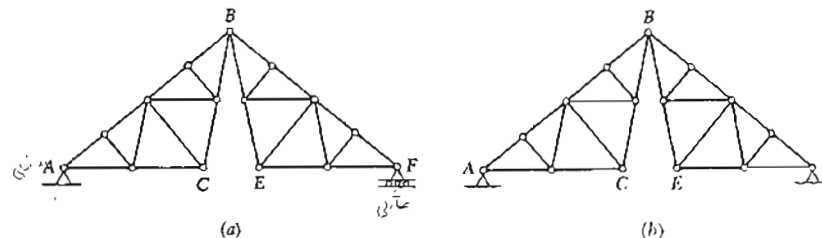
$$F_{AB} = P \cot \theta \quad F_{BC} = \frac{P}{\sin \theta}$$

نیروی کششی و نیروی فشاری F_{BC} تغییر طول میله‌ها عبارتند از



شکل ۱-۲۷

مفصل B به یکدیگر متصل باشند. در این حالت تعداد اعضاء m کوچکتر از $2n - 3$ می‌باشد. اگر خرپا در نقطه A بوسیله تکیه گاه مفصلی و در نقطه B بوسیله تکیه گاه غلطکی نگهداری شود تعداد کل مجهولات $m + 3$ می‌باشد. این عدد کوچکتر از تعداد $2n$ معادلات تعادل می‌باشد که باید قانع گردند. در نتیجه خرپا نا پایدار است و تحت وزن خودش فرو خواهد ریخت. اما اگر هر دو تکیه گاه مفصلی باشند (شکل ۱-۲۸ b) خرپا پایدار می‌شود و دیگر فرو نخواهد ریخت. توجه می‌کنیم که در این حالت تعداد کل مجهولات $m + 4$ می‌باشد که برابر با تعداد معادلات است. در حالی که شرط مساوی بودن تعداد مجهولات با تعداد معادلات تعادل موجود (یا بیشتر بودن تعداد مجهولات از تعداد معادلات موجود) شرط لازم برای پایداری خرپاهاست شرط کافی برای پایداری آنها نمی‌باشد. با متصل کردن دو خرپای ساده به یکدیگر به وسیله سه میله غیر موازی و غیر متقارب یک خرپای پایدار حاصل می‌شود. اما اگر سه میله موازی و یا متقارب باشند خرپا نا پایدار خواهد بود.

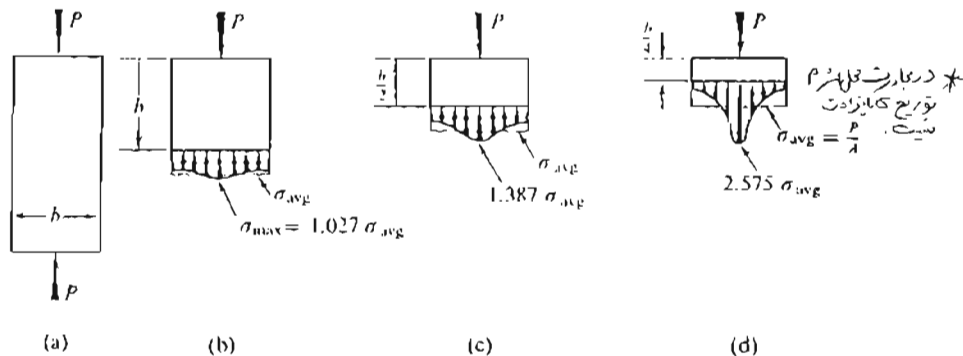


شکل ۱-۲۸

نمودارهای تغییر مکان از نوع نمودار شکل C ۲۹-۱ وسیله مهمی برای تعیین تغییر شکل خرابیها می باشد. این نمودارها به نام ویلیوت^۱ مهندس فرانسوی خوانده می شوند.

۱-۱۰ تمرکز تنش

معادله ۱-۱ که در مقاومت مصالح برای تعیین تنش در میله های با بار گذاری محوری بکار می رود در مجاورت محل اثر بار وارده جواب دقیق نمی دهد. توزیع تنش در مجاورت محل اثر بار را می توان به کمک تئوری ارجاعی بدست آورد (مرجع ۲۶). در شکل a ۳۰-۱ بلوک کوتاهی تحت اثر بارهای محوری متمرکز P می باشد. توزیع تنش در عرض بلوک در مجاورت دو انتهای بلوک در شکل های b ۳۰-۱، c ۳۰-۱ و d ۳۰-۱ رسم شده است. چنانکه مشاهده می شود در مجاورت محل اثر بار متمرکز توزیع تنش در عرض بلوک یکنواخت نمی باشد ولی هر چه از انتهای بلوک دور شویم توزیع تنش به توزیع یکنواخت نزدیک تر می گردد. در شکل ۳۰-۱ کمیت σ_{avg} تنش متوسط یا P/A می باشد.



شکل ۳۰-۱

$$\delta_{ab} = \frac{PL_{ab} \cot \theta}{EA_{ab}} \quad (\text{از دیاد طول})$$

$$\delta_{bc} = \frac{PL_{bc}}{EA_{bc} \sin \theta} \quad (\text{کاهش طول})$$

* تغییر مکان مدول δ:

برای پیدا کردن تغییر مکان اتصال B ابتدا فرض می کنیم میله AB به اندازه δ_{ab} اضافه طول پیدا کند به طوریکه انتهایش به نقطه B_1 منتقل شود (شکل b ۲۹-۱). سپس قوسی به مرکز A و شعاع AB_1 رسم می کنیم. چون تغییر مکان نقطه B خیلی کوچک است قوس مزبور را می توان با خطی که در B_1 بر امتداد AB عمود باشد جایگزین نمود. همین طور فرض می شود که عضو BC به اندازه δ_{bc} کاهش طول پیدا کند به طوریکه انتهایش به نقطه B_2 منتقل شود. سپس قوسی به مرکز C و شعاع CB_2 رسم می کنیم. این قوس نیز با خطی که در B_2 بر امتداد AB عمود باشد جایگزین می گردد. دو خط عمود یکدیگر را در نقطه B' قطع می کنند که محل سهایی اتصال B خرابی است. بدین ترتیب بردار $\overline{BB'}$ معرف تغییر مکان δ_b اتصال B خرابی می باشد.

نمودار تغییر مکان شکل b ۲۹-۱ با مقیاس بزرگتری در شکل c ۲۹-۱ رسم شده است. از این شکل نتیجه می شود که مؤلفه افقی δ_b برابر δ_{ab} می باشد و مؤلفه قائم آن از دو قسمت B_1B_3 و B_3B' تشکیل شده است. فاصله B_1B_3 که همان فاصله BB_4 است برابر با $\delta_{bc} \sin \theta$ می باشد. طول B_3B' را می توان از مثلث B_2B_3B' که ضلع B_2B_3 آن برابر $\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}$ می باشد به دست آورد بدین ترتیب مؤلفه قائم تغییر مکان δ_b مساوی می شود با

$$B_1B' = \delta_{bc} \sin \theta + (\delta_{bc} \cos \theta + \delta_{ab}) \cot \theta = \frac{\delta_{bc}}{\sin \theta} + \delta_{ab} \cot \theta$$

با داشتن مؤلفه های افقی و قائم تغییر مکان اتصال B تغییر مکان δ_b این اتصال به سهولت بدست می آید.

$$\delta_b = \sqrt{(\overline{BB_1})^2 + (B_1B')^2}$$

شیم: * در زیر بارهای متمرکز، تنش در طول سیم توزیع می شود.

۳۸

بنابراین در نزدیکی بار P (شکل d-۳۰-۱) تنش حداکثر در مقطع خیلی بیشتر از تنش متوسط می باشد. این پدیده به " تمرکز تنش " موسوم است. به طور کلی در زیر بارهای متمرکز همواره تنش متمرکز می گردد. اما اگر از دو انتهای بلوک دور شویم توزیع تنش تقریباً یکساخت بوده و مقدار آن را با تقریب خوب می توان از معادله 1-1 بدست آورد.

۱-۱۱ مسائل حل شده

مسئله ۱-۱ ✓

سیم درازی به طور قائم تحت وزن خودش آویزان است. بیشترین طولی که سیم بدون پاره شدن می تواند داشته باشد چقدر است اگر:

الف - جنس سیم فولاد با تنش نهائی 21000 Kg/cm^2 باشد.

ب - جنس سیم آلومینیوم با تنش نهائی 3500 Kg/cm^2 باشد.

وزن واحد حجم فولاد 7.86 g/cm^3 و وزن واحد حجم آلومینیوم 2.72 g/cm^3 می باشد.

حل: هرگاه سیمی به طول L، وزن مخصوص γ ، سطح مقطع A و وزن W تحت وزن خودش آویزان باشد بیشترین تنش در آن در انتهای فوقانی آن خواهد بود که برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{W}{A} = \frac{\gamma \gamma L}{A} = \gamma L$$

اگر تنش نهایی فلز سیم σ_u باشد ماکزیمم طول سیم بدون اینکه پاره شود از رابطه زیر بدست می آید:

$$L_{\max} = \frac{\sigma_u}{\gamma}$$

۳۹

$$L_{\max} = \frac{21000 \times 1000}{7.86 \times 100} = 26717 \text{ m} \quad \text{برای سیم فولادی}$$

$$L_{\max} = \frac{3500 \times 1000}{2.72 \times 100} = 12868 \text{ m} \quad \text{برای سیم آلومینیومی}$$

مسئله ۱-۲ ✓

در میله توپری با مقطع دایره و به قطر $d=3.8 \text{ cm}$ سوراخ کوچکی مطابق شکل ۱-۳۱ در مرکز آن وجود دارد. قطر سوراخ $\frac{d}{4}$ می باشد. با فرض اینکه تنش مجاز کششی روی سطح مقطع خالص میله در جایی که سوراخ وجود دارد $\sigma_w = 700 \text{ Kg/cm}^2$ باشد حداکثر بار کششی مجاز P را که میله می تواند تحمل کند تعیین کنید.

حل: مساحت سطح یک قطعه دایره به شعاع R که زاویه مقابل آن θ باشد از رابطه زیر بدست می آید:

$$A_s = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

با توجه به شکل می توانیم زاویه θ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{d}{4}}{\frac{d}{2}} = 0.25 \quad ; \quad \theta = 2.636 \text{ rad}$$

$$A = 2A_s = \frac{d^2}{4} (\theta - \sin \theta) = \frac{3.8^2}{4} (2.636 - 0.484) = 7.77 \text{ cm}^2$$

$$P_w = A \sigma_w = 7.77 (700) = 5439 \text{ Kg}$$

۴۱

نیروی گریز از مرکز وارد بر جرم dm میله که در فاصله r از محور دوران قرار دارد برابر است با

$$dF = dm r \omega^2$$

از دیاد طول میله در اثر این نیروی جزئی مساوی است با

$$d\delta_2 = \frac{dF \cdot r}{AE}$$

در نتیجه تغییر مکان δ_2 از انتگرال زیر بدست می آید: (وزن مخصوص میله γ)

$$\delta_2 = \int_0^L \frac{r dF}{AE} = \frac{\omega^2}{AE} \int_0^L r^2 dm = \frac{\omega^2}{AE} \int_0^L \frac{r^2}{g} \gamma A dr$$

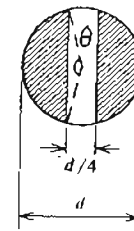
$$= \frac{\omega^2 \gamma A L^3}{3g AE}$$

δ_2 را بر حسب وزن میله $W_1 = \gamma AL$ می نویسیم.

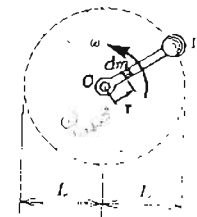
$$\delta_2 = \frac{\omega^2 L^2 W_1}{3g AE}$$

$$\delta = \frac{\omega^2 L^2}{3g AE} (W_1 + 3W)$$

۴۰



شکل ۱-۳۱



شکل ۱-۳۲

مسئله ۱-۳ ✓

میله‌ای به طول L با سرعت زاویه‌ای ω در یک صفحه افقی حول یک محور قائم دوران می‌کند. میله دارای سطح مقطع A و وزن W_1 می‌باشد. وزنه‌ای به وزن W به انتهای میله متصل شده است. از دیاد طول کل میله را در اثر نیروهای گریز از مرکز پیدا کنید. ضریب ارجاعی میله را E فرض کنید (شکل ۱-۳۲).

حل: فرض می‌کنیم δ_1 از دیاد طول میله در اثر نیروی گریز از مرکز وارد بر وزنه W و δ_2 از دیاد طول میله در اثر نیروی گریز از مرکز وارد بر خود میله باشد. در این صورت از دیاد طول کل میله در اثر نیروهای گریز از مرکز برابر خواهد بود با

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

نیروی گریز از مرکز وارد بر وزنه W از رابطه زیر بدست می‌آید (g شتاب ثقل می‌باشد):

$$F = \frac{W}{g} L \omega^2$$

$$\delta_1 = \frac{FL}{AE} = \frac{W \omega^2 L^2}{g AE}$$

بنابراین

۴۲

در این رابطه A سطح مقطع ستون در فاصله x از انتهای فوقانی ستون می باشد. از حل معادله دیفرانسیل فوق A بدست می آید.

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_w} dx$$

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x + C \quad (1)$$

ثابت انتگرال گیری C از شرط حدی در انتهای فوقانی ستون محاسبه می شود. در بالای ستون سطح لازم برابر است با

$$A_t = \frac{P}{\sigma_w} \quad (\text{در } x = 0)$$

بنابراین $C = \ln \frac{P}{\sigma_w}$ بدست می آید که آن را در معادله (1) قرار می دهیم.

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x + \ln \frac{P}{\sigma_w} \quad \ln \frac{\sigma_w}{P} A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x$$

$$\frac{\sigma_w}{P} A = e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \quad : \quad A = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \quad (2)$$

$$\pi r^2 = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}} \quad : \quad r = \left(\frac{P}{\pi \sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{شعاع}$$

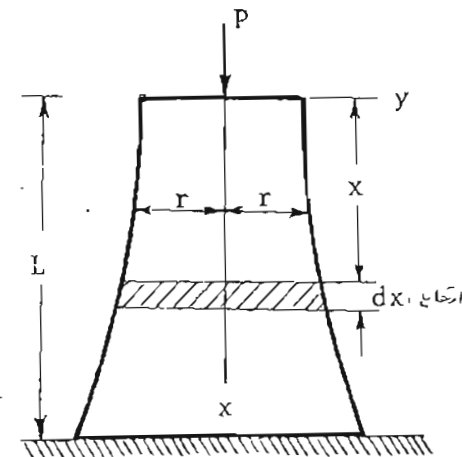
۴۲

مسئله ۴-۱

معادله ای برای شعاع r ستونی با مقطع دایره بدست آورید به طوریکه حجم آن حداقل باشد. ستون تحت اثر بار P در بالا و همچنین وزن خود می باشد. ستون از ماده ای با وزن واحد حجم γ و تنش مجاز فشاری σ_w تشکیل شده است. مساحت سطح مقطع ستون در بالا و پایین و حجم ستون را نیز حساب کنید (شکل ۳۳-۱).

حل: قسمتی از ستون به ارتفاع dx را که به فاصله x از انتهای فوقانی ستون قرار دارد در نظر می گیریم. حجم ستون موقعی حداقل خواهد بود که از مصالح جداگثر استفاده بشود به عبارت دیگر تنش در همه مقاطع باید یکسان و برابر تنش مجاز σ_w باشد. در این صورت اختلاف dA بین مساحت سطح مقطع پایین و بالای ستون به ارتفاع dx باید چنان باشد که اختلاف نیروی فشاری از بالا تا پایین جزء ستون را که خود برابر با وزن جزء است جبران کند.

$$\sigma_w dA = \gamma A dx$$



شکل ۳۳-۱

۴۵

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad F_{CB} \sin \theta = P \quad : \quad F_{CB} = \frac{P}{\sin \theta}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad F_{CB} \cos \theta - F_{AB} = 0 \quad : \quad F_{AB} = P \cot \theta$$

سطح مقطع لازم هر یک از میله‌ها با تقسیم نمودن نیرو در میله بر تنش مجاز σ_w بدست می‌آید.

$$A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_w} = \frac{P \cot \theta}{\sigma_w} \quad : \quad AB \text{ سطح مقطع لازم برای میله}$$

$$A_{CB} = \frac{F_{CB}}{\sigma_w} = \frac{P}{\sigma_w \sin \theta} \quad : \quad CB \text{ سطح مقطع لازم برای میله}$$

$$V = L A_{AB} + \frac{L}{\cos \theta} A_{CB} = \frac{PL}{\sigma_w} \left(\cot \theta + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right) \quad : \quad \text{حجم خریا}$$

وزن خریا وقتی حداقل می‌باشد که حجم آن حداقل باشد.

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad : \quad -\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = 0$$

$$-\cos^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0 \quad : \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \quad \theta = 55^\circ$$

در این صورت که $\theta = 55^\circ$ و $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$ داریم:

۴۴

حال از معادله (2) می‌توانیم مساحت سطح مقطع ستون در پایین ستون را حساب کنیم. کافی است در این معادله به جای x مقدار L طول ستون را قرار دهیم.

$$A_b = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}}$$

حجم ستون به صورت زیر حساب می‌شود:

$$V = \int_0^L \pi r^2 dx = \frac{P}{\sigma_w} \int_0^L e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} dx = \frac{P}{\sigma_w} \frac{\sigma_w}{\gamma} e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \Big|_0^L$$

$$V = \frac{P}{\gamma} (e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}} - 1)$$

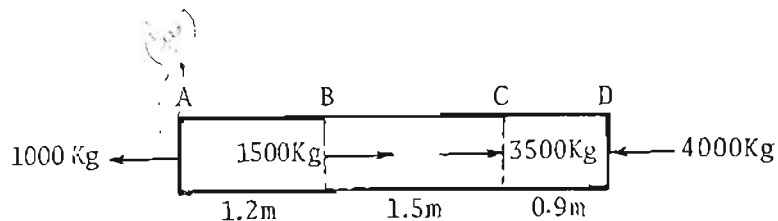
مسئله ۵-۱ ✓

نگاه کنید به شکل ۱-۳۴. این خریا بار قائم P را در اتصال B باید حمل کند.

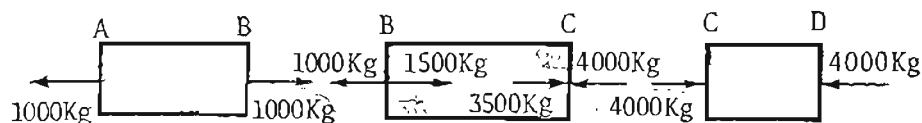
خرپای شکل ۱-۳۴ از دو عضو AB و BC تشکیل شده است که طول عضو AB برابر L و ثابت می‌باشد. این خریا بار قائم P را در اتصال B باید حمل کند. کپه گاه C را می‌توان در امتداد قائم حرکت و زاویه θ را تغییر داد. با فرض اینکه تنش‌های مجاز فشاری و کششی مصالح مصرفی در خریا یکسان باشند زاویه θ را چنان تعیین کنید که وزن خریای مزبور حداقل باشد.

حل: از نوشتن معادلات تعادل مفصل B نیروی F_{AB} در عضو AB و نیروی F_{CB} در عضو CB بدست می‌آیند.

۴۷



شکل ۱-۳۵



نمودار جسم آزاد AB

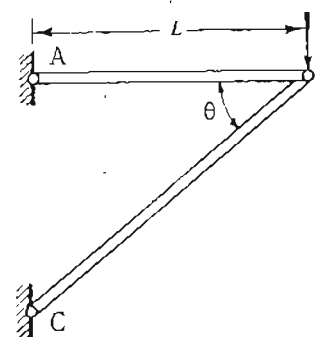
نمودار جسم آزاد BC

نمودار جسم آزاد CD

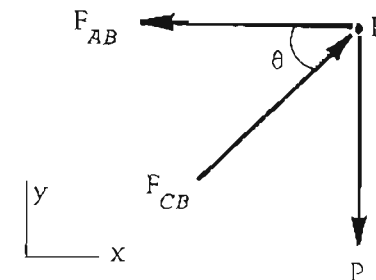
قسمت	P_i Kg	L_i m	$P_i L_i$ Kg m
AB	۱۰۰۰	۱/۲	۱۲۰۰
BC	-۵۰۰	۱/۵	-۷۵۰
CD	-۴۰۰۰	۰/۹	-۳۶۰۰
مجموع			-۳۱۵۰

$$\delta = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^3 P_i L_i = \frac{(-3150)(100)}{(700000)(1.6)} = -0.28 \text{ cm} \quad (\text{کاهش طول})$$

۴۶



شکل ۱-۳۴



نمودار جسم آزاد مفصل B

مسئله ۱-۶ ✓

یک میله الومینیومی با سطح مقطع 1.6 cm^2 بارهای محوری نشان داده شده در شکل ۱-۳۵ را حمل می‌کند. اگر ضریب ارتجاعی الومینیوم $E = 700000 \text{ Kg/cm}^2$ باشد تغییر شکل کل میله را تعیین کنید.

حل: تغییر شکل میله از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{AE} \sum_{i=1}^3 P_i L_i$$

برای تعیین نیروهای محوری در قسمت‌های AB، BC و CD نمودارهای جسم آزاد را برای این ۳ قسمت رسم می‌کنیم.

۴۹. در ثابت ϵ در تمام طول میله ثابت و برابر P می باشد (از وزن میله صرف نظر می شود).

$$A_x = (\overline{AD}) t = (2\overline{AB} + \overline{BC}) t = (2\overline{AB} + b_2) t$$

$$\frac{\overline{AB}}{b_1 - b_2} = \frac{L - x}{L} \quad ; \quad \overline{AB} = \frac{b_1 - b_2}{2L} (L - x)$$

$$A_x = \left[\frac{b_1 - b_2}{L} (L - x) + b_2 \right] t = t \left[b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L} x \right]$$

$$\delta = \frac{P}{Et} \int_0^L \frac{dx}{b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L} x} = \frac{P}{Et} \left(-\frac{L}{b_1 - b_2} \right) \left[\ln \left(b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L} x \right) \right]_0^L$$

$$\delta = \frac{PL}{Et(b_1 - b_2)} \ln \frac{b_1}{b_2}$$

مسئله ۸-۱ ✓

در مسئله قبل رابطهای برای اضافه حجم ΔV میله پیدا کنید.

حل: با توجه به مسئله قبل کرنش جزئی کوچکی از میله به طول dx که فاصله x از انتهای فوقانی (شکل ۳۶-۱) قرار دارد برابر است با

$$\epsilon_x = \frac{d\delta}{dx} = \frac{P}{EA_x}$$

۴۸

مسئله ۷-۱ ✓

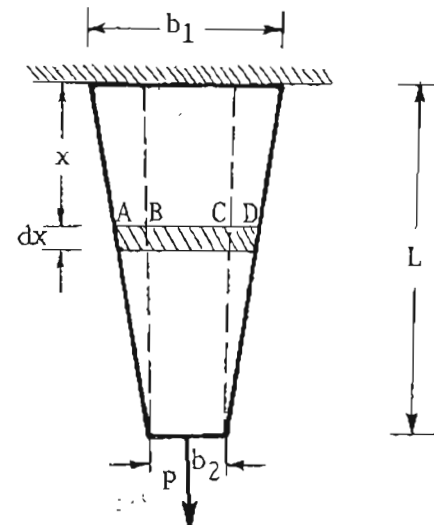
یک میله غیر منشوری با مقطع مستطیل و ضخامت ثابت t که عرض آن به طور خطی از مقدار b_1 در تکیه گاه تا مقدار b_2 در انتهای آزاد آن تغییر می کند بار P را تحمل می نماید. رابطهای برای ازدیاد طول میله تحت بار P بدست آورید (شکل ۳۶-۱).

حل: ازدیاد طول قسمتی از میله به طول dx که به فاصله x از انتهای فوقانی قرار دارد از رابطه زیر بدست می آید:

$$d\delta = \frac{P_x dx}{EA_x}$$

در این رابطه A_x سطح مقطع میله در فاصله x از تکیه گاه و P_x نیروی محوری در قسمت مورد نظر می باشد. بنابراین ازدیاد طول کل میله از رابطه زیر بدست می آید:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x}$$



شکل ۳۶-۱

۵۱

$$\text{کاهش ضخامت کل} = 2 \int_0^{0.8r} \frac{W dx}{\pi E (r^2 - x^2)} = \frac{2W}{\pi E} \left[\frac{1}{2r} \ln \frac{r+x}{r-x} \right]_0^{0.8r}$$

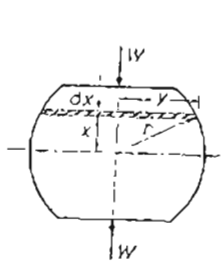
$$= \frac{W}{\pi r E} [\ln 9 - \ln 1] = \frac{2.197W}{\pi r E}$$

مسئله ۱-۱۰

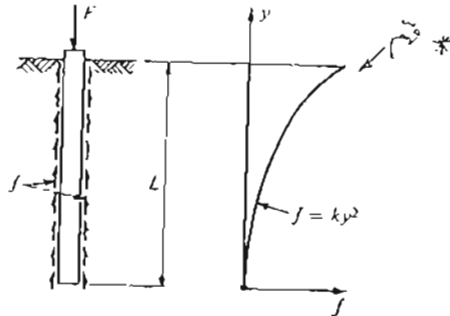
یک سمع جوی با مقطع یکنواخت و به طول L در خاک رس کوبیده شده است و بار F را در بالای شمع حمل می‌کند. تمام آیس بار بوسیله نیروی اصطکاکی f (در واحد طول) در طول شمع مقاومت می‌شود که تغییرات آن مطابق شکل ۱-۳۸ به صورت یک سهمی می‌باشد. تعیین کنید:

الف - کاهش طول کل شمع را بر حسب L ، F ، A (سطح مقطع شمع) و E (ضریب ارتجاعی چوب).

ب - اگر $F = 43600 \text{ Kg}$ ، $L = 12 \text{ m}$ ، $A = 645 \text{ cm}^2$ و $E = 105000 \text{ Kg/cm}^2$ باشد مقدار عددی کوتاه شدن شمع مزبور را.



شکل ۱-۳۷



شکل ۱-۳۸

۵۰

اضافه حجم جزء مزبور با استفاده از رابطه ۱-۱۴ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\Delta V}{V} = (1-2\nu)$$

$$\Delta V = V(1-2\nu)$$

$$d(\Delta V) = \epsilon_x (1-2\nu) dV = \frac{P}{EA_x} (1-2\nu) A_x dx = \frac{P(1-2\nu)}{E} dx$$

بنابراین اضافه طول کل میله از انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$\Delta V = \int_0^L \frac{P(1-2\nu)}{E} dx = \frac{P(1-2\nu)}{E} \int_0^L dx = \frac{PL}{E} (1-2\nu)$$

مسئله ۱-۹

یک گوی فولادی به شعاع r مطابق شکل ۱-۳۷ تراش داده شده است بطوریکه بالابراین آن مسطح گردیده است و ضخامت آن در امتداد قائم $1.6r$ می‌باشد. کاهش ضخامت جسم مزبور را موقعی که یک بار محوری W در بالای آن وارد می‌شود حساب کنید.

حل: حژی از جسم مزبور را که در شکل با هاشور نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.

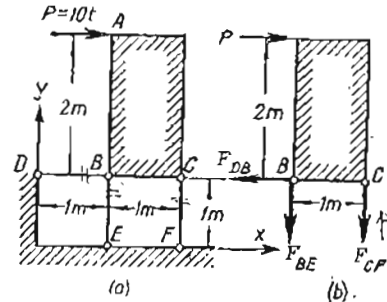
$$\text{مساحت مقطع جزء} = \pi y^2 = \pi (r^2 - x^2)$$

$$\text{تنش در جزء مزبور} = \frac{W}{\pi (r^2 - x^2)}$$

$$\text{کاهش ضخامت جزء مزبور} = \frac{W dx}{\pi L (r^2 - x^2)}$$

برای رابطه $\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta V}{V}$ و $\Delta V = V(1-2\nu)$ یا $\Delta V = V(1-2\nu)$

۵۳



نمودار جسم آزاد سازه

① این ابتدا نیرو را بدست می آوریم:

حل: از تعادل سازه در امتداد افق نیروی داخلی میله BD بدست می آید.

$$F_{BD} = P = 10 \text{ t}$$

از تعادل لنگری نیروها حول نقطه B نیروی داخلی میله CF بدست می آید.

$$\sum M_B = 0 \quad 2(10) + 1(F_{CF}) = 0 \quad : \quad F_{CF} = -20 \text{ t} \uparrow$$

بنابراین جهت نیروی F_{CF} در روی شکل باید عوض شود. از تعادل نیروها در امتداد قائم نیروی داخلی میله BE بدست می آید.

$$F_{BE} = 20 \text{ t} \downarrow$$

② تنش

$$\sigma_{BD} = \frac{10000}{20} = 500 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{CF} = \frac{-20000}{20} = -1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{BE} = \frac{20000}{20} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

۵۲

حل: ابتدا ضریب k را در معادله $f = ky^2$ با نوشتن معادله تعادل در امتداد قائم بدست می آوریم.

$$F = \int_0^L f dy = \int_0^L ky^2 dy = \frac{kL^3}{3} \quad : \quad k = \frac{3F}{L^3}$$

اگر P_y بار وارد بر شمع در فاصله y از اسپای پایین آن باشد آن را از انتگرال زیر می توانیم حساب کنیم:

$$P_y = \int_0^y dP = \int_0^y f dy = \int_0^y ky^2 dy = \frac{ky^3}{3} = \frac{y^3}{L^3} F$$

در برای P و F

بالاخره کاهش طول δ میله از انتگرال زیر بدست می آید:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_y dy}{AE} = \int_0^L \frac{F}{AEL^3} y^3 dy = \frac{FL}{4AE}$$

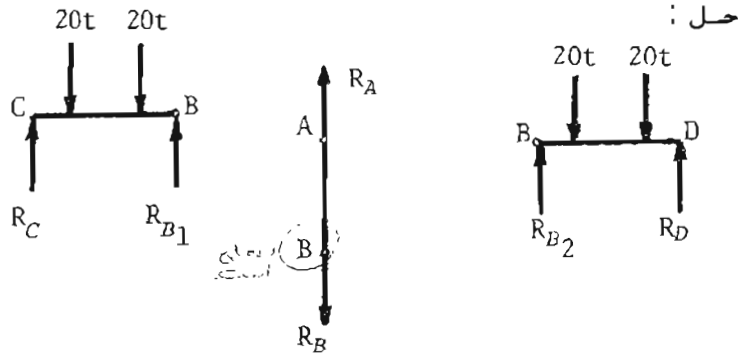
مقدار عددی δ برابر است با

$$\delta = \frac{(43600)(1200)}{4(645)(105000)} = 0.19 \text{ cm} = 1.9 \text{ mm}$$

✓ مسئله ۱۱-۱

سازه صلبی مطابق شکل ۱-۳۹ بوسیله سه میله فولادی با سطح مقطع یکسان $A = 20 \text{ cm}^2$ به فونداسیون متصل شده است. تنشها را در میله ها و همچنین تغییر مکان افقی و قائم در کل نقطه B را در اثر بار افقی $P = 10 \text{ t}$ تعیین کنید. ضریب انرجایی فولاد $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

۵۵



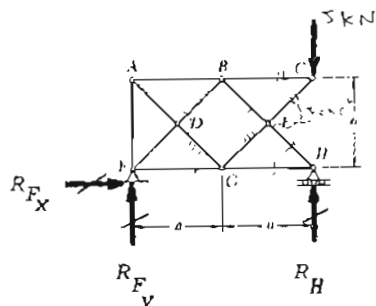
نمودار جسم آزاد CB نمودار جسم آزاد AB نمودار جسم آزاد BD

از نمودار جسم آزاد CB نتیجه می شود :
 $R_C = R_{B1} = 20t$
 از نمودار جسم آزاد BD نتیجه می شود :
 $R_D = R_{B2} = 20t$
 بنابراین نیروی کششی عضو AB برابر است با
 $R_B = R_{B1} + R_{B2} = 40t$
 مساحت سطح مقطع ضعیف عضو AB مساوی است با
 $A' = 4A - 8(2 \times 1) = 4(19.2) - 16 = 60.8 \text{ cm}^2$
 در نتیجه تنش در مقطع بحرانی عضو کششی برابر است با

$$\sigma = \frac{R_B}{A'} = \frac{40000}{60.8} = 658 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۱۳ ✓

نیروهای داخلی خرابی شکل ۴۱-۱ را با روش مفاصل بدست آورید.



شکل ۴۱-۱

۵۴

تغییر مکان افقی نقطه B برابر با ازدیاد طول میله BD می باشد.

$$\delta_{Bh} = \Delta L_{BD} = \frac{F_{BD} L}{AE} = \frac{(10000)(100)}{(20)(2 \times 10^6)} = 0.025 \text{ cm} = 0.25 \text{ mm}$$

تغییر مکان قائم نقطه B برابر با ازدیاد طول میله BE می باشد.

$$\delta_{Bv} = \Delta L_{BE} = \frac{F_{BE} L}{AE} = \frac{(20000)(100)}{(20)(2 \times 10^6)} = 0.05 \text{ cm} = 0.5 \text{ mm}$$

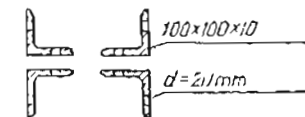
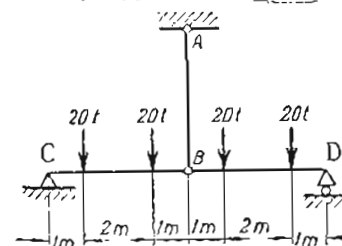
تغییر مکان کل نقطه B از جمع هندسی مولفه های افقی و قائم آن بدست می آید.

$$\delta_B = \sqrt{\delta_{Bh}^2 + \delta_{Bv}^2} = \sqrt{0.25^2 + 0.5^2} = 0.56 \text{ mm}$$

مسئله ۱۲-۱ ✓

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

مقطع عضو کششی AB (شکل ۴۰-۱) شامل چهار نبشی استاندارد $100\text{mm} \times 100\text{mm} \times 10\text{mm}$ به مساحت مقطع $A = 19.2 \text{ cm}^2$ می باشد که بوسیله ۸ سوراخ برچ به قطر ۲۰mm ضعیف شده است. تنش را در مقطع بحرانی عضو کششی پیدا کنید.

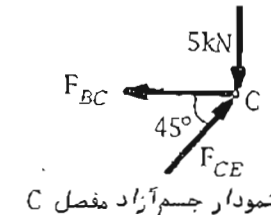


شکل ۴۰-۱

۵۶

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل کل خرپا واکنش‌ها را بدست می‌آوریم .

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & : R_{F_x} = 0 \\ \sum M_H = 0 & : R_{F_y} = 0 \\ \sum F_y = 0 & : R_H = 5 \text{ kN}\end{aligned}$$



نمودار جسم آزاد مفصل C

از نوشتن معادلات تعادل در نمودار جسم آزاد مفصل C نیروهای F_{BC} و F_{CE} به دست می‌آیند .

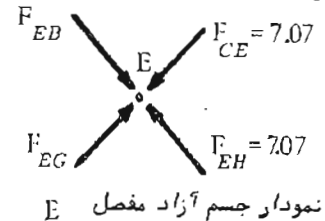
$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 & : F_{CE} \cos 45^\circ - 5 = 0 \\ F_{CE} & = 5\sqrt{2} \text{ kN} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{فشاری} \\ \sum F_x = 0 & : F_{BC} - F_{CE} \cos 45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 5 \text{ kN} \quad \text{کشی}\end{aligned}$$

به علت تقارن خرپا و بار گذاری حول یک محور افقی :

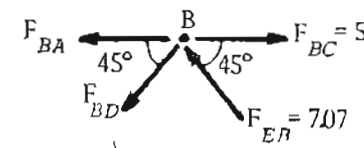
$$\begin{aligned}F_{EH} & = F_{CE} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{فشاری} \\ F_{HG} & = F_{BC} = 5 \text{ kN} \quad \text{کشی}\end{aligned}$$

از نمودار جسم آزاد مفصل E نیروهای F_{EB} و F_{EG} بدست می‌آیند . به علت شرایط ویژه بار گذاری در اتصال E می‌توانیم بنویسیم

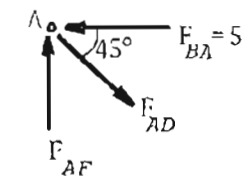
$$\begin{aligned}F_{EB} & = F_{EH} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{فشاری} \\ F_{EG} & = F_{CE} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{فشاری}\end{aligned}$$



نمودار جسم آزاد مفصل E



نمودار جسم آزاد مفصل B



نمودار جسم آزاد مفصل A

۵۷

از معادلات تعادل مفصل B نیروهای F_{BD} و F_{BA} بدست می‌آیند .

$$\sum F_y = 0 : F_{BD} \cos 45^\circ - F_{EB} \cos 45^\circ = 0 \quad F_{BD} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{کشی}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{BA} + F_{BD} \cos 45^\circ + 7.07 \cos 45^\circ - 5 = 0 \quad F_{BA} = -5 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

به علت تقارن خرپا و بار گذاری :

$$F_{DG} = F_{BD} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{کشی}$$

$$F_{GF} = F_{BA} = 5 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

با در نظر گرفتن تعادل مفصل A نیروهای F_{AF} و F_{AD} بدست می‌آیند .

$$\sum F_x = 0 : F_{AD} \cos 45^\circ - 5 = 0 \quad F_{AD} = 7.07 \text{ kN} \quad \text{کشی}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{AF} - F_{AD} \cos 45^\circ = 0 \quad F_{AF} = 5 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

✓ مسئله ۱۴ - ۱

نیروهای داخلی خرپای شکل ۱-۲۲ را حساب کنید . واکنش‌های آن را نیز تعیین کنید .

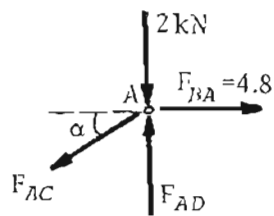
حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خرپا واکنش‌ها را پیدا می‌کنیم .

۵۹

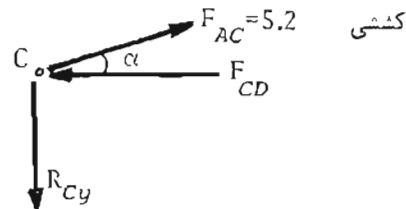
بالاخره با نوشتن معادله تعادل مفصل C در امتداد افق نیروی F_{CD} بدست می‌آید.

$$\sum F_x = 0 : F_{CD} - F_{AC} \cos \alpha = 0$$

$$F_{CD} = 4.8 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$



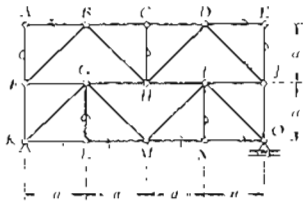
نمودار جسم آزاد مفصل A



نمودار جسم آزاد مفصل C

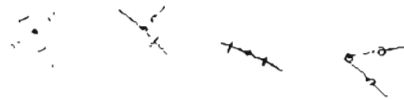
✓ مسئله ۱۵ - ۱

عصوهای بدون نیروی خرابی شکل ۱-۴۳ را بدست آورید. برای هر عضو باید نیروی خرابی را بدست آورید.



شکل ۱-۴۳

$$F_{AB} = F_{BA}$$

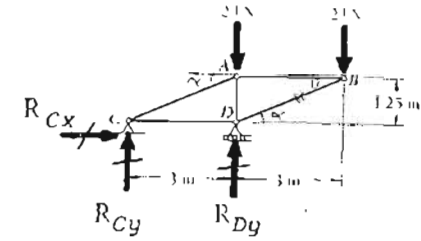


۵۸

$$\sum F_x = 0 : R_{Cx} = 0$$

$$\sum M_D = 0 : 3R_{Cy} + 3(2) = 0$$

$$R_{Cy} = -2 \text{ kN}$$



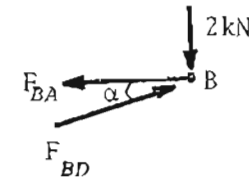
شکل ۱-۴۲

سایر این جهت R_{Cy} در روی شکل باید عوض شود.

$$\sum F_y = 0 : 2 + 2 + 2 - R_{Dy} = 0 : R_{Dy} = 6 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.25^2}} = \frac{12}{13} ; \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

از نمودار جسم آزاد مفصل B نیروهای F_{BD} و F_{BA} بدست می‌آیند.



$$\sum F_y = 0 : F_{BD} \sin \alpha - 2 = 0$$

$$F_{BD} = 5.2 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{BA} - F_{BD} \cos \alpha = 0$$

$$F_{BA} = 4.8 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

نمودار جسم آزاد مفصل B

با نوشتن معادلات تعادل مفصل A نیروهای F_{AD} و F_{AC} بدست می‌آیند.

$$\sum F_x = 0 : F_{AC} \cos \alpha - 4.8 = 0 \quad F_{AC} = 5.2 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{AD} - 2 - F_{AC} \sin \alpha = 0 \quad F_{AD} = 4 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

T_{AF}

$$F_{AF} = 0$$

حل : از تعادل مفصل A در امتداد قائم نتیجه می‌شود :

$$F_{CH} = 0$$

از تعادل مفصل C در امتداد قائم نتیجه می‌شود :

۶۱

از تعادل مفصل D در امتداد عمود بر AI نتیجه می شود : $F_{DH} = 0$

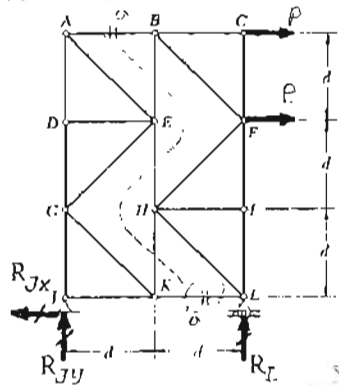
از تعادل مفصل H در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{AH} = 0$

از تعادل مفصل G در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{AG} = 0$

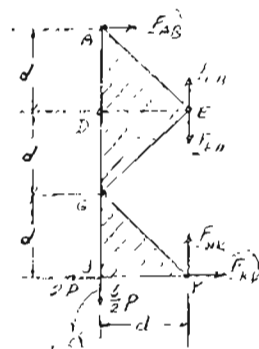
✓ مسئله ۱۷ - ۱

نیروهای اعضاء AB و KL خرابی شکل ۴۵ - ۱ را بدست آورید.

این مقطع را می بینیم



شکل ۴۵ - ۱



نمودار جسم آزاد

برای اعضاء AB و KL

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خرابی واکنش های R_{Jx} و R_{Jy} را بدست می آوریم.

$$\sum F_x = 0 : R_{Jx} = 2P$$

$$\sum M_L = 0 : 2d R_{Jy} + 2dP + 3dP = 0 : R_{Jy} = -2.5P$$

۶۰

از تعادل مفصل E در امتداد افق نتیجه می شود : $F_{DE} = 0$

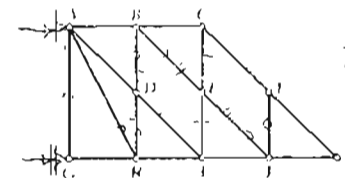
از تعادل مفصل E در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{EJ} = 0$

از تعادل مفصل L در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{GL} = 0$

از تعادل مفصل N در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{IN} = 0$

✓ مسئله ۱۶ - ۱

عضوهای بدون نیروی خرابی شکل ۴۴ - ۱ را بدست آورید.



در تمام درجه آزادی

شکل ۴۴ - ۱

از مفصل F شروع می کنیم

حل : از تعادل مفصل F در امتداد عمود بر CK نتیجه می شود : $F_{FJ} = 0$

از تعادل مفصل J در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{EJ} = 0$

از تعادل مفصل E در امتداد افق نتیجه می شود : $F_{EB} = 0$

از تعادل مفصل B در امتداد قائم نتیجه می شود : $F_{BD} = 0$

۶۳

حل: با مقطع a-a خرابا را به دو نیم تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد قسمت فوقانی را در نظر می‌گیریم.
با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه E نیروی داخلی عضو GJ به دست می‌آید.

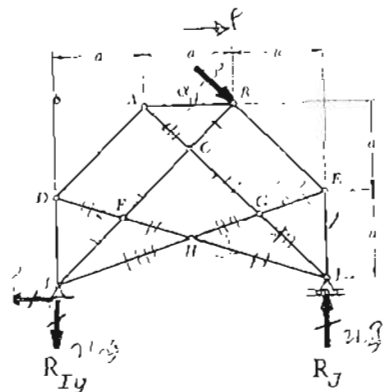
$$\Sigma M_E = 0 : + (15)(4) + 15(2) + F_{GJ}(4) = 0$$

$$F_{GJ} = -22.5 \text{ kN}$$

فشاری

مسئله ۱۹ - ۱ ✓

هرگاه در خرابای شکل ۴۷ - ۱ α برابر صفر باشد نیروی داخلی اعضاء AB و EJ آن را تعیین کنید.



شکل ۴۷ - ۱
 $\begin{cases} DG = CF = HI \\ DE = FI = HJ \\ BC = EF = GI \\ EG = GH = FI \end{cases}$

حل: ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خرابا واکنش‌های R_{Ix} و R_{Iy} را به دست می‌آوریم.

$$\Sigma F_x = 0 : R_{Ix} = P$$

$$\Sigma M_J = 0 : R_{Iy}(3a) - P(2a) = 0 : R_{Iy} = \frac{2}{3} P$$

۶۲

بنابراین جهت واکنش R_{Iy} در روی شکل باید عوض شود.
حال با مقطع a-a خرابا را به دو نیم تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد را برای قسمت سمت چپ رسم می‌کنیم. با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه K نیروی F_{AB} به دست می‌آید.

$$\Sigma M_K = 0 : + 2.5P(d) - F_{AB}(3d) = 0$$

$$F_{AB} = \frac{5}{6} P$$

کشی

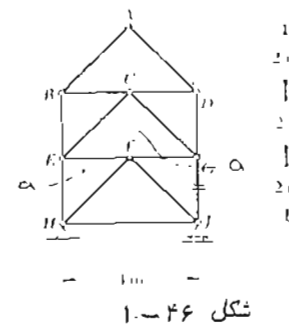
با نوشتن معادله تعادل در ابعاد افقی نیروی F_{KL} به دست می‌آید.

$$\Sigma F_x = 0 : \frac{5}{6}P + F_{KL} - 2P = 0 : F_{KL} = \frac{7}{6} P$$

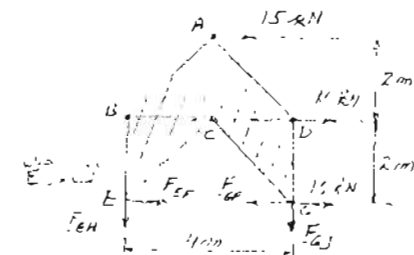
کشی

مسئله ۱۸ - ۱ ✓

نیروی داخلی عضو GJ خرابای شکل ۴۶ - ۱ را پیدا کنید.



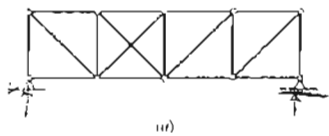
شکل ۴۶ - ۱



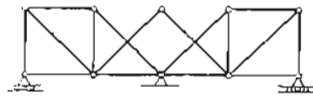
نمودار جسم آزاد

۶۵

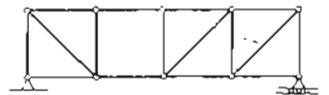
طبقه بندی کنید.



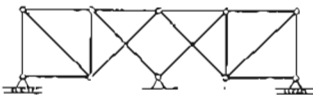
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل ۴۸-۱

حل: تعداد مفاصلها را n ، تعداد اعضا را m و تعداد واکنشها را r (مؤلفه‌های واکنشها را) می‌نامیم.

$$(m+r) = 2n$$

شکل (a): $n=10$ $m=18$ $r=3$

چون $m+r > 2n$ می‌باشد خرپا هیپر استاتیک است و درجه هیپر استاتیکی آن برابر است با $m+r-2n = 18+3-20 = 1$

شکل (b): $n=10$ $m=16$ $r=3$

$$m+r < 2n$$

بنابراین خرپا ناپایدار است.

شکل (c): $n=10$ $m=16$ $r=4$

$$m+r = 2n = 20$$

خرپا ایزو استاتیک و پایدار است.

شکل (d): $n=10$ $m=16$ $r=4$

$$m+r = 2n = 20$$

۶۴

حال قسمت IBE را جدا و نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم. چون در هر یک از مفاصلهای C، F، G و H اعضاء دو بدو در یک امتداد هستند می‌توانیم بنویسیم

$$F_{AC} + F_{GJ} = 0$$

$$F_{DF} + F_{HJ} = 0$$

با توجه به اینکه لنگرهای دو نیروی F_{AC} و F_{GJ} و همچنین دو نیروی F_{DF} و F_{HJ} یکدیگر را خنثی می‌کنند معادله تعادل لنگری قطعه IBE را حول نقطه K می‌نویسیم.

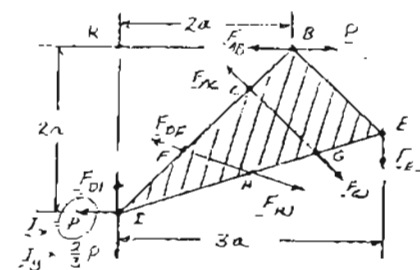
$$\Sigma M_K = 0 : +P(2a) + F_{EJ}(3a) = 0$$

$$F_{EJ} = -\frac{2}{3}P$$

فشاری

معادله تعادل قطعه IBE در امتداد افق نیروی F_{AB} را می‌دهد.

$$\Sigma F_x = 0 : P - P - F_{AB} = 0 : F_{AB} = 0$$

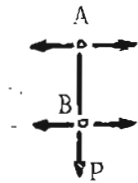


مسئله ۲۰-۱

خرپاهای شکل ۴۸-۱ را به ناپایدار، ایزو استاتیک (و پایدار)، و هیپر استاتیک

۶۷

توجه کنید خرپای مزبور یک خرپای ساده نمی باشد و بین مفصل های A و B معضلی وجود ندارد. با وجود اینکه رابطه $m + r = 2n$ برقرار است خرپای مزبور پایدار نمی باشد زیرا اگر نمودار جسم آزاد عضو AB را رسم کنیم مشاهده می کنیم که عضو مزبور در امتداد قائم در حال تعادل نیست.



نمودار جسم آزاد AB

شکل (c) : $n = 8$ $m = 13$ $r = 4$

$$m + r > 2n$$

خرپا هیبر استاتیک می باشد و درجه هیبر استاتیکی آن برابر است با

$$m + r - 2n = 13 + 4 - 16 = 1$$

شکل (d) : $n = 8$ $m = 12$ $r = 4$

$$m + r = 2n = 16$$

خرپای مزبور یک خرپای ساده نیست ولی با روش مفاصل می توان تمام نیروهای داخلی عضوهای آن را بدست آورد. بنابراین خرپا پایدار و ایزو استاتیک می باشد.

مسئله ۲۲-۱

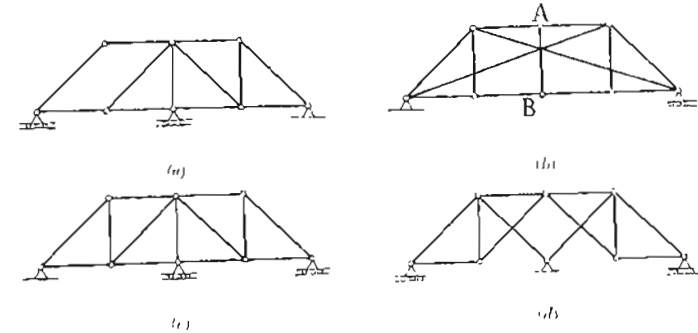
کدامیک از خرپاهای شکل ۵-۱ پایدار و کدامیک با پایدار می باشند ؟
کدامیک از خرپاهای پایدار ایزو استاتیک و کدامیک هیبر استاتیک می باشد ؟

۶۶

خرپا ایزو استاتیک و پایدار است. توجه کنید این خرپا یک خرپای ساده نمی باشد ولی با وجود این می توان تمام نیروهای داخلی آن را پیدا کرد و در نتیجه ایزو استاتیک می باشد.

مسئله ۲۱-۱

خرپاهای شکل ۴۹-۱ را به پایدار و نا پایدار طبقه بندی کنید. همچنین خرپاهای پایدار را به ایزو استاتیک و هیبر استاتیک طبقه بندی نمایید.



شکل ۴۹-۱

حل : تعداد مفصل های خرپا را n ، تعداد اعضاء آن را m و تعداد واکنش های مجهول را r می نامید.

شکل (a) : $n = 8$ $m = 12$ $r = 4$

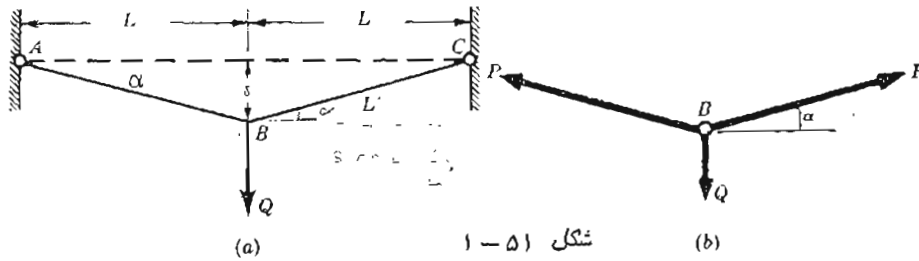
$$m + r = 2n = 16$$

خرپا معین و پایدار می باشد.

شکل (b) : $n = 8$ $m = 13$ $r = 3$

$$m + r = 2n = 16$$

۶۹



شکل ۱-۵

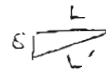
هر یک از میله‌ها تابع قانون هوک می‌باشند و ازدیاد طول هر یک از آنها از رابطه
 $\Delta = \frac{PL}{AE}$ بدست می‌آید. بنابراین

$$\Delta = L' - L = \frac{PL}{AE} \quad \text{چون } P = \frac{AE \delta}{L} \quad (1)$$

نمودار جسم آزاد مفصل B در شکل ۱-۵b رسم شده است. از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$2P \sin \alpha - Q = 0$$

$$Q = 2P \sin \alpha = 2P \left(\frac{\delta}{L} \right) \quad (2)$$

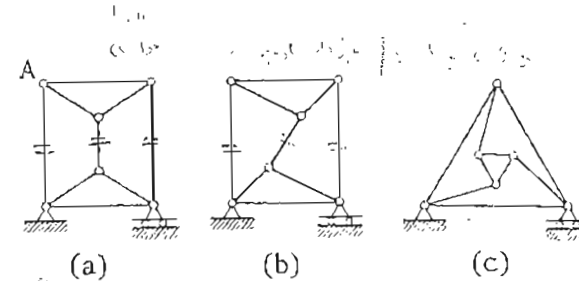


به جای P از معادله ۱ در معادله ۲ قرار می‌دهیم و به جای L' مقدار مساوی آن
 $\sqrt{L^2 + \delta^2}$ را قرار می‌دهیم.

$$Q = 2 \frac{(L' - L) AE}{L} \frac{\delta}{L} = \frac{2 \delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{L'} \right)$$

$$Q = \frac{2 \delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right)$$

۶۸



شکل ۱-۵۰

حل :

(a) : دو خرپای ساده فوقانی و تحتانی به وسیله سه میله موازی به یکدیگر متصل شده‌اند بنابراین خرپا نا پایدار است. تحت اثر یک نیروی افقی مثلاً در مفصل A خرپا از تعادل خارج خواهد شد و فرو خواهد ریخت.

(b) : دو خرپای ساده فوقانی و تحتانی به وسیله سه میله غیر موازی و غیر متقارب به یکدیگر متصل شده‌اند. بنابراین خرپای حاصل یک خرپای مرکب پایدار و استاتیک می‌باشد.

(c) : دو خرپای ساده (مثلث خارجی و مثلث داخلی) به وسیله سه میله غیر موازی و غیر متقارب به یکدیگر متصل شده‌اند و تشکیل یک خرپای مرکب پایدار و استاتیک می‌دهند.

مسئله ۱-۲۳ ✓

دو سیم یا میله نازک AB و BC که در نقاط A، B و C دارای اتصالات مفصلی می‌باشند تحت تأثیر بار Q در نقطه B قرار دارند. قبل از اینکه بار Q وارد شود هر یک از دو سیم (یا میله) به طول L و افقی می‌باشند و از وزن آنها صرف نظر می‌شود. بار Q چقدر باید باشد تا تغییر مکان نقطه B برابر delta باشد ؟ سطح مقطع هر یک از سیم‌ها A و ضریب ارتجاعی آنها E می‌باشد.

حل : این یک مثال فوق العاده جالب از سازه‌ای است که اعضاء آن تابع قانون هوک می‌باشند ولی با وجود این به دلایل هندسی بار با تغییر مکان متناسب می‌باشد.

۷۱

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد. سطح مقطع لازم برای هریک از میله ها و تغییر مکان های افقی و قائم نقطه C را تعیین کنید. طول های AC و BC به ترتیب 2.5 m و 4 m می باشند.

حل: از معادله تعادل مفصل C در امتداد عمود بر AC نیروی F_{BC} به دست می آید.

$$F_{BC} \cos 15 - 5 \cos 45 = 0$$

$$F_{BC} = 3.66 \text{ t}$$

از معادله تعادل مفصل C در امتداد قائم نیروی F_{AC} بدست می آید.

$$\sum F_y = 0 : F_{AC} \cos 45 + F_{BC} \cos 30 - 5 = 0$$

$$F_{AC} = 2.59 \text{ t}$$

$$A_{AC} = \frac{F_{AC}}{\sigma_w} = \frac{2590}{1500} = 1.73 \text{ cm}^2$$

سطح مقطع لازم برای میله AC

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma_w} = \frac{3660}{1500} = 2.44 \text{ cm}^2$$

سطح مقطع لازم برای میله BC

$$\Delta l_1 = \frac{F_{AC} l_1}{A_{AC} E_a} = \frac{\sigma_w l_1}{E_a} = \frac{(1500)(2500)}{700000} = 5.4 \text{ mm}$$

افزایش طول میله AC

$$\Delta l_2 = \frac{F_{BC} l_2}{A_{BC} E_s} = \frac{\sigma_w l_2}{E_s} = \frac{(1500)(4000)}{2 \times 10^6} = 3 \text{ mm}$$

افزایش طول میله BC

با توجه به شکل ۱-۵۲b رابطه زیر بین تغییر مکان مفصل C، Δ ، زاویه β

۷۰

عبارت رادیکال را بسط می دهیم.

$$\sqrt{L^2 + \delta^2} = L \left(1 + \frac{\delta^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} = L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} + \dots \right)$$

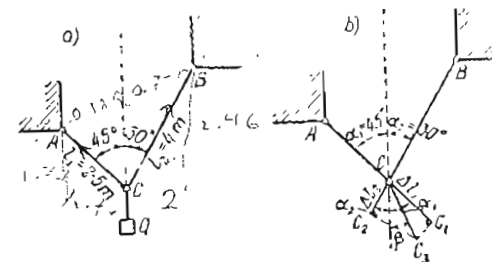
$$1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2}$$

$$Q = \frac{2 \delta A E}{L} \frac{\delta^2}{2 L^2} = \frac{A E \delta^3}{L^3}$$

بدین ترتیب مشاهده می شود با وجود اینکه هر یک از میله ها از قانون هوک تبعیت می کند نیروی Q با تغییر مکان δ مناسب نمی باشد. در نتیجه در این مسئله می توان از اصل اجتماع اثرات استفاده نمود (در باره این اصل در فصل دوم بحث خواهد شد).

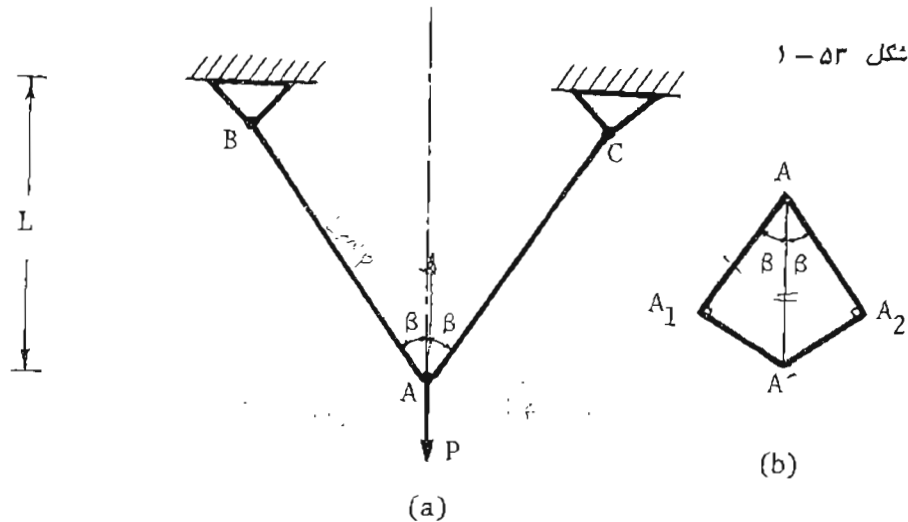
مسئله ۲۴-۱ ✓

میله های AC و BC در شکل ۱-۵۲a به ترتیب از آلومینیوم و فولاد ساخته شده اند و تحت اثر بار Q قرار دارند. مجاز یکسان $\sigma_w = 1500 \text{ Kg/cm}^2$ ساخته شده اند و تحت اثر بار Q قرار دارند. ضریب ارجاعی آلومینیوم $E_a = 0.7 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و فولاد $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



شکل ۱-۵۲

۷۳



$$F_{AB} = F_{AC}$$

حل: به علت تقارن نیروهای داخلی میله‌های AB و AC برابر است. مقدار این نیرو از معادله تعادل در امتداد قائم بدست می‌آید.

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{P}{2\cos\beta}$$

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{P}{2\cos\beta}$$

اضافه طول هر یک از میله‌ها برابر است با

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = \frac{\frac{P}{2\cos\beta}}{EA} \cdot \frac{L}{\cos\beta} = \frac{PL}{2EA\cos^2\beta}$$

تغییر مکان قائم مفصل A از نمودار ویلیو (شکل b ۵۳-۱) بدست می‌آید.

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{AA_1}}{\cos\beta} = \frac{PL}{2EA\cos^3\beta}$$

۷۴

و مقادیر معلوم $\alpha_1, \alpha_2, \Delta l_1$ و Δl_2 وجود دارد:

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(\alpha_2 + \beta)}$$

از این رابطه ابتدا β و سپس Δ بدست می‌آید.

$$\frac{\cos(\alpha_2 + \beta)}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{\cos\alpha_2 \cos\beta - \sin\alpha_2 \sin\beta}{\cos\alpha_1 \cos\beta + \sin\alpha_1 \sin\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta - \frac{1}{2} \sin\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\beta + \sin\beta)}$$

$$= \frac{1.73\cos\beta - \sin\beta}{1.41(\cos\beta + \sin\beta)} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{3}{5.4} = 0.56$$

$$\tan\beta = 0.53 \quad : \quad \beta = 27.71^\circ$$

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha_1 - \beta)} = \frac{5.4}{\cos 17.29^\circ} = 5.66 \text{ mm}$$

$$\Delta_h = \Delta \sin\beta = 2.6 \text{ mm}$$

تغییر مکان افقی مفصل C

$$\Delta_v = \Delta \cos\beta = 5 \text{ mm}$$

تغییر مکان قائم مفصل C

مسئله ۲۵-۱ ✓

در خرپای شکل a ۵۳-۱ تغییر مکان قائم مفصل A را بدست آورید. صلبیت محوری هر یک از میله‌ها EA می‌باشد.

۷۵

از تعادل مفصل B در امتداد BD نیروی F_{BD} بدست می آید.

$$F_{BD} = (F_{BC} + F_{AB}) \cos 45^\circ = 20 \text{ kN}$$

افزایش طول AC شامل دو مؤلفه می باشد. مؤلفه اول ناشی از اضافه طول عضوهای کششی AB، BC، AD و CD می باشد که با توجه به نتیجه مسئله ۲۵ - ۱ برابر است با

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{PL}{EA \cos^3 \beta}$$

در این رابطه: $\beta = 45^\circ$ ، $L = \frac{L}{\sqrt{2}}$ ، $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ، $A = 5 \text{ cm}^2$ و $P = 20 \text{ kN}$

$$\delta_1 = \frac{20000 \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right)}{(2 \times 10^{11}) (10^{-4}) (5) \cos^3 45^\circ} = 0.0004L$$

مؤلفه دوم ناشی از کاهش طول عضو فشاری BD می باشد. اگر از تغییر مکان های مرتبه دوم در مقابل تغییر مکان های مرتبه اول صرف نظر کنیم کاهش طول قطر BD برابر با اضافه طول قطر AC خواهد بود. بنابراین مؤلفه دوم برابر است با

$$\delta_2 = \frac{F_{BD} (\sqrt{2} L)}{AE} = \frac{(20000) (\sqrt{2} L)}{(5) (2 \times 10^{11}) (10^{-4})} = 0.0003L$$

افزایش طول AC مجموع δ_1 و δ_2 می باشد.

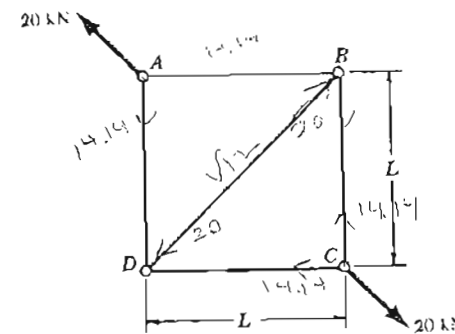
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.0004L + 0.0003L = 0.0007L$$

مسئله ۲۷ - ۱

۷۴

مسئله ۲۶ - ۱

سازه پنج میلهای شکل ۵۴ - ۱ بوسیله دو نیروی ۲۰ kN در امتداد یکی از قطرهایش بارگذاری شده است. میلها از فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ساخته شده اند و سطح مقطع آنها $A = 5 \text{ cm}^2$ می باشد. افزایش طول AC را حساب کنید.



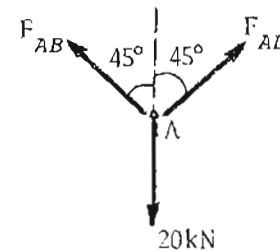
شکل این سازه به صورت زیر است.
شکل ۵۴ - ۱

حل: ابتدا نیروهای داخلی اعضاء سازه را پیدا می کنیم. معادله تعادل مفصل A در امتداد AC نیروهای F_{AB} و F_{AD} را می دهد.

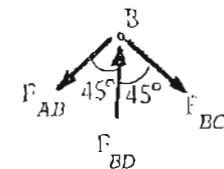
$$F_{AB} = F_{AD} = \frac{20}{2 \cos 45^\circ} = 14.142 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = F_{CD} = 14.142 \text{ kN}$$

به علت تقارن:



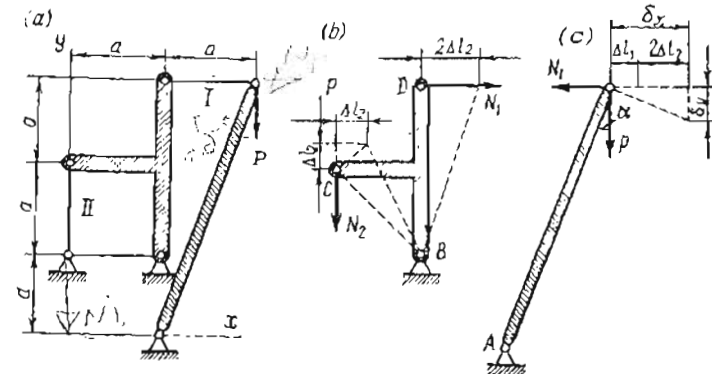
نمودار جسم آزاد مفصل A



نمودار جسم آزاد مفصل B

۷۶

در سازه شکل ۱-۵۵ میل‌های ۱ و ۲ به ریب دارای صلیت محوری $E_1 A_1$ و $E_2 A_2$ می‌باشند. تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه اثر بار P را تعیین کنید.



شکل ۱-۵۵

حل: با نوشتن معادلات تعادل لنگری: $\sum M_A = 0$ و $\sum M_B = 0$ نیروهای داخلی میل‌ها بدست می‌آید.

$$N_1 = \frac{P}{3} ; N_2 = \frac{2}{3}P$$

بر اساس رابطه ۱-۱۲ ازدیاد طول دو میل عبارتند از

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{3E_1 A_1} ; \Delta l_2 = \frac{2Pa}{3E_2 A_2}$$

با توجه به شکل ۱-۵۵a تغییر مکان افقی نقطه C برابر Δl_2 و تغییر مکان نقطه C در امتداد عمود بر BC مساوی $\delta_C = \sqrt{2}\Delta l_2$ می‌باشد. نقطه D فقط در امتداد افق می‌تواند تغییر مکان دهد. این تغییر مکان با توجه به اینکه قطعه CBD مانند یک جسم صلب دوران می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\delta_D}{2a} = \frac{\delta_C}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}\Delta l_2}{\sqrt{2}a} ; \delta_D = 2\Delta l_2$$

۷۷

تغییر مکان افقی نقطه اثر بار P مجموع تغییر مکان افقی نقطه D و اضافه طول میل ۱ می‌باشد.

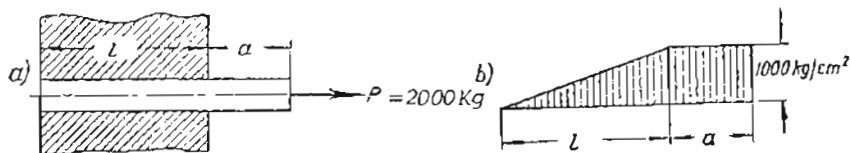
$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2 A_2} + \frac{Pa}{3E_1 A_1} = \frac{Pa}{3} \left(\frac{4}{E_2 A_2} + \frac{1}{E_1 A_1} \right)$$

تغییر مکان قائم نقطه اثر بار P برابر است با

$$\delta_y = \delta_x \tan \alpha = \delta_x \left(\frac{a}{3a} \right) = \frac{Pa}{9} \left(\frac{4}{E_2 A_2} + \frac{1}{E_1 A_1} \right)$$

مسئله ۱-۲۸ ✓

میل‌های مطابق شکل ۱-۵۶ در داخل بتن قرار دارد و بوسیله نیروی P کشیده می‌شود. سطح مقطع میل $A = 2 \text{ cm}^2$ و طول‌های ۱ و a در روی شکل به ترتیب ۴۰cm و ۱۵cm می‌باشند. بین میل و بتن نیروهای چسبندگی وجود دارد که فرض می‌شود در طول ۱ به طور یکنواخت گسترده باشند. منحنی توزیع تنش را در طول میل رسم کنید. اضافه طول میل را نیز حساب کنید. $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



شکل ۱-۵۶

۷۹

منحنی توزیع تنش در طول میله در شکل ۵۶b - ۱ رسم شده است .
 اضافه طول قسمتی از میله که خارج از سن است (به طول a) برابر است با

$$\Delta l_a = \frac{Pa}{EA} = \frac{(2000)(15)}{(2 \times 10^6)(2)} = 7.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

برای محاسبه اضافه طول قسمتی از میله که در داخل بتن قرار دارد (به طول l) در فاصله x از انتهای چپ میله جزء کوچکی از میله به طول dx را در نظر می‌گیریم . نیروی وارد بر این جزء قبل از تعیین شد . بنابراین اضافه طول جزء خیلی کوچک مزبور برابر است با

$$d(\Delta l) = \frac{Rdx}{EA} = \frac{Px dx}{1EA}$$

اضافه طول قسمتی از میله که در داخل بتن قرار دارد از انتگرال زیر بدست می‌آید :

$$\begin{aligned} \Delta l_l &= \int_0^l d(\Delta l) = \int_0^l \frac{Px dx}{1EA} = \frac{Pl}{2EA} \\ &= \frac{(2000)(40)}{(2)(2 \times 10^6)(2)} = 0.01 \text{ cm} \end{aligned}$$

اضافه طول کل میله مساوی است با

$$\Delta l = \Delta l_l + \Delta l_a = 0.01 + 0.0075 = 0.0175 \text{ cm} = 0.175 \text{ mm}$$

۷۸

حل : در طول a میله در هر مقطعی از آن تنش‌ها یکسان و برابرند با

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2000}{2} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

در طول l میله برای اینکه معادل برقرار باشد برآید نیروهای اتصال با P باشد . چون بر اساس فرض مسئله این نیروها در طول l به طور یکساخت توزیع شده‌اند در واحد طول آن نیروی p وارد می‌شود که برابر است با

$$p = \frac{P}{l}$$

اگر مقطعی به فاصله x از انتهای چپ میله در نظر بگیریم نیروهای برآیند در طرف چپ مقطع مساوی است با

$$R = px = \frac{P}{l} x$$

بنابراین تنش در یک مقطع به فاصله x از انتهای چپ میله برابر است با

$$\sigma(x) = \frac{R}{A} = \frac{Px}{lA}$$

در انتهای چپ میله (در $x=0$) تنش برابر صفر و در فاصله l از انتهای چپ تنش مساوی است با

$$\sigma_l = \frac{Pl}{lA} = \frac{P}{A} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

۸۱

راست تغییر مکان می‌دهد.

$$\delta_1 = \overline{AA_1} = \frac{\overline{AA_1}}{\cos 60^\circ} = \frac{0.16}{\frac{1}{2}} = 0.32 \text{ cm}$$

به علت تقارن مفصل B نیز به اندازه $\delta_1 = 0.32 \text{ cm}$ به سمت چپ تغییر مکان می‌دهد. از طرف دیگر میله AB در اثر نیروی کششی 5000Kg به اندازه δ_{AB} اضافه طول پیدا می‌کند.

$$\delta_{AB} = \frac{(5000)(160)}{(2.5)(2 \times 10^6)} = 0.16 \text{ cm}$$

بنابراین برای اینکه در میله AB کشش محوری 5000Kg ایجاد شود دو انتهای میله در داخل بست قورباغه‌ای باید به اندازه

$$\delta = 2\delta_1 + \delta_{AB} = 2(0.32) + 0.16 = 0.8 \text{ cm}$$

به یکدیگر نزدیک شوند. چون با هر دور چرخاندن بست قورباغه‌ای دو سر میله‌ها به اندازه $\frac{2}{13} \text{ cm}$ به هم نزدیک می‌گردند تعداد دوران‌های لازم بست قورباغه‌ای برابر است با

$$n = \frac{0.8}{\frac{2}{13}} = 5.2$$

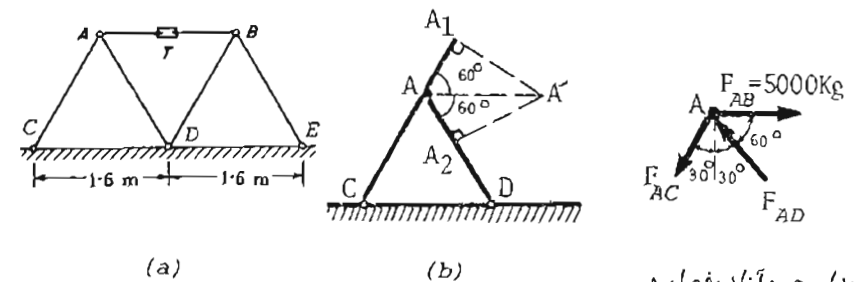
مسئله ۳۰-۱ ✓

خرپای صفحه‌ای تکل ۱-۵۸ شامل $n > 2$ میله مشابه می‌باشد که در فواصل مساوی از یکدیگر فرار گرفته و همگی آنها در مفصل مشترک O به یکدیگر متصل می‌-

۸۰

مسئله ۲۹-۱ ✓

هر یک از میله‌های خرپای شکل ۱-۵۷ به طول 1.6 m و مساحت سطح مقطع $A = 2.5 \text{ cm}^2$ می‌باشد. جنس میله‌ها از فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2(10)^6 \text{ Kg/cm}^2$ است. در میله AB یک بست قورباغه‌ای (T) که به طور مضاعف عمل می‌کند و تعداد دنده‌های آن در هر سانتیمتر 13 می‌باشد بکار رفته است. برای اینکه در میله AB کشش محوری 5000Kg ایجاد شود چند دور باید بست مزبور را چرخاند؟ (توضیح: با هر دور چرخاندن یک بست قورباغه‌ای مضاعف دو سر میله به اندازه دو گام پیچ‌ها به یکدیگر نزدیک می‌شوند).



(a)

(b)

شکل ۱-۵۷

نمودار جسم آزاد مفصل A

حل: با نوشتن معادلات تعادل مفصل A نیروهای F_{AC} و F_{AD} به دست

می‌آیند.

$$F_{AC} = F_{AD} = \frac{5000}{2 \cos 60^\circ} = 5000 \text{ Kg}$$

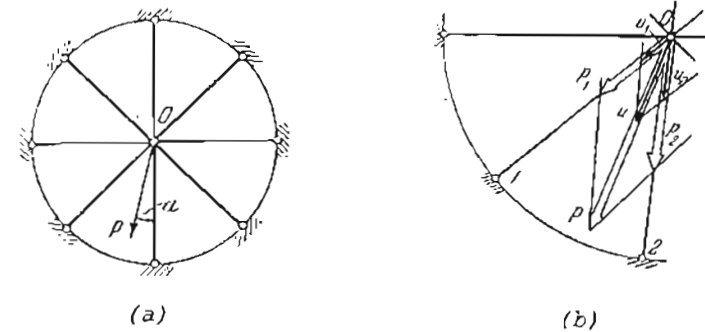
$$\overline{AA_1} = \delta_{AC} = \frac{(5000)(160)}{(2.5)(2 \times 10^6)} = 0.16 \text{ cm} \quad \text{اضافه طول میله AC}$$

$$\overline{AA_2} = \delta_{AD} = \delta_{AC} = 0.16 \text{ cm} \quad \text{کاهش طول میله AD}$$

به علت کاهش طول میله AD و افزایش طول میله AC مفصل A به اندازه δ_1 به سمت

۸۲

باشند. نیروی P در صفحه خرپا در مفصل O وارد می‌شود. ثابت کنید تغییر مکان اتصال O همواره در امتداد نیروی P و مقدار این تغییر مکان مستقل از زاویه α می‌باشد.



شکل ۵۸-۱

حل: نیروی P را به دو مؤلفه P_1 و P_2 در امتداد دو میله مجاور هم ۱ و ۲ تجزیه می‌کنیم (شکل ۵۸-۱ ب). اگر تغییر مکان اتصال O را در اثر بار P_1 با u_1 نشان دهیم چون خرپا نسبت به میله متقارن است این تغییر مکان در امتداد میله ۱ خواهد بود. به دلیل مشابه تغییر مکان اتصال O در اثر بار P_2 که با u_2 نشان داده می‌شود در امتداد میله ۲ خواهد بود. به علت تقارن خرپا ضریب سختی k (نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد) در امتدادهای ۱ و ۲ یکسان می‌باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$u_1 = \frac{P_1}{k} \quad ; \quad u_2 = \frac{P_2}{k}$$

تغییر مکان کل اتصال O که با استفاده از قاعده منوازی الاصلع به دست می‌آید بانوجه به روابط فوق در امتداد خط اثر نیروی P می‌باشد و مقدار آن برابر است با

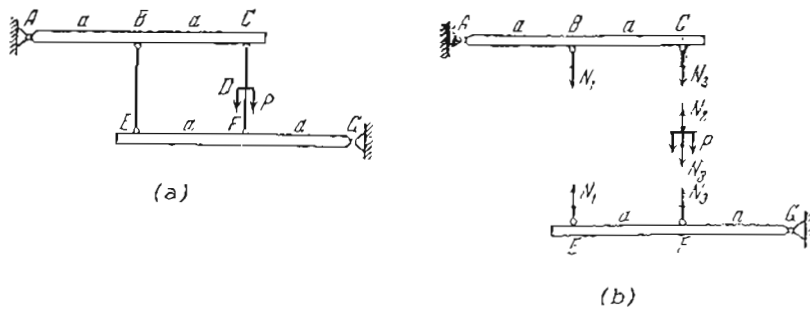
$$u = \frac{P}{k}$$

۸۳

بنابراین تغییر مکان اتصال O مستقل از زاویه α می‌باشد.

مسئله ۳۱-۱ ✓

سازه شکل ۵۹-۱ شامل دو میله صلب افقی AC و EG می‌باشد که به دو میله قائم BE و CF متصل می‌باشد. در نقطه D نیروی P در امتداد میله CF بر سازه وارد می‌شود.
الف - آیا سازه مزبور ایزو استاتیک و یا هیپر استاتیک می‌باشد؟
ب - نیروهای ایجاد شده در میله‌های قائم را حساب کنید.



شکل ۵۹-۱

حل: سازه مزبور ایزو استاتیک می‌باشد و نیروها را می‌توان به کمک معادلات تعادل اجزاء سازه بدست آورد (شکل ۵۹-۱ ب). برای میله‌های صلب AC و EG مجموع لنگرهای نیروها را به ترتیب حول نقاط A و G برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$2N_2 + N_1 = 0$$

$$2N_1 + N_3 = 0$$

۸۵

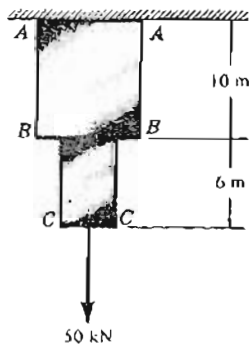
مخصوص 2000 Kg/m^3 ساخته شود با یک ضریب اطمینان ۴ حداکثر ارتفاع دیوار چقدر می‌تواند باشد ؟

مسئله ۱-۳-۵ سپری که در مقابل آب غیر قابل نفوذ می‌باشد (شکل ۵-۳-۱) بوسیله پایه‌های چوبی با مقطع دایره‌ای (AB) و قطر ۱۵ cm نگه داشته شده است تا از واژگونی آن جلوگیری به عمل آید. تنش مجاز چوب 20 Kg/cm^2 می‌باشد. حداکثر فاصله مجاز بین پایه‌ها را تعیین کنید.

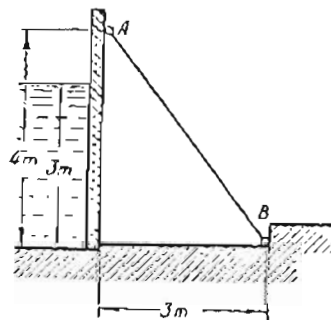
مسئله ۱-۳-۶ اگر در شکل ۶-۳-۱ بار P برابر 10 t و تنش مجاز مصالح عضوهای AB و CD 1000 Kg/cm^2 باشد قطر این اعضا را تعیین کنید.

مسئله ۱-۳-۷ در سازه شکل ۷-۳-۱ تمام میله‌ها از فولاد با سطح مقطع یکسان 30 cm^2 می‌باشند. بار P برابر 10 t است. تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید.

مسئله ۱-۳-۸ میله صلب AB مطابق شکل ۸-۳-۱ بوسیله یک سیستم طناب آویزان می‌باشد. اگر تنش مجاز برای ماده طناب 100 Kg/cm^2 و سطح مقطع همه طناب‌ها یکسان و قطر آنها برابر $d = 2.5 \text{ cm}$ باشد حداکثر بار مجاز P را تعیین کنید. سطح مقطع مفید طناب ۷۵٪ سطحی است که بوسیله محیط آن احاطه می‌شود.



شکل ۳-۳-۱



شکل ۵-۳-۱

۸۴

برای میله CF شرط ریزش برقرار است.

$$N_2 = P + N_3$$

از حل سه معادله فوق نیروهای مجهول بدست می‌آید.

$$N_1 = \frac{2}{3} P ; N_2 = -\frac{1}{3} P ; N_3 = -\frac{4}{3} P$$

۱-۱۲ مسائل حل نشده

مسئله ۱-۳-۱ میله‌ای به طول L با سرعت زاویه‌ای ω در یک صفحه افقی حول یک محور قائم دوران می‌کند (شکل ۱-۳۲). وزنه‌ای به وزن W به انتهای میله متصل شده است. با صرف نظر کردن از وزن میله و با فرض اینکه تنش مجاز σ_w باشد رابطه‌ای برای سطح مقطع لازم (A) میله پیدا کنید.

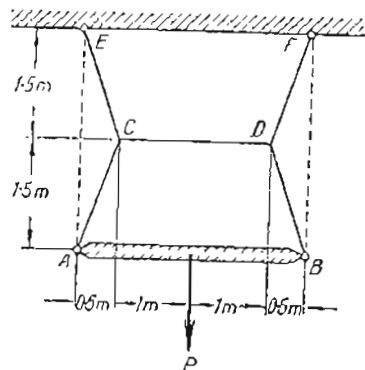
مسئله ۱-۳-۲ مسئله قبل را با به حساب آوردن وزن میله حل کنید. وزن واحد حجم مصالح میله را γ فرض کنید.

مسئله ۱-۳-۳ دو میله منشوری که کاملاً به یکدیگر متصل شده‌اند بار قائم 50 kN را تحمل می‌کنند (شکل ۳-۳-۱). میله فوقانی از فولاد با سطح مقطع 60 cm^2 و وزن مخصوص $7.7 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ می‌باشد. میله تحتانی از برنج با سطح مقطع 50 cm^2 و وزن مخصوص $8.25 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ می‌باشد. ضریب ارتجاعی فولاد را $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ و ضریب ارتجاعی مس را $E = 9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ فرض کنید. تنش حداکثر را در هر یک از مصالح پیدا کنید.

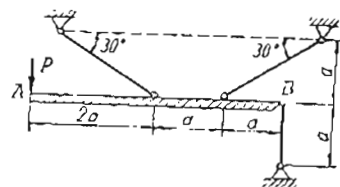
مسئله ۱-۳-۴ اگر دیواری از بتن با مقاومت فشاری نهایی 160 Kg/cm^2 و وزن

۸۷

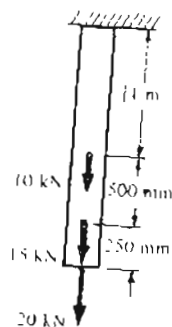
مسئله ۱-۷-۴ میله سرنجی شکل ۱-۷-۴ سطح مقطع 10 cm^2 دارد. اضافه یا کاهش طول آن را تحت بار گذاری نشان داده شده حساب کنید. برای برنج $E = 9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ می باشد.



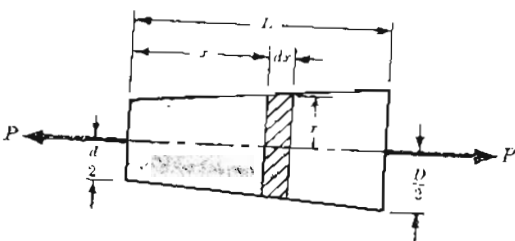
شکل ۱-۳-۸



شکل ۱-۳-۹



شکل ۱-۷-۳



شکل ۱-۷-۲



شکل ۱-۷-۴

۸۶

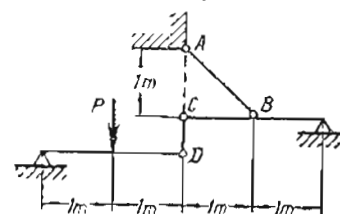
مسئله ۱-۳-۹ جسم صلب AB به وسیله سه کابل (شکل ۱-۳-۹) با سطح مقطع یکسان $A = 2 \text{ cm}^2$ و تنش مجاز $\sigma_w = 12 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ نگه داشته شده است و در نقطه A تحت اثر بار P می باشد. حداکثر مجاز بار P را تعیین کنید.

مسئله ۱-۶-۱ کاهش حجم ΔV یک میله منشوری را که تحت اثر وزن خودش و وزن است بدست آورید. وزن کل میله را W، طول آن را L، ضریب پواسون را ν و ضریب ارتجاعی را E فرض کنید.

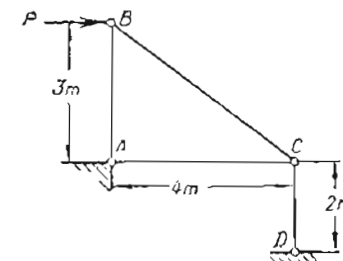
مسئله ۱-۷-۱ رابطه ای برای ازدیاد طول یک میله منشوری به طول L، سطح مقطع A و وزن W که تحت اثر وزن خودش و وزن می باشد بدست آورید.

مسئله ۱-۷-۲ میله ای به شکل مخروط ناقص (شکل ۱-۷-۲) تحت اثر نیروی محوری P در دو انتها قرار دارد. اضافه طول میله مزبور را حساب کنید.

مسئله ۱-۷-۳ میله فولادی شکل ۱-۷-۳ تحت اثر بارهای نشان داده شده می باشد. سطح مقطع میله 5 cm^2 و ضریب ارتجاعی آن $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ است. اضافه طول میله را حساب کنید.



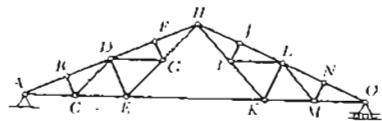
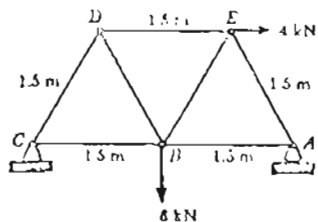
شکل ۱-۳-۶



شکل ۱-۳-۷

۸۹

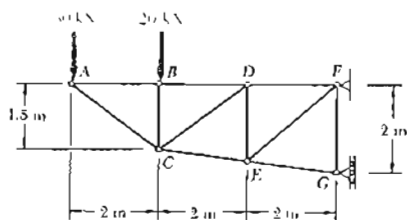
مسئله ۸-۸-۱ عضوهای بدون نیروی حر پای شکل ۸-۸-۱ را تعیین کنید.



شکل ۸-۸-۱

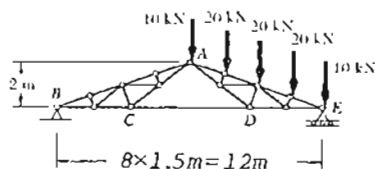
مسئله ۸-۸-۹ هرگاه در خرپای شکل ۸-۸-۹ α برابر 90° باشد نیروی داخلی اعضای AB و EJ را تعیین کنید.

مسئله ۸-۸-۱۰ نیروهای داخلی اعضای DF و DE خرپای سکه ۸-۸-۱۰ را بدست آورید.



شکل ۸-۸-۱۰

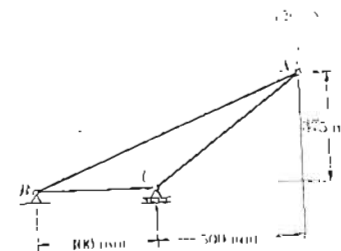
مسئله ۸-۸-۱۱ نیروی عضو CD خرپای سقف شکل ۸-۸-۱۱ را پیدا کنید.



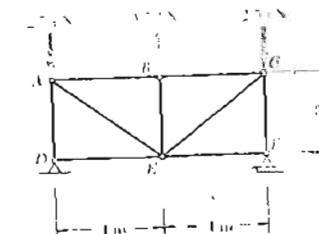
شکل ۸-۸-۱۱

۸۸

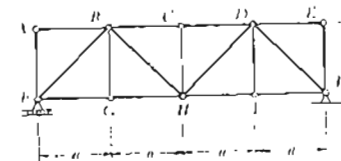
مسائل ۸-۸-۱ تا ۸-۸-۷ نیروهای داخلی خرپاهای شکل‌های زیر را با استفاده از روش مفصل تعیین کنید.



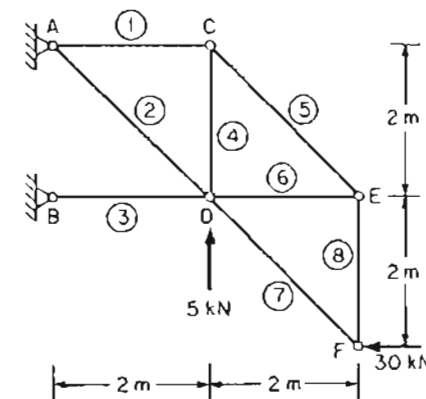
شکل ۸-۸-۱



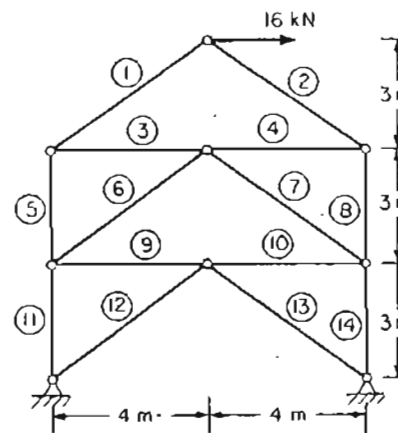
شکل ۸-۸-۲



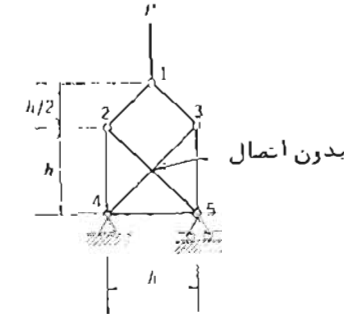
شکل ۸-۸-۳



شکل ۸-۸-۴



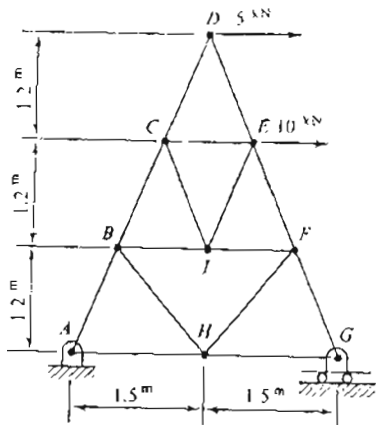
شکل ۸-۸-۵



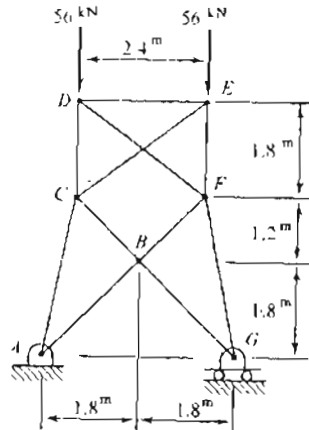
شکل ۸-۸-۶

۹۱

مسئله ۱-۸-۱۵ نیروهای عضوهای BC و BI و خرابی شکل ۱-۸-۱۵ را پیدا کنید.



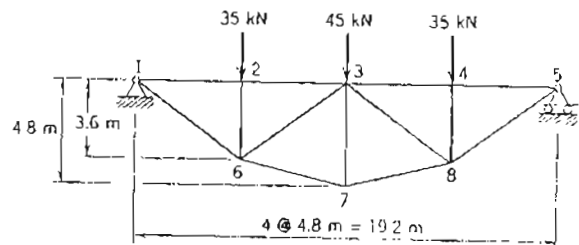
شکل ۱-۸-۱۵



شکل ۱-۸-۱۶

مسئله ۱-۸-۱۶ نیروهای اعضای AC و BC و DF خرابی شکل ۱-۸-۱۶ را به دست آورید.

مسئله ۱-۸-۱۷ نیروهای اعضای ۲-۳ ، ۲-۶ ، ۶-۳ ، ۶-۷ و ۳-۷ خرابی شکل ۱-۸-۱۷ را حساب کنید.

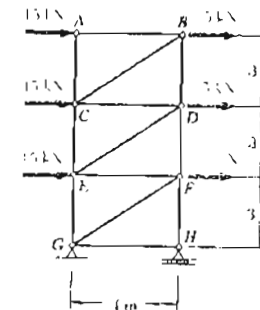


شکل ۱-۸-۱۷

مسئله ۱-۸-۱۸ خرابیهای شکل ۱-۸-۱۸ را به پایدار، ایزواستاتیک (وپایدار)، و همپراستاتیک طبقه بندی کنید.

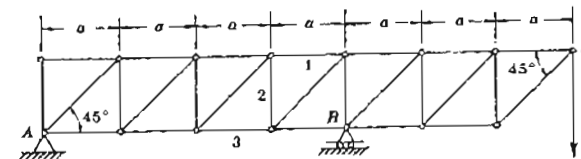
۹۰

مسئله ۱-۸-۱۲ نیروهای داخلی عضوهای CE ، CD و BD خرابی شکل ۱-۸-۱۲ را به دست آورید.



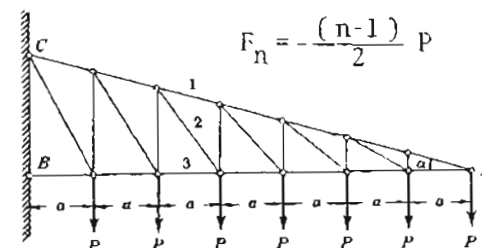
شکل ۱-۸-۱۲

مسئله ۱-۸-۱۳ نیروهای داخلی عضوهای ۱ و ۲ و ۳ خرابی شکل ۱-۸-۱۳ را به دست آورید.



شکل ۱-۸-۱۳

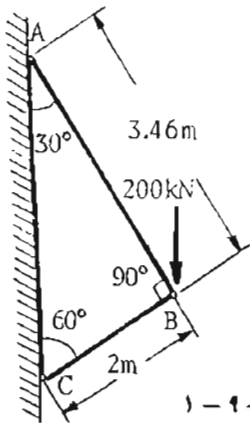
مسئله ۱-۸-۱۴ در خرابی شکل ۱-۸-۱۴ ثابت کنید نیروی محوری در n امین عضو قائم از انتهای آزاد خرابی برابر است با



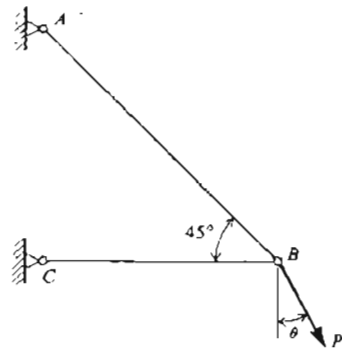
شکل ۱-۸-۱۴

۹۳

مسئله ۱-۹-۱ میله‌های AB و BC خرابای شکل ۱-۹-۱ از فولاد با تنش تسلیم 200 MPa ساخته شده‌اند. با فرض اینکه ضرائب اطمینان در کشش و فشار به ترتیب ۲ و ۲.۵ باشد سطح مقطع هر یک از میله‌ها را تعیین کنید. مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان مفصل B را نیز محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ می‌باشد.



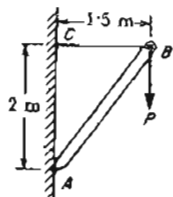
شکل ۱-۹-۱



شکل ۱-۹-۲

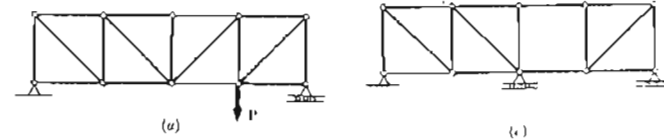
مسئله ۱-۹-۲ سطح مقطع عضوهای AB و BC خرابای شکل ۱-۹-۲ به ترتیب A_1 و A_2 می‌باشد. تحت چه زاویه θ تغییر مکان مفصل B در امتداد نیروی P خواهد بود؟

مسئله ۱-۹-۳ در سازه شکل ۱-۹-۳ عضو BC سیم فولادی به قطر $d = 0.3 \text{ cm}$ و عضو AB از چوب با مقطع مربع به اضلاع 2.5 cm می‌باشد. مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان نقطه B را در اثر بار قائم $P = 200 \text{ Kg}$ پیدا کنید. ضریب ارتجاعی فولاد $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی چوب $E_w = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد.

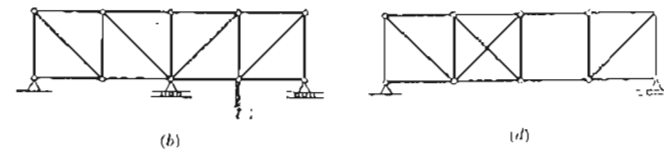


شکل ۱-۹-۳

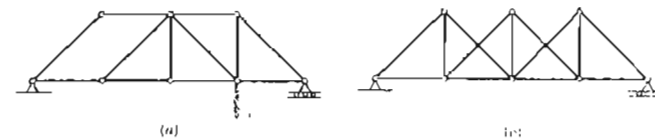
۹۲



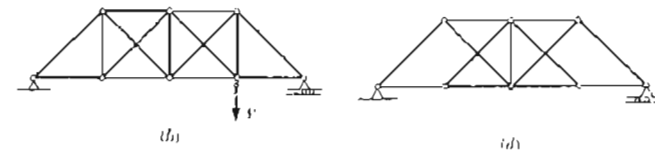
شکل ۱-۸-۱۸



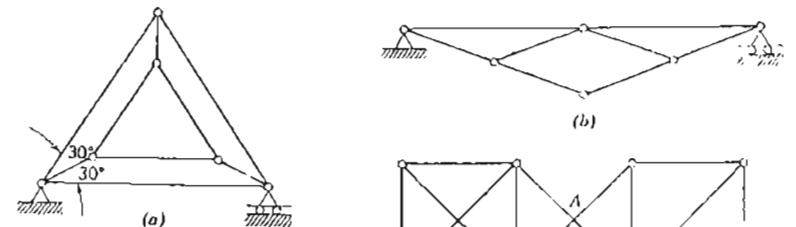
مسئله ۱-۸-۱۹ خراباهای شکل ۱-۸-۱۹ را به پایدار و ناپایدار تقسیم بندی کنید و در صورتی که پایدار باشد آنها را به ایزو استاتیک و هیپر استاتیک طبقه بندی نمایید.



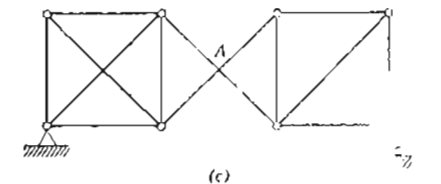
شکل ۱-۸-۱۹



مسئله ۱-۸-۲۰ کدامیک از خراباهای شکل ۱-۸-۲۰ پایدار و کدامیک ناپایدار می‌باشد؟

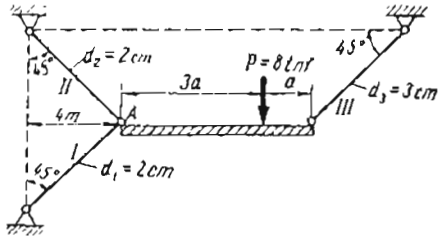


شکل ۱-۸-۲۰



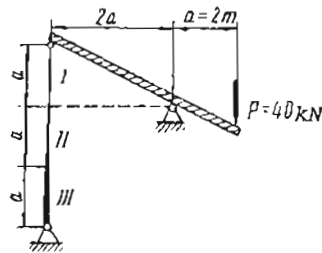
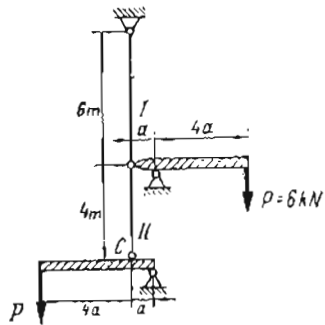
۹۵

مسئله ۱-۹-۱۲ تغییر مکان نقطه A را در شکل ۱-۹-۱۲ پیدا کنید. تنشهای ایجاد شده در میله‌ها را نیز محاسبه نمایید. ($E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$)



شکل ۱-۹-۱۲

مسئله ۱-۹-۱۳ در سازه شکل ۱-۹-۱۳ تغییر مکان نقطه C و تنشهای ایجاد شده در میله‌ها را محاسبه کنید. ($A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}^2$ $E = 2 \times 10^6 \text{ MN/m}^2$)



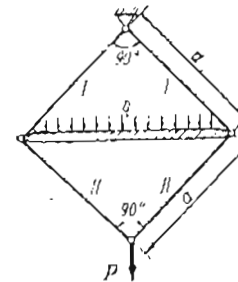
شکل ۱-۹-۱۴

شکل ۱-۹-۱۳

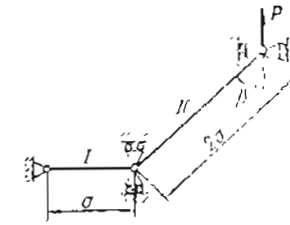
مسئله ۱-۹-۱۴ در سازه شکل ۱-۹-۱۴ تغییر مکان‌های نقطه اثر بار خارجی P و تنشهای ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید. ($A_3 = 2A_2 = 4A_1 = 10 \text{ cm}^2$ $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$)

۹۴

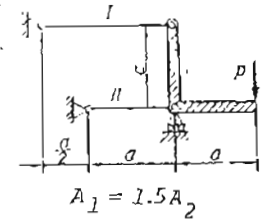
مسئله ۱-۹-۴ تا ۱-۹-۱۱ تغییر مکان‌های نقطه اثر بار خارجی P و همچنین تنش‌ها را در هر یک از میله‌ها حساب کنید. در جایی که مشخص نشده است سطح مقطع میله‌ها را A فرض کنید (E صرب ارنجایی).



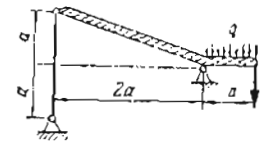
شکل ۱-۹-۴



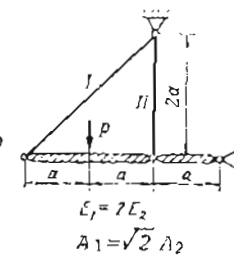
شکل ۱-۹-۵



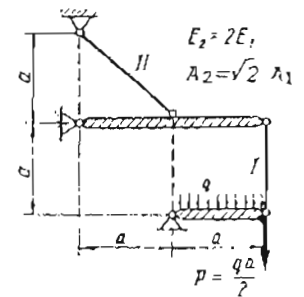
شکل ۱-۹-۶



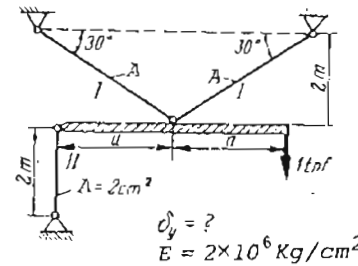
شکل ۱-۹-۷



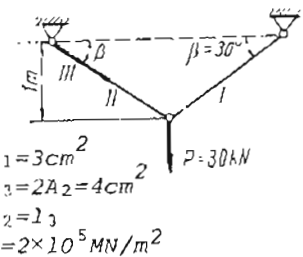
شکل ۱-۹-۸



شکل ۱-۹-۹



شکل ۱-۹-۱۰



شکل ۱-۹-۱۱

$$\Delta = \frac{4PL}{\pi DE} \quad : 1-7-2$$

$$0.675 \text{ mm} : 1-7-3$$

$$\text{صفر} : 1-7-4$$

$$F_{AB} = 3900 ; F_{AC} = -4500 ; F_{BC} = -3600 \text{ N} \quad : 1-8-1$$

$$F_{DE} = F_{EF} = 0 ; F_{CF} = F_{DA} = -4 \text{ kN} \quad : 1-8-2$$

$$F_{BC} = F_{BA} = -2 \text{ kN} ; F_{CE} = F_{EA} = 2.5 \text{ kN}$$

$$F_{BE} = -1.5 \text{ kN}$$

$$F_{AB} = F_{DE} = F_{BG} = F_{DI} = 0 ; F_{AF} = F_{CH} = F_{EJ} = -400 \text{ N} \quad : 1-8-3$$

$$F_{BC} = F_{CD} = -800 \text{ N} ; F_{BF} = F_{DJ} = -849 \text{ N}$$

$$F_{BH} = F_{DH} = 283 \text{ N} ; F_{FG} = F_{GH} = F_{HI} = F_{IJ} = 600 \text{ N}$$

$$F_1 = 30 \text{ kN} ; F_2 = -5\sqrt{2} ; F_3 = -55 ; F_4 = -30 \quad : 1-8-4$$

$$F_5 = 30\sqrt{2} ; F_6 = -30 ; F_7 = -30\sqrt{2} ; F_8 = 30$$

$$F_1 = F_6 = F_{12} = 10 \text{ kN} ; F_2 = F_7 = F_{13} = -10 \text{ kN} \quad : 1-8-5$$

۹۶

۱-۱۲ جوابهای مسائل حل نشده

$$A = \frac{WL\omega^2}{g\sigma_w} \quad : 1-3-1$$

$$A = \frac{2WL\omega^2}{2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2} \quad : 1-3-2$$

$$\sigma = 9.5 \text{ MPa} \quad : 1-3-3 \text{ در برنج} ; \sigma = 10.5 \text{ MPa} \text{ در فولاد}$$

$$200 \text{ m} : 1-3-4$$

$$1.88 \text{ m} : 1-3-5$$

$$d_{AB} = 42.4 \text{ mm} ; d_{CD} = 25.2 \text{ mm} \quad : 1-3-6$$

$$\sigma_{AB} = 250 ; \sigma_{AC} = 333 ; \sigma_{BC} = -417 ; \sigma_{CD} = -250 \text{ Kg/cm}^2 : 1-3-7$$

$$695 \text{ Kg} : 1-3-8$$

$$9000 \text{ N} : 1-3-9$$

$$\Delta V = \frac{WL}{2E} (1-2\nu) \quad : 1-6-1$$

$$\delta = \frac{WL}{2EA} \quad : 1-7-1$$

۹۹

$$F_1 = 2.25P \quad ; \quad F_2 = -0.75P \quad ; \quad F_3 = -2.25P \quad : 1-8-13$$

$$F_{BC} = 13 \text{ kN} \quad ; \quad F_{BI} = 2.5 \text{ kN} \quad : 1-8-14$$

$$F_{AC} = -71.4 \quad ; \quad F_{BC} = 25.2 \quad ; \quad F_{DF} = -43.75 \text{ kN} \quad : 1-8-16$$

$$F_{23} = -76.7 \text{ kN} \quad ; \quad F_{26} = -35 \text{ kN} \quad ; \quad : 1-8-17$$

$$F_{63} = 4.77 \text{ kN} \quad ; \quad F_{6-7} = 82.8 \text{ kN} \quad ; \quad F_{3-7} = -39.9 \text{ kN}$$

(a) - پایدار و ایزواستاتیک ، (b) - هیپر استاتیک ،
(c) - پایدار و ایزواستاتیک ، (d) - نا پایدار (تحت بارگذاری کلی

(a) - نا پایدار ، (b) - هیپر استاتیک ، (c) - ایزواستاتیک ،
(d) - ایزواستاتیک

۱-۸-۲۰ : هر سه نا پایدار می باشند

$$AB \text{ مساحت سطح مقطع} = 17.32 \text{ cm}^2 \quad : 1-9-1$$

$$BC \text{ مساحت سطح مقطع} = 12.5 \text{ cm}^2$$

$$\delta_h = 0.2 \text{ mm} \quad (\text{ به طرف راست}) \quad \delta_v = 1.9 \text{ mm} \quad (\text{ به طرف پایین})$$

$$\cos 2\theta = - \frac{\sqrt{2} A_2}{A_1} \quad : 1-9-2$$

$$= 1.59 \text{ mm} \quad ; \quad \delta_v = 2.44 \text{ mm} \quad : 1-9-3$$

۹۸

$$F_3 = F_9 = -8 \text{ kN} \quad ; \quad F_4 = F_{10} = 8 \text{ kN}$$

$$F_5 = -F_8 = 6 \text{ kN} \quad ; \quad F_{11} = -F_{14} = 12 \text{ kN}$$

$$F_{12} = F_{13} = F_{25} = F_{34} = -0.707P \quad : 1-8-6$$

$$F_{42} = F_{53} = -P \quad ; \quad F_{45} = -0.50P$$

$$F_{BE} = -F_{AE} = 5.46 \text{ kN} \quad ; \quad F_{AB} = 2.73 \text{ kN} \quad : 1-8-7$$

$$F_{BD} = -F_{CD} = -F_{DE} = 1.46 \text{ kN}; \quad F_{BC} = 4.73 \text{ kN}$$

$$KL, LM, MN, IL, IJ, CD, BC \quad : 1-8-8$$

$$F_{EJ} = -\frac{2}{3} P \quad ; \quad F_{AB} = 0 \quad : 1-8-9$$

$$F_{DE} = -38.6 \text{ kN} \quad ; \quad F_{DF} = 91.4 \text{ kN} \quad : 1-8-10$$

$$60 \text{ kN} \quad : 1-8-11$$

$$F_{CE} = 15 \quad ; \quad F_{BD} = -15 \quad ; \quad F_{CD} = -35 \text{ kN} \quad : 1-8-12$$

۱۰۱

$$\delta = \frac{10Pa}{E_1 A_1} ; \quad \sigma_1 = \frac{2P}{A_1} ; \quad \sigma_2 = \frac{4P}{A_1} \quad : ۱-۹-۹$$

$$\delta = 8.5 \text{ mm} ; \quad \sigma_1 = 1000 ; \quad \sigma_2 = 500 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۱-۹-۱۰$$

$$\delta_x = 0.08 \text{ mm} ; \quad \delta_y = 2.125 \text{ mm} \quad : ۱-۹-۱۱$$

$$\sigma_1 = 100 ; \quad \sigma_2 = 150 ; \quad \sigma_3 = 75 \text{ MN/m}^2$$

$$\delta_x = 5.4 \text{ mm} ; \quad \delta_y = 1.8 \text{ mm} \quad : ۱-۹-۱۲$$

$$\sigma_1 = 900 ; \quad \sigma_2 = 1800 ; \quad \sigma_3 = 1200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\delta = 3.9 \text{ mm} ; \quad \sigma_1 = 30 ; \quad \sigma_2 = 150 \text{ MN/m}^2 \quad : ۱-۹-۱۳$$

$$\delta_x = 0.35 \text{ mm} ; \quad \delta_y = 0.7 \text{ mm} \quad : ۱-۹-۱۴$$

$$\sigma_1 = 80 ; \quad \sigma_2 = 40 ; \quad \sigma_3 = 20 \text{ MN/m}^2$$

۱۰۰

$$\delta = \frac{(2P + \sqrt{2} qa) a}{EA} ; \quad \sigma_1 = \frac{P + \sqrt{2} qa}{\sqrt{2} A} ; \quad : ۱-۹-۲$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\sqrt{2} A}$$

$$\delta = \frac{Pa}{EA \cos^2 \beta} (\sin^2 \beta + 2) \quad : ۱-۹-۵$$

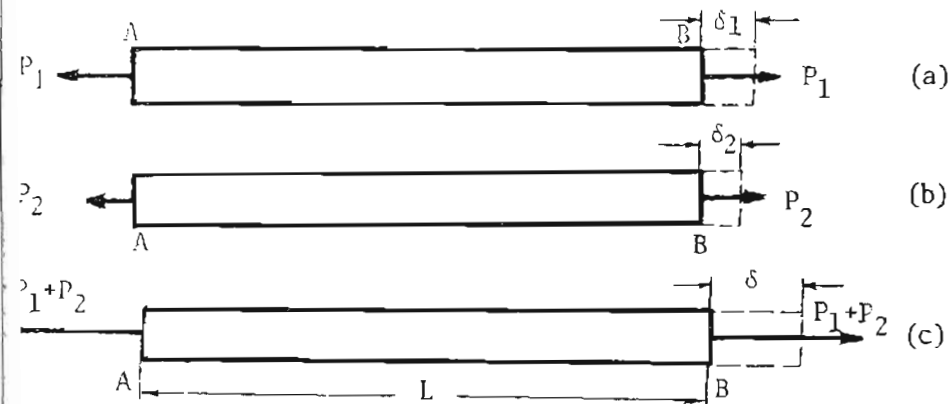
$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \tan \beta ; \quad \sigma_2 = \frac{P}{A \cos \beta}$$

$$\delta_x = \frac{3Pa}{2EA_1} ; \quad \delta_y = \frac{2Pa}{EA_2} \quad : ۱-۹-۶$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1} ; \quad \sigma_2 = \frac{3P}{2A_1}$$

$$\delta = \frac{(2P + qa) a}{4EA} ; \quad \sigma = \frac{2P + qa}{4A} \quad : ۱-۹-۷$$

$$\delta = \frac{Pa}{E_2 A_2} ; \quad \sigma = \frac{P}{2A_2} \quad : ۱-۹-۸$$



شکل ۱-۲

۲-۲ سازه‌های هیبر استاتیک

تا کنون فرض بر این بوده است که می‌توان نیروهای محوری در اعضاء یک سازه، استفاده از معادلات تعادل بدست آورد، اما موارد دیگری وجود دارد که در آنها معادلات تعادل به تنهایی برای تعیین همه نیروهای داخلی و واکنش‌ها کفایت نمی‌کند. این سازه‌ها سازه‌های هیبر استاتیک یا سازه‌هایی که به طور استاتیکی نامعین می‌باشند خواص می‌شوند.

برای تحلیل سازه‌های هیبر استاتیک دو روش عمومی نیرو و تغییر مکان وجود دارد که به کمک مثال‌هایی این دو روش را شرح می‌دهیم.

حجت الله عادل

مقاومت مصالح

فصل دوم

سازه‌های کششی و فشاری هیبر استاتیک

۲-۱ اصل اجتماع اثر فوا

مطابق این اصل هرگاه سازه‌ای به طور همزمان تحت تأثیر تعدادی نیرو باشد تغییر مکان ایجاد شده در هر نقطه از آن مجموع تغییر مکان‌های ایجاد شده بوسیله هر یک از آن نیروهاست وقتی که هر یک از آنها به تنهایی بر سازه وارد شوند. این اصل وقتی برقرار است که سازه رفتار سازه‌ای خطی داشته باشد و برای اینکه این نکته صادق باشد دو شرط باید برقرار باشد. اول اینکه مصالح سازه باید از قانون هوک پیروی کند. به عبارت دیگر رابطه بین تنش و کرنش خطی باشد. دوم اینکه تغییر شکل‌های کوچک سازه باید در روی عمل بارهای وارده تأثیر داشته باشد (مسئله ۲۳-۱ را ببینید). در مورد دوم بعداً در فصل ستون‌ها و کمانش بحث بیشتری خواهد شد.

بعنوان مثال میله مشوری AB را در نظر بگیرید (شکل ۱-۲). در اثر نیروهای کششی P_1 طول میله به اندازه δ_1 و در اثر نیروهای کششی P_2 طول میله به اندازه δ_2 افزایش می‌یابد. حال اگر P_1 و P_2 همزمان بر میله اثر کنند (شکل ۱-۲) اضافه طول یا استفاده از رابطه ۱-۱۲ برابر خواهد بود با

$$\delta = \frac{(P_1 + P_2)L}{AE} = \frac{P_1 L}{AE} + \frac{P_2 L}{AE} = \delta_1 + \delta_2$$

۱۵۵

زیرا هرگاه این واکنش را بر داریم سازه ایزواستاتیک و پایدار باقی می ماند، بدین ترتیب از نقطه نظر تحمل بار وارده واکنش در انتهای A لازم نیست و زائد می باشد. سازه ای که بعد از برداشتن واکنش اضافی باقی می ماند به نام سازه مینا خوانده می شود. حال بیاییم اثر بار P را در روی تغییر مکان نقطه A در سازه مینا در نظر بگیریم (شکل ۲-۲b). این تغییر مکان برابر است با

$$\delta_P = \frac{Pb}{EA}$$

که به طرف پایین می باشد. پس اثر واکنش زائد R_a را در روی تغییر مکان نقطه A (شکل ۲-۲c) تعیین می کنیم. توجه کنید در این حالت R_a باید به صورت باری که بر سازه مینا وارد می شود تصور گردد. تغییر مکان رو به بالای نقطه A در اثر بار R_a برابر است با

$$\delta_R = \frac{R_a L}{EA}$$

تغییر مکان نهایی δ نقطه A تحت اثر توأم بارهای P و R_a با ترکیب نمودن δ_P و δ_R بدست می آید. اگر تغییر مکان رو به پایین را مثبت فرض کنیم می توانیم بنویسیم

$$\delta = \delta_P - \delta_R$$

از آنجایی که تغییر مکان واقعی نقطه A در سازه اولیه صفر می باشد نتیجه می شود

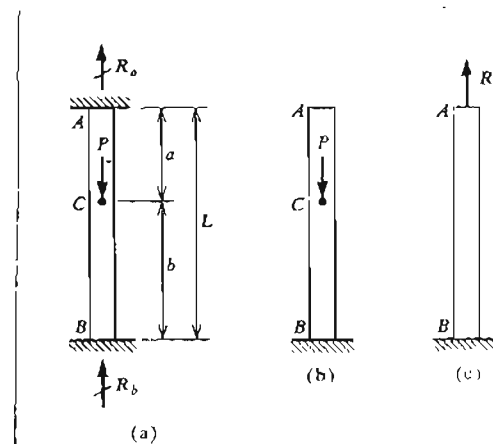
$$\delta_R = \delta_P \quad (2-2)$$

$$\frac{R_a L}{EA} = \frac{Pb}{EA} \quad (2-3)$$

۱۵۴

مثال ۲-۱

میله AB شکل ۲-۲a در دو انتها به تکیه گاه های صلبی متصل می باشد و به وسیله بار محوری P در نقطه میانی C بارگذاری شده است. واکنش های R_a و R_b را که در دو انتهای میله ایجاد می شود تعیین کنید.



شکل ۲-۲

حل: واکنش های R_a و R_b را نمی توان صرفاً از معادلات تعادل بدست آورد. تنها معادله تعادل موجود برای میله عبارتست از

$$R_a + R_b = P \quad (2-1)$$

که دو مجهول دارد و نمی توان مجهولات را پیدا کرد. برای حل سازه مزبور احتیاج به معادله دیگری است که با بررسی تغییر شکل ها بدست می آید.

برای حل سازه های هیبراسک دوروش کلی وجود دارد. این مثال با هر دوروش حل میشود. در روش اول انداماسکی از واکنش ها را عنوان کمیت مجهول انتخاب می کنیم. در این مثال R_a را به عنوان کمیت مجهول اختیار می کنیم. اگر این کمیت معلوم باشد واکنش دیگر R_b از معادله 2-1 بدست می آید. کمیت مجهول R_a به نام واکنش اضافی خوانده میشود

از این رابطه واکنش R_a بدست می‌آید.

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad (2-4)$$

با جایگزینی R_a در معادله 2-1 واکنش R_b بدست می‌آید.

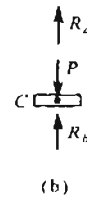
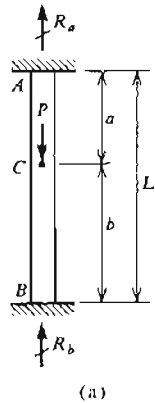
$$R_b = \frac{Pa}{L}$$

روش مذکور در بالا برای تحلیل سازه‌های نامعین را می‌توان باین صورت خلاصه کرد. یکی از واکنش‌های نامعلوم بعنوان واکنش اضافی انتخاب می‌شود و با برداشتن این واکنش اضافی از روی سازه، سازه شنا شکل می‌شود. سپس سازه می‌ماند که به طور استاتیکی معین و پایدار می‌باشد تحت اثر بار واقعی P و همچنین بار واکنش اضافی قرار داده می‌شود. تغییر مکان‌های ایجاد شده بوسیله دو سیستم بار گذاری محاسبه و با یکدیگر ترکیب می‌شود تا معادله‌ای که موسوم به معادله سازگاری تغییر مکان‌ها می‌باشد بدست‌آید (معادله 2-2). این معادله سازگاری بیان‌کننده یک شرط مربوط به تغییر مکان‌ها می‌باشد (در مثال مرسوم δ برابر صفر است). بعد از جایگزینی تغییر مکان‌ها بر حسب نیروها در معادله سازگاری (معادله 2-3) واکنش مجهول بدست می‌آید (معادله 2-4). بالاخره نیروهای نامعلوم باقی مانده به کمک معادلات تعادل بدست می‌آیند.

روش مورد بحث در بالا به نام روش نیرو خوانده می‌شود زیرا در آن یکی از نیروها به عنوان مجهول اولیه انتخاب می‌شود. روش نیرو یک روش کاملاً کلی برای حل سازه‌های هیبر استاتیکی با درجات نامعینی خیلی زیاد می‌باشد (در حه نامعینی استاتیکی یا در حه هیبر استاتیکی یک سازه برابر است با تعداد نیروهای مجهول سازه مساوی معادلات تعادل موجود برای سازه).

حال مثال مرسوم را با روش عمومی تحلیل سازه‌های هیبر استاتیکی حل می‌کنیم (شکل 2-3 a). در این روش ما تغییر مکان δ_c نقطه C را به عنوان کمیت نامعلوم انتخاب می‌کنیم. نیروهای R_a و R_b در قسمت‌های بالا و پایین میله را می‌توان بر حسب δ_c بیان نمود.

$$R_a = \frac{EA}{a} \delta_c \quad ; \quad R_b = \frac{EA}{b} \delta_c \quad (2-5)$$



شکل ۲-۳

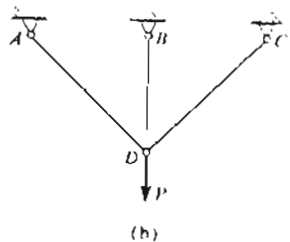
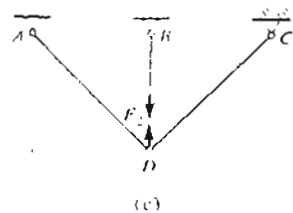
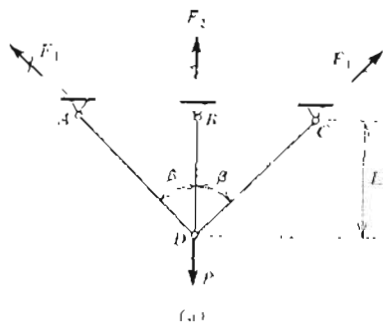
در معادلات فوق فرض شده است که تغییر مکان δ_c به طرف پایین مثبت باشد. در نتیجه در قسمت بالای میله کشش و در قسمت پایین آن فشار ایجاد می‌شود. قدم بعدی جدا کردن نقطه C در میله بعنوان یک جسم آزاد (شکل 2-3 b) و در نظر گرفتن تعادل آن می‌باشد. نیروهایی که بر جسم آزاد مربوطه وارد می‌شوند عبارتند از بار P به طرف پایین، نیروی کششی R_a در قسمت بالا و نیروی فشاری R_b در قسمت پایین. معادله تعادل در امتداد قائم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R_a + R_b = P \quad (2-6)$$

R_a و R_b را از معادلات 2-5 در معادله 2-6 جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{EA}{a} \delta_c + \frac{EA}{b} \delta_c = P \quad (2-7)$$

۱۰۹



شکل ۲-۴

حل: چون خرپا و بارگذاری روی آن سفارش است نیروهای کششی در میله‌های خارجی برابر می‌باشد. معادله تعادل نیروها را در امتداد قائم می‌نویسیم.

$$2F_1 \cos \beta + F_2 = P \quad (2-9)$$

این معادله شامل دو نیروی مجهول F_1 و F_2 می‌باشد. از این روی یک معادله دیگر لازم است تا بتوان نیروها را بدست آورد.

در این مثال نیروی F_2 به عنوان نیروی مجهول اولیه یا نیروی اضافی انتخاب می‌گردد و برای اینکه این نیرو برداشته شود میله BD در انتهای پائینش بریده می‌شود. موقعی که بار P در روی سازه مینا اثر می‌کند (شکل ۲-۴b) تغییر مکان به طرف

۱۰۸

از این رابطه δ_C بدست می‌آید.

$$\delta_C = \frac{Pab}{EAL} \quad (2-8)$$

با داشتن δ_C واکنش‌های R_a و R_b از معادلات 2-5 بدست می‌آیند.

$$R_a = \frac{Pb}{L} ; \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

البته این نتایج با نتایج روش قبلی یکسان می‌باشد.

به طور خلاصه در روش دوم یک تغییر مکان مناسب بعنوان کمیت مجهول انتخاب می‌شود. این تغییر مکان باید چنان انتخاب شود که نیروها در سمت‌های جداگانه سازه را بتوان بر حسب آن بیان نمود. سپس این نیروها در معادله تعادل ترکیب می‌شود (معادله 2-6). بعد از جایگزینی نیروها بر حسب تغییر مکان‌ها در معادله تعادل (معادله 2-7) تغییر مکان مجهول بدست می‌آید (معادله 2-8). سرانجام با داشتن تغییر مکان مجهول نیروها بدست می‌آیند.

این روش تحلیل سازه‌های هیبر استاتیک به نام روش تغییر مکان خوانده می‌شود زیرا در این روش یک تغییر مکان به عنوان کمیت مجهول اولیه انتخاب می‌شود. این روش نیز مانند روش نیرو یک روش کلی برای تحلیل بسیاری از سازه‌ها می‌باشد (مرجع 17). انتخاب هر یک از این دو روش برای تحلیل سازه‌های بزرگ بستگی به عوامل بسیاری از جمله هندسه و تعداد اصطالات دارد. به طور کلی موقعی هر یک از این دو روش بر دیگری برتری دارد که تعداد مجهول‌های اولیه آن کمتر باشد. در هنگام تحلیل سازه‌ها با استفاده از حسابگرهای الکترونیک روش تغییر مکان در بسیاری مواقع بر روش نیرو برتری دارد (مرجع 17).

مثال ۲-۲

خرپای شکل ۲-۴a را با استفاده از روش نیرو حل نمایید.

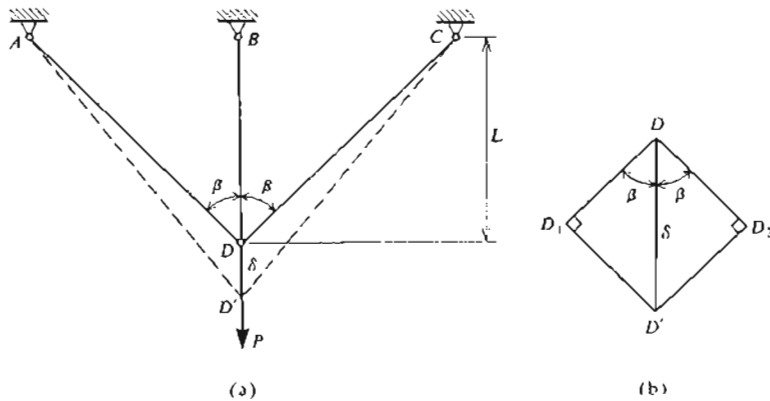
۱۱۱

سرانجام از معادله تعادل (معادله 2-9) نیروی F_1 بدست می آید.

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

مثال ۲-۳

مثال ۲-۲ را با روش تغییر مکان حل کنید.



شکل ۲-۵

حل: تغییر مکان δ مفصل D را به عنوان کمیت مجهول انتخاب می کنیم (شکل a ۲-۵). خط چین ها در شکل a ۲-۵ شکل تغییر مکان یافته خر یا را نشان می دهد. نمودار ویلیو برای مفصل D در شکل b ۲-۵ رسم شده است. خطوط DD_1 و DD_2 به سربب معرف اضافه طول میله های CD و AD و خط DD' معرف تغییر مکان قائم نقطه D (δ) می باشد. از نمودار مزبور اضافه طول میله های

۱۱۰

پایین مفصل D با استفاده از نمودار ویلیو برابر می شود با (مسئله ۲۵ - ۱ را ببینید)

$$\delta_P = \frac{PL}{2EA \cos^3 \beta} \quad (2-10)$$

در این رابطه L طول میله قائم می باشد و فرض شده است که تمام میله ها صلبیت محوری یکسان EA داشته باشند. موقعی که نیروی اضافی F_2 بر سازه مباد (شکل c ۲-۴) اثر می کند میله بریده شده BD بوسیله نیروی F_2 به طرف پایین کشیده می شود و در عین حال نیروی مساوی ولی مخالف نیروی مزبور بر مفصل D به طرف بالا وارد می آید. نیروی دومی باعث می شود که مفصل D به اندازه (با معادله 2-10 مقایسه کنید)

$$\delta_F = \frac{F_2 L}{2EA \cos^3 \beta} \quad (2-11)$$

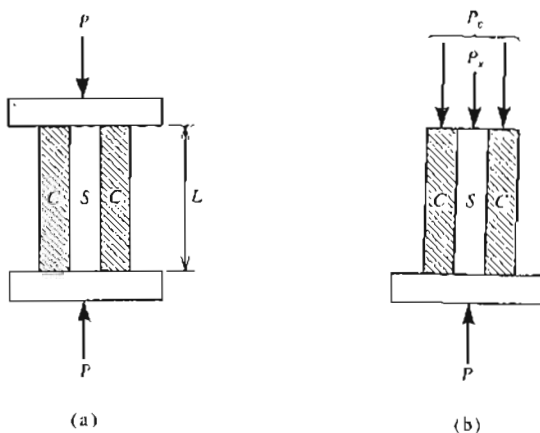
به طرف بالا تغییر مکان باید. تغییر مکان کل به طرف پایین مفصل D در اثر همزمان F_2 و F_1 برابر $\delta_P - \delta_F$ می باشد. باید توجه نمود که میله BD نیز به اندازه $\frac{F_2 L}{EA}$ اضافه طول پیدا می کند. شرط سازگاری تغییر مکان ها در مفصل D به این صورت بیان می شود: تغییر مکان به طرف پایین مفصل D برابر است با اضافه طول میله BD بنابراین

$$\delta_P - \delta_F = \frac{F_2 L}{EA} \quad (2-12)$$

با جایگزینی معادلات 2-10 و 2-11 در معادله 2-12 و حل معادله حاصل برای F_2 خواهیم داشت

$$F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

یک استوانه فولادی و یک لوله مسی که در شکل ۲-۶ a به ترتیب با S و C مشخص شده‌اند بین دو سر یک ماشین آزمایش تحت فشار می‌باشند. تنش‌های ایجاد شده در فولاد و مس و کرنش فشاری ناشی از نیروی P را در جهت قائم تعیین کنید. صلبیت محوری استوانه فولادی و لوله مسی را به ترتیب $E_S A_S$ و $E_C A_C$ فرض کنید و از روش نیرو استفاده نمایید.



شکل ۲-۶

حل: صفحه فوقانی را بر می‌داریم تا سازه شکل ۲-۶ b بدست آید. نیروهای مجهول P_C و P_S که به ترتیب معرف نیروهای محوری کل در فولاد و مس می‌باشند به وسیله معادله تعادل زیر به یکدیگر ارتباط دارند:

$$P_S + P_C = P \quad (2-16)$$

استوانه فولادی به اندازه $\frac{P_S L}{E_S A_S}$ و لوله مسی به اندازه $\frac{P_C L}{E_C A_C}$ کوتاه می‌شود. شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در این مثال برابر بودن کاهش طول استوانه فولادی با کاهش

مایل بر حسب δ بدست می‌آید.

$$DD_1 = DD_2 = \delta \cos \beta$$

بنابراین نیرو در میله‌های مایل برابر است با

$$F_1 = \frac{EA \cos \beta}{L} (\delta \cos \beta) = \frac{EA \delta \cos^2 \beta}{L} \quad (2-13)$$

نیرو در میله قائم نیز مساویست با

$$F_2 = \frac{EA \delta}{L} \quad (2-14)$$

معادلات 2-13 و 2-14 نیروهای میله‌ها را بر حسب یک کمیت مجهول یعنی تغییر مکان δ می‌دهند. حال اگر این نیروها را در معادله تعادل (معادله 2-9) جایگزین کنیم تغییر مکان δ بدست می‌آید.

$$\frac{2EA \delta \cos^3 \beta}{L} + \frac{EA \delta}{L} = P$$

$$\delta = \frac{PL}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-15)$$

با جایگزینی δ از معادله فوق در معادلات 2-13 و 2-14 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند. واضح است که جواب‌های حاصله همان جواب‌های مثال قبل خواهد بود.

$$\frac{P_S L}{E_S A_S} = \frac{P_C L}{E_C A_C} \quad (2-17)$$

از حل همزمان دو معادله 2-16 و 2-17 نیروها در فولاد و مس بدست می آید.

$$P_S = \frac{E_S A_S}{E_S A_S + E_C A_C} P \quad ; \quad P_C = \frac{E_C A_C}{E_S A_S + E_C A_C} P \quad (2-18)$$

تنش فشاری σ_S در فولاد از تقسیم نمودن P_S بر A_S و تنش فشاری σ_C در مس از تقسیم نمودن P_C بر A_C بدست می آید.

$$\sigma_S = \frac{P_S}{A_S} = \frac{E_S}{E_S A_S + E_C A_C} P$$

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A_C} = \frac{E_C}{E_S A_S + E_C A_C} P$$

کرنش فشاری ϵ که برای فولاد و مس یکسان می باشد با استفاده از قانون هوک بدست می آید.

$$\epsilon = \frac{\sigma_S}{E_S} = \frac{\sigma_C}{E_C} = \frac{P}{E_S A_S + E_C A_C} \quad (2-19)$$

این معادله نشان می دهد کرنش فشاری برابر است با بار کل تقسیم بر مجموع صلبیت های محوری استوانه فولادی و لوله مسی.

مثال قبل را با روش تغییر مکان حل کنید.

حل: تغییر مکان مجهول در این مثال تغییر مکان نسبی δ بین دو صفحه انتهایی انتخاب می شود که برابر است با کاهش طول استوانه فولادی و لوله مسی. نیروهای P_S و P_C بر حسب δ عبارتند از

$$P_S = \frac{E_S A_S \delta}{L} \quad ; \quad P_C = \frac{E_C A_C \delta}{L} \quad (2-20)$$

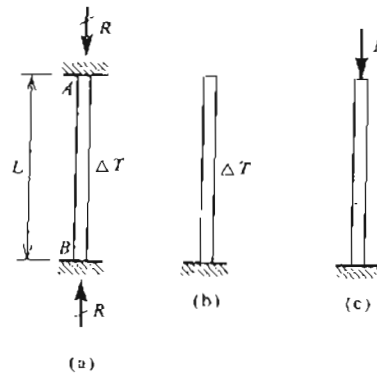
از جایگزینی این عبارات در معادله تعادل (معادله 2-16) نتیجه می شود

$$\frac{E_S A_S \delta}{L} + \frac{E_C A_C \delta}{L} = P$$

از این رابطه تغییر مکان δ بدست می آید.

$$\delta = \frac{PL}{E_S A_S + E_C A_C}$$

حال اگر مقدار δ را در روابط 2-20 قرار دهیم نیروهای P_S و P_C به دست می آید. نتایج حاصله با نتایج مثال قبلی (معادله 2-18) مطابقت دارد. همچنین از تقسیم نمودن δ بر L کرنش ϵ بدست می آید که با رابطه 2-19 یکسان می باشد. مقایسه مثال های ۲-۴ و ۲-۵ نشان می دهد که از لحاظ محاسباتی بعضی مواقع اختلاف کمی بین دو روش نیرو و تغییر مکان وجود دارد. از طرف دیگر باید توجه نمود که در مسائل پیچیده تر مرق محاسباتی قابل ملاحظه ای می تواند بین دو روش وجود داشته باشد. برای مثال هرگاه سازه شکل a-۶ را با اضافه نمودن استوانه هایی با



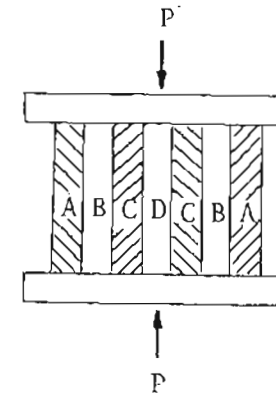
شکل ۸-۲

افزایش طول پیدا کند. در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی (جدول ۲-۱ را ببینید)، L طول میله و ΔT افزایش درجه حرارت می باشد. چون این اضافه طول به آزادی رخ می دهد در میله هیچ تنش ایجاد نمی شود.

جدول ۲-۱ مقادیر نمونه ضریب انبساط حرارتی

مصلح	ضریب انبساط حرارتی $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
فولاد	۱۱/۷
آلومینیوم	۲۴ - ۲۱/۴
منیزیم	۲۶/۱
مس	۱۶/۷۵
بتن	۷/۲ - ۱۲/۶

مصلح دیگر پیچیده تر کنیم (شکل ۲-۷) در این صورت روش تغییر مکان به همان سادگی مثال ۲-۵ خواهد بود، در حالی که روش نیرو خیلی پیچیده تر خواهد شد و منجر به حل دستگاه معادلات خطی می گردد. موارد دیگری وجود دارد که در آنها روش نیرو راه حل ساده تری ارائه می دهد (برای مثال مسئله ۳-۲ را ببینید).



شکل ۷-۲

۲-۳ آثار گرمایی، اندازه نبودن ابعاد اعضاء سازه و تغییر شکل اولیه

در سازه های ایزو استاتیک تغییر بکنواخت درجه حرارت در سراسر سازه تنش در آن تولید نخواهد کرد زیرا تمام سازه می تواند به آزادی انقباض پیدا کند. از طرف دیگر تغییر درجه حرارت در سازه های هیپر استاتیک تولید تنش هایی موسوم به تنش های گرمایی می کند. با مقایسه میله ای که در یک انتها آزاد می باشد (برای مثال شکل ۱۰-۱ را ببینید) با میله ای که در هر دو انتها گیردار است (شکل ۸-۲) می توان به نتیجه فوق رسید. در حالت اول ازدیاد بکنواخت درجه حرارت در سراسر میله باعث می شود که میله به اندازه

$$\delta = \alpha L \Delta T$$

$$(2-21)$$

۱۱۹

کردن سه عضو به یکدیگر و سوار کردن خرپا باید میله قائم را فشرده و میله‌های مایل را کشید. فرض کنید F نیروی فشاری در میله قائم باشد (شکل ۲-۹ b). در این صورت تغییر مکان به طرف پایین اتصال D در اثر نیروی F (از معادله 2-10) برابر است با

$$\delta_F = \frac{FL}{2EA \cos^3 \beta}$$

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در اتصال D بدین صورت بیان می‌شود:

تغییر مکان رو به پایین δ اتصال D برابر است با اضافه طول اولیه ΔL میله قائم منهای کاهش طول میله قائم در اثر نیروی F . بنابراین معادله سازگاری تغییر مکان‌ها عبارتست از

$$\frac{FL}{2EA \cos^3 \beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA}$$

از این رابطه F بدست می‌آید.

$$F = \frac{EA \Delta L}{L} \frac{2 \cos^3 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad (2-22)$$

با دانستن نیروی F نیروهای داخلی میله‌های مایل به سهولت از معادله تعادل مفصل D در امتداد قائم بدست می‌آیند. دو مثال فیلنی نشان دهنده این واقعیت می‌باشند که روش‌های تحلیل سازه‌های هیبر استاتیک وقتی که تغییرات درجه حرارت و یا تغییر شکل اولیه وجود دارد همان روش‌هایی است که برای تحلیل یک سازه هیبر استاتیک تحت اثر بارهای خارجی بکار می‌رود.

به عنوان یک مثال نهایی مجدداً "خرپای شکل ۲-۹ a" را در نظر می‌گیریم و این بار فرض می‌کنیم که میله قائم داده شده بطوریکه درجه حرارت آن به اندازه

۱۱۸

در حالت میله هیبر استاتیک شکل ۲-۸ a میله نمی‌تواند ازدیاد طول پیدا کند و در نتیجه در اثر ازدیاد درجه حرارت در آن نیروی فشاری R ایجاد می‌شود. این نیرو را می‌توان با روش‌های حل سازه‌های هیبر استاتیک که در بخش قبل بحث شد بدست آورد. اگر انتهای A را با برداشتن واکنش R آزاد کنیم (شکل ۲-۸ b) تغییر مکان رو به بالای نقطه A در اثر تغییر درجه حرارت برابر $\alpha L \Delta T$ و تغییر مکان رو به پایین نقطه A در اثر نیروی R (شکل ۲-۸ c) برابر $\frac{RL}{EA}$ می‌باشد. با مساوی فرار دادن این دو تغییر مکان نیروی مجهول R بدست می‌آید.

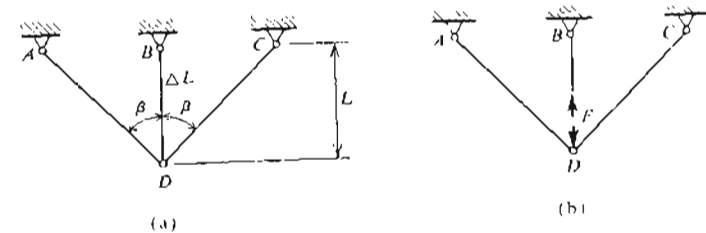
$$R = EA \alpha \Delta T$$

با داشتن R تنش و کرنش فشاری در میله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{R}{A} = E \alpha \Delta T \quad ; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha \Delta T$$

از این مثال مشاهده می‌شود که در اثر تغییر درجه حرارت در یک سازه هیبر استاتیک حتی اگر تحت اثر هیچ نوع بار خارجی نباشد تنش ایجاد می‌گردد.

موقعی که طول یکی از اعضا سازه درست نمی‌باشد و یا وقتی که یکی از اعضا سازه بوسیله نیروهای پیش‌نمیده شده که بعداً "برداشته می‌شود" وضعیتی مشابه حالت فوق به دست می‌آید. در هر دو حالت یک تغییر شکل اولیه در سازه وجود دارد که حتی بدون وجود بارهای خارجی در سازه تنش ایجاد می‌کند. برای مثال فرض کنید در خرپای شکل ۲-۹ a طول میله قائم بجای L برابر $L + \Delta L$ باشد. در این صورت برای وصل



شکل ۲-۹

حل: ^{۱۲۱} اولین قدم در حل این مسئله رسم نمودار جسم آزاد AB می باشد (شکل b ۱۰-۲) . از دو معادله تعادل نیروها در امتداد افق و قائم و معادله تعادل لنگری حول نقطه A نتیجه می شود

$$\Sigma F_h = A_x = 0$$

$$\Sigma F_v = A_y + P_{cu} + P_{st} - 200 \times 10^3 = 0$$

$$\Sigma M_A = 1000P_{cu} + 2000P_{st} - 200 \times 10^3(1500) = 0 \quad (1)$$

چون دو معادله آخر دارای سه مجهول می باشد سازه مزبور یک درجه هیپر استاتیک است و ما مجبوریم تغییر شکل سازه را مطالعه کنیم . چون میله AB صلب است تنها حرکتی که می تواند داشته باشد دورانی به صورت جسم صلب حول نقطه A می باشد . خط منقطع در شکل c ۱۰-۲ موقعیت نهایی میله AB را پس از اینکه بار 200kN بر آن وارد شود نشان می دهد . در ابتدا میله به صورت افقی است که با خطیر AB در این شکل نشان داده شده است .

چون میله AB صلب می باشد با استفاده از مثلث های مشابه $\Delta BB''$ و $\Delta DD''$ رابطه ساده ای بین اضافه طول میله مسی CD (Δ_{cu}) و اضافه طول میله فولادی EB (Δ_{st}) وجود دارد .

$$\frac{\Delta_{st}}{\Delta_{cu}} = \frac{BB''}{DD''} = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{1} = 2$$

این معادله همان معادله سازگاری تغییر مکان ها می باشد که آن را به صورت زیر می نویسیم (تغییر مکان ها را بر حسب نیروهای داخلی میله ها بیان می کنیم) :

$$\Delta_{st} = 2\Delta_{cu}$$

$$\frac{P_{st}(2000)}{(250)(200 \times 10^9 \times 10^{-6})} = \frac{2P_{cu}(1000)}{(500)(120 \times 10^9 \times 10^{-6})}$$

$$P_{st} = 0.833P_{cu} \quad (2)$$

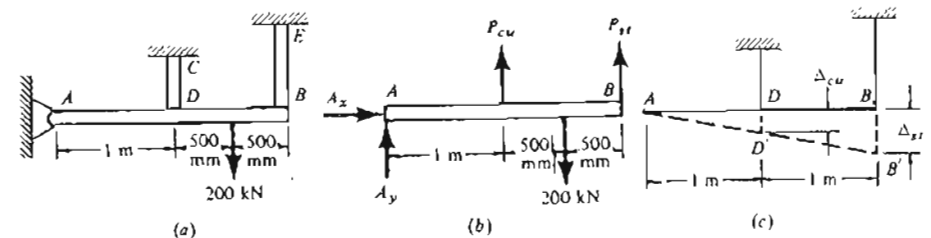
۱۲۰

ΔT اضافه شود . اثر ناشی از این اضافه درجه حرارت در نیروهای میله های خریا همان اثر طول تر بودن میله وسطی به اندازه ΔL می باشد به شرط اینکه ΔL برابر انبساط حرارتی میله وسطی وقتی که به آزادی بتواند انبساط پیدا کند اختیار شود . به عبارت دیگر برای اینکه نیروی میله وسط را در اثر تغییر درجه حرارت مزبور بدست آوریم کافی است در معادله 2-22 به جای ΔL کمیت $\alpha L \Delta T$ را قرار دهیم .

۲-۴ مسائل حل شده

مسئله ۱-۲

میله AB در شکل a ۱۰-۲ کاملاً " صلب فرض می شود و قبل از اینکه بار 200kN مطابق شکل بر آن وارد شود افقی می باشد . اتصال A معصلی و میله AB به وسیله میله فولادی EB و میله مسی CD نگهداشته شده است . طول CD و EB به ترتیب 1m و 2m می باشد . مساحت سطح مقطع CD برابر 500 mm^2 و مساحت سطح مقطع EB برابر 250 mm^2 می باشد . تنش ها را در هر یک از میله های قائم تعیین کنید . از وزن AB صرف نظر نمایید . ضریب ارتجاعی مس $120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و ضریب ارتجاعی فولاد $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ می باشد .



شکل ۱۰-۲

۱۲۲

به تنش یکنواخت σ_0 پیش تنیده شود هر یک از بست‌های قورباغه‌ای را چند دور باید چرخاند؟

حاصل: فرض می‌کنیم نیرو در میله B برابر F_b و در هر یک از کابل‌ها برابر F_c باشد. در این صورت معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_b = 2F_c$$

در اثر چرخاندن بست‌های قورباغه‌ای میله B تحت فشار قرار می‌گیرد و طول آن کم می‌شود و کابل‌ها تحت کشش قرار گرفته و طولشان اضافه می‌شود. بنابراین اگر هر یک از بست‌های قورباغه‌ای را n دور بچرخانیم شرط سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2np = \text{کاهش طول میله B} + \text{ازدیاد طول هر یک از کابل‌ها}$$

$$F_b = A\sigma_0$$

$$F_c = \frac{1}{2} F_b = \frac{1}{2} A\sigma_0$$

مقادیر نیروها را در معادله سازگاری قرار می‌دهیم.

$$\frac{\frac{1}{2} A\sigma_0 L}{E_c A_c} + \frac{A\sigma_0 L}{EA} = 2np$$

$$n = \frac{\sigma_0 L}{2pE} \left(1 + \frac{EA}{2E_c A_c} \right)$$

۱۲۲

از حل همزمان معادلات 1 و 2 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند.

$$P_{cu} = 112.5 \text{ kN} ; P_{st} = 94 \text{ kN}$$

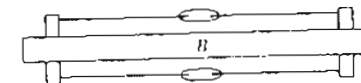
الاحره از تقسیم کردن نیرو بر مساحت سطح مقطع تنش‌های مربوطه بدست می‌آید.

$$\sigma_{cu} = \frac{112.5 \times 10^3}{500} = 225 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{94 \times 10^3}{250} = 376 \text{ MPa}$$

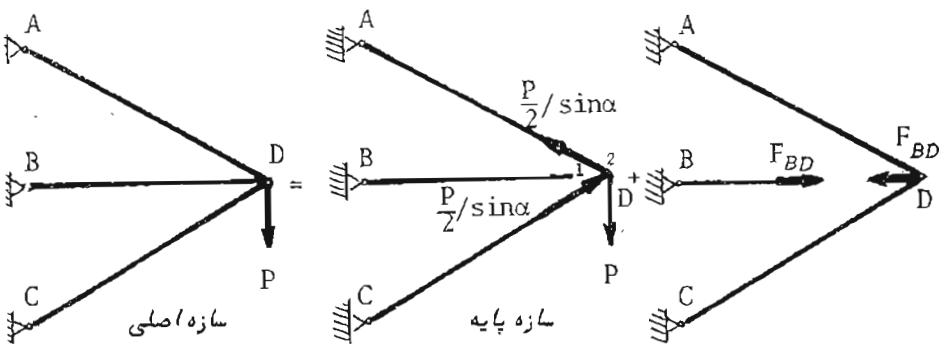
مسئله ۲-۲

میله B در شکل ۱۱-۲ دارای طول L، ضریب ارتجاعی E و سطح مقطع A_c می‌باشد. دو کابل با بست‌های قورباغه‌ای مطابق شکل به دو انتهای میله متصل گردیده‌اند. هر یک از کابل‌ها به طول L، ضریب ارتجاعی E_c و سطح مقطع A_c می‌باشد. گام دنده‌های بست‌های قورباغه‌ای با عمل مضاعف برابر p می‌باشد. برای اینکه میله B



شکل ۱۱-۲

۱۲۵



شکل ۱۳-۲

دادن مولفه افقی تغییر مکان دو نقطه ۱ و ۲ (در اتصال D) بدست می‌آید.

$$\delta_{Dh1} = \delta_{Dh2} \quad (3)$$

$$\delta_{Dh1} = \frac{F_{BD} H \cot \alpha}{AE} \quad (4)$$

$$\delta_{Dh2} = (\delta_{Dh})_P + (\delta_{Dh})_{F_{BD}} \quad (5)$$

تغییر مکان افقی نقطه ۲ در اثر نیروی F_{BD} + تغییر مکان افقی نقطه ۲ در اثر بار

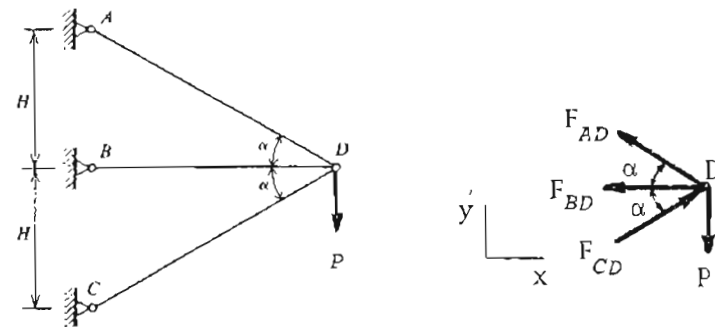
$$\delta_{D1} = \delta_{D2} = \frac{\frac{P}{2 \sin \alpha} H / \sin \alpha}{AE} = \frac{PH}{2AE \sin^2 \alpha} : (\delta_{Dh})_P \quad (\text{شکل a})$$

$$(\delta_{Dh})_P = 0 \quad (6)$$

۱۲۴

مسئله ۲-۳

سه میله AD، BD و CD که صلبیت محوری یکنواخت EA دارند تشکیل خرپایی مطابق شکل ۱۲-۲ می‌دهند. نیروهای ایجاد شده در ۳ میله و مولفه‌های افقی و قائم تغییر مکان مفصل D را در اثر بار P تعیین کنید.



شکل ۱۲-۲

دیagram جسم آزاد مفصل D

حل: حل این مسئله به روش نیرو ساده‌تر است چون تعداد نا معینی استاتیکی خرپای فوق یک می‌باشد. با استفاده از نمودار جسم آزاد مفصل D معادلات تعادل نیروها در امتداد افق و قائم را می‌نویسیم.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 : -F_{BD} + (F_{CD} - F_{AD}) \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 : (F_{AD} + F_{CD}) \sin \alpha - P = 0 \quad (2)$$

برای حل این مسئله به روش نیرو میله BD را عضو زائد اختیار می‌کنیم و آن را در محل اتصال D می‌بریم (شکل ۱۳-۲). سمت چپ محل برش را نقطه ۱ و سمت راست محل برش را نقطه ۲ می‌نامیم. در این صورت شرط سازگاری تغییر مکان‌ها با مساوی قرار

۱۲۷

چون $F_{BD}=0$ می باشد مولفه های افقی و قائم تغییر مکان مفصل D از شکل a بدست می آیند .

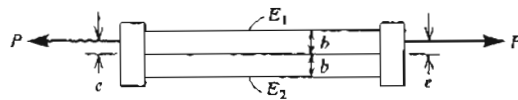
$$\delta_{Dh} = 0$$

مولفه افقی تغییر مکان مفصل D :

$$\delta_{Dv} = DD' = \frac{DD_1}{\sin \alpha} = \frac{PH}{2AE \sin^3 \alpha} \quad \text{مولفه قائم تغییر مکان مفصل D :}$$

مسئله ۴-۲

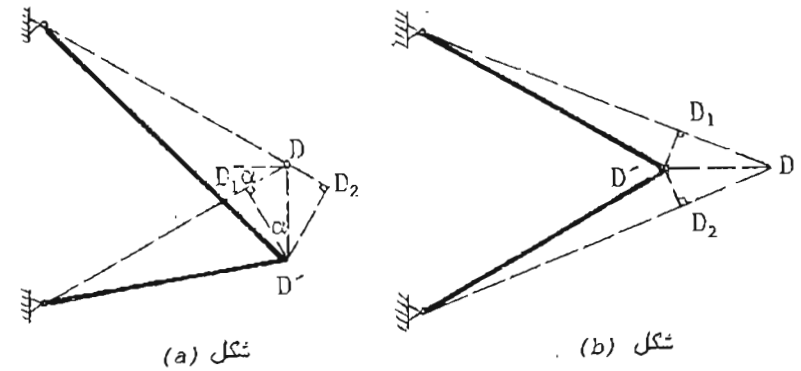
میله ای با سطح مقطع مربع شکل از دو میله با مصالح مختلف به ضرایب ارتجاعی E_1 و E_2 ساخته شده است . هر دو میله سطح مقطع یکسان دارند . با فرض اینکه صفحات انتهایی تغییر شکل نپذیرد باشد رابطه ای برای خروج از مرکز e بار P بدست آورید بطوریکه هر دو میله در کشش یکنواخت باشند (فرض کنید $E_1 > E_2$) .



شکل ۱۴-۲

حل : فرض می کنیم نیروی داخلی در میله فوقانی P_1 و در میله تحتانی P_2 باشد . موقمی که هر دو میله در کشش یکنواخت می باشند نیروهای P_1 و P_2 از مرکز سطح هر یک از میله ها عبور خواهند کرد (مطابق شکل ۱۵-۲) . از شرط تعادل نیروها در امتداد افق نتیجه می شود

۱۲۶



چون $DD_1=DD_2$ است تغییر مکان DD' قائم می باشد و مولفه افقی ندارد .

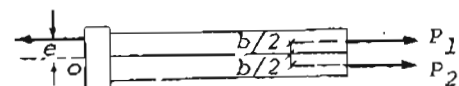
$$DD_1 = DD_2 = \frac{F_{BD}}{2 \cos \alpha} \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{F_{BD} H}{2AE \cos \alpha \sin \alpha} \quad \text{محاسبه } (\delta_{Dh})_{F_{BD}} \quad \text{(شکل b)}$$

$$(\delta_{Dh})_{F_{BD}} = DD' = \frac{DD_1}{\cos \alpha} = \frac{F_{BD} H}{2AE \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (7)$$

از معادله سازگاری ، رابطه (3) ، با استفاده از روابط (4) تا (7) خواهیم داشت

$$\frac{F_{BD} H \cot \alpha}{AE} = \frac{F_{BD} H}{2AE \sin \alpha \cos^2 \alpha} \quad ; \quad F_{BD} = 0$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow F_{AD} = F_{CD} = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$



شکل ۱۵-۲

$$P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

از شرط تعادل لنگر نیروها حول نقطه O داریم

$$Pe - P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

و بالاخره شرط سازگاری تغییر مکان‌ها L مساوی قرار دادن تغییر مکان یا ازدیاد طول میله ۱ با ازدیاد طول میله ۲ بدست می‌آید.

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\frac{P_1 L}{AE_1} = \frac{P_2 L}{AE_2} \quad (A = \text{سطح مقطع هر یک از میله‌ها})$$

$$\frac{P_1}{E_1} = \frac{P_2}{E_2} \quad (3)$$

$$(1) \ \& \ (2) \Rightarrow \begin{cases} P_1 + P_2 = P \\ P_1 - P_2 = \frac{2Pe}{b} \end{cases}$$

از حل این دستگاه معادلات خواهیم داشت

$$P_1 = P \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{b} \right) ; \quad P_2 = P \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{b} \right)$$

مقادیر P_1 و P_2 را در معادله (3) قرار می‌دهیم.

$$\frac{P \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{b} \right)}{E_1} = \frac{P \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{b} \right)}{E_2}$$

از این معادله e بدست می‌آید.

$$e = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \frac{b}{2} \quad (E_1 > E_2 \text{ اینکۀ})$$

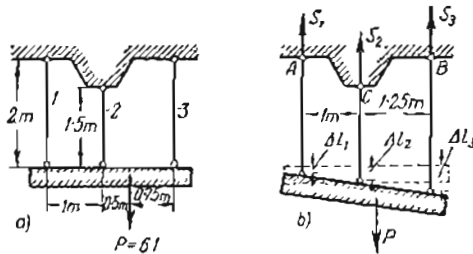
مسئله ۵-۲

میله AB کاملاً "صلب و بوسیله سه میله دیگر مطابق شکل a ۱۶-۲ نگهداشته شده است. دو میله خارجی فولادی هستند و سطح مقطع هر یک از آنها 250 mm^2 می باشد. میله مرکزی از مس است و سطح مقطع آن 10^3 mm^2 می باشد. برای فولاد $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و برای مس $E = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. طول همه میله‌ها 2m است. میله‌ها در فواصل مساوی قرار دارند و دو نیروی 50 kN در وسط فاصله بین میله‌ها بر AB وارد شده است. با صرف نظر کردن از وزن میله AB نیروی داخلی هر یک از میله‌های قائم را تعیین کنید.

۱۳۱

مسئله ۶-۲

در شکل a ۱۷-۲ میله صلبی بوسیله سه میله آویزان شده است و تحت اثر بار $P = 6t$ قرار دارد. میله ۱ از مس با مساحت سطح مقطع $1cm^2$ ، میله ۲ از فولاد با مساحت سطح مقطع $1.5cm^2$ و میله ۳ از آلومینیوم با مساحت سطح مقطع $2cm^2$ می باشد. تنش ها را در هر یک از میله ها تعیین کنید. ضرائب ارتجاعی مس، فولاد و آلومینیوم به ترتیب $1 \times 10^6 Kg/cm^2$ ، $2 \times 10^6 Kg/cm^2$ و $0.7 \times 10^6 Kg/cm^2$ می باشد.



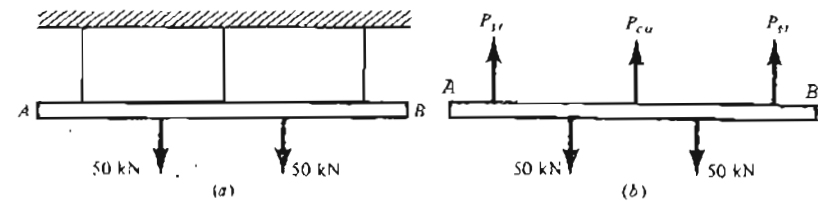
شکل ۱۷-۲

حل: وضعیت نهایی سازه در شکل b ۱۷-۲ نشان داده شده است. معادلات تعادل لنگری حول نقاط A و B عبارتند از

$$\sum M_A = -(S_2 \times 1) - (S_3 \times 2.25) + (P \times 1.5) = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = (S_1 \times 2.25) + (S_2 \times 1.25) - (P \times 0.75) = 0 \quad (2)$$

۱۳۰



شکل ۱۶-۲

حل: در شکل b ۱۶-۲ نمودار جسم آزاد AB رسم شده است. به دلیل تقارن، نیروها در دو میله خارجی مساوی می باشد. از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می شود

$$2P_{st} + P_{cu} = 100 \quad (1)$$

به علت تقارن سازه و بارگذاری روی آن میله AB پس از بارگذاری افقی باقی می ماند. به عبارت دیگر اضافه طول میله های فولادی با اضافه طول میله مسی یکسان می باشد.

$$\Delta_{st} = \Delta_{cu}$$

$$\frac{P_{st}(2000)}{250(200 \times 10^9 \times 10^{-6})} = \frac{P_{cu}(2000)}{10^3(120 \times 10^9 \times 10^{-6})}$$

$$P_{st} = 0.417P_{cu} \quad (2)$$

از حل همزمان معادله تعادل ۱ و معادله سازگاری تغییر مکانهای ۲ نیروها بدست می آید.

$$P_{cu} = 54.5 \text{ kN} \quad ; \quad P_{st} = 22.75 \text{ kN}$$

۱۳۲

حال مقادیر محاسبه شده را کنترل می‌کنیم.

$$ES = 110 + 3410 + 2480 = 6000 \text{ Kg} = P \quad \checkmark$$

تنشها در میله‌ها عبارتند از

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} = \frac{110}{1} = 110 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} = \frac{3410}{1.5} = 2270 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{S_3}{A_3} = \frac{2480}{2} = 1240 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۷-۲

در شکل ۱۸-۲ میله‌ها از فولاد با تنش مجاز $\sigma_w = 1600 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و سطح مقطع آنها $A_1 = 12 \text{ cm}^2$ ، $A_2 = 14 \text{ cm}^2$ و $A_3 = 16 \text{ cm}^2$ می‌باشد. حداکثر بار مجاز P_w را تعیین کنید. $a = 0.4 \text{ m}$ ، $b = 1.2 \text{ m}$ ، $c = 0.4 \text{ m}$ ، $\beta_1 = 45^\circ$ ، $\beta_2 = 60^\circ$ و $\beta_3 = 30^\circ$.

حل: بین نیروهای میله‌ها ، N_1 ، N_2 و N_3 ، دو معادله تعادل زیرو وجود دارد:

۱۳۲

برای نوشتن معادله سارگاری تغییر مکان‌ها از دوزنقه شکل b-۱۷-۲ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2.25} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{1}$$

این معادله به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$1.25\Delta l_1 - 2.25\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$$

تغییر مکان‌ها را بر حسب نیروها بیان می‌کنیم.

$$1.25 \frac{S_1 \times 200}{10^6 \times 1} - 2.25 \frac{S_2 \times 150}{2 \times 10^6 \times 1.5} + \frac{S_3 \times 200}{0.7 \times 10^6 \times 2} = 0$$

این معادله پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید:

$$2.5S_1 - 1.125S_2 + 1.43S_3 = 0 \quad (3)$$

از حل معادلات ۱ ، ۲ و ۳ نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند.

$$S_1 = 0.018P = 0.018(6000) = 110 \text{ Kg}$$

$$S_2 = 0.568P = 0.568(6000) = 3410 \text{ Kg}$$

$$S_3 = 0.414P = 0.414(6000) = 2480 \text{ Kg}$$

۱۳۵

$$\delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2 \sin \beta_2}$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3 \sin \beta_3}$$

از هندسه سازه داریم

$$l_1 = \frac{a}{\sin \beta_1} \quad ; \quad l_2 = \frac{b}{\sin \beta_2} \quad ; \quad l_3 = \frac{c}{\sin \beta_3}$$

مقادیر فوق را در معادله سازگاری تغییر مکان ها جایگزین می کنیم .

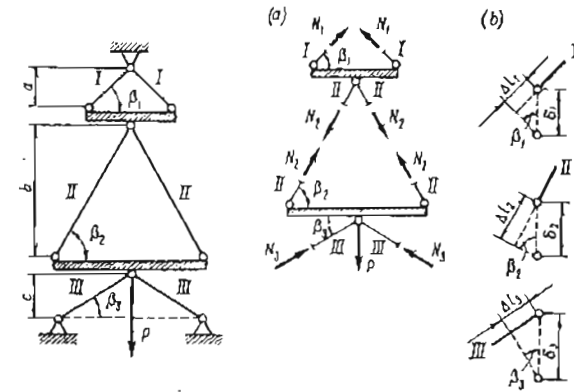
$$\frac{N_1 a}{E_1 A_1 \sin^2 \beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2 A_2 \sin^2 \beta_2} = \frac{N_3 c}{E_3 A_3 \sin^2 \beta_3}$$

حال از مقادیر عددی مسئله استفاده می کنیم .

$$\sin \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin \beta_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{A_1 \sin^2 \beta_1} = \frac{40 \times 4}{12 \times 2} = \frac{20}{3} \text{ 1/cm}$$

۱۳۴



شکل ۱۸ - ۲

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2$$

$$2N_2 \sin \beta_2 + 2N_3 \sin \beta_3 = P$$

شرط سازگاری تغییر مکان ها بدین صورت بیان می شود : تغییر مکان نقطه اثر بار P در اثر ازدیاد طول میله های ۱ و ۲ باید برابر با تغییر مکان نقطه مزبور در اثر کاهش طول میله های ۳ باشد (چون ارتفاع تمام سازه ثابت است) .

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$$

بر اساس قانون هوک می توانیم بنویسیم

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1 \sin \beta_1}$$

۱۳۷

چون تنش ماکزیم σ_3 نباید از تنش مجاز تجاوز کند بار مجاز برابر است با

$$P \leq \frac{\sigma_w}{0.0331} = \frac{1600}{0.0331} = 48340 \text{ Kg} = 48.3 \text{ t}$$

مسئله ۸ - ۲

میله‌ای دو فلزی شامل یک هسته مسی متصل به دو نوار فولادی در بالا و پایین آن می‌باشد که به اندازه T درجه به طور یکنواخت گرما داده می‌شود (شکل ۱۹ - ۲) . با فرض اینکه عرض میله b ، طول میله L و ضخامت هر نوار t باشد تنش‌های ایجاد شده در فولاد و مس را تعیین کنید . ضرایب انبساط حرارتی برای فولاد و مس به ترتیب α_c و α_s ($\alpha_c > \alpha_s$) و ضرایب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب E_c و E_s می‌باشد .



شکل ۱۹ - ۲

حل : فرض می‌کنیم σ_c تنش در نوار مسی و σ_s تنش در نوار فولادی باشد . چون ضریب انبساط حرارتی مس از فولاد بیشتر می‌باشد نوار مسی نسبت به نوارهای فولادی تمایل به انبساط بیشتر دارد ولی نوارهای فولادی از انبساط کامل نوار مسی جلوگیری می‌کنند . در نتیجه نوار مسی تحت فشار قرار می‌گیرد و نوارهای فولادی کشیده می‌شوند .

$$P_s = 2tb\sigma_s \quad \text{نیروی کششی در نوارهای فولادی}$$

۱۳۶

$$\frac{b}{A_2 \sin^2 \beta_2} = \frac{120 \times 4}{14 \times 3} = \frac{80}{7} \text{ 1/cm}$$

$$\frac{c}{A_3 \sin^2 \beta_3} = \frac{40 \times 4}{16 \times 1} = 10 \text{ 1/cm}$$

با جایگزینی مقادیر عددی فوق در معادلات تعادل و سازگاری تغییر مکان‌ها نتیجه می‌شود

$$\sqrt{2} N_1 = \sqrt{3} N_2$$

$$\sqrt{3} N_2 + N_3 = P$$

$$14 N_1 + 24 N_2 = 21 N_3$$

از حل دستگاه معادلات فوق ابتدا نیروها و سپس تنش‌ها بدست می‌آیند .

$$N_1 = 0.332P \quad ; \quad N_2 = 0.27P \quad ; \quad N_3 = 0.53P$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0.332P}{12} = 0.0276P$$

$$\sigma_2 = \frac{0.27P}{14} = 0.0193P$$

$$\sigma_3 = \frac{0.53P}{16} = 0.0331P$$

۱۳۹

$$\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_c}{E_c} = \alpha_c T - \alpha_s T \quad (2)$$

از حل معادلات ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$\sigma_s = \frac{(\alpha_c - \alpha_s) T E_s E_c}{E_c + 2E_s} \quad \text{کشی}$$

$$\sigma_c = \frac{2(\alpha_c - \alpha_s) T E_s E_c}{E_c + 2E_s} \quad \text{فشاری}$$

مسئله ۹-۲

میله‌های خارجی خرابی شکل ۲۰ - ۲ از الومینیوم (با ضریب ارتجاعی $E_a = 7 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب انبساط حرارتی $\alpha_a = 21.6 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) و قطره‌هایش از سیم‌های فولادی (با ضریب ارتجاعی $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب انبساط حرارتی $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) تشکیل شده است. مساحت سطح مقطع میله‌های الومینیومی و سیم‌های فولادی نسبت ۲۰/۱ دارد. اگر درجه حرارت خرابی به اندازه 44.5°C اصابه شود تنش را در سیم‌های فولادی تعیین کنید.

حل: به علت $\alpha_a > \alpha_s$ میله‌های خارجی نسبت به قطره‌های خواهند طول‌تر

۱۳۸

$$P_c = b t \sigma_c \quad \text{نیروی فشاری در نوار می}$$

چون نیروی محوری خارجی وجود ندارد داریم:

$$P_s + P_c = 0 \quad : \quad 2\sigma_s + \sigma_c = 0$$

اگر مقادیر تنش‌ها را به صورت حسابی در نظر بگیریم این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_c = 2\sigma_s \quad (1)$$

فرمول تغییر شکل میله‌های تحت کشش یا فشار بکنواخت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

$$\delta_s = \frac{\sigma_s L}{E_s} \quad : \quad \sigma_s \text{ ازدیاد طول نوارهای فولادی در اثر تنش}$$

$$\delta_c = \frac{\sigma_c L}{E_c} \quad : \quad \sigma_c \text{ کاهش طول نوار می در اثر تنش}$$

$$\delta_s + \delta_c = \alpha_c L T - \alpha_s L T \quad \text{شرط سازگاری تغییر مکان‌ها:}$$

$$\frac{\sigma_s L}{E_s} + \frac{\sigma_c L}{E_c} = \alpha_c L T - \alpha_s L T$$

۱۴۱

تنش در سیم‌های فولادی :

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\sqrt{2} (\alpha_a - \alpha_s) \Delta T}{\frac{\sqrt{2}}{L_s} + \frac{1}{20E_a}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} (21.6 - 11.7) 10^{-6} (44.5)}{\frac{\sqrt{2}}{2.1 \times 10^6} + \frac{1}{14 \times 10^6}} = 836.4 \text{ Kg/cm}^2$$

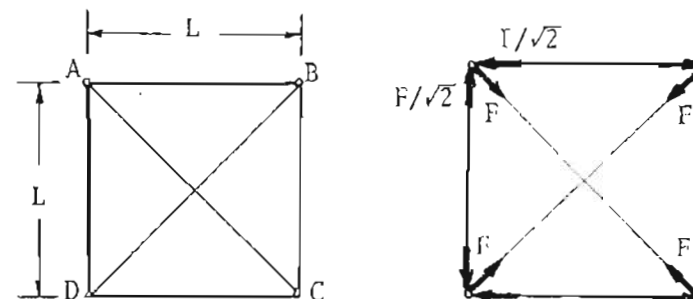
مسئله ۱۰-۲

اعضای خربای شکل ۲-۲۱ از فلزی با ضریب ارتجاعی E و ضریب انبساط حرارتی α تشکیل شده است. سطح مقطع میله‌های AB و AC برابر A و سطح مقطع میله BC برابر A/2 می‌باشد. فاصله بین تکیه گاه‌های B و C برابر L است. اگر درجه حرارت به اندازه ΔT کاهش یابد تنش‌های کششی یا فشاری ایجاد شده در میله‌های AB ، AC و BC را حساب کنید.

حس: چون میله‌های AB و AC در اثر تغییر درجه حرارت می‌توانند به آزادی تغییر مکان یابند در آن‌ها نیرو و تنش ایجاد نمی‌شود.

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 0$$

۱۴۰



شکل ۲-۲۰

شود ولی به علت متصل بودن به فطرها نمی‌توانند. در نتیجه میله‌های خارجی تحت فشار و قطرهای سیمی تحت کشش قرار می‌گیرند.

A = سطح مقطع سیم‌های فولادی
F = کشش در سیم‌ها (فطرها)
F/√2 = فشار در میله‌های خارجی

$\delta_1 = \frac{F\sqrt{2}L}{AE_s}$ ازدیاد طول سیم‌های فولادی یا ازدیاد طول هر یک از فطرها
تحت اثر نیروی کشش سیم‌ها

$\delta_2 = \frac{\frac{F}{\sqrt{2}}L}{20AE_a} / \cos 45^\circ$ کاهش طول هر یک از فطرها تحت اثر نیروهای
فشاری در میله‌های خارجی

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در امالات A ، B ، C و D :

$$\delta_1 + \delta_2 = (\alpha_a - \alpha_s) \sqrt{2} L \Delta T$$

$$\frac{F\sqrt{2}L}{AE_s} + \frac{FL}{20AE_a} = (\alpha_a - \alpha_s) \sqrt{2} L \Delta T$$

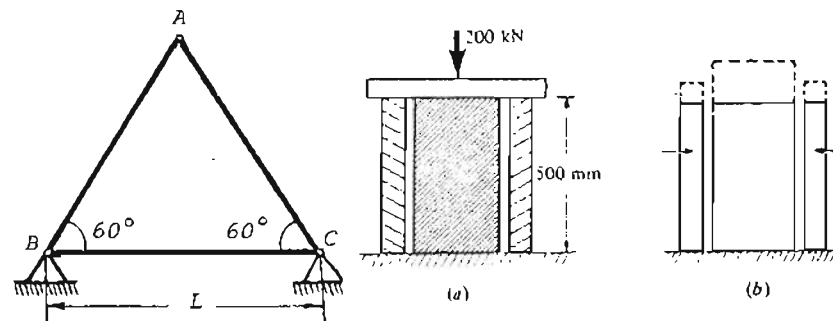
یک استوانه فولادی به حالی استوانه مسی نویری را مطابق شکل a-۲۲-۲ در بر می گیرد و بار ۲۰۰ kN بر مجموعه وارد می شود. مساحت سطح مقطع فولاد 2000 mm^2 و مساحت سطح مقطع مس 5000 mm^2 می باشد. قبل از وارد شدن بار، هر دو استوانه طول یکسان دارند. تعیین کنید چه افزایش درجه حرارتی لازم است تا تمام بار به وسیله استوانه مسی حمل شود. صفحه ای که در بالای مجموعه قرار دارد صلب فرض می شود. برای مس $E = 120 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و $\alpha = 20 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و برای فولاد $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$.

حل: فرض می کنیم بار و همچنین صفحه فوقانی برداشته شود و دستگاه بتواند در اثر اضافه درجه حرارت ΔT به آزادی انبساط پیدا کند. در این صورت انتباهای فوقانی استوانه ها در وضعیتی قرار می گیرند که در شکل b-۲۲-۲ با خطوط منقطع نشان داده شده است. استوانه مسی بیش از استوانه فولادی منبسط می شود زیرا ضریب انبساط حرارتی مس از فولاد بیشتر می باشد. انبساط رو به بالای استوانه فولادی برابر $(500)\Delta T (12 \times 10^{-6})$ و انبساط رو به بالای استوانه مسی برابر $(500)\Delta T (20 \times 10^{-6})$ می باشد. البته این وضعیت واقعی نیست زیرا بار ۲۰۰ kN هنوز وارد شده است. اگر تمام این بار محوری به وسیله استوانه مسی تحمل شود در این صورت فقط استوانه مسی فشرده می شود و مقدار این فشرده گی برابر است با

$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(10^3)(500)}{(5000)(120 \times 10^9 \times 10^{-6})}$$

بنابراین بر اساس شرایط مسئله می توانیم بنویسیم

$$(20 \times 10^{-6})(500)\Delta T - \Delta_{cu} = (12 \times 10^{-6})(500)\Delta T$$



شکل ۲-۲۱

شکل ۲-۲۲

اما در میله BC در اثر کاهش درجه حرارت تنش کششی ایجاد می شود که مقدار آن برابر است با (F_{BC}) نیروی داخلی میله BC و δ تغییر شکل ناشی از آن می باشد

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\frac{AE\delta}{2L}}{\frac{1}{2}A} = \frac{E\delta}{L}$$

اگر میله BC آزاد بود به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ کاهش طول می یافت بنابراین تنش ناشی از کاهش درجه حرارت به اندازه ΔT در میله BC برابر است با

$$\sigma_{BC} = \frac{E(\alpha L \Delta T)}{L} = E\alpha \Delta T \quad (\text{کششی})$$

۱۴۵

مانند جسم صلبی دوران می‌کند (خط منقطع در شکل a ۲۳-۲) بین کاهش طول میله BC (Δ_{br}) و افزایش طول میله ED (Δ_{st}) رابطه زیر برقرار است

$$\frac{\Delta_{br}}{250} = \frac{\Delta_{st}}{600} \quad (1)$$

تغییر طول کل میله BC شامل کاهش طول ناشی از افت درجه حرارت و افزایش طول ناشی از نیروی محوری P_{br} می‌باشد. تغییر طول کل میله DE شامل افزایش طول ناشی از افزایش درجه حرارت و افزایش طول ناشی از نیروی محوری P_{st} می‌باشد. بنابراین

$$\Delta_{br} = -(20 \times 10^{-6})(300)(25) + \frac{P_{br}(300)}{(500)(90 \times 10^9 \times 10^{-6})} \quad (2)$$

$$\Delta_{st} = (12 \times 10^{-6})(250)(25) + \frac{P_{st}(250)}{(250)(200 \times 10^9 \times 10^{-6})} \quad (3)$$

پس از جایگزینی معادلات ۲ و ۳ در معادله ۱ و ساده نمودن حاصل می‌شود

$$3.2P_{br} - P_{st} = 87000 \quad (4)$$

معادله تعادل لنگری AD حول نقطه A:

$$250P_{br} - 600P_{st} = 0 \quad (5)$$

از حل معادلات ۴ و ۵ نیروها و سپس تنش‌ها محاسبه می‌شوند.

۱۴۴

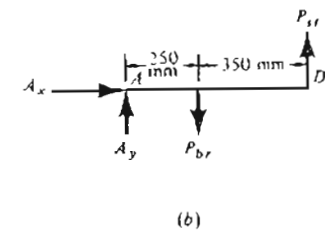
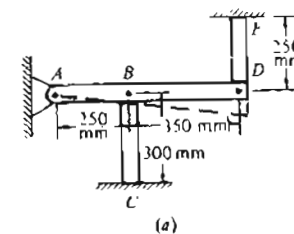
از حل معادله فوی ΔT بدست می‌آید.

$$\Delta T = 41.6^\circ\text{C}$$

مسئله ۱۲-۲

میله صلب AD در نکیه گاه A مفصلی و به دو میله BC و ED مطابق شکل a ۲۳-۲ متصل می‌باشد. سازه مزبور در ابتدا بدون تنش می‌باشد و از وزن همه میله‌ها صرف نظر می‌گردد. درجه حرارت میله BC به اندازه 25°C کاهش و درجه حرارت میله ED به اندازه 25°C افزایش داده می‌شود. با صرف نظر کردن از کماتش جانبی، تنش‌ها را در میله‌های BC و ED پیدا کنید.

برای BC که برجی است $E = 90 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و $\alpha = 20 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و برای ED که فولادی است $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و مساحت سطح مقطع BC و ED به ترتیب 500 mm^2 و 250 mm^2 می‌باشد.



شکل ۲-۲۳

حل: در شکل b ۲۳-۲ نمودار جسم آزاد AD رسم شده است. نیروهای میله‌های BC و ED به ترتیب با P_{br} و P_{st} نشان داده شده است. چون AD

۱۴۷

در اثر تنزل درجه حرارت منقبض می‌شود. حال برای اینکه شرایط حدی مسئله را قانع کنیم باید نیروی P را بر استهای آزاد میله وارد کنیم به طوریکه در اثر آن میله به اندازه 0.24 mm افزایش طول پیدا کند. با توجه به شکل و مختصات انتخاب شده

$$r = 50 + \frac{50x}{1000} = 50 + \frac{x}{20}$$

ما فرض اینکه نیب حدار مخروطی کم باشد رابطه زیر بین اضافه طول میله و P وجود دارد

$$0.24 = \int_0^{1000} \frac{Pdx}{\pi r^2 E} = \int_0^{1000} \frac{Pdx}{\pi (50 + \frac{x}{20})^2 E}$$

پس از انتگرال گیری

$$0.24 = \frac{400P}{2000\pi E}$$

از این رابطه $P = 750 \text{ kN}$ بدست می‌آید. نیروی محوری کششی P در سراسر میله ثابت است ولی تنش در طول آن تغییر می‌کند. حداکثر تنش در انتهای چپ می باشد که برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{750 \times 10^3}{\pi (50)^2} = 95.4 \text{ MPa}$$

۱۴۶

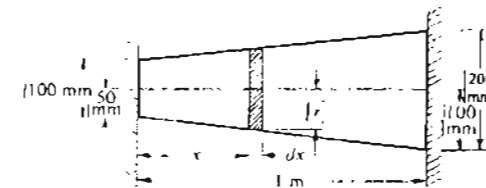
$$P_{st} = 13024 \text{ N} ; P_{br} = 31257 \text{ N}$$

$$\sigma_{st} = \frac{13024}{250} = 52.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{br} = \frac{31257}{500} = 62.5 \text{ MPa}$$

مسئله ۱۳-۲

میله فولادی شکل ۲۴-۲ که به شکل مخروط ناقص می‌باشد در دو انتها گیر دار است. میله در ابتدا بدون تنش می‌باشد. اگر درجه حرارت تمام میله به اندازه 20°C سزل کند حداکثر تنش عمودی را در میله تعیین کنید. فرض کنید $E = 200000 \text{ MN/m}^2$ و $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$.



شکل ۲۴-۲

حلول: در حل این مسئله ابتدا فرض کنید یک انتهای میله (مثلاً "انتهای راست") آزاد باشد. در این صورت میله به اندازه $(20)(1000)(12 \times 10^{-6}) = 0.24 \text{ mm}$ آزاد می‌شود.

$$\Delta l_1 = u_A \sin 30^\circ \quad ; \quad \Delta l_4 = -u_B \cos 30^\circ \quad (4)$$
$$\Delta l_3 = \Delta - u_A - u_B \quad (5)$$
$$\Delta l_3 = \Delta - 2\Delta l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l_4$$
$$2N_1 + 2N_4 + N_3 = \frac{\Delta}{l} EA \quad (6)$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{1} EA$$

$$N_4 = N_5 = - \frac{1}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{1} \text{ EA}$$

شكل ٢٥-٢

از شرایط تعادل اتصالات A و B (شکل های ۲-۲۵ b و ۲-۲۵ c) داریم

$$N_1 = N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$N_4 = N_5 \quad (2)$$

$$N_3 + 2N_4 \cos 30^\circ = 0 \quad (5)$$

فرض کنید یس از سوار کردن قطعات حر با معضل A به اندازه u_A به طرف پایین

۱۵۱

بنابراین معادله سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{a}{\sin^2 \beta_1} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_1}{EA_1} \right) + \frac{b}{\sin^2 \beta_2} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_2}{EA_2} \right) + \frac{c}{\sin^2 \beta_3} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_3}{EA_3} \right) = 0 \quad (3)$$

با بکار بردن مفادیر عددی و استفاده از روابط $\sigma_2 = N_2/A_2$ ، $\sigma_1 = N_1/A_1$ و $\sigma_3 = N_3/A_3$ معادلات 1 تا 3 به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$6\sqrt{2} \sigma_1 = 7\sqrt{3} \sigma_2$$

$$7\sqrt{3} \sigma_2 = 8\sigma_3$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 5000$$

از حل این دستگاه معادلات تنش‌ها در میله‌ها بدست می‌آیند:

$$\sigma_1 = 1105 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 774 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 1172 \text{ Kg/cm}^2$$

۱۵۰

مسئله ۱۵-۲

در خریای شکل ۱۸-۲ (مسئله ۷-۲) هرگاه درجه حرارت به اندازه $\Delta t = 40^\circ\text{C}$ افزایش یابد تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید. ضریب انبساط حرارتی همه میله‌ها یکسان و برابر $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ می‌باشد.

حل: از شرایط تعادل (شکل a ۲۶-۲) معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2 \quad (1)$$

$$2N_2 \sin \beta_2 = 2N_3 \sin \beta_3 \quad (2)$$

از شرط سازگاری تغییر مکان‌ها (شکل b ۲۶-۲) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

که در آن

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} ; \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} ; \quad \delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3}$$

$$\Delta l_1 = l_1 \alpha_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} ; \quad \Delta l_2 = l_2 \alpha_2 \Delta t - \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta l_3 = l_3 \alpha_3 \Delta t - \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}$$

۱۵۲

با توجه به مسئله قبل معادله سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3} = \frac{\Delta_2}{\sin \beta_2}$$

و یا بر حسب تنش‌ها

$$\frac{\sigma_1 a}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\sigma_2 b}{\sin^2 \beta_2} + \frac{\sigma_3 c}{\sin^2 \beta_3} = E \frac{\Delta_2}{\sin^2 \beta_2} \quad (3)$$

معادلات ۱ تا ۳ پس از جایگزینی مقادیر عددی به صورت زیر ساده می‌شوند :

$$6\sqrt{2} \sigma_1 = 7\sqrt{3} \sigma_2$$

$$7\sqrt{3} \sigma_2 = 8\sigma_3$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 4000$$

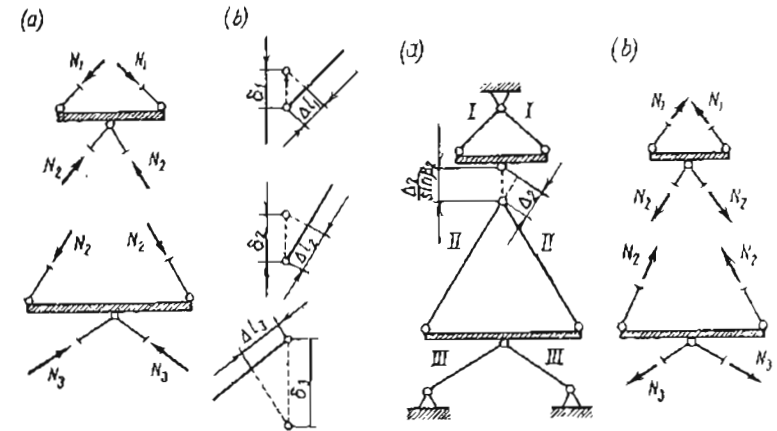
از حل دستگاه معادلات فوق تنش‌ها به دست می‌آیند .

$$\sigma_1 = 886 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 620 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 939 \text{ Kg/cm}^2$$

۱۵۲



شکل ۲-۲۶

شکل ۲-۲۷

مسئله ۲-۱۶

در خرابای شکل ۲-۱۸ (مسئله ۲-۷) هر گاه میله‌های ۲ به اندازه $\Delta_2 = 1.2 \text{ mm}$ از طول طرح شده کوتاه‌تر ساخته شده باشند تنش‌های ایجاد شده در هر پا را در موقع سوار کردن حساب کنید (شکل ۲-۲۷) .

حل : با توجه به شکل ۲-۲۷ b معادلات تعادل عبارتند از

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2 \quad (1)$$

$$2N_2 \sin \beta_2 = 2N_3 \sin \beta_3 \quad (2)$$

۱۵۵

با توجه به شکل ۲۸ b - ۲ شرط سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{h_l}{h_r} = \frac{a}{b} = 3$$

ولی

$$h_l = \frac{\Delta - \Delta l_l}{\sin 30^\circ} \quad ; \quad h_r = \frac{\Delta l_r}{\sin 60^\circ}$$

سپارین

$$\frac{(\Delta - \Delta l_l) \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ \Delta l_r} = 3$$

پس از ساده کردن

$$1.73 \Delta l_r + \Delta l_l = \Delta$$

اصابع طول‌های Δl_l و Δl_r را بر حسب نیروهای S_r و S_l بیان می‌کنیم.

$$1.73 \frac{S_r l}{EA \sin 60^\circ} + \frac{S_l l}{EA \sin 30^\circ} = \Delta$$

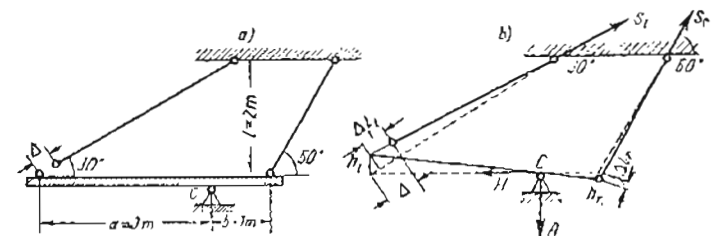
پس از ساده کردن

$$S_r + S_l = \frac{\Delta EA}{2l} \quad (2)$$

۱۵۴

مسئله ۱۷ - ۲

میله صلی (شکل ۲۸ a - ۲) به وسیله نکیه گاه مفصلی C و دو مهار فولادی با سطح مقطع یکسان نگهداشته شده است. مهار سمت چپ به اندازه $\Delta = 1 \text{ mm}$ کوچکتر از اندازه طرح شده ناحیه تنده است. تنسرها را در مهارها پس از سوار کردن سازه پیدا کنید. برای فولاد $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.



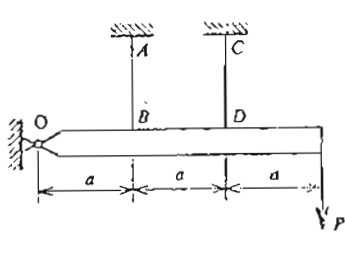
شکل ۲۸ - ۲

حل: پس از سوار کردن سازه، میله طبق به حالت مایل شکل ۲۸ b - ۲ در خواهد آمد. میله سمت چپ به اندازه Δl_r و میله سمت راست به اندازه Δl_l اضافه طول پیدا خواهد کرد. در دو میله چپ و راست به ترتیب نیروهای S_r و S_l ایجاد خواهد شد. از معادله تعادل لنگری حول نقطه C حاصل می‌نمود

$$S_l a \sin 30^\circ = S_r b \sin 60^\circ$$

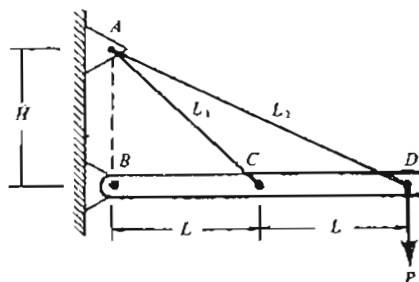
$$S_r = \frac{a \sin 30^\circ}{b \sin 60^\circ} S_l = \frac{3 \times 0.5}{1 \times 0.866} S_l = 1.73 S_l \quad (1)$$

۱۵۷



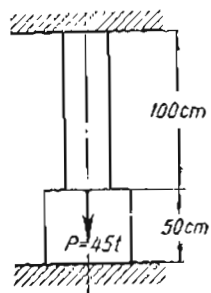
شکل ۲-۲-۱

وارد شود نیروهای کششی ایجاد شده در هر یک از سیم‌ها را حساب کنید.

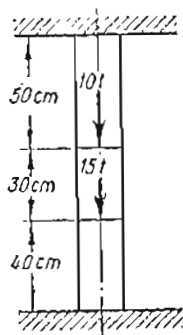


شکل ۲-۲-۲

مسئله ۲-۲-۳ ستون شکل ۲-۲-۳ در دو انتهای فوقانی و تحتانی گیر دار و دارای سطح مقطع 10 cm^2 در قسمت فوقانی و 40 cm^2 در قسمت تحتانی می‌باشد. تنش‌ها را در هر یک از قسمت‌های ستون تعیین کنید.



شکل ۲-۲-۳



شکل ۲-۲-۴

مسئله ۲-۲-۴ میله شکل ۲-۲-۴ در دو انتها گیر دار می‌باشد و سطح مقطع آن 10 cm^2 است. تنش‌ها را در قسمت‌های مختلف میله حساب کنید.

۱۵۶

معادلات ۱ و ۲ را بر حسب سبب‌های میله‌ها $\sigma_1 = S_1/A$ و $\sigma_r = S_r/A$ بیان می‌کنیم.

$$\sigma_r = 1.73\sigma_1 ; \quad \sigma_r + \sigma_1 = \frac{\Delta E}{2l}$$

از حل معادلات فوق سبب‌ها به دست می‌آیند.

$$\sigma_1 = 0.184 \frac{\Delta E}{l} = \frac{0.184(0.1)(2 \times 10^6)}{200} = 184 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_r = 0.317 \frac{\Delta E}{l} = \frac{0.317(0.1)(2 \times 10^6)}{200} = 317 \text{ Kg/cm}^2$$

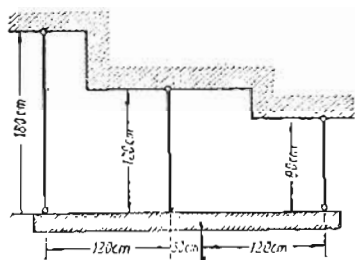
۲-۵ مسائل حل نشده

مسئله ۲-۲-۱ میله صلیبی به طول $5a$ به وسیله دو کابل مسابه AB و CD نگاهداشته شده است. سطح مقطع هر یک از کابل‌ها $A = 20 \text{ cm}^2$ می‌باشد و بار $P = 25000 \text{ Kg}$ در انتهای میله وارد می‌شود. تنش‌ها را در کابل‌ها پیدا کنید.

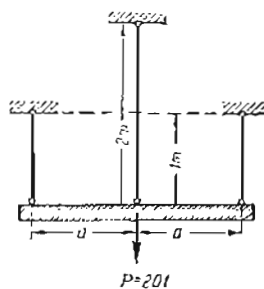
مسئله ۲-۲-۲ در شکل ۲-۲-۲ میله صلب BD به وسیله سیم‌های AC و AD نگهداشته شده است. سیم‌ها در ابتدا بدون تنش می‌باشد و از وزن همه قطعات صرف‌نظر می‌شود. صریح ارنجاعی هر دو سیم یکسان می‌باشد. پس از اینکه بار P در نقطه D

۱۵۹

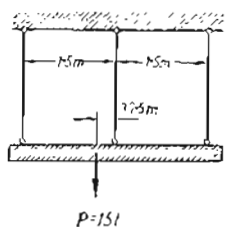
سطح مقطع لازم میله‌ها را تعیین کنید. سطح مقطع میله‌ها یکسان می‌باشد.



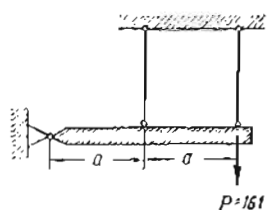
شکل ۲-۲-۸



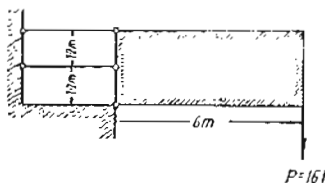
شکل ۲-۲-۹



شکل ۲-۲-۱۰



شکل ۲-۲-۱۱



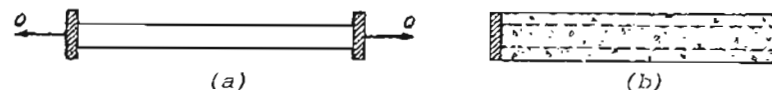
شکل ۲-۲-۱۲

۱۵۸

مسئله ۲-۲-۵ مساحت سطح مقطع س در یک ستون بتن مسلح کوتاه 645 cm^2 می‌باشد. در ستون مزبور چهار میله فولادی طولی که مساحت سطح مقطع هر یک 10 cm^2 می‌باشد به‌طور متقارن به کار رفته است. اگر تنش مجاز بتن 80 Kg/cm^2 و تنش مجاز فولاد 1400 Kg/cm^2 باشد بار مجاز ستون را محاسبه کنید. ضرایب ارتجاعی فولاد و بتن به ترتیب $2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد.

مسئله ۲-۲-۶ یک ستون بتنی با مقطع مربع به وسیله چهار میله فولادی مسلح شده است. مساحت سطح مقطع میله‌های فولادی یک در صد مساحت سطح مقطع ستون می‌باشد. تنش مجاز برای بتن 60 Kg/cm^2 و برای فولاد 1200 Kg/cm^2 است. نسبت ضریب ارتجاعی فولاد به ضریب ارتجاعی بتن ۱۰ می‌باشد. ستون بار 100 t را حمل می‌کند. عرض ستون و قطر میله‌ها چقدر باید باشد؟

مسئله ۲-۲-۷ تیرهای بتنی پیش‌نمیده به صورت زیر ساخته می‌شوند: کابل‌های فولادی بین دو صفحه انتهایی صلب تحت تنش کششی σ_0 کشیده می‌شوند (شکل ۲-۲-۷ a). سپس بتن در اطراف کابل‌ها ریخته می‌شود تا به شکل b ۲-۲-۷ بدست آید. بعد از اینکه بتن گرم نیروهای خارجی Q برداشته می‌شود تا بتن بین میله‌ها گردهد. اگر ضرایب ارتجاعی فولاد و بتن به نسبت ۱۲ به ۱ و مساحت سطح مقطع آنها به نسبت ۱ به ۱۵ باشد تنش‌های باقی مانده نهایی را در دو مصالح حساب کنید.



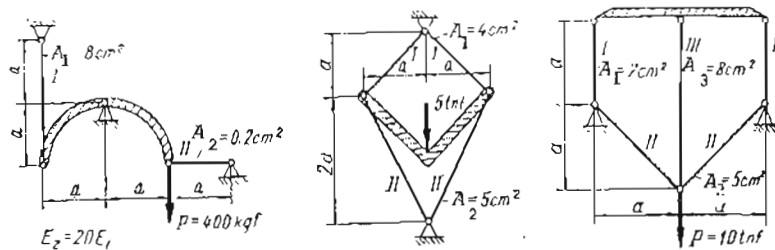
شکل ۲-۲-۷

مسئله ۲-۲-۸ تا ۲-۲-۱۲ در هر یک از شکل‌های ۲-۲-۸ تا ۲-۲-۱۲ حجم صلبی توسط تعدادی میله فولادی نگهداشته شده است. با فرض اینکه ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش مجاز آن 1600 Kg/cm^2 باشد مساحت

مسئله ۲-۲-۱۳ در شکل ۲-۲-۱۳ به عضو خرپا دارای سطح مقطع یکسان می‌باشد. با فرض اینکه ضریب ارتجاعی و تنش مجاز آنها به ترتیب $2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و 1600 Kg/cm^2 باشد مساحت سطح مقطع آنها را تعیین کنید.

مسئله ۲-۲-۱۴ حجم صلبی توسط دو کابل فولادی با ضریب ارتجاعی $2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش مجاز 1600 Kg/cm^2 آویزان می‌باشد (شکل ۲-۲-۱۴). کابل ۱ باید سطح مقطعی دو برابر سطح مقطع کابل ۲ داشته باشد. مساحت سطح مقطع هر یک از کابل‌ها را تعیین کنید.

۱۶۱



شکل ۲-۲-۲۱

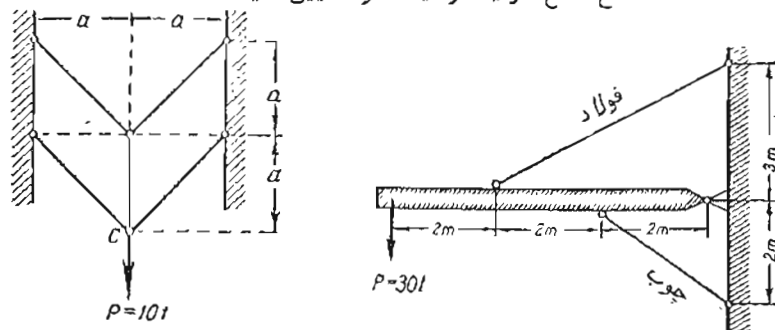
شکل ۲-۲-۲۲

شکل ۲-۲-۲۳

مسئله ۲-۲-۲۴ در شکل ۲-۲-۲۴ تغییر مکان قائم مفصل C را محاسبه کنید. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها 5cm^2 می‌باشد. $a=1\text{m}$. $E=2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$.

مسئله ۲-۲-۲۵ در شکل ۲-۲-۲۵ میله صلبی به وسیله یک اتصال مفصلی، یک مهار فولادی و یک ستون چوبی به دیوار متصل شده است. اگر مساحت سطح مقطع ستون ده برابر مساحت سطح مقطع مهار فولادی و تنش‌های مجاز فولاد و چوب به ترتیب 1600Kg/cm^2 و 60Kg/cm^2 باشد مساحت سطح مقطع آنها را تعیین کنید. ضرائب ارتجاعی فولاد و چوب به ترتیب $2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ و 10^5Kg/cm^2 می‌باشند.

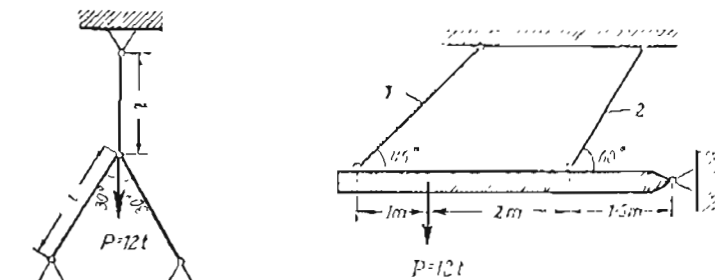
مسئله ۲-۲-۲۶ در سازه شکل ۲-۲-۲۶ میله ۱ از چدن با تنش مجاز 800Kg/cm^2 میله ۲ از مس با تنش مجاز 600Kg/cm^2 و میله ۳ از فولاد با تنش مجاز 1200Kg/cm^2 می‌باشد. مساحت سطح مقطع میله‌های ۱ و ۲ یکسان و مساحت سطح مقطع میله ۳ نصف مساحت سطح مقطع میله‌های ۱ و ۲ است. ضرائب ارتجاعی چدن، مس و فولاد به ترتیب $1.2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ ، 10^6Kg/cm^2 و $2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ می‌باشد. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها را تعیین کنید.



شکل ۲-۲-۲۴

شکل ۲-۲-۲۵

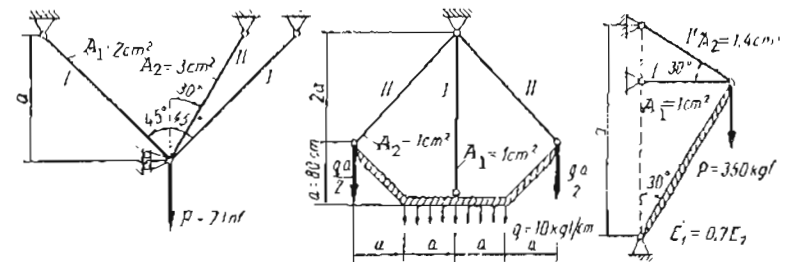
۱۶۰



شکل ۲-۲-۱۳

شکل ۲-۲-۱۴

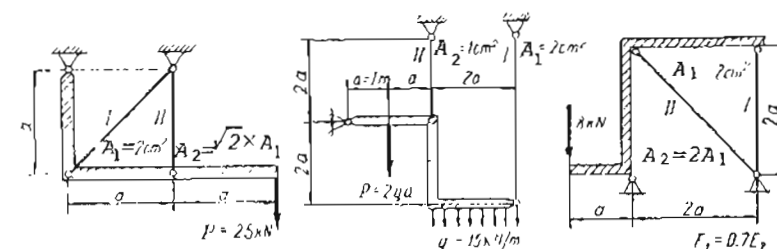
مسئله ۲-۲-۱۵ تا ۲-۲-۲۳ در شکل‌های ۲-۲-۱۵ تا ۲-۲-۲۳ تنش‌ها را در میله‌ها تعیین کنید. اگر صریب ارتجاعی E مشخص نمی‌باشد آن را برای تمام میله‌ها یکسان فرض کنید.



شکل ۲-۲-۱۵

شکل ۲-۲-۱۶

شکل ۲-۲-۱۷



شکل ۲-۲-۱۸

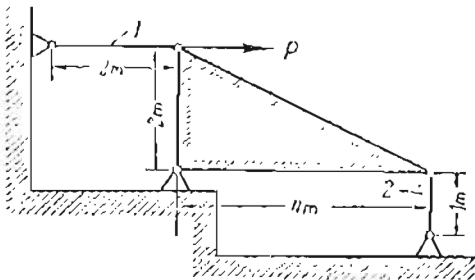
شکل ۲-۲-۱۹

شکل ۲-۲-۲۰

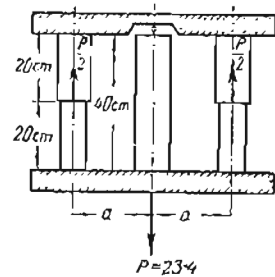
۱۶۳

مسئله ۲-۲-۲۷ در سازه شکل ۲-۲-۲۷ میل‌های ۱ از فولاد با سطح مقطع 10 cm^2 و میل‌های ۲ از مس با سطح مقطع 20 cm^2 می‌باشد. تنش‌های ایجاد شده در میل‌ها را تحت بار گذاری نشان داده شده تعیین کنید.

مسئله ۲-۲-۳۰ سازه صلب شکل ۲-۲-۳۰ بر چهار میل می‌باشد که همگی از یک نوع مصالح و یکسان با مساحت سطح مقطع 25 cm^2 می‌باشند. تنش‌ها را در میل‌ها تعیین کنید.



شکل ۲-۲-۲۸



شکل ۲-۲-۲۹

مسئله ۲-۲-۳۱ دال مربع شکلی بر روی چهار ستون به صورت متقارن تکیه دارد (شکل ۲-۲-۳۱). ستون‌ها از یک نوع مصالح و دارای طول و سطح مقطع یکسان می‌باشند. با صرف نظر نمودن از تغییر شکل دال نیروهای وارد بر ستون‌ها را حساب کنید.

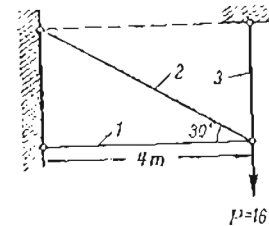
مسئله ۲-۲-۳۲ یک دال مستطیلی صلب بر روی چهار ستون با سطح مقطع، طول و جنس یکسان تکیه دارد (شکل ۲-۲-۳۲). نیروها را در هر یک از ستون‌ها پیدا کنید.

مسئله ۲-۲-۳۳ میل الومینیومی شکل ۲-۲-۳۳ با سطح مقطع 20 cm^2 بدون بار به طول 25.004 cm می‌باشد. لوله فولادی دارای همان سطح مقطع و تحت همان شرایط به طول 25 cm می‌باشد. تحت چه بار P تنش‌های ایجاد شده در فولاد و

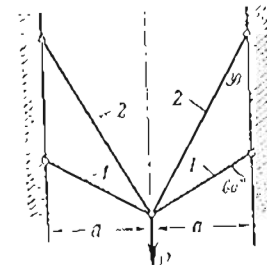
۱۶۴

مسئله ۲-۲-۲۷ در سازه شکل ۲-۲-۲۷ میل‌های ۱ از فولاد با سطح مقطع 10 cm^2 و میل‌های ۲ از مس با سطح مقطع 20 cm^2 می‌باشند. تنش‌های ایجاد شده در میل‌ها را تحت بار گذاری نشان داده شده تعیین کنید.

مسئله ۲-۲-۲۸ سازه صلب شکل ۲-۲-۲۸ به وسیله یک مفصل و دو میل به فونداسیون متصل شده است. میل ۱ از فولاد (با تنش مجاز 1600 Kg/cm^2 و ضریب ارتجاعی $2 \times 10^6\text{ Kg/cm}^2$) و میل ۲ از چدن (با تنش مجاز 1000 Kg/cm^2 و ضریب ارتجاعی $1.2 \times 10^6\text{ Kg/cm}^2$) می‌باشد. مساحت سطح مقطع میل‌های فولادی و چدنی به ترتیب 30 cm^2 و 50 cm^2 می‌باشد. حداکثر بار مجاز P را تعیین کنید.



شکل ۲-۲-۲۶



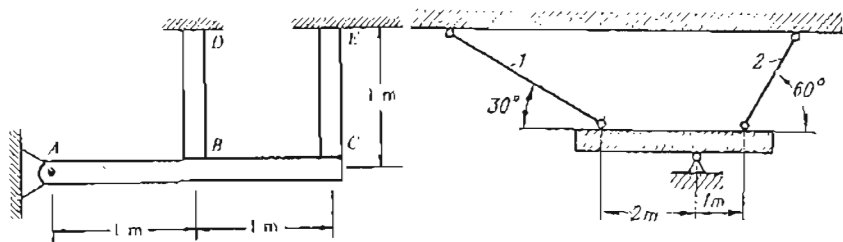
شکل ۲-۲-۲۷

مسئله ۲-۲-۲۹ دو میل صلب به وسیله سه میل مطابق شکل ۲-۲-۲۹ به یکدیگر متصل شده‌اند. میل‌های کناری از فولاد با سطح مقطع قسمت فوقانی برابر 16 cm^2 و سطح مقطع قسمت نحاسی برابر 10 cm^2 می‌باشد. میل وسطی از مس با مساحت سطح مقطع برابر 20 cm^2 است. سری با ثابت سری $k = 0.8 \times 10^6\text{ Kg/cm}$ بین انتهای فوقانی میل وسط و میل صلب فوقانی قرار دارد. ضرایب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب

۱۶۵

مسئله ۲-۲-۳۵ سازه صلب شکل ۲-۲-۳۵-۲ بوسیله یک مفصل و سه مهار فولادی با سطح مقطع و طول یکسان به فونداسیون متصل شده است. اگر تنش مجاز فولاد $\sigma = 1600 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی آن $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد مساحت سطح مقطع لارم مهارها را حساب کنید.

مسئله ۲-۳-۱ میله AC در شکل ۲-۳-۱ کاملاً "صلب و در نقطه A مفصلی و در نقاط B و C به دو میله DB و EC آویزان می‌باشد. وزن AC برابر 50 kN و وزن دو میله دیگر قابل صرف نظر می‌باشد. درجه حرارت هر دو میله DB و CE به اندازه 35°C افزایش می‌یابد. تنش‌های ایجاد شده در دو میله را حساب کنید. DB از مس با $E = 90000 \text{ MN/m}^2$ ، $\alpha = 18 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و مساحت سطح مقطع برابر 1000 mm^2 و CE از فولاد با $E = 200000 \text{ MN/m}^2$ ، $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و مساحت سطح مقطع 500 mm^2 می‌باشد. اگر امکان کماتش جانبی میله‌ها صرف نظر کنید.



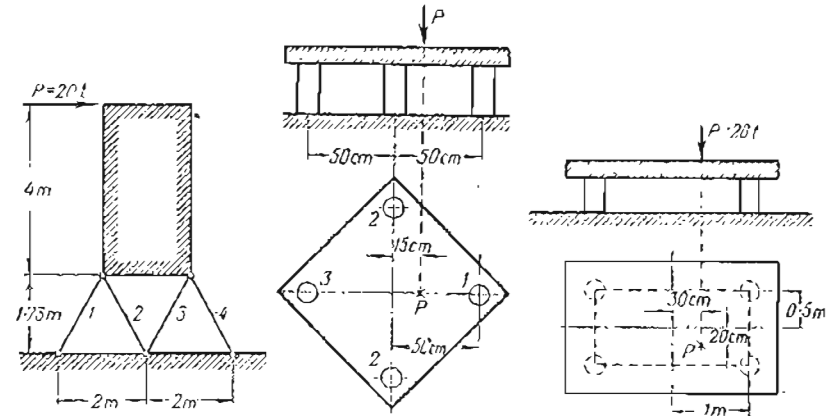
شکل ۲-۳-۱

شکل ۲-۳-۲

مسئله ۲-۳-۲ میله صلبی مطابق شکل ۲-۳-۲-۲ متکی بر یک تکیه گاه مفصلی و به وسیله دو میله با سطح مقطع یکسان 40 cm^2 آویزان است. پس از نصب میله‌ها درجه حرارت به اندازه 20°C اضافه می‌شود. تنش‌های حرارتی در میله‌ها را حساب کنید.

مسئله ۲-۳-۳ تا ۲-۳-۸ اگر Δ خطای تولید (اندازه نبودن) یکی از اعضاء نشان داده شده در شکل باشد تنش‌های ناشی از سوار کردن سازه را پیدا کنید.

۱۶۴



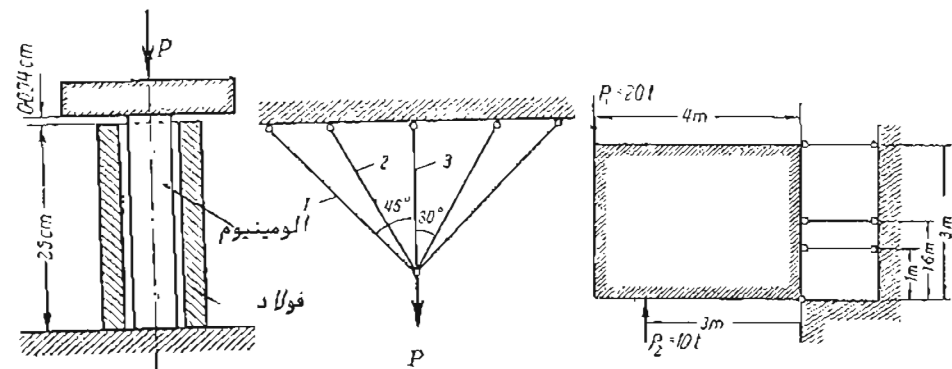
شکل ۲-۲-۳۰

شکل ۲-۲-۳۱

شکل ۲-۲-۳۲

الومینیوم مساری خواهند بود ؟ صرافت ارتجاعی فولاد و الومینیوم به‌ترتیب برابر $2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $0.7 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد.

مسئله ۲-۲-۳۴ تمام میله‌های خرپای شکل ۲-۲-۳۴ یکسان و به قطر 3 cm و از یک نوع مصالح می‌باشند. تنش‌ها را در میله‌ها تعیین کنید. بار P برابر 30 t است.



شکل ۲-۲-۳۳

شکل ۲-۲-۳۴

شکل ۲-۲-۳۵

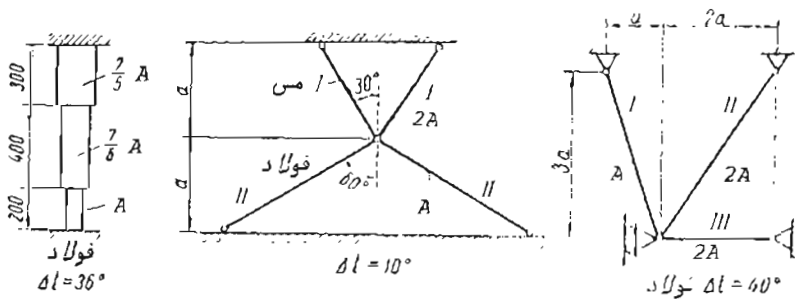
۱۶۷

$\Delta t_i =$ تغییر درجه حرارت عضو i از سازه

برای فولاد: $\alpha = 125 \times 10^{-7} \text{C}^{-1}$, $E = 2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$

برای مس: $\alpha = 165 \times 10^{-7} \text{C}^{-1}$, $E = 10^6 \text{Kg/cm}^2$

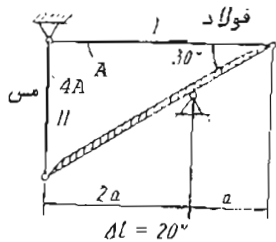
در مسائل ۱۳-۲، ۱۵-۲-۳ و ۱۶-۲-۳ برای فولاد: $E = 2 \times 10^5 \text{MN/m}^2$



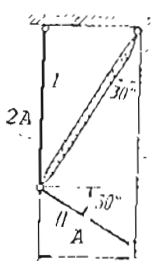
شکل ۲-۳-۹

شکل ۲-۳-۱۰

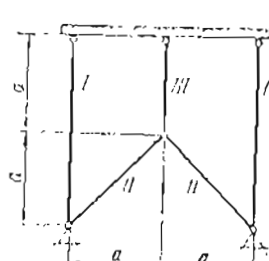
شکل ۲-۳-۱۱



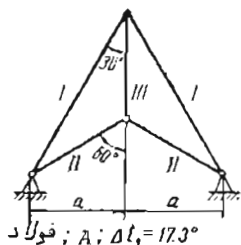
شکل ۲-۳-۱۲



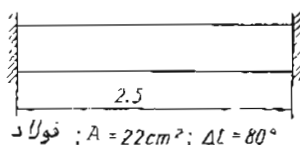
شکل ۲-۳-۱۳



شکل ۲-۳-۱۴



شکل ۲-۳-۱۵

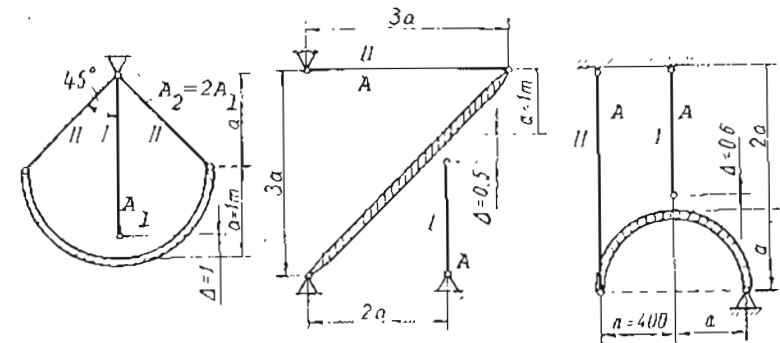


شکل ۲-۳-۱۶

دیوارهای ارتجاعی
هر یک با تغییر مکان
0.25 mm برای نیروی
10 t
فولاد: $A = 22 \text{cm}^2$; $\Delta t = 80^\circ$

۱۶۶

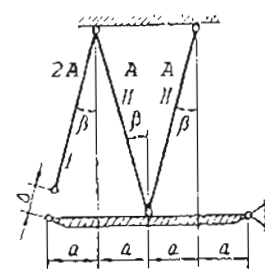
ضریب ارتجاعی میلها را $E = 2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ فرض کنید. در مسائل ۷-۳-۲ و ۸-۳-۲ فرض کنید: $E = 2 \times 10^5 \text{MN/m}^2$



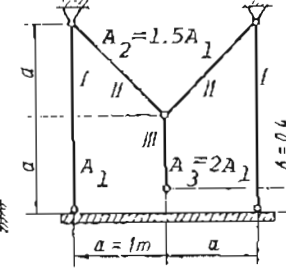
شکل ۲-۳-۳

شکل ۲-۳-۴

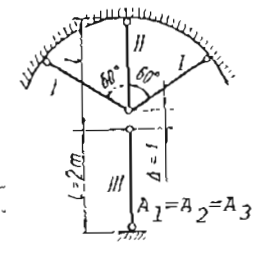
شکل ۲-۳-۵



شکل ۲-۳-۶



شکل ۲-۳-۷

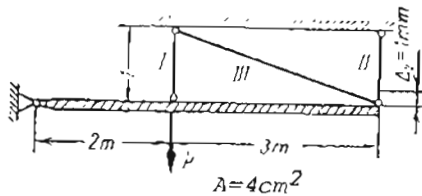


شکل ۲-۳-۸

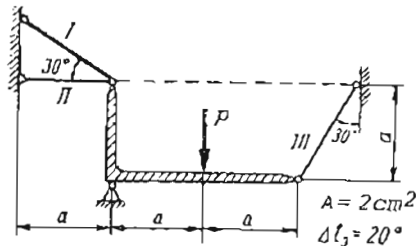
مسئله ۲-۳-۹ تا ۲-۳-۱۶ تنش های ناشی از تغییر درجه حرارت را در هر یک از سازه ها پیدا کنید. در شکل های ۲-۳-۹ تا ۲-۳-۱۶:

تغییر درجه حرارت تمام سازه بر حسب درجه سانتیگراد $\Delta t =$

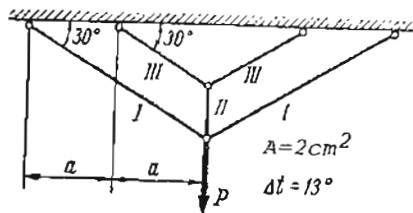
۱۶۹



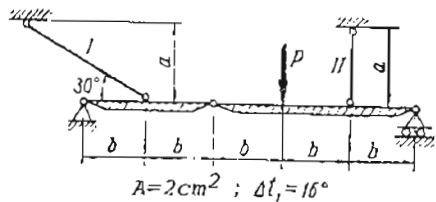
شکل ۲-۳-۲۳



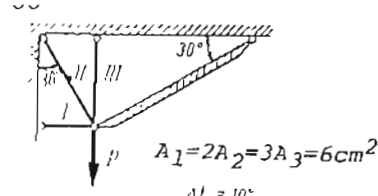
شکل ۲-۳-۲۵



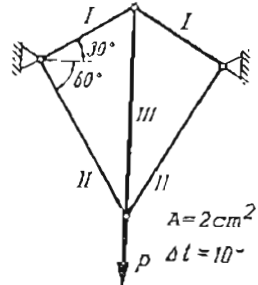
شکل ۲-۳-۲۷



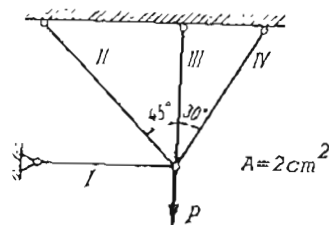
شکل ۲-۳-۲۹



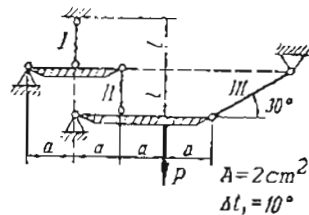
شکل ۲-۳-۲۴



شکل ۲-۳-۲۶



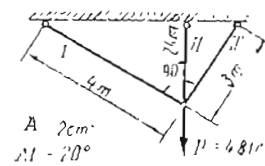
شکل ۲-۳-۲۸



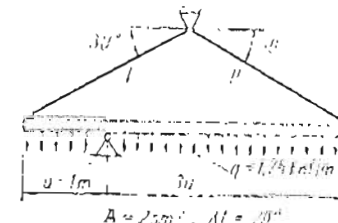
شکل ۲-۳-۳۰

۱۶۸

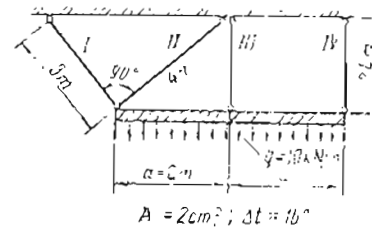
مسئله ۲-۳-۱۷ تا ۲-۳-۲۲ تنش‌های ناشی از عمل نیروها و تغییر درجه حرارت را پیدا کنید. برای مسئله ۲-۳-۲۱ و ۲-۳-۲۲ فرض کنید: $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ می‌باشد. در مسائل ۲-۳-۲۱ و ۲-۳-۲۲ فرض کنید: $E = 2 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$.



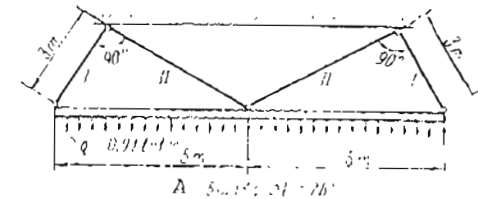
شکل ۲-۳-۱۷



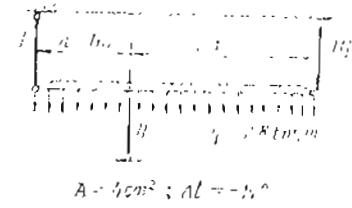
شکل ۲-۳-۱۹



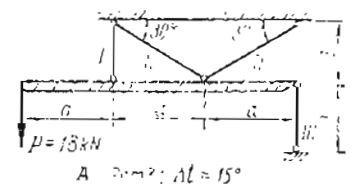
شکل ۲-۳-۲۱



شکل ۲-۳-۱۸



شکل ۲-۳-۲۰

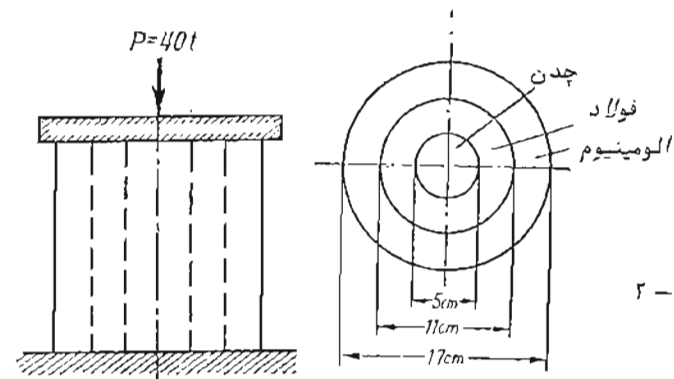


شکل ۲-۳-۲۲

مسئله ۲-۳-۲۳ تا ۲-۳-۳۰ بر مبنای تنش محاز، حداکثر بار محاز را تعیین کنید. همچنین تنش‌های حرارتی و مابقی را اندازه نبودن یکی از اعضا را برای حالات

۱۷۰

مشخص شده در روی شکل‌ها پیدا کنید. برای میله‌ها فرض کنید: $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$
 $\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و $\sigma_w = 1600 \text{ Kg/cm}^2$ در مسائل ۲-۳-۲۸ و ۲-۳-۲۵
 فرض کنید: $\sigma_w = 160 \text{ N/m}^2$ و $E = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$



شکل ۲-۳-۳۲

مسئله ۲-۳-۳۱ تعیین کنید فاصله لازم بین ریل‌های آهن را برای اینکه در تابستان آنها یکدیگر را تحت فشار قرار ندهند. ریل‌ها در درجه حرارت 10°C جاگذاشته شده‌اند و حداکثر درجه حرارت تابستان 60°C می‌باشد. طول ریل‌ها ۸ m است. اگر بین ریل‌ها فاصله گذاشته شود چه سش‌هایی در آنها ایجاد خواهد شد؟ $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

مسئله ۲-۳-۳۲ یک میله چدنی کوتاه در داخل یک لوله فولادی به آزادی قرار دارد و هر دو آنها در داخل یک لوله الومینیومی قرار دارند. سش‌هایی را که در اثر بار $P=40 \text{ t}$ بوسیله یک دال صلب در لوله‌ها و میله چدنی ایجاد می‌شود حساب کنید. ضرائب ارتعاشی چدن، فولاد و الومینیوم به ترتیب 1.2×10^6 ، 2×10^6 و $0.7 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشند (شکل ۲-۳-۳۲).

۱۷۱

۲-۶ جواب‌های مسائل حل نشده

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \sigma_{CD} = 750 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۲-۲-۱$$

: ۲-۲-۲

$$\text{نیرو در AD} = \frac{2P}{\frac{A_1 L_2^2 H}{2A_2 L_1^3} + \frac{2H}{L_2}}$$

$$\text{نیرو در AC} = \frac{2P}{\frac{4HA_2 L_1^2}{A_1 L_2^3} + \frac{H}{L_1}}$$

: ۲-۲-۳ تنش در قسمت فوقانی 500 Kg/cm^2 و در قسمت تحتانی -1000 Kg/cm^2 می‌باشد.

: ۲-۲-۴ تنش‌ها از بالا به پایین به ترتیب عبارتند از ۸۳ و -1417 Kg/cm^2

: ۲-۲-۵ 83.6 t

: ۲-۲-۶ $d = 22 \text{ mm}$; $a = 39 \text{ cm}$

۱۷۲

$$0.895 \text{ mm} : ۲-۲-۲۴$$

$$\text{مولد} = 50 \text{ cm}^2 ; \text{جوب} = 500 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۲۵$$

$$A_1 = A_2 = 24.6 \text{ cm}^2 ; A_3 = 12.3 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۲۶$$

$$112.5 \text{ t} : ۲-۲-۲۸ \quad 32.8 \text{ t} : ۲-۲-۲۷$$

$$\text{در میل مسی} = 144 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۲۹$$

$$\text{در قسمت موفانی} = -90 \text{ Kg/cm}^2 ; \text{در سمت حثانی} = 1026 \text{ Kg/cm}^2$$

میل‌های فولادی میل‌های فولادی

$$\sigma_1 = 1330 ; \sigma_2 = 525 ; \sigma_3 = -525 : ۲-۲-۳۰$$

$$\sigma_4 = -1330 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_1 = 0.4P ; F_2 = 0.25P ; F_3 = 0.1P : ۲-۲-۳۱$$

$$F_1 = 1.5t ; F_2 = 4.5t ; F_3 = 3.5t ; F_4 = 5.5t : ۲-۲-۳۲$$

$$6.9 \text{ t} : ۲-۲-۳۳$$

$$\sigma_1 = 707 ; \sigma_2 = 1060 ; \sigma_3 = 1414 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} : ۲-۲-۳۴$$

$$7.65 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۳۵$$

$$\sigma_{st} = 72 \text{ MPa} ; \sigma_{cu} = -21.7 \text{ MPa} : ۲-۲-۳۶$$

$$\sigma_1 = -470 ; \sigma_2 = -542 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۳۷$$

$$\sigma_1 = 739 ; \sigma_2 = 261 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۳۸$$

۱۷۳

$$\sigma_s = \frac{5}{9} \sigma_0 ; \sigma_c = -\frac{\sigma_0}{27} : ۲-۲-۳۹$$

$$5 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۰ \quad 3.78 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۱$$

$$8 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۲ \quad 4.3 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۳$$

$$3 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۴ \quad 20 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۵$$

$$A_1 = 7.5 \text{ cm}^2 ; A_2 = 3.75 \text{ cm}^2 : ۲-۲-۴۶$$

$$\sigma_1 = 1040 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_2 = 1560 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۴۷$$

$$\sigma_1 = 1164 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_2 = 875 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۴۸$$

$$\sigma_1 = 61 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_2 = 87 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۴۹$$

$$\sigma_1 = 70.7 \text{ MN/m}^2 ; \sigma_2 = 141.4 \text{ MN/m}^2 : ۲-۲-۵۰$$

$$120 \text{ MN/m}^2 : ۲-۲-۵۱$$

$$\sigma_1 = 10 \text{ MN/m}^2 ; \sigma_2 = 7.1 \text{ MN/m}^2 : ۲-۲-۵۲$$

$$\sigma_1 = 25 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_2 = 1000 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۵۳$$

$$\sigma_1 = 390 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_2 = 312 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۵۴$$

$$\sigma_1 = 903 ; \sigma_2 = 905 ; \sigma_3 = 452 \text{ Kg/cm}^2 : ۲-۲-۵۵$$

۱۷۵

800 ; 450 Kg/cm² : ۲-۲-۱۸

144 ; 192 Kg/cm²

500 ; 1500 Kg/cm² : ۲-۲-۱۹

576 ; 192 Kg/cm²

400 ; 450 ; 550 Kg/cm² : ۲-۲-۲۰

288 ; 432 ; 144 Kg/cm²

50 ; 37.5 ; 75 ; 62.5 MN/m² : ۲-۲-۲۱

48 ; 36 ; 12 ; 6 MN/m²

130 ; 10 ; 50 MN/m² : ۲-۲-۲۲

16 ; 32 ; 16 MN/m²

P = 19.1t ; 671 ; 322 ; 168 Kg/cm² : ۲-۲-۲۳

P = 14.3t ; 147 ; 93 ; 93 Kg/cm² : ۲-۲-۲۴

P = 9.06t ; 229 ; 294 ; 280 Kg/cm² : ۲-۲-۲۵

P = 7.14t ; 93 ; 93 ; 54 Kg/cm² : ۲-۲-۲۶

P = 5.2 t ; 72 Kg/cm² : ۲-۲-۲۷

P = 63 kN : ۲-۲-۲۸

P = 2.05t ; 300 ; 225 Kg/cm² : ۲-۲-۲۹

۱۷۶

$\sigma_1 = 300$; $\sigma_2 = 200$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۰

$\sigma_1 = 1091$; $\sigma_2 = 545$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۱

$\sigma_1 = \frac{\Delta E}{5a} \sin \delta$; $\sigma_2 = \frac{2\Delta E}{5a} \sin \delta$: ۲-۲-۳۲

$\sigma_1 = 16.4$; $\sigma_2 = 15.4$; $\sigma_3 = 16.4$ MN/m² : ۲-۲-۳۳

$\sigma_1 = 20$; $\sigma_2 = 40$; $\sigma_3 = 60$ MN/m² : ۲-۲-۳۴

$\sigma_1 = 764$; $\sigma_2 = 917$; $\sigma_3 = 1070$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۵

$\sigma_1 = 87$; $\sigma_2 = 302$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۶

$\sigma_1 = 172$; $\sigma_2 = 98$; $\sigma_3 = 1000$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۷

$\sigma_1 = 596$; $\sigma_2 = 43$ Kg/cm² : ۲-۲-۳۸

35 MN/m² : ۲-۲-۳۹

$\sigma_1 = 513$; $\sigma_2 = 726$; $\sigma_3 = 1025$ Kg/cm² : ۲-۲-۴۰

$\sigma_1 = 6$; $\sigma_2 = 10.4$; $\sigma_3 = 10.4$ MN/m² : ۲-۲-۴۱

106 MN/m² : ۲-۲-۴۲

800 ; 600 ; 1400 Kg/cm² : ۲-۲-۴۳

120 ; 200 ; 160 Kg/cm²

۱۷۶

$$P = 28.3 \text{ kN} \quad ; \quad 16.3 \quad ; \quad 8.1 \quad ; \quad 5.4 \text{ MN/m}^2 \quad : \quad ۲-۳-۲۰$$

$$5 \text{ mm} \quad ; \quad \sigma = -1250 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \quad ۲-۳-۳۱$$

فصل سوم

رفتار غیر ارتجاعی و تحلیل خمیری سازه‌های کششی و فشاری

۱-۳ رفتار غیر خطی

در فصل‌های قبل همواره فرض بر این بود که مصالح سازه از قانون هوک پیروی می‌کند. حال بیاییم رفتار سازه‌ها در کشش و فشار را وقتی تنش از حد تناسب تجاوز می‌کند بررسی کنیم. فرض می‌کنیم منحنی تنش- کرنش برای مصالح سازه معلوم باشد. اگر سازه به طور استاتیکی معین یا ایزو استاتیک باشد، نیروهای محوری را می‌توان بدون مطالعه خواص مصالح از معادلات تعادل بدست آورد. سپس با داشتن نیروها می‌توان تنش‌ها را در هر نقطه سازه محاسبه نمود. بالاخره با استفاده از نمودار تنش - کرنش، کرنش در هر نقطه و از روی آن تغییر طول هر عضو بدست می‌آید. این روش حل برای سازه‌های ایزو استاتیک کاملاً "آسان" است (مسئله ۱-۳ را در این فصل ببینید).

تحلیل در یک سازه همپیر استاتیک بسیار پیچیده تر می‌شود زیرا نیروها را نمی‌توان بدون یافتن تغییر مکان‌ها پیدا کرد و خود تغییر مکان‌ها بستگی به نیروها و رابطه تنش- کرنش دارند. برای چنین سازه‌هایی روش آزمون و خطا یا روش تقریبات متوالی را می‌توان بکار برد. برای نشان دادن یکی از روش‌های تحلیل، دوباره خرپای سه میله‌ای و متقارن شکل ۱۲-۳ را در نظر می‌گیریم ولی در اینجا فرض می‌کنیم مصالح خرپا دارای منحنی تنش- کرنش شکل ۱۲-۳ b باشد.

تحلیل خرپای مزبور را با انتخاب یک تغییر مکان قائم فرضی و آزمایشی δ در مفصل D شروع می‌کنیم. سپس با رسم نمودار ویلیو برای مفصل D اضافه طول‌های سه

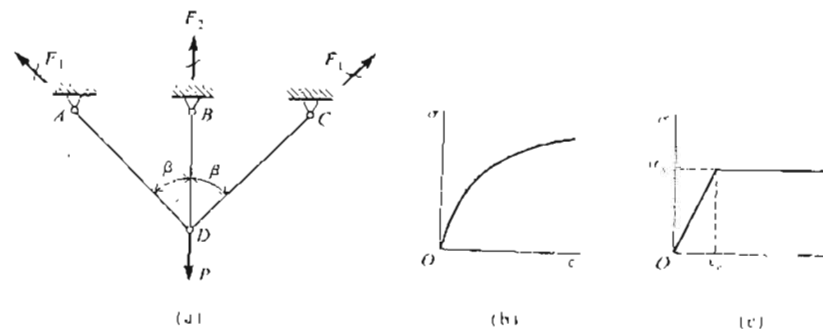
می‌توان تغییر شکل‌های خرابی و نیروها در اعضا آن را برای هر مقدار معین بار P دست آورد. بدین ترتیب می‌توانیم تصویر کاملی از رفتار خرابی همچنانکه بار از صفر تا یک مقدار ماکزیمم افزایش می‌یابد به دست آوریم.

۳-۲ تحلیل خمیری

بعضی از مصالح (بخصوص فولاد سازه‌ای) یک ناحیه ارتجاعی خطی در محلی تنش-کرنش دارند که بعد از آن ناحیه تسلیم قابل ملاحظه‌ای وجود دارد. منحنی تنش-کرنش برای چنین مصالحی را همانطور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌شود می‌توان با تقریب خوب بوسیله دو خط مستقیم به صورت ایده‌آل در آورد. فرض می‌شود که ماده تا نقطه تسلیم از قانون هوک پیروی کند و بعد از آن تحت تنش ثابت تغییر شکل نامحدود دهد و به اصطلاح تسلیم شود. تنش و کرنش در نقطه تسلیم به ترتیب با σ_y و ϵ_y نشان داده می‌شود. ماده‌ای که بدون افزایش تنش تسلیم می‌شود به نام ماده کاملاً "خمیری خوانده می‌شود. البته منحنی تنش-کرنش فولاد به علت خاصیت سخت شوندگی سرانجام شیب پیدا می‌کند (همانطور که در بخش ۳-۱ بحث شد) ولی موفقی که سخت شوندگی فولاد شروع می‌شود تغییر شکل‌های خیلی زیادی رخ داده و سازه دیگر قابل استعاده نخواهد بود. از این رو استفاده از منحنی ایده‌آل شکل ۳-۱C برای تحلیل سازه‌های فولادی در ناحیه خمیری به صورت روش متداول درآمده است.

برای فولاد، منحنی شکل ۳-۱C هم برای کشش و هم برای فشار بکار می‌رود. ماده‌ای که منحنی تنش-کرنش آن مانند شکل مزبور باشد (یعنی ماده‌ای که منحنی تنش-کرنش آن دارای یک ناحیه ارتجاعی خطی می‌باشد که پس از آن ناحیه کاملاً "خمیری وجود دارد) به نام ماده ارتجاعی-خمیری موسوم می‌باشد. تحلیلی که براساس فرضیات فوق صورت گیرد تحلیل خمیری یا تحلیل حدی نامیده می‌شود.

روش تحلیل خمیری را می‌توان با مطالعه مجدد خرابی سازه میله‌ای متقارن شکل ۳-۱a شرح داد. با افزایش تدریجی بار P نیروهای میله‌ها نیز اضافه می‌گردد و تا زمانی که تنش‌ها کمتر از تنش تسلیم σ_y هستند نیروهای داخلی میله‌ها را می‌توان به وسیله یک تحلیل ارتجاعی بدست آورد (مثال ۳-۲ را ببینید). با افزایش نیروی P زمانی می‌رسد که تنش در میله وسطی که دارای نیروی بیشتری نسبت به میله‌های کناری می‌باشد (با فرض اینکه مساحت سطح مقطع همه میله‌ها یکسان باشد) به حد تنش تسلیم σ_y می‌رسد. این زمانی اتفاق می‌افتد که نیروی داخلی میله وسط، F_2 برابر



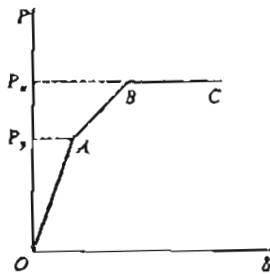
شکل ۳-۱ خرابی هیبر استاتیک با منحنی‌های تنش-کرنش غیر خطی

میله را بدست می‌آوریم. اس محاسبه ما را مطمئن می‌سازد که شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در مفصل D برقرار می‌باشد. قدم بعدی بررسی تعادل نیروها در مفصل D می‌باشد. کرنش‌های میله‌ها از روی ازدیاد طول آنها بدست می‌آید و سپس تنش‌ها را می‌توان از روی منحنی تنش-کرنش بدست آورد. با دانستن تنش‌ها می‌توانیم نیروها را در میله‌ها حساب و تعادل مفصل D را کنترل کنیم. اگر مقدار درست δ در ابتدا انتخاب شده باشد مشاهده خواهیم کرد که تعادل مفصل D برقرار می‌باشد. در غیر این صورت درخواهیم یافت که نیروها در تعادل نیستند و بنابراین باید مقدار آزمایشی جدیدی برای δ انتخاب و عمل بالا را تکرار نمود. با تکرار این عمل سرانجام مقداری از δ را خواهیم یافت که هر دو معادله تعادل و سازگاری تغییر مکان‌ها را در مفصل D قانع کند. در این صورت نیروهای نظیر در میله‌ها معادیر صحیح خواهند بود.

روش دیگری برای حل مسئله فوق وجود دارد که در آن ما ابتدا یک مقدار آزمایشی برای نیروی F_2 میله قائم انتخاب می‌کنیم. سپس با استفاده از معادلات تعادل نیروها در مفصل D می‌توان نیروها را در میله‌های مایل حساب نمود. پس از آن تنش‌ها در میله‌ها معین می‌شود و از روی تنش‌ها و منحنی تنش-کرنش، کرنش‌ها و اضافه طول‌ها به دست می‌آید. سرانجام از نمودار ویلیو در مفصل D می‌توان بررسی نمود که آیا تغییر طول‌های میله‌ها با یکدیگر سازگار هستند یا نه. اگر تغییر طول‌ها سازگار هستند در این صورت مقدار آزمایشی F_2 مقدار صحیح بوده و تحلیل کامل است. در غیر این صورت باید مقدار آزمایشی جدیدی برای F_2 انتخاب نمود و عملیات بالا را تکرار کرد تا هم معادله تعادل و هم معادله سازگاری تغییر مکان‌ها قانع شوند.

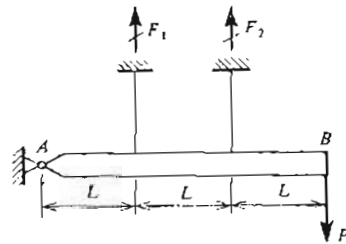
با تحلیل نمودن خرابی هیبر استاتیک شکل ۳-۱a به طریق مذکور در فوق

۱۸۱



شکل ۳-۲ منحنی بار-تغییر شکل خرابی شکل a (۳-۱)

شکل ۳-۳



شکل‌های زیاد عملاً به معای شکست سازه می‌باشد. از این جهت محاسبه بار نهایی P_u برای مهندسین سازه اهمیت زیادی دارد.

مثال ۳-۱

بار تسلیم P_y و بار نهایی P_u را برای سازه شکل ۳-۲ محاسبه کنید. میله افقی AB صلب می‌باشد و دو سیم قائم از یک نوع مصالح ارتجاعی - خمیری ساخته شده‌اند. با بکار بردن ضریب بار ۱.۸۵ بار مجاز P_w را نیز حساب کنید. فرض کنید هر دو سیم مساحت سطح مقطع یکسان A داشته باشند.

حل: با نوشتن معادله تعادل لنگری میله AB حول نقطه A رابطه‌ای بین نیروهای F_1 و F_2 در سیم‌ها بدست می‌آید.

$$F_1 + 2F_2 = 3P \quad (3-1)$$

این معادله برای تمام مقادیر P از صفر تا بار نهایی P_u صادق است. همچنین از شکل ۳-۲ واضح است که افزایش طول سیم سمت راست همواره دو برابر افزایش طول سیم سمت چپ می‌باشد. بنابراین

$$\delta_2 = 2\delta_1$$

در شرایط ارتجاعی اگر به جای افزایش طول‌ها بر حسب نیروها قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$F_2 = 2F_1$$

بنابراین با افزایش تدریجی بار P ابتدا نیروی F_2 به مقدار تسلیم $\sigma_y A$ می‌رسد. در این موقع F_1 برابر $\sigma_y A / 2$ می‌باشد و مقدار نظیر بار P که همان بار

۱۸۰

$\sigma_y A$ گردد (A مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها می‌باشد). با افزایش بیشتر بار P نیروهای میله‌های مایل نیز افزایش می‌یابند، ولی نیروی F_2 ثابت باقی می‌ماند زیرا میله وسط به حالت خمیری درآمده است. سرانجام میله‌های مایل نیز به حالت خمیری در خواهند آمد، در این موقع سازه دیگر نمی‌تواند هیچ بار اضافی را تحمل کند و میله‌ها تحت یک مقدار ثابت (و حداکثر) بار افزایش طول پیدا می‌کند. این بار موسوم به بار نهایی P_u می‌باشد.

پدیده فوق در شکل ۲-۳ به وسیله یک منحنی بار-تغییر شکل برای خرابی شکل a-۳ نشان داده شده است. در روی محور قائم بار P و در روی محور افقی تغییر مکان delta اتصال D خرابی برده شده است. از O تا A هر سه میله به حالت ارتجاعی هستند و نیروهای میله‌ها از مثال ۲-۲ بخش ۲-۲ عبارتند از

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad ; \quad F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta}$$

در نقطه A میله وسط تسلیم می‌شود و مقدار نظیر بار P بار تسلیم P_y خوانده می‌شود. اگر در معادله بالا به جای F_2 مقدار $\sigma_y A$ را قرار دهیم بار تسلیم به دست می‌آید.

$$P_y = \sigma_y A (1 + 2 \cos^3 \beta)$$

از A تا B نیروی میله وسط برابر $\sigma_y A$ باقی می‌ماند و نیروهای میله‌های مایل از معادله تعادل اتصال D (معادله ۲-۹) بدست می‌آیند.

$$F_1 = \frac{P - \sigma_y A}{2 \cos \beta}$$

در نقطه B میله‌های مایل نیز تسلیم می‌شوند، بنابراین $F_1 = \sigma_y A$ و از معادله تعادل اتصال D بار نهایی P_u بدست می‌آید.

$$P_u = \sigma_y A (1 + 2 \cos \beta)$$

از B تا C سازه تحت بار ثابت P_u به تغییر شکل ادامه می‌دهد. همانطوریکه قبلاً ذکر شد سرانجام پدیده سخت شوندگی کرنش رخ خواهد داد و در آن موقع سازه قادر خواهد بود بار بیشتری را تحمل کند، ولی بوجود آمدن تغییر

۱۸۳

حل: فرض کنید F نیروی داخلی میله‌های AB و BC باشد که به علت تقارن با یکدیگر مساوی هستند. از معادله تعادل مفصل B در امتداد قائم (شکل $c-۳$) نتیجه می‌شود:

$$2F \sin \theta - P = 0 \quad ; \quad F = \frac{P}{2 \sin \theta}$$

تنش در هر میله برابر است با

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{P}{2A \sin \theta}$$

تغییر شکل سیمی یا کرنش در هر یک از میله‌ها از رابطه تنش-کرنش و رابطه فوق بدست می‌آید.

$$\epsilon = \frac{\sigma^n}{B} = \frac{1}{B} \left(\frac{P}{2A \sin \theta} \right)^n$$

بنابراین ازدیاد طول هر یک از میله‌ها برابر است با

$$\overline{BB}_1 = \overline{BB}_2 = \epsilon L = \frac{L}{B} \left(\frac{P}{2A \sin \theta} \right)^n$$

با توجه به نمودار ویلیو برای مفصل B (شکل $a-۳$) تغییر مکان δ_B مفصل B مساویست با

$$\delta_B = \frac{\overline{BB}_1}{\sin \theta} = \frac{L}{B \sin \theta} \left(\frac{P}{2A \sin \theta} \right)^n$$

مسئله ۳-۲

میله صلب AB در شکل $a-۵$ روی تکیه گاه C به صورت اهرم تکیه دارد و بار P را در انتهای B حمل می‌کند. سیم مشابه که از ماده‌ای ارتجاعی-خمیری ساخته شده‌اند میله مزبور را نگه می‌دارند. بار تسلیم P_y و بار نهایی P_u را با فرض اینکه همه سیم‌ها سطح مقطع یکسان A داشته باشند پیدا کنید.

۱۸۲

تسلیم P_y است از معادله ۳-۱ بدست می‌آید.

$$P_y = \frac{5\sigma_y A}{6}$$

موقعی که بار P به حد بار نهایی P_u می‌رسد هر دو نیروی F_1 و F_2 برابر $\sigma_y A$ می‌گردند. در این صورت از معادله ۳-۱ نتیجه می‌شود

$$P_u = \sigma_y A$$

بار مجاز P_w با تقسیم نمودن بار نهایی بر ضریب بار بدست می‌آید.

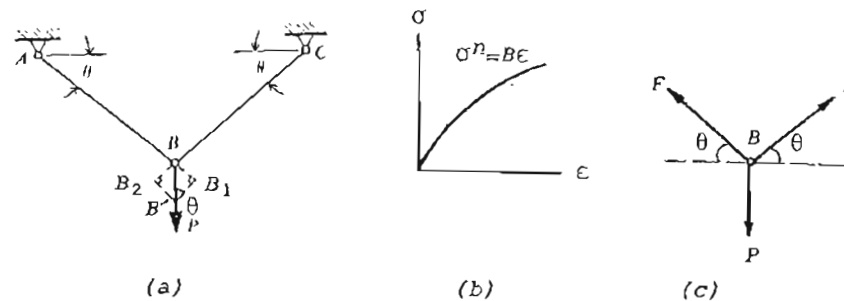
$$P_w = \frac{P_u}{\text{ضریب بار}} = \frac{\sigma_y A}{1.85}$$

از این مثال مشاهده می‌شود که تعیین کردن بار نهایی P_u برای یک سازه هیبراستاتیک ممکن است خیلی آسان تر از یک تحلیل ارتجاعی باشد.

۳-۳ مسائل حل نشده

مسئله ۳-۱

خرپای شکل $a-۴$ از ماده‌ای با رابطه تنش-کرنش $\sigma^n = B\epsilon$ تشکیل شده است (n و B مقادیر ثابتی هستند). برای تعیین مکان δ_B مفصل B معادله‌ای بر حسب A مساحت مقطع میله‌ها، L طول میله‌ها، θ ، B و n بدست آورید.



شکل ۳-۴

۱۸۵

چون F_1 از سایر نیروها بیشتر است ابتدا در سیم متصل به نقطه E تنش به حد تنش تسلیم σ_y می‌رسد. بنابراین بار تسلیم باری است که در این سیم تنش تسلیم ایجاد کند.

$$P_y = A\sigma_y$$

وقتی که بار P به حد بار نهایی P_u می‌رسد تنش در دو سیم دیگر نیز به حد تنش تسلیم می‌رسد و میله صلب سقوط خواهد کرد. در این حالت $F_1 = F_2 = F_3 = A\sigma_y$ و با جایگزینی این مقادیر در معادله تعادل (معادله ۱) بار نهایی P_u بدست می‌آید.

$$A\sigma_y + A\sigma_y + 2A\sigma_y = 3P_u \quad ; \quad P_u = \frac{4}{3} A\sigma_y$$

مسئله ۳-۳

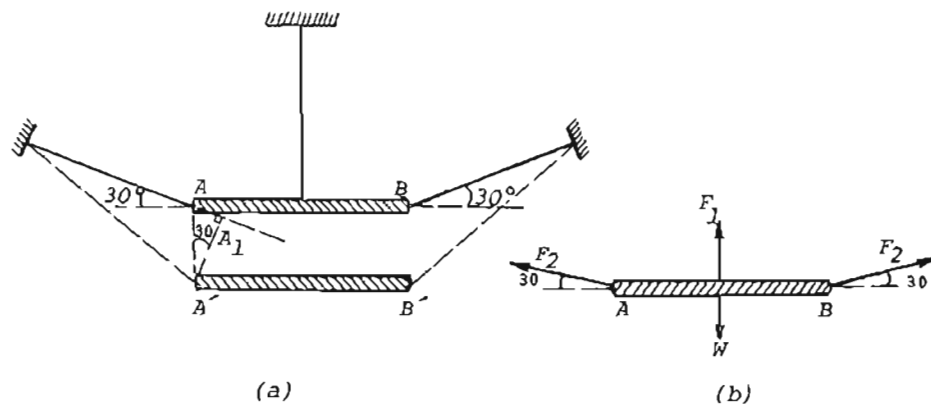
میله صلب AB (شکل ۳-۶a) به وزن W بوسیله سه کابل نگهداشته شده است. جنس کابل‌ها یکسان و طول آنها برابر L و مساحت سطح مقطع آنها برابر A می‌باشد. مطلوب است:

الف - نیروهای وارد در هر یک از کابل‌ها با فرض اینکه تنش در هیچ یک از کابل‌ها از تنش تسلیم σ_y تجاوز نکند.

ب - اگر منحنی تنش-کرنش (σ - ϵ) برای فولاد مصرف شده در کابل‌ها را بصورت ارتجاعی - خمیری فرض کنیم بار تسلیم W_y و بار نهایی W_u را برای سازه مذکور حساب کنید.

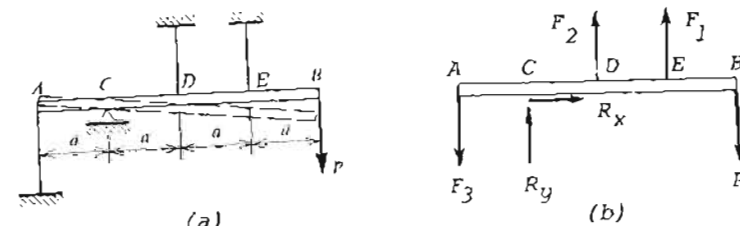
حل:

الف - از معادله تعادل میله صلب AB در امتداد قائم نتیجه می‌شود (به علت



شکل ۳-۶

۱۸۴



شکل ۳-۵

حل: از تعادل لنگرها حول نقطه C معادله‌ای بین نیروهای کششی سیم‌ها به دست می‌آید (شکل ۳-۵b).

$$\sum M_C = aF_3 + aF_2 + 2aF_1 - 3aP = 0$$

$$F_3 + F_2 + 2F_1 = 3P \quad (1)$$

سازه مزبور دو درجه هیپر استاتیک است، بنابراین به دو معادله اضافی نیاز می‌باشد که از شرایط سازگاری تغییر مکان‌ها بدست می‌آیند. شرایط سازگاری تغییر مکان‌ها با توجه به شکل تغییر مکان یافته میله صلب AB (شکل ۳-۵a) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta_D = \delta_A = \frac{1}{2} \delta_E \quad (2)$$

در این رابطه δ_D ، δ_A و δ_E به ترتیب ازدیاد طول سیم‌ها در نقاط A، D و E می‌باشند. معادله 2 بر حسب نیروهای کششی سیم‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{F_2 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} = \frac{1}{2} \frac{F_1 L}{AE}$$

در این رابطه AE ضریب محیط محوری سیم‌ها و L طول آنها می‌باشد. از این رابطه نتیجه می‌شود

$$F_2 = F_3 = \frac{1}{2} F_1 \quad (3)$$

از حل معادلات 1 و 3 نیروهای سیم‌ها بدست می‌آید.

$$F_1 = P \quad ; \quad F_2 = F_3 = \frac{1}{2} P$$

۱۸۶

نقارن، نیروهای داخلی کابل‌های کناری یکسان می‌باشند (

$$F_1 + 2F_2 \cos 60^\circ = W \quad ; \quad F_1 + F_2 = W \quad (1)$$

اگر ازدیاد طول کابل وسط را δ_1 و ازدیاد طول کابل‌های کناری را δ_2 بنامیم ارتصویر تغییر شکل یافته سازه (شکل ۳-۶ a) خواهیم داشت

$$AA_1 = \delta_2 \quad ; \quad AA' = \delta_1$$

$$\delta_2 = \delta_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \delta_1$$

معادله فوق را بر حسب نیروهای داخلی کابل‌ها بیان می‌کنیم.

$$\frac{F_2 L}{AE} = \frac{1}{2} \frac{F_1 L}{AE} : F_2 = \frac{1}{2} F_1 \quad (2)$$

از حل معادلات 1 و 2 نیروهای کابل‌ها بدست می‌آید.

$$F_1 = \frac{2}{3} W \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{3} W$$

ب - نیرو در کابل وسط بیشتر از نیرو در کابل‌های کناری می‌باشد، بنابراین ابتدادر این کابل تنش به حد تنش تسلیم می‌رسد و بار تسلیم W_y از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F_1 = A \sigma_y = \frac{2}{3} W_y : W_y = 1.5 A \sigma_y$$

موقعی که بار W به حد بار نهایی W_u می‌رسد تنش در کابل‌های کناری نیز به حد تنش تسلیم می‌رسد. در این صورت $F_1 = F_2 = A \sigma_y$ و با قرار دادن این مقادیر در معادله تعادل، بار نهایی W_u بدست می‌آید.

$$A \sigma_y + A \sigma_y = W_u : W_u = 2 A \sigma_y$$

مسئله ۳-۴

خرپای شکل ۳-۷ a که از چهار میله فولادی با سطح مقطع A و ضریب ارتجاعی E تشکیل شده است بار P را در مفصل A تحمل می‌کند. طول میله‌های AB و AC برابر L و طول میله‌های AE و AD برابر $L/2$ می‌باشد و از وزن میله‌ها صرف نظر می‌شود.

۱۸۷

الف - مطلوب است نیروهای داخلی میله‌های فوق بر حسب P ، L ، A و E با فرض اینکه تنش در هیچ یک از میله‌ها از حد تسلیم تجاوز نکند.

ب - اگر منحنی تنش-کرنش برای فولاد مصرف شده را به صورت ارتجاعی-خمیری فرض کنیم که برای آن ضریب ارتجاعی E و تنش تسلیم σ_y باشد، بار تسلیم P_y و بار نهایی P_u را برای خرپای مذکور حساب کنید. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها 6.5 cm^2 می‌باشد.

پ - وقتی که بار P برابر P_y می‌شود تنش در هر یک از میله‌ها چقدر است؟

حل:

الف - به علت نقارن نیروی داخلی میله‌های AD و AE برابر می‌باشد که آن را x فرض می‌کنیم. همین طور نیروی داخلی میله‌های AB و AC نیز یکسان می‌باشد که آن را y فرض می‌کنیم. از معادله تعادل مفصل A در امتداد قائم نتیجه می‌شود (شکل ۳-۷ b)

$$2x \cos 45^\circ + 2y \cos 45^\circ = P$$

$$x + y = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

اگر تغییر مکان مفصل A را δ بنامیم ازدیاد یا کاهش طول میله‌ها به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\delta \cos 45^\circ = \frac{xL}{2AE} \quad \text{ازدیاد طول میله‌های } AD \text{ و } AE$$

$$\delta \cos 45^\circ = \frac{yL}{AE} \quad \text{کاهش طول میله‌های } AB \text{ و } AC$$

از تساوی دو معادله فوق نتیجه می‌شود

$$\frac{xL}{2AE} = \frac{yL}{AE} : x = 2y \quad (2)$$

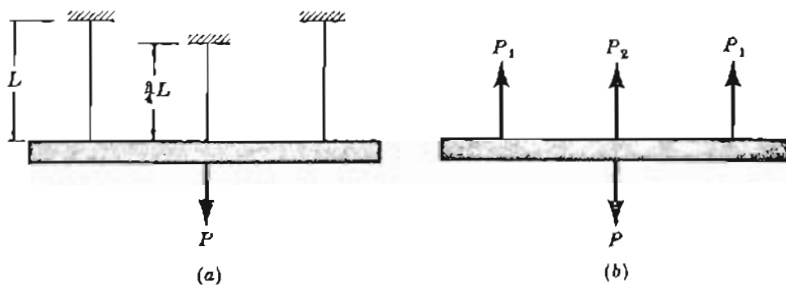
از حل معادلات 1 و 2 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آید.

$$x = \frac{2P}{3\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{P}{3\sqrt{2}}$$

مسئله ۵-۳

۱۸۹

در شکل ۳-۸ a یک میله افقی صلب بوسیله سه میله قائم با مساحت سطح مقطع A و ضریب ارتجاعی E ویزان می‌باشد. میله‌های خارجی به طول L و به فواصل مساوی از میله میانی قرار گرفته‌اند. با استفاده از تحلیل خمیری مقدار تسلیم و نهایی بار P را حساب کنید. تنش تسلیم میله‌ها را σ_y فرض کنید.



شکل ۳-۸

حل: معادله تعادل میله صلب با توجه به شکل ۳-۸ b به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

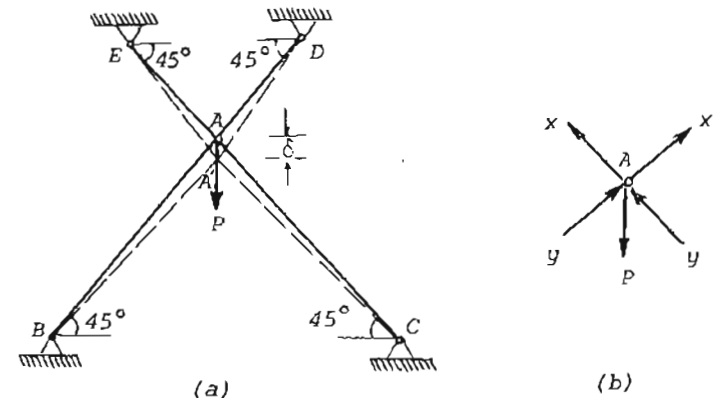
چون میله افقی صلب است و به علت تقارن، اضافه طول هر یک از میله‌های خارجی باید برابر با اضافه طول میله میانی باشد. بنابراین

$$\frac{P_1 L}{AE} = \frac{P_2 \left(\frac{3L}{4} \right)}{AE} \quad : \quad P_1 = \frac{3}{4} P_2 \quad (2)$$

بنابراین ابتدا تنش در میله میانی به حد تسلیم می‌رسد و $P_2 = A\sigma_y$ و $P_1 = \frac{3}{4} A\sigma_y$ از جایگزینی این مقادیر در معادله ۱ بار تسلیم P_y بدست می‌آید.

$$P_y = 2 \left(\frac{3}{4} A\sigma_y \right) + A\sigma_y = \frac{5}{2} A\sigma_y$$

اگر بار P از P_y بیشتر شود اضافه بار بوسیله دو میله خارجی تحمل می‌گردد. در این حالت می‌توان گفت که میله صلب فقط بوسیله دو میله خارجی حمل می‌شود و در وسط آن نیروی ثابت $A\sigma_y$ وارد می‌شود. موقعی که تنش در میله‌های کناری نیز به حد تسلیم



شکل ۳-۷

ب - چون x بزرگتر از y می‌باشد تنش ابتدا در میله‌های AD و AE به حد تسلیم می‌رسد و بار تسلیم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$x = A\sigma_y = \frac{2P_y}{3\sqrt{2}} \quad : \quad P_y = \frac{3\sqrt{2}}{2} A\sigma_y$$

وقتی بار P به حد نهایی P_u می‌رسد تنش در میله‌های تحتانی نیز به حد تسلیم می‌رسد. بنابراین $x = y = A\sigma_y$. با قرار دادن این مقادیر در معادله تعادل ۱ بار P_u بدست می‌آید.

$$A\sigma_y + A\sigma_y = \frac{P_u}{\sqrt{2}} \quad : \quad P_u = 2\sqrt{2} A\sigma_y$$

پ - وقتی که بار P برابر P_y می‌شود تنش در میله‌های AD و AE برابر σ_y می‌گردد. تنش در میله‌های AB و AC با استفاده از معادله ۲ به دست می‌آید.

$$\text{تنش در میله‌های } AB \text{ و } AC = \frac{y}{A} = \frac{x}{2A} = \frac{A\sigma_y}{2A} = \frac{1}{2} \sigma_y$$

۱۹۰

می‌رسد $P_1 = A\sigma_y$ و بار نهایی برابر می‌شود با (از معادله تعادل ۱)

$$P_u = 2A\sigma_y + A\sigma_y = 3A\sigma_y$$

باید توجه نمود که معادله سازگاری تغییر مکان‌ها، معادله ۲، را می‌توان برای تعیین کردن بار نهایی استفاده نمود زیرا معادله مزبور فقط برای رفتار ارنجایی خطی صادق است.

مسئله ۳-۶

فرض کنید خرپای سه میله‌ای شکل ۳-۱۰ را با بار $P = 200 \text{ kN}$ برای طرح گردد. زاویه β را برابر 45° و تنش تسلیم مصالح را 250 MPa اختیار کنید. برای دو حالت زیر وزن لارم میله‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید:

الف - طرح خرپا بر اساس رسیدن تنش حداکثر به تنش تسلیم صورت می‌گیرد.

ب - طرح خرپا بر اساس تحلیل خمیری و بار نهایی صورت می‌گیرد.

حسب:

الف - بر اساس تحلیل ارنجایی مثال ۳-۲ (بخش ۲-۲) بیشترین نیرو در میله قائم و برابر است با

$$F_2 = \frac{P}{1+2\cos\beta} = \frac{2P}{2+\sqrt{2}} = 117 \text{ kN}$$

موقعی که تنش در میله قائم به حد تسلیم می‌رسد $F_2 = A\sigma_y$. بنابراین سطح مقطع لازم میله‌ها برابر است با

$$A = \frac{F_2}{\sigma_y} = \frac{117000}{250} = 468 \text{ mm}^2$$

ب - اگر نتیجه تحلیل خمیری بخش ۳-۲ بکار رود مساحت سطح مقطع میله‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

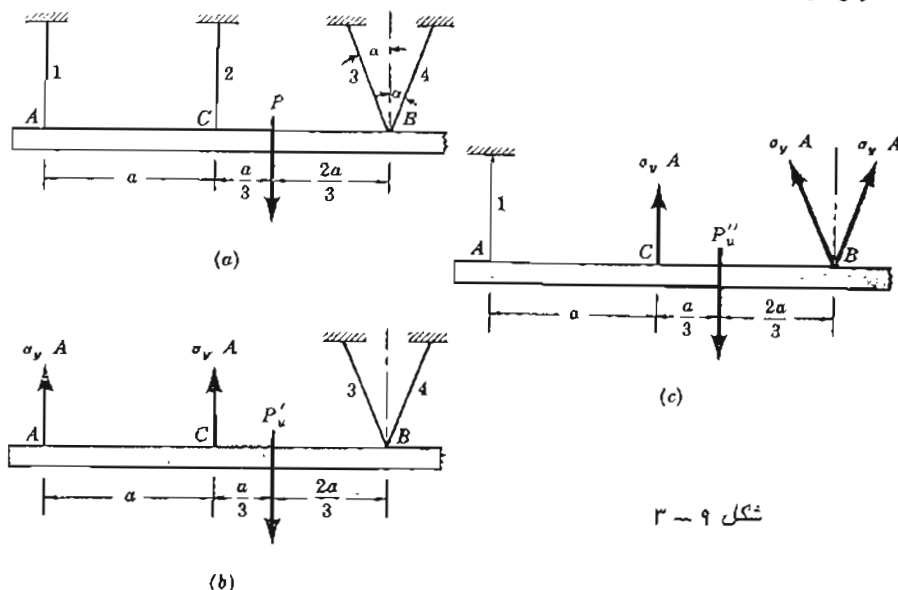
$$A = \frac{P_u}{\sigma_y(1+2\cos\beta)} = \frac{200000}{250[1+2(0.707)]} = 331 \text{ mm}^2$$

بنابراین اگر خرپای مزبور بر اساس روش بار نهایی حل گردد در مساحت سطح مقطع میله‌ها ۲۹ درصد صرفه جویی می‌شود. در وزن میله‌ها نیز همین قدر صرفه جویی می‌گردد.

۱۹۱

مسئله ۳-۷

دستگاه شکل ۳-۹ شامل عضو افقی صلب AB و چهار میله می‌باشد. میله‌ها سطح مقطع مشابه دارند و از یک نوع مصالح ساخته شده‌اند. بار نهایی P_u را که می‌توان بر دستگاه وارد نمود حساب کنید.



شکل ۳-۹

حل: بار نهایی باری است که تحت آن دستگاه فرو خواهد ریخت. چون عضو AB صلب می‌باشد فرو ریختن دستگاه به صورت دوران جسم صلب AB حول نقطه A یا B صورت می‌گیرد. به علت نزدیکی بار P به میله ۲ در موقع فرو ریختن دستگاه تنش در میله ۲ به حد تسلیم می‌رسد، از این رو لازم نیست دوران AB را حول نقطه C در نظر بگیریم. لازم است بار نهایی نظیر دوامکان مزبور (دوران حول A یا B) را تعیین کنیم، کوچکترین این مقادیر بار نهایی دستگاه خواهد بود. ابتدا فرض می‌کنیم تنش در میله‌های ۱ و ۲ به حد تسلیم برسد. در این صورت اثر آنها را می‌توانیم با دو نیروی ثابت $\sigma_y A$ مانند شکل ۳-۹ ب نشان دهیم. تنش در میله‌های ۳ و ۴ هنوز در حد ارنجایی می‌باشد و مقدار این تنش‌ها نامعلوم است. اما لازم نیست نیروها را در میله‌های ۳ و ۴ تعیین کنیم، چون بار نهایی P_u را می‌توان با مساوی صفر قرار دادن مجموع جبری لنگرها حول نقطه B به دست آورد.

۱۹۲

$$P'_u \left(\frac{2a}{3} \right) - \sigma_y A (a) - \sigma_y A (2a) = 0 : P'_u = 4.5 \sigma_y A$$

حال فرض می‌کنیم تنش در میله‌های ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل ۳-۹۰ باشد. حد تسلیم برسد، در این حالت تنش در میله ۱ هنوز در حد ارتجاعی می‌باشد. لنگر گزین حول نقطه A خواهیم داشت

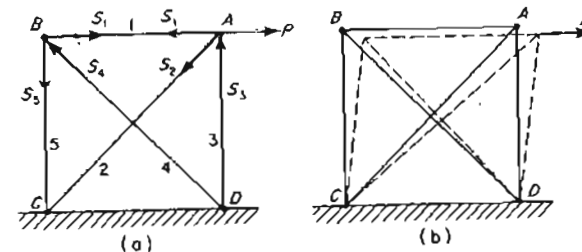
$$(\sigma_y A \cos \alpha) 4a + \sigma_y A a - P''_u \left(\frac{4a}{3} \right) = 0$$

$$P''_u = \frac{3}{4} \sigma_y A (1 + 4 \cos \alpha)$$

با مقایسه P'_u و P''_u نتیجه می‌شود که برای تمام مقادیر α مقدار P'_u کوچکترین دوار مدکور است و بنابراین P''_u همان بار نهایی می‌باشد. موقعی که بار وارده به این مقدار می‌رسد دستگاه به صورت یک مکانیسم نکست در خواهد آمد و میله صلب حول نقطه A دوران خواهد کرد. حتی موقعی که دستگاه به صورت مکانیسم شکست در میاید میله ۱ با تمام ظرفیت خود کار نمی‌کند.

مسئله ۳-۸

خرپای شکل ۳-۱۰ دارای ۵ عضو با مساحت سطح مقطع A و جنس یکسان می‌باشد و در مفصل A آن بار افقی P وارد شده است. بار نهایی P_u را حساب کنید. تنش تسلیم مصالح میله‌ها را σ_y فرض کنید.



شکل ۳-۱۰

حل: خرپای مزبور یک درجه هیپر استاتیک می‌باشد، ولی در اینجا مانیروهای داخلی خرپا را حساب نمی‌کنیم. با افزایش تدریجی بار خارجی P نیروهای محوری

۱۹۳

میله‌ها بطور ارتجاعی افزایش می‌یابد تا اینکه بار P به حد بار تسلیم P_y می‌رسد. تحت بار P_y تنش در یکی از میله‌ها به حد تنش تسلیم می‌رسد، با افزایش بیشتر بار P خرپا به صورت یک سازه ایزو استاتیک عمل می‌کند تا اینکه تنش در یک میله دوم نیز به حد تنش تسلیم می‌رسد. موقعی که دو تا از میله‌ها تسلیم می‌نوند خرپا از حالت تعادل خارج شده و تمایل به فرو ریختن پیدا می‌کند.

برای اینکه پیدا کنیم تنش ابتدا در کدامیک از دو میله به تنش تسلیم می‌رسد شرایط تعادل اتصالات A و B را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که در همه حالات باید روابط زیر بین نیروها برقرار باشد:

$$S_1 = S_5 = \frac{S_4}{\sqrt{2}} ; S_3 = \frac{S_2}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

بنابراین با توجه به اینکه مساحت سطح مقطع همه میله‌ها یکسان می‌باشد واضح است که اعضای قطری ۲ و ۴ اولین دو میله‌ای هستند که تنش در آنها به تنش تسلیم می‌رسد (تنش نمی‌تواند ابتدا در دو میله S_4 و S_5 یا S_1 به تنش تسلیم برسد زیرا در این صورت معادلات تعادل ۱ برقرار نخواهند بود). موقعی که این اتفاق می‌افتد خرپا می‌تواند مانند شکل ۳-۱۰ b فرو بریزد.

از معادله تعادل مفصل A در امتداد افق نتیجه می‌شود

$$P = S_1 + \frac{S_2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

به جای S_1 از معادله ۱ بر حسب S_4 در معادله ۲ قرار می‌دهیم.

$$P = \frac{S_4 + S_2}{\sqrt{2}}$$

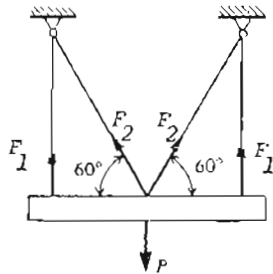
اگر در رابطه فوق $S_4 = S_2 = \sigma_y A$ قرار دهیم بار نهایی P_u بدست می‌آید.

$$P_u = \frac{2 \sigma_y A}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sigma_y A$$

چنانکه از این مسئله مشاهده می‌شود در بسیاری از موارد روش تحلیل خمیری نسبت به روش ارتجاعی خطی به محاسبات کمتری احتیاج دارد.

۱۹۵

سیم به طور متقارن آویزان است. هر سیم مساحت سطح مقطع A دارد و از ماده ارتجاعی - خمیری ساخته شده است. بار نهایی P_u را حساب کنید.



شکل ۱۱-۳

حل: به علت تقارن نیروهای سیم‌های قائم با یکدیگر و نیروهای سیم‌های مایل نیز با یکدیگر مساوی می‌باشند (شکل ۱۱-۳). بین نیروهای سیم‌ها معادله تعادل زیر برقرار است:

$$2F_1 + 2F_2 \cos 30^\circ = P$$

بنابراین دستگاه وقتی فرو می‌ریزد که F_1 و F_2 هر دو برابر $A\sigma_y$ گردند.

$$P_u = 2A\sigma_y + A\sigma_y \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) A\sigma_y = 3.73 A\sigma_y$$

مسائل حل نشده ۳-۴

مسئله ۱-۱-۳ اضافه طول یک میله قائم را که از انتهای فوقانی آویزان است در اثر وزن خودش تعیین کنید. رابطه بین تنش و کرنش مصالح میله به صورت $\sigma^n = B\varepsilon$ می‌باشد که در آن B و n مقادیر ثابتی هستند (δ را بر حسب طول L میله، وزن واحد حجم γ مصالح، B و n بیان کنید).

مسئله ۱-۲-۳ میله صلب شکل ۱-۲-۳ بوسیله دو میله قائم و تکیه گاه مفصلی A نگهداشته شده است. اگر تنش تسلیم فولاد در میله‌ها برابر 400 MPa و مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها 100 mm^2 باشد بار نهایی P_u را حساب کنید.

۱۹۴

مسئله ۹-۲

بار مجاز سازه مسئله ۷-۲ (شکل ۱۸-۲) را بر مبنای تحلیل خمیری حساب کنید. تنش تسلیم میله‌ها $\sigma_y = 2400 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد. ضریب بار (ضریب اطمینان در مقابل بار نهایی) را 1.5 فرض کنید.

حل: مطابق مسئله ۷-۲ بین تنش‌های میله‌ها در حد ارتجاعی نا مساوی زیر وجود دارد:

$$\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$$

بنابراین سازه وقتی فرو می‌ریزد که تنش در میله‌های ۱ و ۳ به حد تنش تسلیم برسد. معادلات تعادل زیر بین نیروهای میله‌ها وجود دارد:

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2$$

$$2N_2 \sin \beta_2 + 2N_3 \sin \beta_3 = P$$

N_2 را بین دو معادله فوق حذف می‌کنیم.

$$2N_1 \sin \beta_1 + 2N_3 \sin \beta_3 = P$$

اگر در رابطه فوق به جای N_3 و N_1 به ترتیب مقادیر $\sigma_y A_3$ و $\sigma_y A_1$ را قرار دهیم بار نهایی بدست می‌آید.

$$P_u = 2(2400) \left(12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 16 \times \frac{1}{2} \right) = 79125 \text{ Kg}$$

بنابراین بار مجاز برابر است با

$$P_w = \frac{P_u}{\text{ضریب بار}} = \frac{79125}{1.5} = 52750 \text{ Kg} = 52.75 \text{ t}$$

مسئله ۱۰-۳

بار P بوسیله بلوک صلبی تحمل می‌شود (شکل ۱۱-۳) که بوسیله چهار

۱۹۷

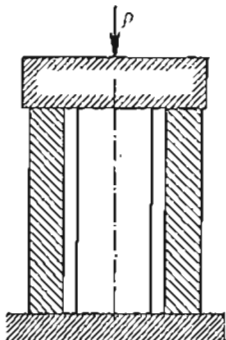
می‌شود. هر یک از کابل‌ها دارای مساحت سطح مقطع 0.65 cm^2 و تنش تسلیم $\sigma_y = 3000 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد. مقاومت فشاری ستون EC در مقابل کمانش $Q = 1500 \text{ Kg}$ می‌باشد. بار نهایی P_u را برای دستگاه مزبور حساب کنید.

مسئله ۳-۲-۵ تا ۳-۲-۱۲ برای سازه‌های شکل‌های ۲-۲-۲۳ تا ۲-۲-۳۰
بر مبنای تحلیل خمیری بار مجاز P را تعیین کنید. تنش تسلیم مصالح میله‌ها را $\sigma_y = 2400 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب بار را برابر ۱.۵ فرض کنید.

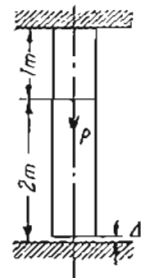
مسئله ۳-۲-۱۳ میله فولادی قائمی که در دو انتها گیردار می‌باشد تحت نیروی محوری متمرکز روبرو به پایین P قرار دارد. مساحت سطح مقطع میله $A = 200 \text{ cm}^2$ و طول آن $L = 5 \text{ m}$ است. اگر تنش تسلیم مصالح میله $\sigma_y = 2400 \text{ Kg/cm}^2$ باشد برای ضریب باری برابر ۲ بار مجاز P_w را بر اساس تحلیل خمیری پیدا کنید.

مسئله ۳-۲-۱۴ بار P بوسیله دال صلبی به استوانه فولادی توپری با مساحت سطح مقطع 15 cm^2 و استوانه می‌تواند با مساحت سطح مقطع 20 cm^2 منتقل می‌شود (شکل ۳-۲-۱۴). مقدار بار را در استوانه‌های فولادی و می‌تواند در لحظه‌ای که تنش در هر دو استوانه به حد تنش تسلیم می‌رسد پیدا کنید. تنش تسلیم فولاد 2400 Kg/cm^2 و تنش تسلیم مس 1800 Kg/cm^2 می‌باشد.

مسئله ۳-۲-۱۵ میله‌ای با مساحت سطح مقطع $A = 100 \text{ cm}^2$ در انتهای فوقانی

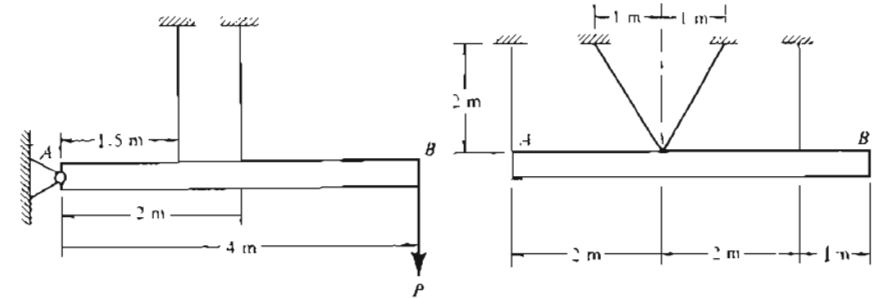


شکل ۳-۲-۱۴



شکل ۳-۲-۱۵

۱۹۶



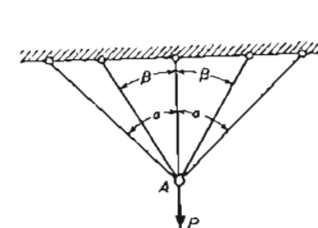
شکل ۳-۲-۱

شکل ۳-۲-۲

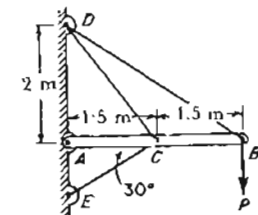
مسئله ۳-۲-۲ میله صلب AB در شکل ۳-۲-۲ بوسیله چهار میله با قطر ۵۰ mm نگهداشته می‌شود. تنش تسلیم میله‌ها ۳۰۰ MPa می‌باشد. با استفاده از تحلیل خمیری حداکثر وزن میله AB را تعیین کنید. فرض کنید وزن میله بطور یکواخت در طول آن توزیع شده باشد.

مسئله ۳-۲-۳ بار قائم P بوسیله ۵ سیم فولادی که به طور متقارن مطابق شکل ۳-۲-۳ به یکدیگر متصل شده‌اند حمل می‌گردد. هر یک از میله‌ها دارای مساحت سطح مقطع $A = 0.65 \text{ cm}^2$ می‌باشد. اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 3000 \text{ Kg/cm}^2$ و زوایای α و β به ترتیب برابر 45° و 30° باشند بار نهایی P_u را تعیین کنید.

مسئله ۳-۲-۴ میله افقی صلب AB در نقطه A به دیوار قائمی مفصل شده و بوسیله دو کابل فولادی BD و CD و ستون EC مطابق شکل ۳-۲-۴ نگهداشته

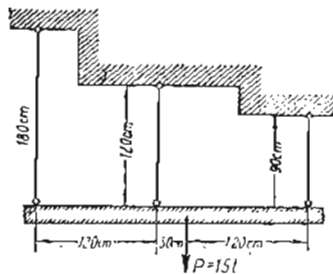


شکل ۳-۲-۳

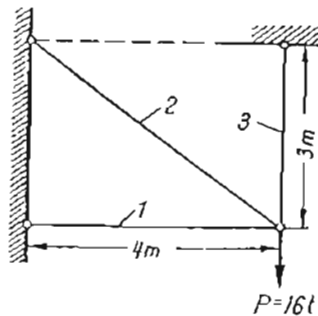


شکل ۳-۲-۴

۱۹۹



شکل ۱۸-۲-۳



شکل ۱۹-۲-۳

مسئله ۳-۲-۱۹ در سازه شکل ۳-۲-۱۹ میل ۱ از آلومینیوم با تنش تسلیم 1600 Kg/cm^2 ، میل ۲ از مس با تنش تسلیم 1200 Kg/cm^2 و میل ۳ از فولاد با تنش تسلیم 2400 Kg/cm^2 ساخته شده‌اند. مساحت‌های سطح مقطع میله‌های ۱ و ۲ برابر ولی مساحت سطح مقطع میل ۳ نصف مساحت سطح مقطع میل ۱ می‌باشد. با استفاده از روش بار نهایی و با انتخاب ضریب باری برابر ۲ مساحت سطح مقطع لازم برای هر یک از میله‌ها را حساب کنید.

مسئله ۳-۲-۲۰ مساحت سطح مقطع بتن در یک ستون بتن مسلح کوتاه‌برابر 645 cm^2 می‌باشد. در ستون چهار میله گرد طولی به طور متقارن بکار رفته است. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌گردها 10 cm^2 است. تنش تسلیم بتن 120 Kg/cm^2 و تنش تسلیم فولاد میله‌گردها 2100 Kg/cm^2 می‌باشد. با فرض اینکه ضریب بار برابر ۱.۵ باشد بار مجاز ستون مزبور را بر اساس روش بار نهایی حساب کنید.

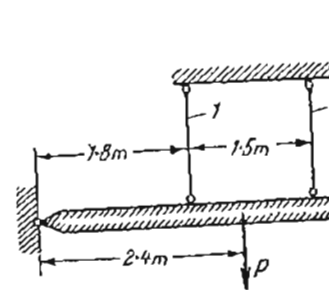
مسئله ۳-۲-۲۱ ستونی با مقطع مربع و از بتن مسلح باید برای بار محوری 100 t طرح گردد. در ستون چهار میله فولادی بکار می‌رود که مجموع مساحت‌های سطح مقطع آنها ۱٪ مساحت سطح مقطع ستون می‌باشد. تنش تسلیم بتن 120 Kg/cm^2 و تنش تسلیم فولاد 2400 Kg/cm^2 است. با فرض اینکه ضریب بار برابر ۲ باشد اندازه اضلاع مقطع ستون و قطر میله‌ها را حساب کنید.

مسئله ۳-۲-۲۲ دال مستطیلی صلبی بوسیله چهار میله با سطح مقطع، طول و جنس یکسان در چهار گوشه آن آویزان می‌باشد (شکل ۳-۲-۲۲). مساحت سطح مقطع هر

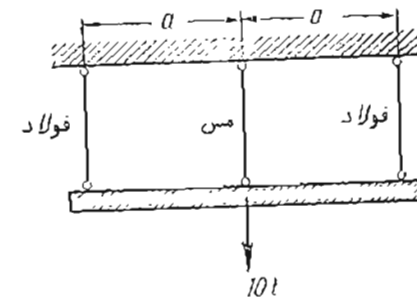
۱۹۸

گیردار و مطابق شکل ۳-۲-۱۵ بار گذاری شده است. قبل از بار گذاری بین استهای تحنایی میله و صفحه صلب تحنایی فاصله $\Delta = 0.02 \text{ mm}$ وجود دارد. اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 1500 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب بار ۱.۵ باشد مقدار مجاز بار P را بر اساس تحلیل خمیری پیدا کنید.

مسئله ۳-۲-۱۶ میله صلب شکل ۳-۲-۱۶ بوسیله دو میله آویزان می‌باشد. مساحت سطح مقطع میله ۱ برابر 10 cm^2 و مساحت سطح مقطع میله ۲ برابر 15 cm^2 می‌باشد. تنش‌های تسلیم مصالح میله ۱ و ۲ به ترتیب 2600 Kg/cm^2 و 1500 Kg/cm^2 می‌باشد. اگر ضریب بار ۲ باشد مقدار مجاز بار P را بر اساس تحلیل خمیری بدست آورید.



شکل ۱۶-۲-۳



شکل ۱۷-۲-۳

مسئله ۳-۲-۱۷ میله صلب شکل ۳-۲-۱۷ بوسیله سه میله آویزان می‌باشد. میله‌های خارجی از فولاد با سطح مقطع یکسان و میله میانی از مس با سطح مقطع ۱.۵ برابر سطح مقطع میله‌های فولادی می‌باشد. با فرض اینکه تنش‌های تسلیم فولاد و مس به ترتیب 2400 Kg/cm^2 و 1800 Kg/cm^2 و ضریب بار برابر ۱.۵ باشد مساحت سطح مقطع لازم برای هر یک از میله‌ها را بر اساس روش بار نهایی تعیین کنید.

مسئله ۳-۲-۱۸ در شکل ۳-۲-۱۸ سه میله‌ای که میله افقی صلب را نگهداشته‌اند از فولاد با تنش تسلیم 2400 Kg/cm^2 ساخته شده‌اند و همگی مساحت سطح مقطع یکسان دارند. اگر ضریب بار برابر ۱.۵ باشد مساحت سطح مقطع لازم میله‌ها را بر اساس روش بار نهایی حساب کنید.

۲۰۱

۳-۵ جواب‌های مسائل حل نشده

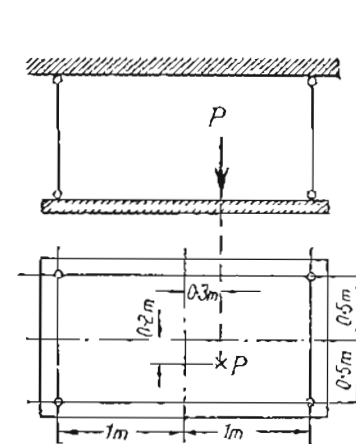
$$\delta = \frac{\gamma_L^{n+1}}{B(n+1)} \quad : ۳-۱-۱$$

		31.5 kN	: ۳-۲-۱
$P_U = 8100 \text{ Kg}$	: ۳-۲-۳	1.79 MN	: ۳-۲-۲
27.5 t	: ۳-۲-۵	$P_U = 2242 \text{ Kg}$	: ۳-۲-۴
11.53 t	: ۳-۲-۷	14.3 t	: ۳-۲-۶
6.4 t	: ۳-۲-۹	8.74 t	: ۳-۲-۸
2.8 t	: ۳-۲-۱۱	82 kN	: ۳-۲-۱۰
480 t	: ۳-۲-۱۳	32 kN	: ۳-۲-۱۲
200 t	: ۳-۲-۱۵	$P_S = P_C = 36 \text{ t}$	: ۳-۲-۱۴
$\text{سطح مقطع میله‌های فولادی} = 2 \text{ cm}^2$	: ۳-۲-۱۷	25.2 t	: ۳-۲-۱۶
$A_1 = A_2 = 2A_3 = 16.66 \text{ cm}^2$	: ۳-۲-۱۹	3.61 cm^2	: ۳-۲-۱۸
$a = 37 \text{ cm} ; d = 21 \text{ mm}$	: ۳-۲-۲۱	107.6 t	: ۳-۲-۲۰
220 t	: ۳-۲-۲۳	18.3 t	: ۳-۲-۲۲

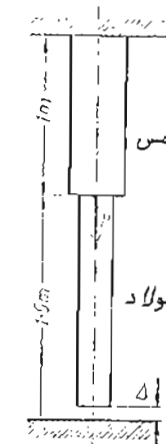
۲۰۰

یک از میله‌ها برابر 4 cm^2 و تنش تسلیم مصالح آنها برابر 2400 Kg/cm^2 می‌باشد. با فرض اینکه ضریب بار برابر 2 باشد مقدار مجاز بار P را بر اساس روش بار نهایی حساب کنید.

مسئله ۳-۲-۲۳ میله شکل ۳-۲-۲۳ در انتهای فوقانی گیر دار و تحت بار P مطابق شکل می‌باشد. قبل از بار گذاری بین انتهای سنجانی و تکیه گاه صلب فاصله $\Delta = 0.05 \text{ mm}$ وجود دارد. مساحت سطح مقطع قسمت فوقانی میله که از مس می‌باشد برابر 150 cm^2 و مساحت سطح مقطع قسمت تحتانی میله که از فولاد می‌باشد برابر 50 cm^2 است. تنش‌های تسلیم مس و فولاد به ترتیب برابر 1500 Kg/cm^2 و 2100 Kg/cm^2 می‌باشد. ضریب بار برابر 1.5 فرض می‌شود. مقدار مجاز بار P را بر اساس روش بار نهایی حساب کنید.



شکل ۳-۲-۲۲



شکل ۳-۲-۲۳

که نیروهای برشی V باید در سطوح بریده شده اثر کنند. در این مثال از معادله تعادل میله در امتداد افقی نتیجه می شود که $V = D/2$. این نیروهای برشی در روی سطح مقطع های mn و pq تنش هایی تولید می کنند که به تنش های برشی موسوم می باشد. تنش های برشی غالباً با حرف τ نشان داده می شود. برریم دقیق تنش های برشی را نمی توان به آسانی تعیین نمود، ولی با تعمیم نمودن نیروی برشی کل V بر مساحت سطح مقطع A که بر آن اثر می کند می توان مقدار متوسطی برای آن بدست آورد.

$$\tau_{av} = \frac{V}{A} \quad (4-1)$$

مساحت A در مثال شکل ۴-۱ مساحت سطح مقطع پیچ می باشد. طرح پیچ ها و پرچ ها و قطعات دیگر که تحت برش مستقیم قرار دارند معمولاً بر اساس معادله فوق و تنش مجاز متوسط τ_w صورت می گیرد. اگر تنش مجاز کششی مصالح مضر فی σ_w باشد تنش مجاز برشی همان مصالح معمولاً در حدود $0.5\sigma_w$ تا $0.6\sigma_w$ می باشد. هم‌طوریکه در فصل های بعد خواهیم دید، تنش های برشی در میله هایی که تحت بار گذاری کششی یا خمشی هستند نیز به طور غیر مستقیم ایجاد می شود.

در فصل های قبل ما با تنش هایی سروکار داشتیم که بطور عمودی بر سطوحی که بر آنها وارد می شدند عمل می کردند و از این رو این تنش ها غالباً "تنش های عمودی نامیده می شوند. از طرف دیگر تنش های برشی همیشه بطور مماسی بر سطح عمل می کنند، از این رو به آنها تنش های مماسی نیز می گویند. در هر دو حالت تنش ها معرف شدت نیرو، یعنی نیرو در واحد سطح، هستند و فرق اساسی بین آنها در جهت تنش می باشد. برای اینکه تغییر شکل های ایجاد شده بوسیله تنش برشی را حجم کنیم، عنصر مکعبی کوچکی از ماده را در نظر می گیریم (شکل ۴-۲ a) و فرض می کنیم که تحت

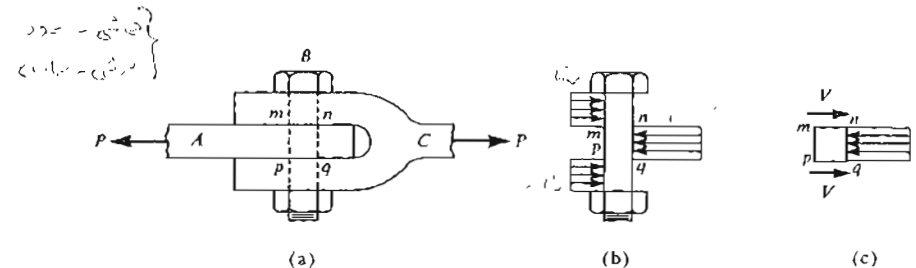
تنش برشی τ که روی سطح فوقانی آن توزیع شده قرار گرفته باشد. اگر تنش های عمودی روی مکعب اثر نکنند، باید تنش برشی مساوی τ ولی در جهت مخالف در سطح تحتانی آن اثر کند تا در امتداد افقی تعادل برقرار شود. بعلاوه تنش های برشی در بالا و پایین تولید لنگری می کنند که باید با لنگر تنش های برشی که در جدارهای قائم اثر می کند موازنه گردد. اگر عنصر مزبور قرار است تعادل استاتیکی داشته باشد، تنش ها در سطوح قائم نیز باید برابر τ باشد. بنابراین به طور کلی می توان نتیجه گرفت که الف - تنش های برشی که روی عنصری از ماده عمل می کنند همواره به صورت دو جفت مساوی و با جهت مخالف اثر می کنند.

فصل چهارم

تنش های برشی مستقیم و اتصالات با پرچ و جوش

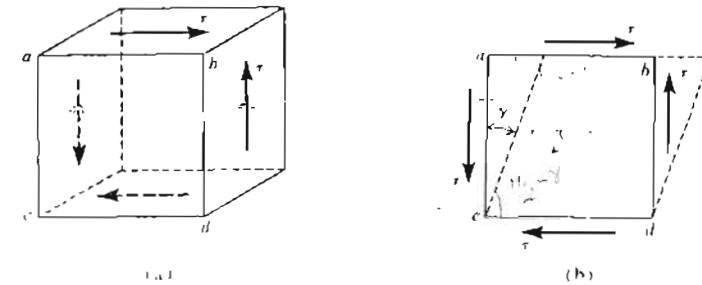
۴-۱ تنش برشی و کرنش برشی

به عنوان یک مثال عملی در جایی که تنش های برشی وجود دارد اتصال شکل ۴-۱ a را در نظر می گیریم. اتصال مزبور شامل میله A ، رکابک C و پیچ B می باشد. پیچ B از درون سوراخ هایی در میله و رکابک عبور می کند. میله و رکابک در اثر نیروهای کششی P جدار پیچ را تحت فشار قرار می دهند و در آن تنش هایی موسوم به تنش های تکیه گاهی ایجاد می کنند (شکل ۴-۱ b). شکل ۴-۱ b نشان می دهد که پیچ در مقاطع mn و pq تمایل به بریده شدن یا برش دارد. اگر ما نمودار جسم آزاد قسمت $mnpq$ پیچ را رسم کنیم (شکل ۴-۱ c) واضح است



شکل ۴-۱

۲۰۴



شکل ۲-۴ تنش برشی و کرنش برشی

ب - تنش‌های برشی همواره در سطوح عمود بر یکدیگر وجود دارند. تنش‌های برشی در دو سطح عمود بر هم همواره مقدار مساوی دارند و جهتشان طوری است که هر دو تنش یا به خط عطف دو سطح نزدیک و یا از آن دور می‌شوند. حالت تنش عنصری از ماده مانند شکل ۲-۴ a که تنها تحت اثر تنش‌های برشی می‌باشد موسوم به برش خالص است. برش خالص با تفصیل بیشتری در فصل پنجم بحث خواهد شد. در اینجا زاویه تغییر شکل عنصری از ماده در برش خالص در شکل ۲-۴ b نشان داده شده است. این شکل وجه abcd جلوی عنصر مکعبی را نشان می‌دهد. چون روی عنصر مزبور تنش‌های طولی اعمال نمی‌گردد، طول اضلاع ab، cd، ac و bd تغییر نخواهد کرد. در عوض تنش‌های برشی باعث خواهد شد که مربع abcd به شکل یک لوزی که با خطوط منقطع در شکل ۲-۴ b نشان داده شده است درآید. زاویه گوشه c که قبلاً $\pi/2$ بود حالا به $\pi/2 - \gamma$ کاهش یافته است (زاویه کوچکی است که در شکل ۲-۴ b مشخص شده است). در همان حال زاویه گوشه a به $\pi/2 + \gamma$ افزایش یافته است. زاویه γ مقیاسی برای اندازه‌گیری تغییر شکل ناشی از تنش برشی می‌باشد و به کرنش برشی موسوم است. در شکل ۲-۴ b مشاهده می‌شود که کرنش برشی γ برابر با مقدار لغزش افقی لبه فوقانی عنصر مزبور نسبت به لبه تحتانی آن تقسیم بر ارتفاع عنصر می‌باشد. با آزمایش ماده در برش خالص و اندازه‌گیری کرنش برشی بر حسب تابعی از تنش برشی می‌توان منحنی تنش - کرنش برشی را به طور تجربی بدست آورد. چنین منحنی‌ای شبیه منحنی نظیر برای حالت کشش ماده مزبور خواهد بود و از روی آن می‌توان حد تناسب، نقطه تسلیم و تنش نهایی در برش را تعریف نمود. تجربه نشان می‌دهد که برای فلزات شکل پذیر از جمله فولاد سازهای تنش تسلیم در برش τ_y برابر ۰.۵ تا ۰.۶

۲۰۵

تنش تسلیم در کشش σ_y می‌باشد. اگر ماده یک ناحیه ارتجاعی خطی داشته باشد، منحنی تنش - کرنش برشی یک خط مستقیم خواهد بود و تنش برشی و کرنش برشی با یکدیگر مستقیماً متناسب می‌باشد. بنابراین معادله زیر برای قانون هوک در برش بدست می‌آید:

$$\tau = G\gamma \quad (4-2)$$

در این رابطه G ضریب ارتجاعی برشی مصالح می‌باشد. مقادیر نمونه G برای چند نوع مصالح در جدول ۱-۱ داده شده است. ساده‌ترین راه برای ایجاد برش خالص به وسیله پیچش یک لوله استوانه‌ای تو خالی می‌باشد که بعداً در فصل پیچش مورد بحث قرار خواهد گرفت و معمولاً G از چنین آزمایش پیچشی بدست می‌آید. همچنین باید توجه نمود که ضرایب ارتجاعی در کشش (E) و برش (G) مستقل از یکدیگر نیستند و رابطه‌ای بین آنها وجود دارد که در فصل بعد نشان داده خواهد شد.

۲-۴ مسائل حل شده

مسئله ۱-۴

در اتصال پیچی شکل ۱-۴ a نیروی P برابر ۳۰ kN و قطر پیچ برابر ۱۰ mm است. مقدار متوسط تنش برشی را در روی سطوح mn و pq حساب کنید.

$$\text{حل:} \quad \tau = \frac{V}{A} = \frac{P}{2A} = \frac{30000}{2\pi(5)^2} = 191 \text{ MPa}$$

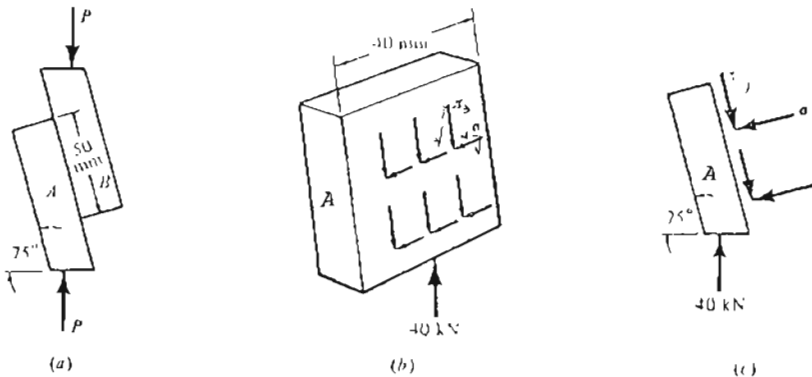
مسئله ۲-۴

در شکل ۳-۴ نیروی P تمایل به بریدن بلوک متوقف‌کننده در امتداد صفحه a-a دارد. اگر $P = 30 \text{ kN}$ باشد تنش برشی متوسط را در صفحه a-a پیدا کنید.

حل: فقط مؤلفه افقی P در ایجاد برش مزبور مؤثر است. مقدار مؤلفه

۲۰۷

می‌گیرد از بلوک‌های مایل مانند شکل ۴-۵a استفاده می‌شود. عرض بلوک‌های A و B که با چسب به یکدیگر متصل شده‌اند در جهت عمود بر صفحه شکل 40 mm می‌باشد. اگر نیروی قائم 40 kN برای ایجاد گسستگی در محل اتصال لازم باشد مقاومت نهایی برشی چسب را حساب کنید.



شکل ۴-۵

حل: تعادل بلوک تحتانی A را در نظر می‌گیریم. اثر بلوک B در روی بلوک A شامل تنش‌های عمودی و برشی می‌باشد که در شکل‌های ۴-۵b و ۴-۵c نشان داده شده است. معادله تعادل بلوک A در امتداد افق (شکل ۴-۵c) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau(50)(40)\cos 75^\circ = \sigma(50)(40)\cos 15^\circ \quad (1)$$

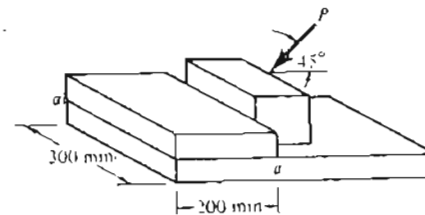
معادله تعادل بلوک A در امتداد قائم عبارتست از

$$40000 - \tau(50)(40)\sin 75^\circ - \sigma(50)(40)\sin 15^\circ = 0 \quad (2)$$

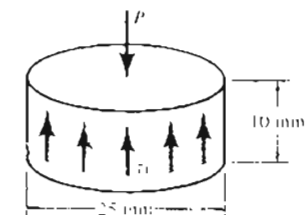
از جایگزینی $\sigma = 0.269\tau$ در معادله فوق τ بدست می‌آید: $\tau = 19.3 \text{ MPa}$

مسئله ۴-۵

۲۰۶



شکل ۴-۳



شکل ۴-۴

مزبور $30 \cos 45^\circ = 21.3 \text{ kN}$ می‌باشد. بنابراین تنش برشی متوسط برابر است با

$$\tau = \frac{P \cos 45^\circ}{A} = \frac{21.3 \times 10^3}{300 \times 200} = 0.35 \text{ MPa}$$

مسئله ۴-۳

فولاد سازه‌ای با کربن کم دارای مقاومت نهایی برشی تقریباً 300 MPa می‌باشد. نیروی لازم برای ایجاد سوراخی به قطر 25 mm در صفحه‌ای فولادی به ضخامت 10 mm را حساب کنید.

حل: عرض می‌گیریم تنش برشی در روی سطح استوانه‌ای به قطر 25 mm و ضخامت 10 mm مطابق شکل ۴-۴ به طور یکنواخت توزیع شده باشد. از معادله تعادل در امتداد قائم نیروی لازم برای ایجاد سوراخ مزبور به دست می‌آید.

$$P = \tau A = \pi(25)(10)(300 \times 10^6 \times 10^{-6}) = 235000 \text{ N}$$

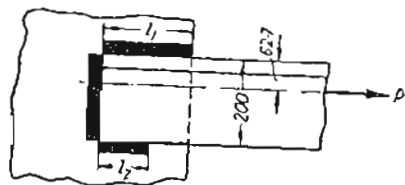
(ارتفاع، عمق، ضخامت استوانه)

مسئله ۴-۴

در صنایع جوب بعضی مواقع برای تعیین مقاومت برشی اتصالاتی که با چسب صورت

۲۰۹

۱۲ را مجاسه کنید.



شکل ۴-۷

حل: با توجه به اینکه گلوئی جوش تقریباً برابر $t \sin 45^\circ = 0.7t$ می باشد طول کل جوش لازم بر اساس مقاومت برشی برابر است با (ضخامت نبشی = t)

$$l = \frac{P}{0.7 t \tau_w} = \frac{40000}{0.7 \times 1.6 \times 800} = 44.7 \text{ cm}$$

طول جوش انتهای نبشی برابر ۲۰ cm است. بنابراین طول باقی مانده که مجموع طولهای l_1 و l_2 می باشد برابر ۲۴.۷ cm است.

طولهای l_1 و l_2 باید چنان انتخاب شود که برآیند تنشهای برشی در روی تمام طول جوش در صفحه محور نبشی قرار بگیرد. محور نبشی در فاصله ۶.۲۷ cm از لبه فوقانی آن قرار دارد (شکل ۴-۷). بنابراین معادله زیر نتیجه می شود:

$$6.27 l_1 + \frac{6.27^2}{2} = \frac{13.73^2}{2} + 13.73 l_2$$

همچنین

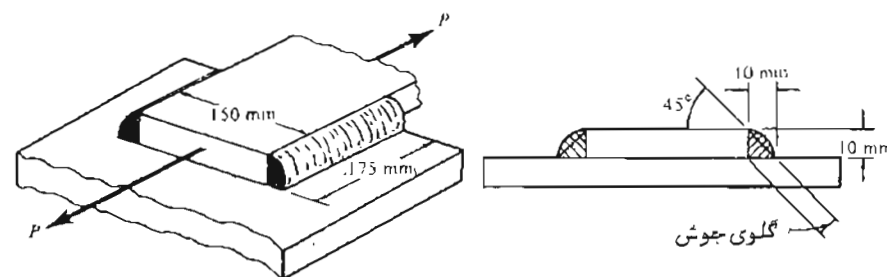
$$l_1 + l_2 = 24.7$$

از حل دو معادله فوق نتیجه می شود: $l_1 = 20.7 \text{ cm}$ و $l_2 = 4 \text{ cm}$

مسئله ۴-۷

۲۰۸

یک نوع منداول جوش برای اتصال دو صفحه به یکدیگر جوش گوشه (شکل ۴-۶) می باشد. این نوع جوش می تواند برش و همپیش کشش، فشار و خمش را تحمل کند. برای دو صفحه نکل ۴-۶ مقدار مجاز نیروی کششی P را بر اساس تنش برشی مجاز 80 MPa محاسبه کنید. فقط تنشهای برشی را در جوش در نظر بگیرید. نیروهای P در وسط فاصله بین دو جوش وارد شده اند.



شکل ۴-۶

حل: کوچکترین بعد جوش موسوم به گلوئی جوش می باشد که در این مسئله برابر $10 \sin 45^\circ = 7.07 \text{ mm}$ است. سطح مؤثر جوش که در مقابل برش مقاومت می کند برابر است با حاصل ضرب طول جوش در اندازه گلوئی جوش. بنابراین سطح مؤثر هر یک از دو جوش برابر $175(7.07) = 1237 \text{ mm}^2$ می باشد. مقدار مجاز نیروی کششی در این صورت برابر است با

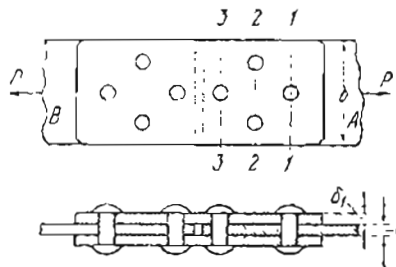
$$P_w = (80 \times 10^6) (10^{-6}) (2) (1237) = 198000 \text{ N}$$

$$P_w = \tau_w \times \text{سطح مؤثر جوش}$$

مسئله ۴-۶

یک نیروی کششی 40 t به طور مرکزی به یک نبشی $200 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 16 \text{ mm}$ وارد شده است (شکل ۴-۷). نبشی مطابق شکل به یک صفحه جوش گوشه ای داده شده است. برای اینکه طولهای l_1 و l_2 کاهش یابند انتهای نبشی نیز به صفحه جوش داده شده است. تنش مجاز برشی جوش 800 Kg/cm^2 می باشد. طولهای l_1 و

۲۱۱



شکل ۹-۴

در دو مقطع هر یک از پرچ‌ها نیروی برشی P/i وجود دارد. بنابراین تنش برشی در پرچ‌ها برابر است با

$$\tau = \frac{P}{(2i) \frac{\pi}{4} (d^2)} = \frac{8000}{2 \times 4 \times 0.785 \times 1.6^2} = 500 \text{ Kg/cm}^2$$

ب - محاسبه تنش در تسمه‌ها: در مقطع 1-1 تمام نیروی P بوسیله تسمه منتقل می‌شود. این مقطع بوسیله یک پرچ ضعیف شده است و مساحت سطح مقطع تسمه در مقطع مزبور برابر است با

$$A_{1-1} = \delta(b-d) = 1(15 - 1.6) = 13.4 \text{ cm}^2$$

تنش کنشی در مقطع 1-1 برابر است با

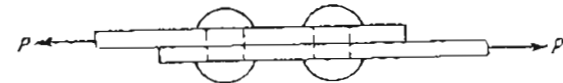
$$\sigma_{1-1} = \frac{P}{A_{1-1}} = \frac{8000}{13.4} = 597 \text{ Kg/cm}^2$$

در مقطع 2-2 نیروی منتقل شده توسط تسمه فقط $\frac{3}{4} P$ است زیرا نیروی $\frac{P}{4}$ بوسیله پرچ اول حمل و به توسط صفحه‌های فوقانی و تحتانی و پرچ‌های سمت چپ اتصال به تسمه B منتقل شده است. مقطع 2-2 بوسیله دو پرچ ضعیف شده است، در نتیجه مساحت سطح مقطع آن برابر است با

$$A_{2-2} = \delta(b-2d) = 1(15 - 2 \times 1.6) = 11.8 \text{ cm}^2$$

۲۱۰

عداد پرچ‌های لازم به قطر 20mm را برای اتصال دو صفحه به ضخامت‌های 8 و 10 میلیمتر پیدا کنید (شکل ۸-۴). نیروی کنشی P در محل اتصال برابر 20τ است. تنش‌های محاز برشی و فشاری به ترتیب 1400 Kg/cm^2 و 3200 Kg/cm^2 می‌باشد.



شکل ۸-۴

حل: بر اساس مقاومت برشی پرچ تعداد پرچ‌های لازم برابر است با (قطر پرچ d)

$$n \geq \frac{P}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \tau_w} = \frac{20000}{\pi \times \frac{2^2}{4} \times 1400} = 4.53 \# 5$$

بر اساس مقاومت فشاری پرچ تعداد پرچ‌های لازم برابر است با (ضخامت صفحه τ)

$$n \geq \frac{P}{t d \sigma_w} = \frac{20000}{0.8 \times 2 \times 3200} = 3.9 \# 4$$

بنابراین برای اتصال مزبور حداقل پنج پرچ لازم است.

مسئله ۸-۴

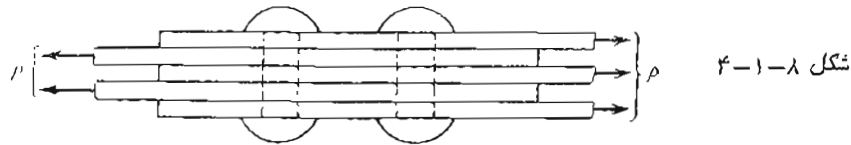
دو تسمه فولادی A و B به ضخامت $\delta = 10 \text{ mm}$ و عرض $b = 150 \text{ mm}$ بوسیله دو صفحه مطابق شکل ۹-۴ به یکدیگر پرچ شده‌اند. قطر پرچ‌ها $d = 16 \text{ mm}$ ، ضخامت صفحات اتصال $\delta_1 = 6 \text{ mm}$ و عرض آنها برابر با عرض تسمه‌ها 150 mm می‌باشد. اگر بار کنشی P برابر 8 تن باشد تنش‌ها را در پرچ‌ها و تسمه‌ها حساب کنید.

حل:

الف - محاسبه تنش در پرچ‌ها: در هر طرف اتصال چهار پرچ ($i = 4$) وجود دارد.

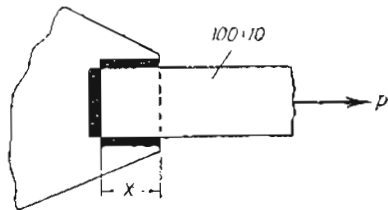
۲۱۵

مسئله ۴-۱-۸ دو صفحه هریک به ضخامت 10 mm به سه صفحه هریک به ضخامت 8 mm به توسط پرچ‌های به قطر 20 mm مطابق شکل ۴-۱-۸ متصل شده‌اند. اتصال مزبور تحت اثر نیروی کششی 28 t می‌باشد. اگر تنش‌های مجاز برشی و فشاری به ترتیب 1000 Kg/cm^2 و 2800 Kg/cm^2 باشد تعداد پرچ‌های لازم را تعیین کنید.



شکل ۴-۱-۸

مسئله ۴-۱-۹ حداقل طول x را که برای جوش دادن در صفحه فولادی شکل ۴-۱-۹ لازم است تعیین کنید. تنش کششی در صفحه 1400 Kg/cm^2 و تنش برشی مجاز جوش برابر 800 Kg/cm^2 می‌باشد.



شکل ۴-۱-۹

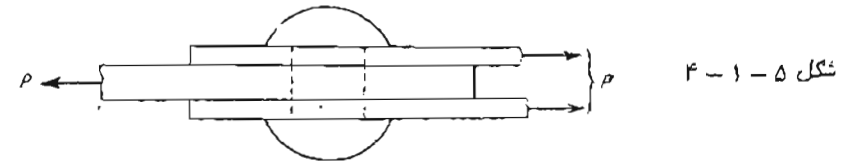
۴-۴ جواب‌های مسائل حل نشده

2.5 MPa	: ۴-۱-۲	50 Kg/cm ²	: ۴-۱-۱
$\tau = 0.24 \text{ MPa}$	: ۴-۱-۴	$\tau = 0.707 P/ab$	: ۴-۱-۳
هفت پرچ در هر نیمه اتصال	: ۴-۱-۶	چهار عدد	: ۴-۱-۵
سه پرچ	: ۴-۱-۸	هشت پرچ در هر نیمه اتصال	: ۴-۱-۷
		7.5 cm	: ۴-۱-۹

۲۱۴

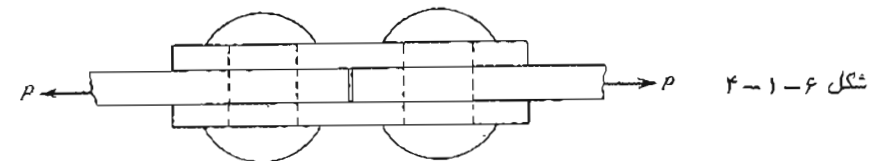
بکواح بارگذاری شده است. ولی در تمام طول سه نخ‌ناشی تکیه گاه ندارد (شکل ۴-۱-۴). اگر بار کل در بالای استوانه برابر 4MN باشد و 30 متر از لبه تحاشی آن بدون تکیه گاه باشد، تنش برشی متوسط را در روی هریک از مقاطع a-a و b-b پیدا کنید. استوانه از بتن به ضخامت 200 mm و ارتفاع 10 m ساخته شده است.

مسئله ۴-۱-۵ تعداد پرچ‌های لازم به قطر 20 mm را برای اتصال دو صفحه به ضخامت 5 mm به صفحه سومی به ضخامت 12 mm (شکل ۴-۱-۵) پیدا کنید. نیروی کششی P در روی اتصال برابر 18 t و تنش‌های مجاز برشی و فشاری به ترتیب 1000 Kg/cm^2 و 2800 Kg/cm^2 می‌باشد.



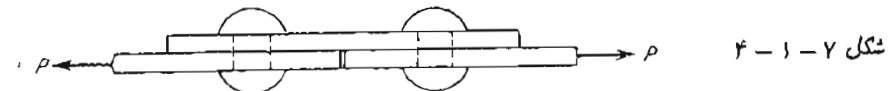
شکل ۴-۱-۵

مسئله ۴-۱-۶ تعداد پرچ‌های لازم به قطر 17 mm را برای اتصال دو صفحه به کمک دو عدد تسمه مطابق شکل ۴-۱-۶ پیدا کنید. نیروی کششی P برابر 30 t، ضخامت هریک از صفحه‌ها برابر 10 mm و ضخامت تسمه‌ها برابر 6 mm است. تنش‌های مجاز برشی و فشاری به ترتیب 1000 Kg/cm^2 و 2800 Kg/cm^2 می‌باشد.



شکل ۴-۱-۶

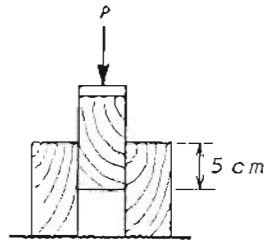
مسئله ۴-۱-۷ دو صفحه به توسط یک تسمه مطابق شکل ۴-۱-۷ به یکدیگر پرچ شده‌اند. ضخامت صفحه‌ها و تسمه برابر 10 mm است. اگر تنش‌های مجاز برشی و فشاری به ترتیب 1400 Kg/cm^2 و 3200 Kg/cm^2 باشند تعداد پرچ‌های لازم به قطر 17 mm را تعیین کنید. نیروی P در محل اتصال برابر 24 t می‌باشد.



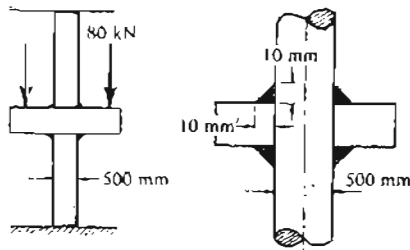
شکل ۴-۱-۷

۲۱۲

مسئله ۴-۱-۱ سه قطعه چوب مطابق شکل ۱-۱-۴ با جیب به یکدیگر متصل شده‌اند. قطعات چوب سطح مقطع یکسان دارند و طولشان در جهت عمود بر صفحه‌ها برابر 20 cm می‌باشد. اگر بار P برابر 10000 Kg باشد تنش برشی متوسط در محل اتصال قطعات چقدر است ؟



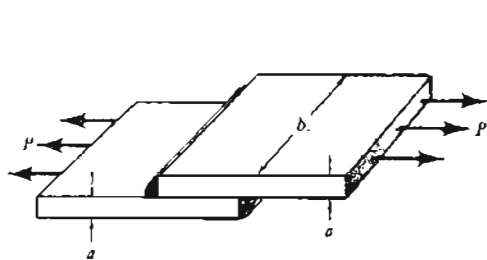
شکل ۴-۱-۱



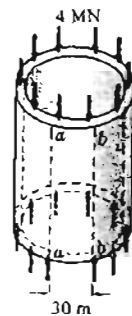
شکل ۴-۱-۲

مسئله ۴-۱-۲ در شکل ۲-۱-۴ بار کل 80 kN بر بالکن به صورت متقارن و شعاعی وارد می‌آید. تکیه گاه مرکزی ستونی به قطر 500 mm می‌باشد. بالکن در دو سطح فوقانی و تحتانی به ستون جوش شده و طول اضلاع جوش گوشه 10 mm است. تنش برشی متوسطی را که بین ستون و بالکن وجود دارد حساب کنید.

مسئله ۴-۱-۳ دو صفحه با ضخامت یکسان در شکل ۳-۱-۴ بوسیله دو بار جوش گوشه به یکدیگر متصل شده‌اند. تنش برشی حداکثر را در جوش‌ها تعیین کنید.



شکل ۴-۱-۳



شکل ۴-۱-۴

مسئله ۴-۱-۴ استوانه قائم جدار نازکی به قطر 40 m در طول لبه فوقانی بطور

۲۱۲

تنش کششی در سیم در مقطع 2-2 برابر است با

$$\sigma_{2-2} = \frac{\frac{3}{4} P}{A_{2-2}} = \frac{\frac{3}{4} \times 8000}{11.8} = 508 \text{ Kg/cm}^2$$

تنش در مقطع 2-2 15 درصد کمتر از تنش در مقطع 1-1 است. در مقطع 3-3 نیروی منقل شده به تسمه B برابر $\frac{1}{4} P = \frac{3}{4} P$ است. مساحت سطح مقطع در مقطع 3-3 برابر مساحت سطح مقطع در مقطع 1-1 است.

$$A_{3-3} = A_{1-1} = 13.4 \text{ cm}^2$$

تنش کششی در این مقطع برابر است با

$$\sigma_{3-3} = \frac{\frac{P}{4}}{A_{3-3}} = \frac{\frac{8000}{4}}{13.4} = 150 \text{ Kg/cm}^2$$

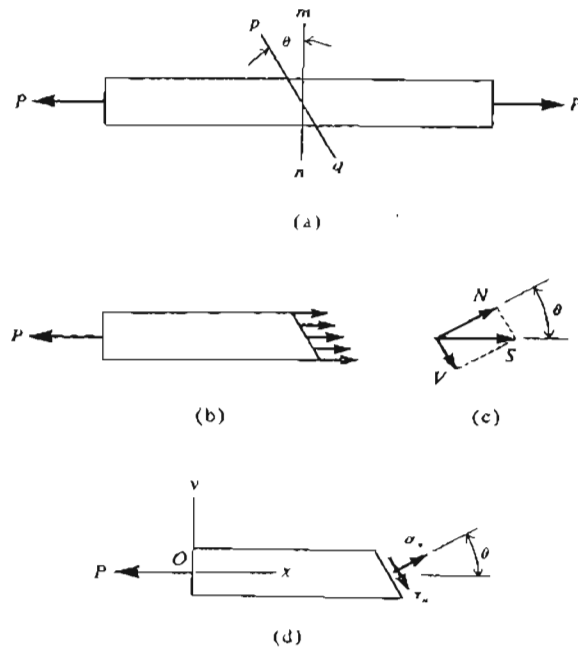
این تنش 75% کمتر از تنش در مقطع 1-1 می‌باشد. حال تنش تکیه گاهی در تسمه را در اثر فشار وارده بوسیله پرچ حساب می‌کنیم. مساحت تکیه گاهی تسمه در هر پرچ برابر است با

$$A_b = \delta d = 1 \times 1.6 = 1.6 \text{ cm}^2$$

فشاری که بوسیله یک پرچ بر تسمه وارد می‌شود برابر $\frac{P}{4}$ می‌باشد. بنابراین تنش تکیه گاهی برابر است با

$$\sigma_b = \frac{\frac{P}{4}}{A_b} = \frac{\frac{8000}{4}}{1.6} = 1250 \text{ Kg/cm}^2$$

۴-۳ مسائل حل نشده



شکل ۱-۵

$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (5-1)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (5-2)$$

در این رابطه $\sigma_x = P/A$ تنش در جهت x در روی سطح مقطع عمود بر محور میله می باشد. تنش های σ_{θ} و τ_{θ} که به ترتیب تنش های عمودی و برشی در روی سطح مایل pq هستند (شکل ۱-۵ d) در روی سطح مقطع بطور یکنواخت توزیع شده اند. توجه کنید وضعیت سطح مایل بوسیله زاویه θ که از محور x تا خط عمود بر سطح اندازه گیری می شود تعریف شده است.

حجت الله عادل

مقاومت مصالح

فصل پنجم

تحلیل تنش و کرنش

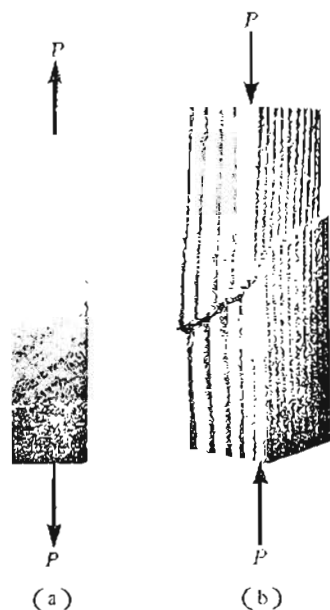
۱-۵ تنشها روی سطوح مایل

موقعی که یک میله منشوری تحت تأثیر کشش ساده قرار می گیرد، تنشها روی سطح مقطع mn عمود بر محور میله بطور یکنواخت توزیع شده و برابر P/A می باشد (شکل ۱-۵). حال بیاییم تنشها را روی سطح مایل pq که با مقطع mn زاویه θ تشکیل می دهد مطالعه کنیم. چون همه تارهای طولی کرنش محوری یکسان دارند، نیروهای معرف اثر قسمت سمت راست روی قسمت سمت چپ میله باید روی مقطع مایل pq بطور یکنواخت توزیع شده باشند (شکل ۱-۵ b). قسمت چپ میله باید تحت اثر این نیروها و بار خارجی P در حال تعادل باشد. از این رو برآیند S نیروهای گسترده روی مقطع مایل باید برابر P باشد. نیروی S را می توان به دو مؤلفه N عمود بر سطح مایل و V مماس بر سطح مایل تجزیه نمود (شکل ۱-۵ c). مقدار این مؤلفه ها از روابط زیر بدست می آیند:

$$N = P \cos \theta \quad ; \quad V = P \sin \theta$$

چون مساحت A' سطح مقطع مایل برابر $A/\cos \theta$ است، تنش های نظیر N و V به ترتیب عبارتند از

۲۱۹



شکل ۲-۵

علامت منفی برای τ_θ به این معنی است که این تنش در جهتی مخالف جهت نشان داده شده در شکل ۵-۱ d عمل می‌کند. شکل ۵-۳ فرار داده‌های علامت را برای تنش‌های عمودی و برشی نشان می‌دهد. تنش عمودی مثبت تنش است که از سطح مصالح بدون توجه به وضعیت آن دور شود و تنش عمودی منفی به سطح مصالح نزدیک می‌شود. تنش‌های برشی τ_θ وقتی مثبت هستند که نسبت به سطح مصالح در جهت عقربه‌های ساعت عمل کنند و در صورتی که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت عمل کنند منفی می‌باشند. یک روش ساده برای نشان دادن تنش‌ها در یک نقطه از میله این است که عنصر کوچکی از ماده را به صورت جسم آزاد جدا کرده و تنش‌ها را در روی تمام وجه‌های آن نشان دهیم. برای مثال دو عنصر A و B که از میله تحت کششی بریده شده‌اند در شکل ۵-۴ مشاهده می‌شود. وضعیت عنصر A چنان است که برای آن $\theta = 0$ و در نتیجه تنها تنش‌هایی که در روی آن عمل می‌کنند $\sigma_x = P/A$ می‌باشد.

عنصر B به اندازه زاویه θ دوران کرده است و سایرین تنش‌ها روی ضلع bd آن σ_θ و τ_θ می‌باشند که از روابط 5-1 و 5-2 بدست می‌آید. عمود وارد بر ضلع ab نسبت به محور x زاویه $\theta + \pi/2$ می‌سازد و بنابراین با جایگزینی

۲۱۸

معادله 5-1 نحوه تغییرات تنش عمودی σ_θ را نسبت به زوایای مختلف مقطع مایل نشان می‌دهد. موعی که $\theta = 0$ ، سطح pq با سطح مقطع mn مطبق می‌گردد و همانطوریکه انتظار می‌رود داریم $\sigma_\theta = \sigma_x$. با افزایش زاویه θ تنش σ_θ کاهش می‌یابد تا اینکه در $\theta = \pi/2$ تنش عمودی برابر صفر می‌گردد. این نتیجه نشان می‌دهد که بین نارهای طولی میله تنش‌های عمودی وجود ندارد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که حداکثر مقدار تنش عمودی وقتی اتفاق می‌افتد که $\theta = 0$ و برابر است با

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \quad (5-3)$$

از معادله 5-2 مشاهده می‌شود که تنش برشی τ_θ در $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ برابر صفر است و در $\theta = \pi/4$ مقدارش حداکثر و برابر است با

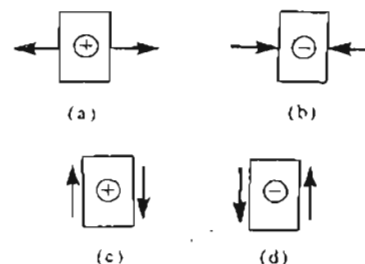
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (5-4)$$

با وجود اینکه تنش برشی ماکزیمم نصف تنش عمودی ماکزیمم است وقتی که ماده یک میله با بار محوری در مقابل برش خیلی ضعیف تر از کشش باشد، تنش تعیین کننده تنش برشی می‌باشد. برای مثال هنگام آزمایش کشش میله مسطحی از فولاد با کربن کم و سطوح صقلی نوارهای لغزش در روی سطوح تحت آن در امتدهایی که با محور میله زاویه تقریباً 45° تشکیل می‌دهد ظاهر می‌گردد که با چشم قابل رویت می‌باشد (شکل ۵-۲ a). این نوارها نشان می‌دهد که ماده در روی سطوحی که تنش برشی در آن ماکزیمم است در حال شکست می‌باشد. نوارهای مزبور وقتی ظاهر می‌شوند که تنش در میله به تنش تسلیم نزدیک می‌شود.

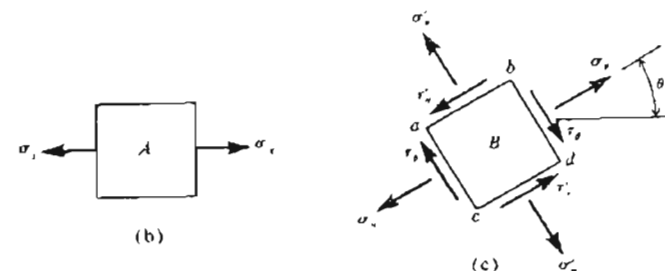
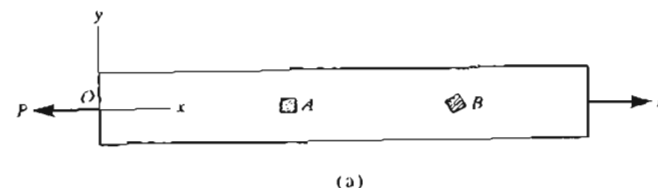
مثال دیگری از شکست برشی در شکل ۵-۲ b مشاهده می‌گردد. این شکل یک بلوک چوبی را نشان می‌دهد که در امتداد محورش تحت فشار قرار گرفته و در اثر برش در امتداد یک صفحه 45° شکست خورده است.

معادلات 5-1 و 5-2 که برای میله تحت کشش نوشته شده‌اند برای فشار محوری نیز قابل استفاده می‌باشد به شرط آنکه برای σ_x یک مقدار منفی بکار برده شود. در این صورت برای تمام مفادیر θ بین 0 تا $\frac{\pi}{2}$ برای σ_θ و τ_θ مقادیر منفی بدست می‌آید. علامت منفی برای σ_θ به معنای فشاری بودن تنش عمودی است.

۲۲۰



شکل ۵-۳ قرار دادهای علامت برای تنشهای عمودی و برشی



شکل ۵-۴

در معادلات ۵-۱ و ۵-۲ تنشها در روی سطح ab به $\theta + \pi/2$ به جای θ دست می‌آیند.

$$\sigma_{\theta}^{\prime} = \sigma_x \cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sigma_x \sin^2 \theta \quad (5-5)$$

$$\tau_{\theta}^{\prime} = \sigma_x \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta \quad (5-6)$$

۲۲۱

چون σ_x در این مثال مثبت می‌باشد، تنش عمودی $\sigma_{\theta}^{\prime}$ نیز مطابق شکل ۵-۴-۱ مثبت است. تنش برشی $\tau_{\theta}^{\prime}$ در روی ضلع ab عنصر B علامت منفی دارد، این بدان معنی است که نسبت به سطح عنصر مزبور در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت عمل می‌کند (شکل ۵-۴-۲).

با مقایسه معادلات ۵-۱ و ۵-۲ با معادلات ۵-۵ و ۵-۶ دو رابطه جالب بین تنشها در روی دو سطح عمود بر یکدیگر بدست می‌آید.

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^{\prime} = \sigma_x \quad (5-7)$$

$$\tau_{\theta}^{\prime} = -\tau_{\theta} \quad (5-8)$$

رابطه ۵-۷ نشان می‌دهد که برای یک میله تحت کشش مجموع تنشهای عمودی در روی دو سطح عمود بر یکدیگر ثابت و برابر با σ_x می‌باشد. رابطه ۵-۸ نشان می‌دهد که تنشهای برشی در روی دو سطح عمود بر هم بطور عددی مساوی ولی دارای علامت‌های مخالف می‌باشند. نتیجه اخیر قبلاً در بخش ۱-۴ نیز مشاهده گردید.

اگر به همین طریق ادامه دهیم می‌توانیم تنشها را در روی اضلاع ac و cd و عنصر شکل ۵-۴-۳ نیز بدست آوریم. زاویه عمود بر سطح نسبت به محور x برای ضلع ac برابر $\theta + \pi$ و برای ضلع cd برابر $\theta + 3\pi/2$ می‌باشد. بدین طریق مشاهده می‌کنیم که تنشهای عمودی و برشی در روی اضلاع ac و bd یکسان هستند، همچنین تنشها در روی اضلاع cd و ab نیز یکسان می‌باشند.

در موقع انجام محاسبات عددی برای تعیین تنشها در روی ضلعی مانند cd، بعضی از مواقع ساده‌تر است که زاویه θ در جهت منفی (جهت عقربه‌های ساعت) اندازه‌گیری شود. برای مثال اگر زاویه θ در شکل ۵-۴-۳ مساوی 30° باشد، در موقع استفاده از معادلات ۵-۱ و ۵-۲ می‌توان هر یک از زوایای $30^\circ + 270^\circ = 300^\circ$ یا 60° را برای مشخص کردن سطح cd بکار برد.

۵-۲ تنش دو محوری

۲۲۲

از این معادله رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \quad (5-9)$$

همین طور با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی در امتداد τ_{θ} حاصل می‌شود

$$\tau_{\theta} A \sec \theta = \sigma_x A \sin \theta - \sigma_y A \tan \theta \cos \theta$$

و با پس از ساده کردن

$$\tau_{\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta \quad (5-10)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad ; \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

معادلات 5-9 و 5-10 به صورت زیر در می‌آید :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \quad (5-11)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \quad (5-12)$$

توجه کنید قرار دادهای علامت برای σ_{θ} و τ_{θ} در معادلات فوق همان قرار دادهایی است که در بخش قبلی بکار رفته است (شکل ۵-۳).

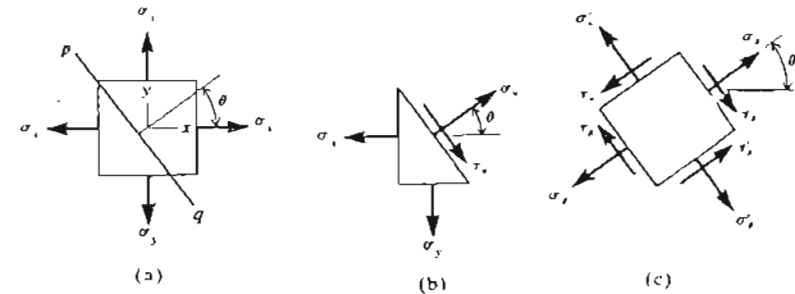
اگر در معادلات 5-11 و 5-12 بجای θ کمیت $\theta + \pi/2$ را قرار دهیم تنش‌های σ_{θ}° و τ_{θ}° در روی صفحه‌ای که با صفحه تنش‌های σ_{θ} و τ_{θ} زاویه 90° می‌سازد بدست می‌آید (شکل ۵-۵ c).

$$\sigma_{\theta}^{\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \quad (5-13)$$

$$\tau_{\theta}^{\circ} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \quad (5-14)$$

۲۲۲

حال بیایم حالت کلی از تنش را در نظر بگیریم که در آن تنش‌های عمودی در دو جهت x و y در روی یک عنصر اثر می‌کند (شکل ۵-۵ a). در مقابل



شکل ۵-۵

تنش یک بعدی یا یک محوری مورد بحث در بخش قبل، حالت تنش مزبور تنش دو محوری خوانده می‌شود. ما به تنش‌های دو محوری در مطالعه محازن سیالات تحت فشار، تیرها، محورهای مکانیکی و تعداد زیادی از اجزاء سازه‌ای و مکانیکی دیگر بر می‌خوریم که در فصل‌های بعد مورد بحث قرار می‌گیرند. در اینجا ما می‌خواهیم تنش‌ها را در روی یک مقطع مایل pq که عمود بر سطحی زاویه θ با محور x می‌سازد تعیین کنیم (شکل ۵-۵ a). تنش‌هایی که بر سطح مایل pq اثر می‌کنند تنش عمودی σ_{θ} و تنش برشی τ_{θ} مطابق شکل ۵-۵ b می‌باشد.

برای تعیین کردن تنش‌های σ_{θ} و τ_{θ} تعادل عنصر مثلثی را که از عنصر مستطیلی شکل ۵-۵ a بریده شده است در نظر می‌گیریم (شکل ۵-۵ b). اگر مساحت سطح قائمی را که σ_x بر آن اثر می‌کند A فرض کنیم، در این صورت مساحت سطح افقی عنصر مثلثی که σ_y بر آن اثر می‌کند برابر $A \tan \theta$ و مساحت سطح مایل برابر $A \sec \theta$ می‌باشد. بدین طریق نیروی کل بر وجه عمود بر محور x برابر $\sigma_x A$ و نیروی کل بر وجه عمود بر محور y برابر $\sigma_y A \tan \theta$ می‌باشد. هر یک از این نیروها را می‌توان به دو مؤلفه عمود بر یکدیگر تجزیه نمود بطوریکه یک مؤلفه در امتداد سطح مایل و مؤلفه دیگر در امتداد عمود بر سطح مایل باشد. با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی در امتداد σ_{θ} نتیجه می‌شود

$$\sigma_{\theta} A \sec \theta = \sigma_x A \cos \theta + \sigma_y A \tan \theta \sin \theta$$

با ترکیب نمودن دو معادله 5-11 و 5-13 نتیجه می‌شود

$$\sigma_{\theta} + \sigma'_{\theta} = \sigma_x + \sigma_y \quad (5-15)$$

این رابطه مجدداً نشان می‌دهد که مجموع تنش‌های عمودی در روی هر دو سطح عمود بر هم مقدار یاسی است. همچنین معایبه معادله 5-12 با معادله 5-14 مجدداً نشان می‌دهد که تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم بطور عددی مساوی و جهشان مخالف یکدیگر می‌باشد (معادله 5-8 را ببینید).

با دوران عنصر شکل 5-5c از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi/2$ ، تنش عمودی σ_{θ} از σ_x با σ_y تغییر می‌کند (معادله 5-11 را ببینید). بدین ترتیب یکی از این تنش‌ها بزرگترین و دیگری کوچکترین مقدار σ_{θ} می‌باشد. این مقادیر ماکزیمم و مینیمم تنش عمودی را تنش‌های اصلی می‌گویند و دو صفحه‌ای که روی آنها تنش‌های مذکور اثر می‌کنند به صفحه‌های اصلی موسوم می‌باشد. از معادله 5-12 نتیجه می‌شود که بر روی صفحه‌های اصلی تنش برشی وجود ندارد.

تنش برشی τ_{θ} به ازای $\theta = 0$ برابر صفر و با افزایش θ اضافه می‌شود تا اینکه در $\theta = \frac{\pi}{4}$ به حد ماکزیمم می‌رسد. ماکزیمم تنش برشی برابر است با (معادله 5-12)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (5-16)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که تنش برشی ماکزیمم نصف تفاضل تنش‌های اصلی می‌باشد. اگر تنش‌های σ_x و σ_y مساوی باشند روی هیچ یک از صفحه‌های مایل تنش برشی وجود نخواهد داشت.

باید توجه نمود که بحث بالا در مورد تنش‌های برشی ماکزیمم فقط درباره تنش‌های برشی در روی سطوح موازی با محور z مانند صفحه pq صادق است.

شکل 5-5a در واقع یک عنصر سه بعدی است که تنش σ_z در جهت z برابر صفر می‌باشد. صفحه‌های مایل را می‌توان موازی محور x یا y از میان عنصر عبور داد، و تنش برشی در روی یکی از این صفحه‌ها ممکن است از تنش که معادله 5-16 می‌دهد بیشتر باشد. تعیین تنش برشی ماکزیمم در حالت سه بعدی بعداً در بخش تنش‌های سه محوری بحث خواهد شد.

۵-۳ کرنش‌ها در تنش دو محوری

کرنش در جهت x برای عنصری در تنش دو محوری (شکل 5-5a) تنها به تنش σ_x در جهت x بلکه به علت اثر صریح پواسون (که در بخش ۶-۱ توضیح داده شد) به تنش در جهت y نیز بستگی دارد. با فرض اینکه قانون هوک در مورد ماده مورد نظر صادق باشد، کرنش در جهت x تحت اثر σ_x برابر σ_x/E و تحت اثر σ_y برابر $\nu\sigma_y/E$ می‌باشد. بدین ترتیب اگر هر دو تنش σ_x و σ_y بطور همزمان اثر کنند، کرنش در جهت x برابر می‌شود با

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (5-17)$$

همین طور برای کرنش در جهت y رابطه زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (5-18)$$

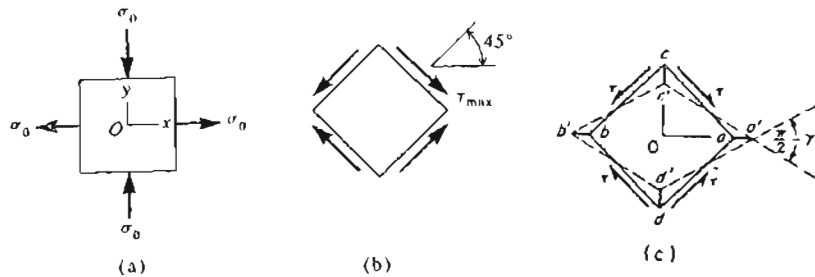
کرنش در جهت z نیز برابر است با

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (5-19)$$

از معادلات 5-17 و 5-18 تنش‌های σ_x و σ_y را می‌توان بر حسب توابعی از کرنش‌های ϵ_x و ϵ_y بیان نمود.

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)E}{1 - \nu^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)E}{1 - \nu^2} \quad (5-20)$$

وقتی که کرنش‌های ϵ_x و ϵ_y معلوم باشند (برای مثال از روی اندازه گیری تغییر شکل‌ها) از معادلات فوق برای محاسبه تنش‌های σ_x و σ_y می‌توان استفاده نمود. تغییر حجم ماده‌ای ارتجاعی در تنش دو محوری در واحد حجم را می‌توان بر حسب کرنش‌ها بدست آورد. ابعاد عنصری از ماده در جهت‌های x، y و z به ترتیب به نسبت $\frac{1+\epsilon_x}{1}$ ، $\frac{1+\epsilon_y}{1}$ و $\frac{1+\epsilon_z}{1}$ افزایش می‌یابد. بنابراین حجم میله



شکل ۵-۶

در روی اضلاع عنصر شکل ۵-۶ b کافی است در معادلات 5-11 و 5-13 بجای θ مقدار 45° را قرار دهیم که حاصل می شود $\sigma_\theta = \sigma_\theta' = 0$. بدین ترتیب مشاهده می کنیم که عنصر شکل ۵-۶ b تنها تحت اثر تنش های برشی قرار دارد و بنابراین در حالت برش خالص می باشد. همچنین مشاهده می کنیم که برش خالص معادل با حالت تنش ایجاد شده بوسیله تنش کششی در یک جهت و تنش فشاری هم اندازه آن در جهت عمود بر آن می باشد. البته واضح است اگر ما عنصری را در نظر بگیریم که به اندازه زاویه θ متفاوت با 45° دوران کرده باشد، روی سطوح عنصر مزبور هم تنش عمودی و هم تنش برشی وجود خواهد داشت که از معادلات 5-11 تا 5-14 بدست می آیند.

تعبیر شکل عنصری که در برش خالص قرار دارد در شکل ۵-۶ c رسم شده است. در طول اضلاع عنصر مزبور تغییراتی حاصل نمی شود زیرا در امتدادهای 45° تنش های عمودی وجود ندارد، ولی قطر افقی آن ازدیاد طول و قطر قائم آن کاهش طول پیدا خواهد کرد. کرنش برشی γ که برابر با $\tau_{\max} / G$ می باشد در شکل ۵-۶ c به صورت کاهش زوایای قائمه در دو انتهای قطر افقی، یا افزایش زوایای قائمه در دو انتهای قطر قائم ظاهر می گردد. زاویه بین وضعیت اولیه و نهایی هر یک از اضلاع عنصر مزبور برابر $\gamma/2$ می باشد.

تغییرات طول قطرهای عنصر شکل ۵-۶ c بوسیله کرنش های ϵ_x و ϵ_y که از معادلات 5-17 و 5-18 بدست می آیند تعیین می شود. در عین حال از شکل ۵-۶ c مشاهده می شود که این تغییرات طول بطور هندسی با کرنش برشی γ ارتباط دارند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که ضریب ارتجاعی در برش G به وسیله ضریب پواسون با ضریب ارتجاعی E (در کشش و فشار) ارتباط دارد.

برای پیدا کردن رابطه بین E و G ابتدا با استفاده از روابط 5-17، 5-18

$$\frac{(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)}{1}$$

افزایش می یابد. اگر از مقادیر کوچک مرتبه دوم و سوم کرنش ها صرف نظر شود کمیت مزبور برابر می شود با

$$1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

بنابراین تغییر حجم واحد حجم از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (5-21)$$

اگر به جای کرنش ها از معادلات 5-17 تا 5-19 در معادله 5-21 قرار دهیم، رابطه تغییر حجم واحد حجم در تنش دو محوری به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)(1 - 2\nu)}{E} \quad (5-22)$$

اگر $\sigma_y = 0$ باشد این معادله به معادله 1-14 برای تغییر حجم واحد حجم در حالت تنش یک محوری تبدیل می شود.

۵-۴ برش خالص

حال حالت خاصی از تنش دو محوری را در نظر می گیریم که در آن σ_x تنش کششی و σ_y تنش فشاری با همان مقدار σ_x باشد بطوریکه (شکل ۵-۶ a) $\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_0$ (5-23) ما کرنیم تنش برشی در روی صفحه مایلی که برای آن $\theta = 45^\circ$ می باشد اتفاق می افتد و مقدار آن با استفاده از معادله 5-16 برابر است با

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_0 \quad (5-24)$$

این تنش برشی در شکل ۵-۶ b رسم شده است. برای پیدا کردن تنش های عمودی

۲۲۹

این رابطه نشان می‌دهد که E ، G و ν خصوصیات مستقل مصالح نمی‌باشند. برای مثال برای فولاد اگر $\nu = 0.3$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ فرض شود، از معادله 5-25 حاصل می‌شود: $G = 810000 \text{ Kg/cm}^2$

۵-۵ دایره موهر برای تنش دو محوری

معادلات تنش‌های σ_θ و τ_θ را که در روی صفحه‌های مایل در حالت تنش دو محوری اثر می‌کنند می‌توان به صورت ترسیمی نشان داد. برای این کار ابتدا مانام گذاری زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5-26)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (5-27)$$

در این عبارات σ_{av} مقدار متوسط تنش‌های عمودی در روی اصلاع عنصر مورد نظر و τ_{max} تنش برشی ماکزیمم می‌باشد. با نام گذاری فوق می‌توانیم معادلات 5-11 و 5-12 را به صورت زیر بنویسیم:

$$\sigma_\theta - \sigma_{av} = \tau_{max} \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{max} \sin 2\theta$$

دو معادله فوق معادلات پارامتری یک دایره با پارامتر 2θ می‌باشند. با مربع کردن طرفین دو معادله فوق و جمع کردن آنها با یکدیگر می‌توان پارامتر مزبور را حذف نمود.

$$(\sigma_\theta - \sigma_{av})^2 + \tau_\theta^2 = \tau_{max}^2 \quad (5-28)$$

معادله فوق معادله دایره‌ای با متغیرهای مستقل σ_θ و τ_θ و شعاع τ_{max} می‌باشد. این دایره در شکل ۵-۷ با فرض اینکه محور طول‌ها σ_θ و محور عرض‌ها τ_θ باشد رسم شده است. مرکز C دایره مزبور دارای مختصات $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ می‌باشد. این روش ترسیمی برای اولین بار در سال ۱۸۸۲ توسط مهندس آلمانی اتو موهر^۱ پیشنهاد

۲۲۸

و 5-24 طول‌های oa' و oc' را حساب می‌کنیم.

$$oa' = oa (1 + \epsilon_x) = oa \left[1 + \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \nu) \right]$$

$$oc' = oc (1 + \epsilon_y) = oc \left[1 - \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \nu) \right]$$

با توجه به مثلث قائم الزاویه $oa'c'$ می‌توانیم بنویسیم

$$\tan \angle oa'c' = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{oc'}{oa'} = \frac{1 - \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \nu)}{1 + \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \nu)}$$

اگر رابطه فوق را با رابطه مثلثاتی زیر

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

که در آن به علت کوچک بودن زاویه γ از تساوی $\tan \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ استفاده شده است مقایسه کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau_{max}}{E} (1 + \nu)$$

حال اگر در این رابطه به جای γ مقدار مساوی آن τ_{max}/G را قرار دهیم رابطه بین G و E به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5-25)$$

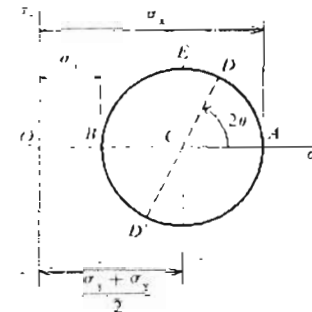
σ_θ و τ_θ را می‌دهد. برای مثال اگر $\theta = \pi/4$ باشد در این صورت $2\theta = \pi/2$ و نقطه D در بالای دایره (نقطه E) قرار خواهد گرفت که برای آن

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} ; \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

بنابراین نقطه E معرف صفحه‌ای می‌باشد که در آن تنش برشی ماکزیمم است، و این نتیجه است که از دایره موهر (شکل ۵-۷) مستقیماً به دست می‌آید زیرا شعاع دایره برابر $\tau_{\max}$ است.

اگر زاویه θ بیشتر از $\pi/2$ اختیار شود نقطه نظیر آن در روی دایره موهر در روی نیمه تحتانی دایره قرار خواهد گرفت. برای مثال نقطه D' که به طور قطری مخالف نقطه D و بنابراین با زاویه $2\theta + \pi$ مشخص می‌باشد معرف تنش‌ها در روی صفحه‌ایست که با صفحه تنش‌های σ_θ و τ_θ زاویه قائمه می‌سازد. بررسی شکل ۵-۷ نشان می‌دهد که مختصات نقطه D' برابر با σ_θ و τ_θ می‌باشد که بوسیله معادلات 5-13 و 5-14 داده شده است. بنابراین با تغییر زاویه 2θ در روی دایره موهر از 0° تا 360° ، تنش‌ها در روی تمام اضلاع عنصر شکل ۵-۷ از 0° تا 180° یا 360° بدست می‌آید. البته تنش‌ها در روی اضلاع باقی مانده (θ از 180° تا 360°) برابر با تنش‌ها در روی اضلاع مخالف می‌باشد.

روش معمول برای رسم دایره موهر مشخص کردن نقاط A و B در روی محور σ_θ با مقیاسی معین و سپس رسم دایره‌ای به قطر AB می‌باشد. تنش‌ها در روی هر صفحه مایلی که با زاویه θ مشخص شده باشد با اندازه‌گیری زاویه 2θ در روی دایره و تعیین نقطه D بدست می‌آید. تنش‌های مطلوب σ_θ و τ_θ یا مستقیماً با اندازه‌گیری مختصات نقطه D و یا با استفاده از محاسبات مثلثاتی تعیین می‌شوند. اگر یکی از دو تنش σ_x و σ_y و یا هر دو آنها فشاری باشد همان روش مذکور در فوق را می‌توان بکار برد با این تفاوت که قسمتی از دایره و یا تمام آن ممکن است در سمت چپ مبدا مختصات قرار بگیرد. همچنین باید به خاطر داشت که زاویه 2θ همواره از نقطه A که معرف تنش‌های صفحه x می‌باشد در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود، حتی اگر نقطه A در انتهای چپ قطر افقی دایره قرار نگیرد (این در صورتی اتفاق می‌افتد که σ_x بطور جبری از σ_y کوچکتر باشد. مثال ۵-۱ را ببینید). دایره موهر را به صورت معکوس نیز می‌توان بکار برد؛ یعنی اگر تنش‌های σ_θ ، τ_θ ، σ_θ و τ_θ در روی یک عنصر دوران کرده در تنش دو محوری باشند



شکل ۵-۷ دایره موهر برای تنش دو محوری

خود و از این رو دایره مزبور به نام دایره موهر معروف است.

نقطه A دایره موهر در شکل ۵-۷ که دارای مختصات

$$\sigma_\theta = \sigma_{av} + \tau_{\max} = \sigma_x ; \quad \tau_\theta = 0$$

می‌باشد معرف تنش‌ها در روی وجه x (وجهی که بر محور x عمود است) عنصر مورد مطالعه می‌باشد ($\theta = 0$). همین طور نقطه B دایره که مختصات $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = 0$ دارد معرف تنش‌ها در وجه y عنصر مورد نظر می‌باشد ($\theta = 90^\circ$). حال بیایم یک نقطه اختیاری D روی دایره را که با زاویه 2θ در شکل ۵-۷ مشخص شده است در نظر بگیریم. زاویه 2θ از نقطه A که برای آن $\theta = 0$ می‌باشد اندازه‌گیری می‌شود. مختصات σ_θ و τ_θ نقطه D را می‌توان از هندسه دایره به صورت زیر بدست آورد:

$$\sigma_\theta = OC + CD \cos 2\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = CD \sin 2\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta$$

با مقایسه این روابط با معادلات 5-11 و 5-12 نتیجه می‌شود که مختصات نقطه D معرف تنش‌های σ_θ و τ_θ در روی صفحه مایلی است که در شکل ۵-۷ با زاویه θ تعریف شده است. توجه کنید برای تعیین محل نقطه D در روی دایره موهر زاویه 2θ به کار رفته است. همچنانکه زاویه θ از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند نقطه D در روی دایره از A تا B تغییر مکان می‌دهد، بطوریکه نیمه فوقانی دایره برای وضعیت‌های مختلف عنصر مورد نظر (شکل ۵-۷ c) از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi/2$ تنش‌های

۲۳۳

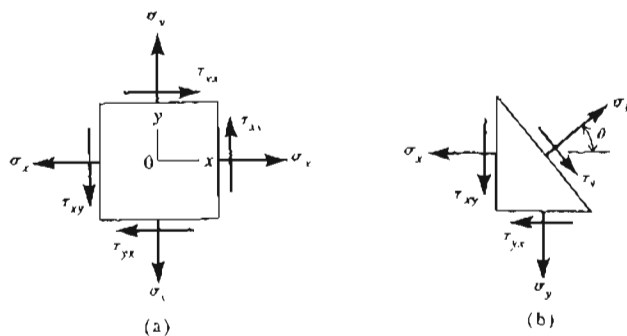
نقطه D' تنش‌ها را در صفحه‌ای می‌دهد که برای آن $2\theta = 220^\circ$ یا $\theta = 110^\circ$ می‌باشد. تنش‌های نقطه D' عبارتند از

$$\sigma_{\theta} = 149.1 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \tau_{\theta} = 359.8 \text{ Kg/cm}^2$$

این تنش‌ها نیز در روی شکل $c - ۵$ نشان داده شده‌اند.

۵-۶ تنش مسطح

تنش‌های یک محوری و دو محوری حالت‌های خاصی از حالت کلی تر تنش موسوم به تنش مسطح می‌باشد. عنصر کوچکی در تنش مسطح مطابق شکل $a - ۵$ می‌تواند در روی وجه‌های x و y تنش‌های عمودی و برشی داشته باشد ولی در روی وجه z آن تنش وجود ندارد. تنش برشی در روی وجه x عنصر کوچک مزبور با τ_{xy} نشان داده می‌شود که در آن زیر نویس اول معرف سطحی است که تنش بر آن اثر می‌کند و زیر نویس دوم معرف راستای تنش برشی می‌باشد. موقعی که از این اسم گذاری برای مشخص کردن تنش‌های برشی استفاده می‌شود معمولاً "تنش برشی وقتی مثبت فرض می‌شود که جهت آن در جهت مثبت محور y باشد. بدین ترتیب τ_{xy} در جهت مثبت شده در روی شکل مثبت می‌باشد. همین طور تنش برشی در وجه فوقانی عنصر کوچک با τ_{yx} نشان داده می‌شود و این تنش معرف آن است که تنش برشی در روی وجه y عنصر کوچک در



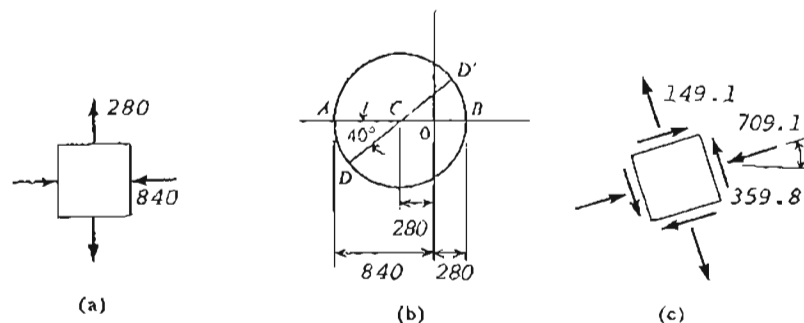
شکل ۵-۶

۲۳۲

(شکل $c - ۵$)، با استفاده از دایره موهر می‌توان تنش‌های σ_x و σ_y را بدست آورد. برای اینکار ابتدا با دانستن مقادیر معلوم تنش‌ها، محل نقاط D و D' مشخص می‌شود. سپس با رسم دایره‌ای به قطر DD' دایره موهر بدست می‌آید. محل برخورد دایره با محور σ_{θ} نقاط A و B را می‌دهد. بدین ترتیب نه تنها تنش‌های σ_x و σ_y بلکه زاویه دوران θ عنصر مورد نظر نیز تعیین می‌شود.

مثال ۵-۱

دایره موهر را برای حالت تنش دو محوری شکل $a - ۵$ که در آن $\sigma_x = -840 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 280 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد رسم کنید. تنش‌های σ_{θ} و τ_{θ} را در روی اضلاع عنصری که برای آن $\theta = 20^\circ$ می‌باشد تعیین کنید.



شکل ۵-۸

حل: ابتدا محل نقاط A و B را که به ترتیب معرف تنش‌ها در روی صفحه‌های $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ می‌باشند مطابق شکل $b - ۵$ تعیین می‌کنیم. مرکز C دایره در $\sigma_{av} = -280 \text{ Kg/cm}^2$ و شعاع دایره برابر 560 Kg/cm^2 می‌باشد. نقطه D با اندازه گیری زاویه $2\theta = 40^\circ$ از نقطه A در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید. از روی دایره موهر (شکل $b - ۵$) مختصات نقطه با مقیاس یا محاسبه بدست می‌آید.

$$\sigma_{\theta} = -709.1 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \tau_{\theta} = -359.8 \text{ Kg/cm}^2$$

این تنش‌ها در روی عنصر دوران پیدا کرده در شکل $c - ۵$ نشان داده شده است.

۲۳۴

جهت مثبت x اثر می‌کند و مقدار آن مثبت است. این قرار داد علامت برای تنش‌های برشی τ_{xy} و τ_{yx} غالباً "در تئوری ارتجاعی بکار می‌رود و از این جهت در این کتاب انتخاب شده است.

اما ما در بحث‌های قبلی قرار داد دیگری برای علامت تنش برشی τ_θ بکار بردیم که بر اساس اینکه تنش برشی در جهت عقربه‌های ساعت و یا مخالف جهت عقربه‌های ساعت نسبت به سطح اثر کند قرار داشت. ما در مطالعه تنش سطح برای τ_θ همان قرار داد علامت را بکار خواهیم برد. در این صورت در روی سطح $\theta = 0$ (وجه x عنصر کوچک) داریم: $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ و در روی سطح $\theta = 90^\circ$ داریم: $\tau_\theta = \tau_{yx}$. همچنین از تساوی تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم واضح است که

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (5-29)$$

حال مقطع مایلی را که عمود بر آن با محور x زاویه θ تشکیل می‌دهد در نظر می‌گیریم (شکل ۵-۹). از شرایط تعادل عنصر کوچک مثلثی می‌توان تنش عمودی σ_θ و تنش برشی τ_θ را که بر سطح مایل اثر می‌کند بدست آورد. در نوشتن معادلات تعادل باید توجه نمود که مساحت‌های وجه‌های عنصر مزبور یکسان نمی‌باشند و برای به دست آوردن نیروی وارد بر هر وجه باید تنش وارد بر وجه مزبور را در مساحت سطح آن ضرب نمود. این روش قبلاً در مورد معادلات ۵-۹ و ۵-۱۰ بکار رفت.

از تعادل نیروها در امتداد θ (شکل ۵-۹) نتیجه می‌شود

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

از تعادل نیروها در امتداد τ_θ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

دو معادله فوق را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5-30)$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (5-31)$$

معادلات فوق تنش‌های عمودی و برشی را در روی هر سطح مایلی بر حسب تنش‌های σ_x ، σ_y و τ_{xy} می‌دهند. توجه کنید وقتی $\theta = 0$ از معادلات فوق $\sigma_\theta = \sigma_x$ و

۲۳۵

$\tau_\theta = -\tau_{xy}$ ، و وقتی $\theta = \pi/2$ از معادلات فوق $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = \tau_{xy}$ به دست می‌آید. همچنین وقتی $\tau_{xy} = 0$ می‌باشد، معادلات ۵-۳۰ و ۵-۳۱ به معادلات ۵-۱۱ و ۵-۱۲ برای حالت تنش دو محوری منجر می‌شوند.

در هنگام استفاده از معادلات ۵-۳۰ و ۵-۳۱ به قرار دادهای علامت تنش‌ها باید به دقت توجه شود:

الف - تنش‌های عمودی وقتی مثبت هستند که کنشی باشند،

ب - تنش برشی τ_{xy} وقتی مثبت است که در جهت مثبت محور y باشد،

پ - تنش برشی τ_θ وقتی مثبت است که در جهت عقربه‌های ساعت در روی سطح ماده اثر کند.

علت انتخاب قرار داد علامت فوق برای τ_θ این است که زاویه 2θ در دایره موهر در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت که همان جهت مثبت اندازه‌گیری θ است اندازه‌گیری شود.

تنش‌ها در روی سطحی که زاویه $\theta + \pi/2$ با محور x می‌سازند (σ_θ و τ_θ) از معادلات ۵-۳۰ و ۵-۳۱ با جایگزینی $\theta + \pi/2$ به جای θ بدست می‌آیند. اگر این عمل انجام شود، پیدا خواهیم کرد

$$\sigma_\theta + \sigma_{\theta+\pi/2} = \sigma_x + \sigma_y; \quad \tau_\theta = -\tau_{\theta+\pi/2}$$

بدین ترتیب مجدداً مشاهده می‌کنیم که مجموع تنش‌های عمودی در روی دو سطح عمود بر هم ثابت می‌باشد و تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم دارای مقدار یکسان ولی جهت مخالف یکدیگر می‌باشند.

با تغییر زاویه θ در شکل ۵-۹ از 0° تا 360° تنش‌های σ_θ و τ_θ نیز تغییر می‌کنند. ماکزیمم و مینیمم مقادیر σ_θ تنش‌های اصلی هستند و صفحاتی که این تنش‌ها بر آنها اثر می‌کنند با مساوی صفر قرار دادن $d\sigma_\theta/d\theta$ و سپس حل معادله حاصل برای θ بدست می‌آیند.

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5-32)$$

۲۳۶

θ_p در این رابطه زوایای صفحه‌های اصلی را مشخص می‌کند. از معادله 5-32 دو مقدار برای $2\theta_p$ بدست می‌آید که با یکدیگر به اندازه 180° اختلاف دارد. اولین مقدار بین 0° و 180° و مقدار دیگر بین 180° و 360° قرار دارد. بدین ترتیب دو مقدار برای θ_p بدست می‌آید، مقدار اول بین 0° و 90° و مقدار دیگر بین 90° و 180° قرار دارد. تنش عمودی σ_θ به ازای یکی از مقادیر θ_p ماکزیمم و به ازای مقدار دیگر مینیمم می‌باشد. این دو تنش اصلی در دو صفحه عمود بر هم اثر می‌کنند. در هر حالت خاصی بعد از پیدا کردن مقادیر θ_p از معادله 5-32 می‌توان آنها را در معادله 5-30 جایگزین نمود تا دو تنش اصلی بدست آید. با احاطه این عملیات بطور جبری می‌توان یک فرمول کلی برای تنش‌های اصلی بدست آورد. برای این کار از معادله 5-32 داریم

$$\cos 2\theta_p = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{s} ; \quad \sin 2\theta_p = \pm \frac{2\tau_{xy}}{s}$$

$$s = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

در این رابطه

از جایگزینی مقادیر فوق در معادله 5-30 حاصل می‌شود

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5-33)$$

σ_1 و σ_2 به ترتیب معرف تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم به طور جبری می‌باشند. مشاهده می‌شود که رابطه $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$ برقرار است. اگر در معادله 5-31 تنش برشی τ_θ را مساوی صفر قرار دهیم و معادله را برای 2θ حل کنیم به همان نتیجه معادله 5-32 می‌رسیم. این نتیجه نشان می‌دهد که در صفحه‌های اصلی تنش برشی وجود ندارد. حال تنش‌های برشی ماکزیمم و صفحه‌هایی را که بر آنها اثر می‌کند پیدا می‌کنیم. اگر مشتق معادله 5-31 را نسبت به θ مساوی صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\cot 2\theta_s = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5-34)$$

۲۳۷

θ_s زاویه صفحه‌ایست که در آن تنش برشی ماکزیمم می‌باشد. از مقایسه معادله فوق با معادله 5-32 نتیجه می‌شود

$$\cot 2\theta_s = -\tan 2\theta_p$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $2\theta_s$ و $2\theta_p$ به اندازه 90° با یکدیگر اختلاف دارند، یا صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم با صفحه‌های اصلی زاویه 45° شکل می‌دهد (این نتیجه قبلاً در بخش ۲-۵ در حالت تنش دو محوری نیز مشاهده شده است). با جایگزینی $2\theta_s$ از معادله 5-34 در معادله 5-31 تنش برشی ماکزیمم به دست می‌آید.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5-35)$$

رابطه فوق معادل است با

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (5-36)$$

در روی صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم تنش‌های عمودی برابرند با

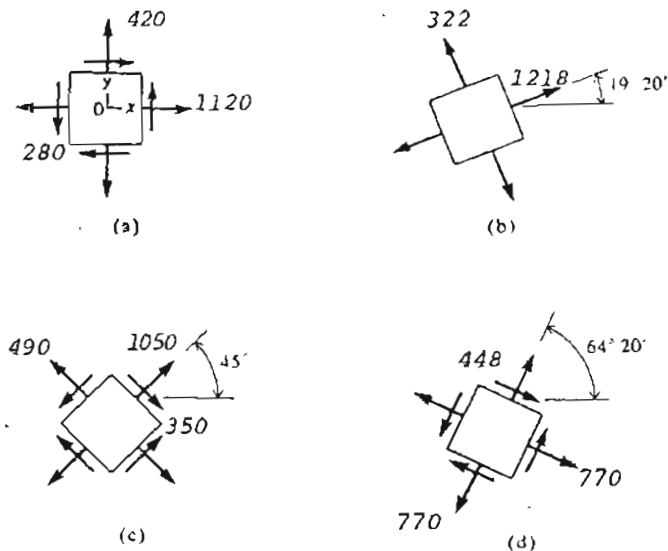
$$\sigma_\theta = \sigma'_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5-37)$$

مثال ۲-۵

عنصری در تنش سطح تحت تنش‌های $\sigma_x = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ ، $\sigma_y = 420 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_{xy} = 280 \text{ Kg/cm}^2$ مطابق شکل ۱۰-۵ قرار دارد. تعیین کنید:
الف - تنش‌ها و صفحه‌های اصلی، ب - تنش‌ها در روی عنصری که به اندازه 45° دوران کرده باشد و پ - تنش‌های برشی ماکزیمم. نتایج را روی شکل‌های عناصر دوران پیدا کرده نشان دهید.

حل: الف - برای پیدا کردن صفحه‌های اصلی از معادله 5-32 استفاده می‌کنیم که از آن $\tan 2\theta_p = 0.8$ و $19^\circ 20'$ و $109^\circ 20'$ بدست می‌آید. با استفاده از معادله 5-33 تنش‌های اصلی $\sigma_1 = 1218 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_2 = 322 \text{ Kg/cm}^2$

۲۳۸



شکل ۱۰-۵

بدست می‌آیند. این نتایج در شکل b-۱۰ نشان داده شده است.

ب- تنش‌ها در روی عنصری که به اندازه 45° دوران کرده باشد از معادلات 5-30 و 5-31 بدست می‌آیند. اگر در این معادلات $\theta = 45^\circ$ قرار دهیم $\sigma_\theta = 1050 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma'_\theta = 490 \text{ Kg/cm}^2$ و اگر در آنها $\theta = 135^\circ$ قرار دهیم $\tau_\theta = 350 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau'_\theta = -350 \text{ Kg/cm}^2$ بدست می‌آیند. این نتایج در شکل c-۱۰ نشان داده شده است.

پ- زاویه صفحه تنش برشی ماکزیمم از معادله 5-34 به دست می‌آید: $\cot 2\theta_s = -0.8$ و $\theta_s = 154^\circ 20'$ و $2\theta = 128^\circ 40'$ در معادلات 5-30 و 5-31 $\sigma_\theta = 770 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_\theta = 448 \text{ Kg/cm}^2$ و با به کار بردن $2\theta = 308^\circ 40'$ $\sigma'_\theta = 770 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau'_\theta = -448 \text{ Kg/cm}^2$ بدست می‌آیند. این نتایج در شکل d-۱۰ نشان داده شده است.

۲۳۹

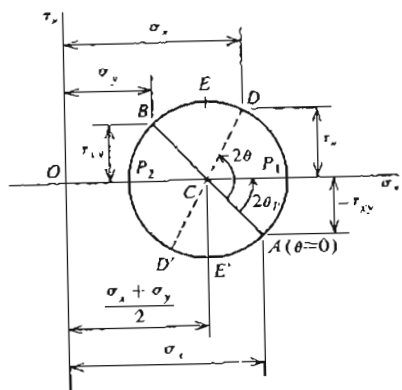
۷-۵ دایره موهر برای تنش مسطح

معادلات 5-30 و 5-31 برای حالت کلی تنش مسطح را می‌توان توسط دایره موهر نشان داد. این معادلات را می‌توان مشابه آنچه که در بخش ۵-۵ بحث شد با یکدیگر ترکیب نمود تا معادله

$$(\sigma_\theta - \sigma_{av})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (5-38)$$

بدست آید که در آن $\sigma_{av} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ معادله 5-38 معادله دایره‌ایست که مرکز آن در $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ قرار دارد و شعاع آن برابر با جذر قسمت راست معادله فوق می‌باشد. توجه کنید اگر $\tau_{xy} = 0$ باشد معادله 5-38 به حالت خاص معادله 5-28 تبدیل می‌گردد.

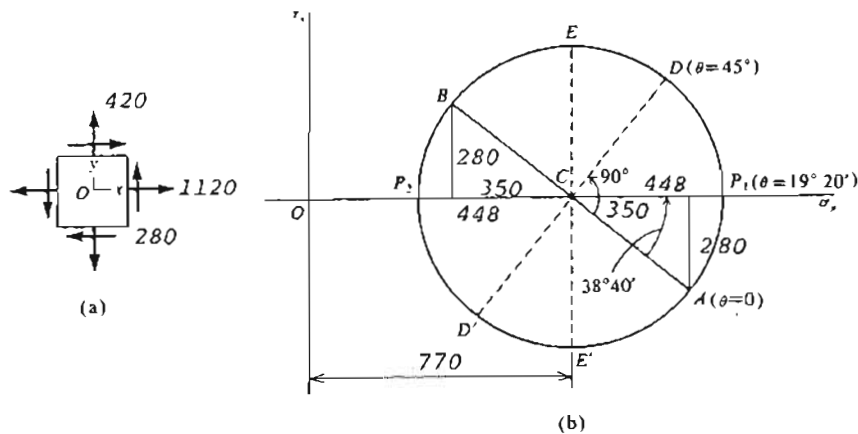
نحوه رسم دایره موهر در شکل ۱۱-۵ نشان داده شده است. ابتدا محل



شکل ۱۱-۵ دایره موهر برای تنش مسطح

نقطه C با مختصات $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ مشخص می‌شود. سپس محل نقطه A که معرف شرایط تنش در صفحه x عنصر می‌باشد و مختصات آن $\sigma_\theta = \sigma_x$ و $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ (به قرار دادهای علامت برای τ_θ و τ_{xy} در شکل ۹-۵ رجوع کنید) است در روی صفحه مختصات مشخص می‌گردد. بعد از آن محل نقطه B که معرف صفحه y عنصر با $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = \tau_{xy}$ است تعیین می‌گردد. نقاط A و B معرف تنش در روی صفحه‌هایی هستند که بر یکدیگر عمود می‌باشند، بنابراین در روی

۲۴۱



شکل ۱۲ - ۵

و شعاع $CA = 448 \text{ Kg/cm}^2$ رسم می‌گردد. نقطه B که در انتهای دیگر قطر AB قرار دارد به مختصات $\sigma_\theta = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_\theta = 280 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد. الف - بر اساس دایره موهر تنش اصلی σ_1 برابر با $1218 \text{ Kg/cm}^2 = 770 + 448$ می‌باشد و صفحه اصلی مربوطه زاویه $2\theta_p$ برابر $38^\circ 40'$ دارد. بنابراین زاویه بین محور x و صفحه اصلی $19^\circ 20'$ می‌باشد. تنش اصلی دیگر (نظیر نقطه P_2) برابر با $\sigma_2 = 770 - 448 = 322 \text{ Kg/cm}^2$ است که در روی صفحه با $\theta = 19^\circ 20' + 90^\circ = 109^\circ 20'$ اثر می‌کند.

ب - تنش‌ها در روی صفحه‌ای که به اندازه 45° دوران کرده است در روی دایره موهر بوسیله نقطه D با $2\theta = 90^\circ$ مشخص می‌شود. زاویه بین خط CD و محور σ_θ برابر $51^\circ 20' = 90^\circ - 38^\circ 40'$ می‌باشد. از مختصات نقطه D تنش‌های $\sigma_\theta = 1050 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_\theta = 350 \text{ Kg/cm}^2$ بدست می‌آید. تنش‌ها در نقطه D' نیز $\sigma_\theta' = 490 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_\theta' = -350 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشند. این نتایج را می‌توان در روی عنصری مانند شکل ۵-۱۰ c رسم نمود.

پ - تنش‌های برشی ماکزیمم و صفحه‌های مربوطه بوسیله نقاط E و E' تعیین می‌شوند. خواننده به سهولت می‌تواند ثابت کند که تنش‌ها در این نقاط با نتایج شکل ۵-۱۰ d منطبق می‌باشند.

۲۴۰

دایره موهر باید به اندازه 180° از یکدیگر فاصله داشته باشند. بدین ترتیب دایره‌ای که به مرکز C و قطر AB رسم شود همان دایره موهر است. برای پیدا کردن تنش‌های σ_θ و τ_θ در روی صفحه‌ای با زاویه θ کافی است در روی دایره موهر از نقطه A به اندازه 2θ در جهت خلاف جهت عقربه‌های ساعت جدا کنیم تا به نقطه D برسیم. مختصات نقطه D همان تنش‌های مطلوب می‌باشد. اثبات اینکه مختصات نقطه D به وسیله معادلات 5-30 و 5-31 داده می‌شود به عنوان تمرینی به عهده خواننده واگذار می‌شود.

نقطه D' که نقطه D در روی یک قطر قرار دارد معرف صفحه‌ای می‌باشد که با صفحه مربوط به نقطه D زاویه 90° می‌سازد. نقطه E در بالاترین نقطه دایره معرف تنش‌های صفحه تنش برشی مثبت ماکزیمم و نقطه E' در پایین ترین نقطه دایره معرف تنش‌های صفحه تنش برشی منفی ماکزیمم می‌باشد. در روی این صفحه‌ها تنش‌های عمودی برابر با تنش متوسط (معادله 5-37) می‌باشند.

یکی از استفاده‌های مهم دایره موهر تعیین کردن تنش‌های اصلی می‌باشد. این تنش‌ها که تنش‌های عمودی ماکزیمم و مینیمم می‌باشند با نقاط P_1 و P_2 در روی دایره موهر (شکل ۵-۱۱) مشخص می‌شوند. نقطه P_1 نظیر صفحه اصلی با تنش عمودی ماکزیمم σ_1 و نقطه P_2 نظیر صفحه اصلی با تنش عمودی مینیمم می‌باشد. زاویه $2\theta_p$ اولین صفحه اصلی در روی شکل ۵-۱۱ مشخص شده است. تمام روابطی که در بخش قبل بدست آمد به سهولت بوسیله دایره موهر قابل استنتاج می‌باشد.

مثال ۳-۵

عنصری در تنش سطح مطابق شکل ۵-۱۲ a تحت تنش‌های $\sigma_x = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ ، $\sigma_y = 420 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_{xy} = 280 \text{ Kg/cm}^2$ قرار دارد. با استفاده از دایره موهر تعیین کنید: الف - تنش‌ها و صفحه‌های اصلی، ب - تنش‌ها در روی صفحه‌ای که به اندازه 45° دوران کرده است و پ - تنش‌های برشی ماکزیمم (توجه کنید این مثال قبلاً در مثال ۵-۲ حل گردیده است).

حل: مرکز C دایره در روی محور σ_θ قرار دارد که برای آن $\sigma_\theta = 770 \text{ Kg/cm}^2$. محل نقطه A به مختصات $\sigma_\theta = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ و $\tau_\theta = -280 \text{ Kg/cm}^2$ در روی صفحه مشخص می‌شود. سپس دایره‌ای به مرکز C

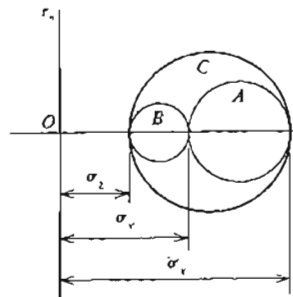
۲۴۳

همین طور تنش‌های برشی ماکزیمم در روی صفحه‌های موازی محورهای x و y عبارتند از

$$(\tau_{\max})_x = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \quad ; \quad (\tau_{\max})_y = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \quad (5-40)$$

بسته به مقادیر نسبی σ_x ، σ_y و σ_z یکی از مقادیر فوق بطور عددی بیشترین تنش برشی در عنصر می‌باشد.

همین نتایج را می‌توان به کمک دایره موهر به سهولت مجسم کرد. برای صفحه‌های موازی محور z دایره موهر دایره A در شکل ۱۴-۵ می‌باشد (با فرض اینکه σ_x و σ_y هر دو کششی و $\sigma_x > \sigma_y$ باشد). همین طور برای صفحه‌های موازی محورهای x و y به ترتیب دایره‌های B و C بدست می‌آیند. شعاع‌های سه دایره معرف تنش‌های برشی ماکزیمم می‌باشند که بوسیله معادلات 5-39 و 5-40 داده شده‌اند. و تنش برشی ماکزیمم مطلق برابر با شعاع بزرگترین دایره می‌باشد.

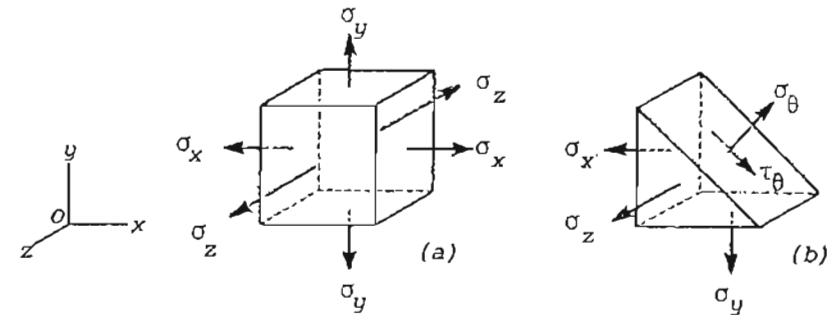


تنش‌های برشی و عمودی در روی صفحه‌هایی که به طور مورب و غیر موازی با محورهای x ، y و z بریده شده باشند با یک تحلیل سه بعدی پیچیده تری بدست می‌آید (مرجع 26). تنش‌های عمودی در روی این صفحه‌ها همواره مابین مقادیر جبری تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم قرار دارد، و تنش برشی در روی این صفحه‌ها همواره کمتر از مقدار عددی تنش برشی ماکزیمم که از معادلات 5-39 و 5-40 به دست می‌آید می‌باشد.

۲۴۲

۵-۸ تنش سه محوری

حالت تنش عنصر کوچکی از ماده که تحت اثر تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z در سه جهت عمود بر هم می‌باشد (شکل ۱۳ a-۵) موسوم به تنش سه محوری می‌باشد. اگر صفحه مایلی موازی محور z از میان عنصر عبور کند (شکل ۱۳ b-۵)، تنها



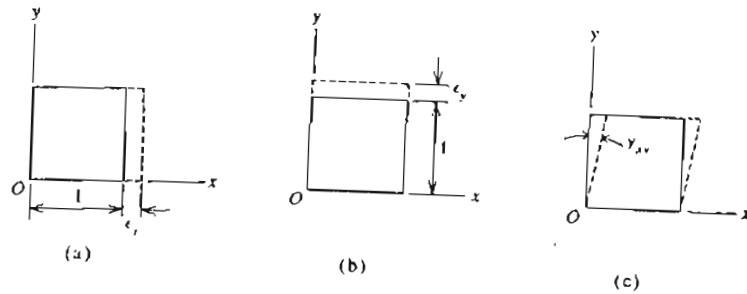
شکل ۱۳-۵

تنش‌هایی که در سطح مایل اثر می‌کنند تنش‌های σ_θ و τ_θ می‌باشند که قبلاً برای حالت تنش دو محوری بدست آمد. چون این تنش‌ها از نوشتن معادلات تعادل در صفحه xy بدست می‌آیند، آنها مستقل از تنش σ_z می‌باشند. بنابراین برای تعیین تنش‌های σ_θ و τ_θ می‌توانیم از معادلات حالت تنش دو محوری و همچنین دایره موهر استفاده کنیم. در مورد صفحه‌های مایلی که موازی x و y از میان عنصر بریده شود نیز همین نتایج کلی حاصل می‌شود.

با توجه به بحث‌های قبل مشاهده می‌شود که تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z تنش‌های اصلی عنصر مزبور می‌باشند. علاوه بر تنش‌های برشی ماکزیمم روی صفحه‌هایی خواهد بود که عنصر را تحت زاویه 45° و موازی یکی از محورهای مختصات قطع کند (و این بستگی به مقدار تنش‌های σ_x ، σ_y و σ_z نسبت به یکدیگر دارد). برای مثال اگر فقط صفحه‌های موازی محور z را در نظر بگیریم (شکل ۱۳ b-۵)، تنش برشی ماکزیمم برابر است با (با استفاده از معادله 5-16)

$$(\tau_{\max})_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (5-39)$$

۲۲۵



شکل ۱۵-۵

(شکل ۱۵-۵ b) و کرنش برشی γ_{xy} (شکل ۱۵-۵ c) در یک عنصر به صورت کاهش زاویه قائمه سمت چپ تحتانی آن کرنش برشی γ_{xy} در یک عنصر به صورت کاهش زاویه قائمه سمت چپ تحتانی آن قرار گرفته تعریف می شود. این تعریف کرنش برشی مثبت با تعریف تنش برشی مثبت τ_{xy} در شکل ۱۵-۵ a سازگار می باشد.

حالت عنصری از ماده که فقط تحت اثر کرنشهای ϵ_x ، ϵ_y و γ_{xy} می باشد حالت کرنش مسطح خوانده می شود. چنین عنصری کرنش عمودی ϵ_z و کرنشهای برشی γ_{yz} و γ_{xz} (به ترتیب در صفحه های xz و yz) نخواهد داشت. بدین ترتیب حالت کلی کرنش مسطح بوسیله شرایط زیر تعریف می شود:

$$\epsilon_x \neq 0 \quad \epsilon_y \neq 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0$$

$$\epsilon_z = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$$

تعریف کرنش مسطح فوق مشابه تعریف تنش مسطح می باشد که در حالت کلی به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0 \quad \tau_{xy} \neq 0$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

از تشابه شرایط کرنش مسطح و تنش مسطح نباید نتیجه گرفت که کرنش مسطح و تنش مسطح در شرایط یکسان ایجاد می شوند. برای مثال ما می دانیم عنصری در تنش مسطح معمولاً

۲۲۴

اگر ماده مورد نظر از قانون هوک پیروی کند کرنشها در جهتهای x ، y و z برای حالت تنش سه محوری به همان طریق حالت تنش دو محوری بدست می آید.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \quad (5-41)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (5-42)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (5-43)$$

تغییر حجم واحد حجم عنصر برابر است با (معادله 5-21)

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (5-44)$$

اگر در معادله فوق به جای کرنشها از معادلات 5-41 تا 5-43 قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (5-45)$$

در حالت خاصی که عنصر مورد نظر تحت فشار هیدرواستاتیک یا فشار یکنواخت در همه جهات قرار دارد اگر فشار مزیور را p بنامیم می توانیم بنویسیم

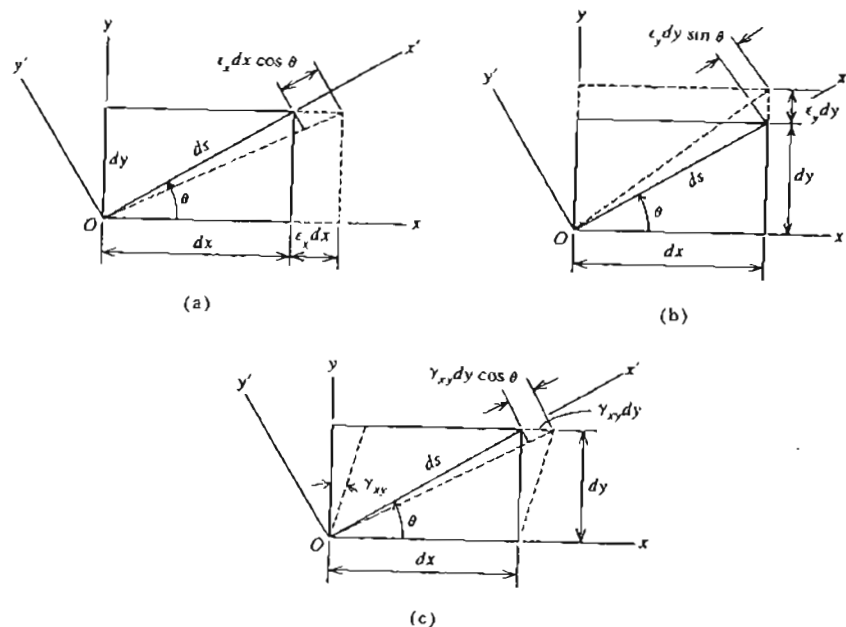
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3p(1-2\nu)}{E} \quad (5-46)$$

۱۵-۵ کرنش مسطح

در تحقیقات تجربی رفتار مصالح و سازه ها اندازه گیری کرنشها بوسیله کرنش سنجها کاملاً متداول است. از این رو پیدا کردن روابطی بین کرنشهای عمودی و برشی در امتدادهای مختلف مشابه روابطی که در بخش ۵-۶ برای تنش مسطح بدست آمد مورد توجه می باشد. در صفحه xy سه مؤلفه کرنش ممکن است وجود داشته باشد: کرنش عمودی ϵ_x در امتداد x (شکل ۱۵-۵ a)، کرنش عمودی ϵ_y در امتداد y

۲۴۷



شکل ۱۷ - ۵

γ_{xy} کاهش خواهد یافت (شکل ۱۷ c - ۵). هر یک از این سه تغییر شکل باعث می شود که طول قطر عنصر تغییر کند. اضافه طول های نظیر قطر عنصر مطابق شکل $\epsilon_x dx \cos \theta$ ، $\epsilon_y dy \sin \theta$ و $\gamma_{xy} dy \cos \theta$ می باشد. بنابراین اضافه طول کل قطر مزبور مجموع سه کمیت فوق می باشد، و کرنش نظیر ϵ_θ در راستای x' با تقسیم کردن این مجموع بر طول ds قطر به دست می آید. با توجه به اینکه $dy/ds = \sin \theta$ و $dx/ds = \cos \theta$ نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5-47)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

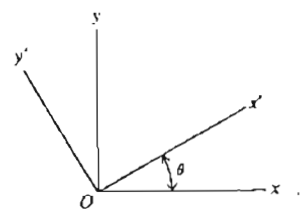
$$\epsilon_\theta = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\theta \quad (5-48)$$

بدین ترتیب معادلات 5-47 و 5-48 کرنش عمودی ϵ_θ را در راستای محور x'

۲۴۶

در امتداد z کرنش دارد و این نشان می دهد که حالت تنش سطح لژیومی ندارد که حالت کرنش سطح را ایجاد کند. همچنین بر عنصری در کرنش سطح معمولاً تنش σ_z اثر نمی کند تا شرط $\epsilon_z = 0$ برقرار گردد، بنابراین مجدداً "نتیجه می شود که معمولاً" تنش سطح و کرنش سطح بطور همزمان اتفاق نمی افتند.

معادلات تبدیل تنشها در بخش ۶-۵ ابتدا برای حالت تنش سطح بدست آمدند. بعداً در بخش ۸-۵ دیدیم که آنها را می توان برای عنصری در تنش سه محوری نیز بکار برد به شرط آنکه دوران عنصر حول یکی از محورهای مختصات صورت گرفته باشد. در مورد کرنشها نیز همان روش فوق بکار خواهد رفت. معادلات تبدیل کرنشها برای حالت کرنش سطح بدست خواهد آمد، اما این معادلات برای حالت کرنش سه محوری نیز صادق هستند به شرط آنکه دوران به یک امتداد جدید حول یکی از محورهای مختصات صورت گیرد. در نتیجه معادلات تبدیل کرنشها که در زیر بدست می آیند برای تعیین کرنشها در حالت تنش سطح نیز بکار می روند. همین طور معادلات تنش سطح که در بخش ۶-۵ بدست آمد برای تعیین تنشها در حالت کرنش سطح نیز بکار می روند.



شکل ۱۶ - ۵

برای اینکه معادلات تبدیل کرنشها را برای کرنش سطح بدست آوریم، محورهای مختصات شکل ۱۶-۵ را در نظر می گیریم. فرض می شود که کرنشهای عمودی ϵ_x و ϵ_y و کرنش برشی γ_{xy} مربوط به محورهای xy معلوم باشند. هدف ما تعیین کرنشهای عمودی و برشی مربوط به محورهای $x'y'$ می باشد که نسبت به محورهای xy به اندازه θ دوران کرده اند. کرنش عمودی در امتداد x' با ϵ_θ و کرنش برشی مربوط به محورهای $x'y'$ با γ_θ نشان داده می شود. وقتی که $\theta = 0$ داریم $\epsilon_\theta = \epsilon_x$ و $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$.

یک عنصر مستطیلی به اضلاع dx و dy که قطرش در امتداد محور x' میباشد در شکل ۱۷-۵ مشاهده می گردد. در اثر کرنشهای ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_z عنصر مزبور در امتداد x به اندازه $\epsilon_x dx$ (شکل ۱۷a-۵) و در امتداد y به اندازه $\epsilon_y dy$ (شکل ۱۷b-۵) اضافه طول پیدا خواهد کرد و زاویه xOy به اندازه

۲۴۸

می دهند. اگر کرنش عمودی در راستای γ' مطلوب باشد کافی است در معادلات فوق به جای θ مقدار $\theta + \pi/2$ را قرار دهیم.

برای یافتن معادله‌ای برای کرنش برشی γ_θ مجدداً تغییر شکل‌های شکل ۱۷-۵ را در نظر می‌گیریم. از شکل a ۱۷-۵ مشاهده می‌شود که در اثر کرنش ϵ_x محور x' به اندازه زاویه کوچک $\epsilon_x dx \sin\theta/ds$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده‌است. همین طور از شکل b ۱۷-۵ نتیجه می‌شود که در اثر کرنش ϵ_y محور x' به اندازه زاویه $\epsilon_y dy \cos\theta/ds$ در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت دوران نموده‌است. بالاخره از شکل c ۱۷-۵ مشاهده می‌شود که در اثر کرنش برشی γ_{xy} محور x' به اندازه $\gamma_{xy} dy \sin\theta/ds$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده‌است. بدین ترتیب دوران محور x' در جهت عقربه‌های ساعت برابر است با

$$\alpha = \epsilon_x \sin\theta \cos\theta - \epsilon_y \sin\theta \cos\theta + \gamma_{xy} \sin^2\theta$$

اگر در رابطه فوق به جای θ کمیت $\theta + \pi/2$ را قرار دهیم، زاویه دوران محور γ' در جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید.

$$\beta = -\epsilon_x \sin\theta \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \cos\theta + \gamma_{xy} \cos^2\theta$$

کاهش زاویه $x'Oy'$ که همان کرنش برشی γ_θ است برابر $\alpha - \beta$ می‌باشد.

$$\gamma_\theta = -2\epsilon_x \sin\theta \cos\theta + 2\epsilon_y \sin\theta \cos\theta + \gamma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

یا پس از تقسیم نمودن طرفین رابطه فوق بر ۲ حاصل می‌شود

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin\theta \cos\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (5-49)$$

این رابطه پس از استفاده از روابط مثلثاتی بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (5-50)$$

در دو حالت خاص $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ از معادلات فوق به ترتیب $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$ و $\gamma_\theta = -\gamma_{xy}$ بدست می‌آید.

مقایسه معادلات 5-48 و 5-50 برای حالت کرنش مسطح با معادلات 5-30 و 5-31 برای حالت تنش مسطح نشان می‌دهد که عبارات ϵ_θ و γ_θ همان شکل

۲۴۹

عبارات σ_θ و τ_θ را دارند. این شباهت به صورت نظیر بودن σ_y ، σ_x و σ_θ به ترتیب با ϵ_x ، ϵ_y و ϵ_θ و همچنین τ_{xy} با $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ و τ_θ با $\frac{1}{2}\gamma_\theta$ می‌باشد. وجود علامت منفی در جمله آخر به علت قرار داد علامتی است که برای تنش برشی τ_θ بکار رفت (شکل ۹-۵ را ببینید).

شباهت بین معادلات تنش مسطح و کرنش مسطح نشان می‌دهد که نظیر هر معادله تنش مسطح معادله‌ای نیز برای کرنش مسطح وجود دارد. برای مثال کرنش عمودی ϵ_θ و کرنش برشی γ_θ مربوط به یک جفت محوری که به اندازه $\theta + \pi/2$ دوران کرده‌است با جایگزینی $\theta + \pi/2$ بجای θ در معادلات 5-48 و 5-50 بدست می‌آیند، در این صورت داریم

$$\epsilon_\theta + \epsilon_{\theta'} = \epsilon_x + \epsilon_y \quad ; \quad \gamma_\theta = -\gamma_{\theta'} \quad (5-51)$$

این معادلات نشان می‌دهد که مجموع کرنش‌های عمودی در دو جهت عمود بر هم ثابت است و کرنش‌های برشی در امتداد‌های عمود بر هم دارای مقدار یکسان و علامت مخالف می‌باشد. این نتیجه کاملاً مشابه نتیجه‌ایست که در بخش ۶-۵ برای تنش مسطح بدست آمد.

همچنین در امتدادهایی که بوسیله معادله زیر مشخص می‌شود کرنش‌های اصلی وجود دارد (این معادله را با معادله 5-32 مقایسه کنید).

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (5-52)$$

کرنش‌های اصلی از معادله زیر محاسبه می‌شوند:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (5-53)$$

این معادله شبیه معادله 5-33 برای تنش‌ها می‌باشد. در روی صفحه‌های اصلی کرنش برشی وجود ندارد.

کرنش برشی ماکزیمم در روی صفحه‌هایی که با صفحه‌های اصلی زاویه 45° می‌سازند وجود دارد و مقدار آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\gamma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (5-54)$$

۲۵۱

یک میله فلزی در درجه حرارت 21°C دقیقاً در بین تکیه گاههای صلب قرار می گیرد (شکل a - ۱۹). اگر درجه حرارت به 93°C افزایش یابد تنش های عمودی و برشی را در مقطع مایل pq حساب کنید. ضریب انبساط حرارتی فلز میله را $\alpha = 11.7 \times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ و ضریب ارتجاعی آن را $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ فرض کنید.



شکل ۱۹ - ۵

حل: اگر میله آزاد بود به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ ازدیاد طول پیدا می کرد (طول میله L و ازدیاد درجه حرارت ΔT). ولی چون از ازدیاد طول میله در دو انتهای آن بوسیله تکیه گاههای صلب جلوگیری می شود در آن تنش های فشاری σ_x ایجاد می گردد. اگر سطح مقطع میله برابر A باشد نیروی ایجاد شده در میله برابر است با

$$P = \frac{AE\delta}{L}$$

بنابراین تنش σ_x به صورت زیر حساب می شود:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{E\delta}{L} = \frac{E(\alpha L \Delta T)}{L} = E\alpha \Delta T$$

$$\sigma_x = -(2.1 \times 10^6)(11.7 \times 10^{-6})(93-21) = -1769 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{فشاری}$$

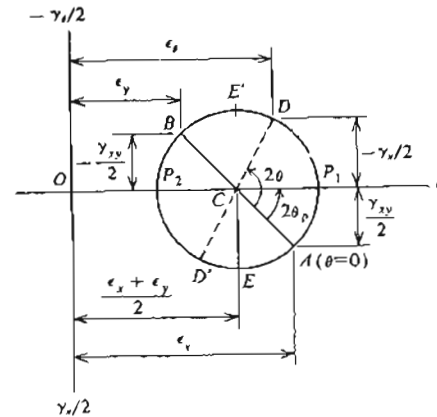
تنش های عمودی و برشی در مقطع مایل pq که عمود بر آن با امتداد افقی زاویه $\theta = 30^{\circ}$ می سازد (شکل b - ۱۹) از روابط زیر بدست می آید:

$$\sigma_{30} = \sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta = -1769 \cos^2 30 = -1326.75 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{30} = \tau_{\theta} = \sigma_x \sin \theta \cos \theta = -1769 \sin 30 \cos 30 = -766 \text{ Kg/cm}^2$$

۲۵۰

کرنش عمودی در صفحه های کرنش برشی ماکزیمم برابر است با $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$. دایره موهر برای کرنش سطح با همان ترتیب تنش سطح ساخته می شود (شکل ۱۸ - ۵). کرنش عمودی ϵ_{θ} در روی محور افقی و نصف کرنش برشی در روی محور قائم به طرف پایین رسم می شود (شکل ۱۸ - ۵ را با شکل ۱۱ - ۵ مقایسه کنید).



شکل ۱۸ - ۵

مرکز C دایره طولی برابر $(\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ دارد. نقطه A معرف کرنش های مربوط به امتداد x دارای مختصات ϵ_x و $\gamma_{xy}/2$ و نقطه B در انتهای دیگر قطری که از A عبور می کند دارای مختصات ϵ_y و $-\gamma_{xy}/2$ می باشد (نقطه B معرف کرنش های مربوط به یک جفت محورهایی است که به اندازه $\theta = 90^{\circ}$ دوران کرده است). کرنش های مربوط به محورهای دوران کرده دیگر بوسیله نقطه D داده می شود که برای تعیین محل آن از نقطه A به اندازه 2θ اندازه گرفته می شود. همچنین نقاط P_1 و P_2 معرف کرنش های اصلی و نقاط E و E' معرف کرنش های برشی ماکزیمم می باشند. تمام کمیت های مذکور را می توان به سهولت از روی دایره موهر پیدا نمود.

۱۱ - ۵ مسائل حل شده

یک صفحه فولادی دایره‌ای تارک به شعاع r و ضخامت t تحت تنش شعاعی σ_0 که به طور یکنواخت در محیط آن گسترده است قرار دارد. حالت تنش را در روی عنصری از صفحه مانند A بسایید (شکل ۵-۲۱). همچنین اگر ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ، $\sigma_0 = 2000 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.25$ باشد تغییر حجم واحد حجم صفحه را پیدا کنید.

حل: چون صفحه و تارگذاری خارجی هر دو نسبت به نقطه O متقارن می‌باشد نتیجه می‌شود که صفحه بعد از تغییر شکل نیز به صورت دایره‌ای باقی خواهد ماند. این بدان معنی است که کرنش‌های شعاعی (در امتداد شعاع دایره) و محیطی (در امتداد محیط دایره) در سراسر صفحه باید یکسواخت و یکسان باشد. حال با توجه به روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها در تنش دو محوری (معادلات 5-17 و 5-18) و با مراجعه به حالت تنش‌ها در عنصرهای A، B و C (از نمودار جسم آزاد عنصر B نتیجه می‌شود $\sigma_x = \sigma_0$ و از نمودار جسم آزاد عنصر C نتیجه می‌شود $\sigma_y = \sigma_0$) می‌توان نتیجه گرفت

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$$

بنابراین حالت تنش در هر عنصر دیگری از صفحه مانند عنصر A تنش دو محوری با تنش‌های اصلی یکسان می‌باشد.

قبل از تغییر شکل صفحه حجم آن برابر است با $V_0 = \pi r^2 t$. بعد از تغییر شکل شعاع جدید صفحه $r(1 + \epsilon_x)$ و ضخامت جدید آن $t(1 + \epsilon_z)$ می‌گردد. بنابراین حجم جدید صفحه $V = \pi r^2 t (1 + \epsilon_x)^2 (1 + \epsilon_z)$ می‌باشد. با بسط دادن این عبارت و صرف نظر نمودن از توان‌های دوم و سوم کرنش‌ها که مقادیر کوچکی هستند خواهیم داشت

$$V \approx \pi r^2 t (1 + \epsilon_z + 2\epsilon_x)$$

در این صورت تغییر حجم در واحد حجم صفحه برابر می‌شود با

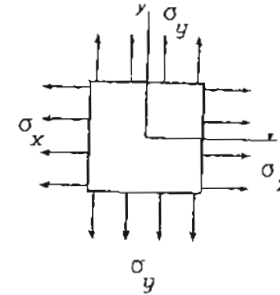
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\pi r^2 t (\epsilon_z + 2\epsilon_x)}{\pi r^2 t} = \epsilon_z + 2\epsilon_x \quad (1)$$

حال برای حالت تنش $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ کرنش‌ها را حساب می‌کنیم.

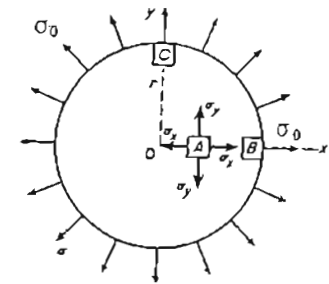
$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{(1 - \nu)\sigma_0}{E}$$

$$\epsilon_z = -\nu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right) = -\frac{2\nu\sigma_0}{E}$$

صفحه تارکی به ضخامت t در تنش دو محوری تحت کشش‌های $\sigma_x = 1400 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 560 \text{ Kg/cm}^2$ قرار دارد (شکل ۵-۲۰). اگر $t = 6.3 \text{ mm}$ و $\nu = 0.25$ ، $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد کاهش ضخامت صفحه را پیدا کنید.



شکل ۵-۲۰



شکل ۵-۲۱

حل: کرنش در جهت محور z (عمود بر صفحه شکل) برابر است با

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0.25}{2.1 \times 10^6} (1400 + 560) = -2.33 \times 10^{-4}$$

اگر کاهش ضخامت صفحه را Δt بنامیم خواهیم داشت

$$\epsilon_z = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta t}{6.3} = -2.33 \times 10^{-4}$$

$$\Delta t = 0.0015 \text{ mm}$$

۲۵۵

برای بدست آوردن p از تغییر شکل استوانه فولادی در مقابل تغییر شکل استوانه لاستیکی می توان صرف نظر نمود، به عبارت دیگر می توان فرض نمود:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = 0$$

اما ϵ_x بر حسب تنشها به صورت زیر بیان می شود:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [-p - \nu(-p - \frac{4P}{\pi d^2})] = 0$$

از این رابطه p بدست می آید.

$$p = \frac{4\nu P}{\pi(1-\nu)d^2} = \frac{4(0.45)(500)}{\pi(1-0.45)(5)^2} = 20.83 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۵-۵

کاهش حجم یک گوی فولادی توپر به قطر ۲.۵ cm تحت فشار هیدرو استاتیکی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ چقدر می باشد؟ ضریب ارتجاعی فولاد را $\nu = 0.3$ اختیار کنید.

حل: گوی در سه جهت x ، y و z تحت فشار $p = 140 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -140 \text{ Kg/cm}^2$$

گرنش در جهت ϵ_x برابر است با

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [-p - \nu(-p - p)] = -\frac{(1-2\nu)p}{E} \end{aligned}$$

به علت تقارن گرنشهای ϵ_y و ϵ_z نیز برابر با ϵ_x می باشند.

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{(1-2\nu)p}{E}$$

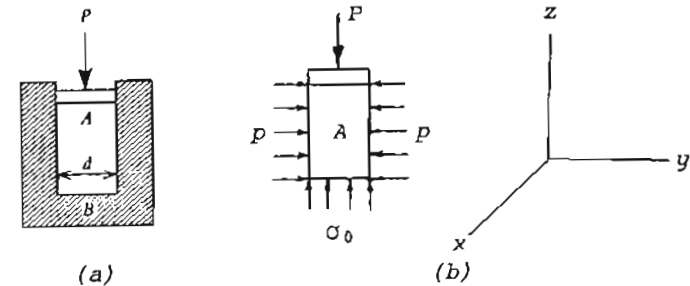
۲۵۴

با جایگزینی مقادیر کرنشها در رابطه ۱ خواهیم داشت

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{2\sigma_0}{E} (1-2\nu) = \frac{2(2000)}{2(10)^6} (1-0.5) = 0.001$$

مسئله ۵-۴

استوانه لاستیکی A به قطر d در استوانه فولادی B به وسیله نیروی P فشرده می شود (شکل a-۲۲). اگر $P = 500 \text{ Kg}$ ، $d = 5 \text{ cm}$ و ضریب پواسون لاستیک $\nu = 0.45$ باشد، فشار p بین لاستیک و فولاد را تعیین کنید.



شکل ۲۲-۵

حل: اگر فشار وارد بر کف استوانه لاستیکی را σ_0 بنامیم (شکل b-۲۲) با نوشتن معادله تعادل استوانه در امتداد قائم فشار σ_0 بدست می آید.

$$\sigma_0 = -\frac{P}{\pi d^2} = -\frac{4P}{\pi d^2}$$

بر استوانه لاستیکی از سه جهت x ، y و z تنش وارد می شود (تنش سه محوری) و مقدار این تنشها برابر است با

$$\sigma_x = \sigma_y = -p$$

$$\sigma_z = \sigma_0 = -\frac{4P}{\pi d^2}$$

۲۵۶

بنابراین تغییر حجم در واحد حجم برابر است با

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = - \frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

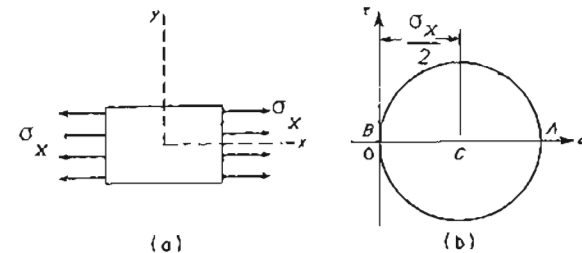
$$= - \frac{3(1-0.6)(140)}{2.1 \times 10^6} = -8 \times 10^{-5}$$

سرانجام کاهش حجم کره برابر است با

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi r^3 (8 \times 10^{-5}) = \frac{4}{3} (\pi \times 1.25^3) (8 \times 10^{-5}) = 0.65 \times 10^{-3} \text{ cm}^3$$

مسئله ۵-۶

دایره موهر را برای حالت کشش ساده شکل a- ۲۳-۵ رسم کنید.



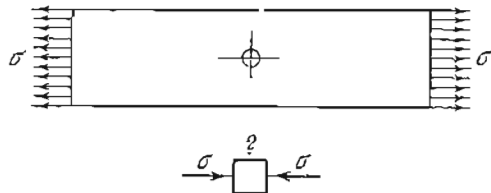
شکل ۵-۲۳

حل: مرکز C دایره به مختصات $\sigma = \sigma_x / 2$ و $\tau = 0$ ، نقطه A به مختصات $\sigma = \sigma_x$ و $\tau = 0$ و نقطه B به مختصات $\sigma = \tau = 0$ می باشد. پس از تعیین محل این نقاط دایره موهر مطابق شکل b- ۲۳-۵ رسم می گردد.

۲۵۷

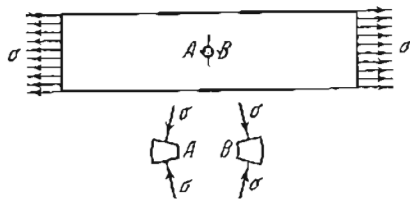
مسئله ۵-۷

آیا می توانید در روی تسمه طولی که تحت تنش های کششی σ مطابق شکل ۲۴-۵ می باشد و در وسط آن سوراخی وجود دارد نقطه ای پیدا کنید که حالت تنش در آن یک محوری فشاری با همان تنش σ باشد؟



شکل ۵-۲۴

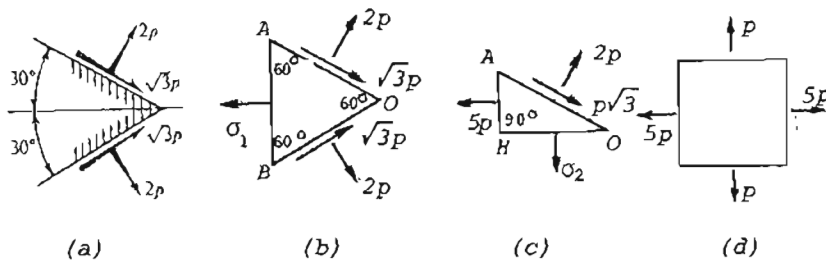
حل: نقاط A و B در دو انتهای چپ و راست سوراخ (شکل ۲۵-۵) تحت تنش یک محوری فشاری با همان تنش σ می باشند.



شکل ۵-۲۵

مسئله ۵-۸

مقدار و جهت تنش ها روی دو صفحه متقاطع در یک نقطه مطابق شکل a- ۲۶-۵ می باشد. مقدار و جهت تنش های اصلی را در نقطه مزبور تعیین کنید.



شکل ۵-۲۶

۲۵۹

مسئله ۵-۱-۳ مثال ۵-۱ را با استفاده از دایره موهر حل کنید.

مسئله ۵-۲-۱ یک غشاء برنجی دایره‌ای نازک در سراسر لبه‌اش بر روی حلقه برنجی دایره‌ای صلیبی متکی می‌باشد. غشاء مزبور در درجه حرارت اطاق (20°C) بدون تنش است. اگر درجه حرارت به 20°C - تنزل پیدا کند، تنش‌های اصلی σ_x و σ_y در غشاء چقدر خواهند بود؟
فرض کنید $E = 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ، $\nu = 0.3$ و $\alpha = 19 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

مسئله ۵-۳-۱ عنصری از مصالح در تنش دو محوری کرنش‌های اصلی $\epsilon_x = 0.00004$ و $\epsilon_y = 0.00017$ دارد. اگر $\nu = 0.3$ باشد، کرنش ϵ_z را پیدا کنید.

مسئله ۵-۳-۲ اگر در میله منشوری تحت فشار محوری نسبت تغییر حجم در واحد حجم به تغییر مساحت سطح مقطع در واحد سطح مقطع به طور عددی برابر 0.75 باشد ضریب پواسون را بدست آورید.

مسئله ۵-۳-۳ عنصری در تنش دو محوری مطابق شکل ۵-۵ در جهت‌های x و y به ترتیب کرنش‌های اصلی ϵ_x و ϵ_y دارد. کرنش ϵ_{θ} در امتداد σ_{θ} را بر حسب ϵ_x ، ϵ_y و زاویه θ پیدا کنید. نتیجه را با معادله 5-9 مقایسه کنید.

مسئله ۵-۴-۱ صفحه فولادی مربع شکلی به اضلاع 15cm در یک جهت بوسیله تنش 750 Kg/cm^2 کشیده می‌شود و از جهت دیگر تحت تنش فشاری با همان مقدار فوق قرار دارد. کرنش را در امتداد قطرهای صفحه پیدا کنید.

مسئله ۵-۴-۲ تغییر حجم واحد حجم را برای عنصری در برش خالص پیدا کنید.

مسئله ۵-۵-۱ دایره موهر را برای حالت برش خالص (شکل ۵-۶) رسم کنید و از روی آن معادله 5-24 را اثبات کنید.

مسئله ۵-۵-۲ دایره موهر را برای حالت تنش دو محوری (شکل ۵-۵) با فرض $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ رسم کنید.

۲۵۸

حل: در روی سطح قائم AB تنش برشی وجود ندارد، با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی OAB می‌توان به این نتیجه رسید (شکل b ۵-۲۶).
مساحت سطح AB را برابر dA فرض می‌کنیم و معادله تعادل عنصر OAB را در امتداد افق می‌نویسیم تا تنش اصلی σ_1 بدست آید.

$$\sigma_1 dA = 2(2P)dA\left(\frac{1}{2}\right) + 2(\sqrt{3}P)dA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sigma_1 = 5p$$

توجه کنید مثلث OAB متساوی الاضلاع و مساحت سطوح OA و OB نیز برابر dA می‌باشد.

با نوشتن معادله تعادل عنصر OAH (شکل c ۵-۲۶) در امتداد افق نتیجه می‌شود که در سطح OH تنش برشی وجود ندارد، و تنش σ_2 با نوشتن معادله تعادل در امتداد قائم بدست می‌آید.

$$\sigma_2 \frac{\sqrt{3}}{2} dA - 2pdA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + p\sqrt{3} dA\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sigma_2 = p$$

بنابراین صفحه‌های اصلی صفحه‌های افقی و قائم می‌باشند. تنش‌های اصلی در روی عنصر شکل d ۵-۲۶ مشخص شده است.

۵-۱۲ مسائل حل نشده

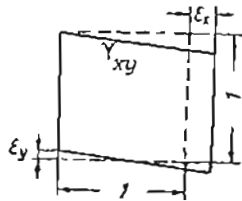
مسئله ۵-۱-۱ میله‌ای با سطح مقطع دایره‌ای بوسیله نیروی 15t کشیده می‌شود. تنش برشی در روی هیچ یک از سطوح نباید از 600 Kg/cm^2 تجاوز کند. قطر میله را حساب کنید.

مسئله ۵-۱-۲ یک میله فولادی با مقطع مربع و ضلع 25mm تحت نیروی فشاری محوری 50 kN قرار دارد. تنش‌های عمودی و برشی را در روی صفحه‌ای که نسبت به خط اثر نیروی فشاری زاویه 30° تشکیل می‌دهد پیدا کنید.

۲۶۱

مسئله ۵-۹-۲ سوراخی به شکل مکعب به ابعاد ۱cm در داخل دال فولادی ضخیمی ایجاد شده است. یک مکعب فولادی در داخل سوراخ مزبور دقیقاً جا می‌گیرد و بوسیله نیروی $P = 700\text{Kg}$ فشرده می‌شود (شکل ۵-۹-۲). با صرف نظر نمودن از تغییر شکل‌های دال تنش‌های اصلی را در مکعب پیدا کنید.

مسئله ۵-۱۰-۱ کرنش‌ها برای یک عنصر صفحه‌ای فولادی در شکل ۵-۱۰-۱ عبارتند از $\epsilon_x = 5.32 \times 10^{-4}$ ، $\epsilon_y = -1.82 \times 10^{-4}$ و $\gamma_{xy} = 1.19 \times 10^{-3}$. مقدار و جهت تنش‌های اصلی را پیدا کنید. برای فولاد $E = 2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ و $\nu = 0.3$.



شکل ۵-۱۰-۱

مسئله ۵-۱۰-۲ کرنش‌های اصلی ϵ_1 و ϵ_2 و جهت آنها را با فرض اینکه $\gamma_{xy} = -360 \times 10^{-6}$ ، $\epsilon_y = 140 \times 10^{-6}$ ، $\epsilon_x = 500 \times 10^{-6}$ و نتیجه را به کمک دایره موهر کنترل نمایید.

۵-۱۳ جواب‌های مسائل حل نشده

$\sigma = -20\text{MPa}$; $\tau = -34.6\text{MPa}$	۵-۱-۲	۴cm	۵-۱-۱
-0.00009	۵-۳-۱	$\sigma_x = \sigma_y = 1085\text{Kg/cm}^2$	۵-۲-۱
		$\nu = \frac{2}{7}$	۵-۳-۲
$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta$			۵-۳-۳
صفر	۵-۴-۲	$\epsilon = 0$	۵-۴-۱
$\theta = 35^\circ 16'$; $\tau = 495 \text{Kg/cm}^2$			۵-۵-۳
		$54^\circ 44'$	۵-۵-۴
$\sigma_1 = 3120\text{Kg/cm}^2$ ($\theta_p = 97^\circ 1'$)			۵-۶-۱
$\sigma_2 = -5120\text{Kg/cm}^2$ ($\theta_p = 7^\circ 1'$)			

۲۶۰

مسئله ۵-۵-۳ برای عنصر شکل ۵-۵-۳ a مقادیر تنش‌های اصلی $\sigma_x = 350\text{Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = -700\text{Kg/cm}^2$ می‌باشد. دایره موهر را رسم کنید و مقدار زاویه θ صفحه‌ای را که در آن تنش عمودی صفر می‌باشد پیدا کنید. تنش برشی در روی این صفحه چقدر است؟

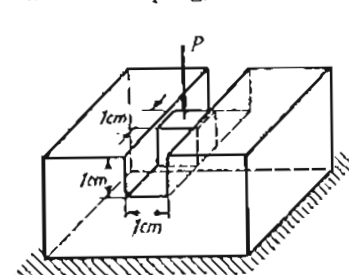
مسئله ۵-۵-۴ در شکل ۵-۵-۴ a مقدار تنش‌های اصلی $\sigma_x = 840\text{Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 420\text{Kg/cm}^2$ می‌باشد. دایره موهر را برای عنصر مزبور رسم کنید و زاویه θ صفحه‌ای را که در روی آن نسبت تنش عمودی به تنش برشی مینیمم می‌باشد پیدا کنید.

مسئله ۵-۶-۱ با فرض اینکه برای عنصر شکل ۵-۹-۲ a مقادیر تنش‌ها $\sigma_x = -5000\text{Kg/cm}^2$ ، $\sigma_y = 3000\text{Kg/cm}^2$ و $\tau_{xy} = -1000\text{Kg/cm}^2$ باشد تنش‌ها و صفحه‌های اصلی را پیدا کنید.

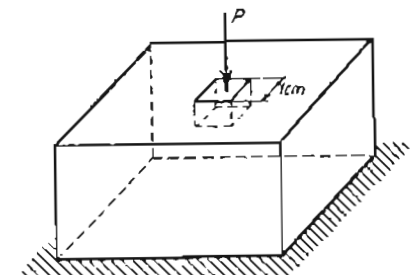
مسئله ۵-۷-۱ مسئله ۵-۶-۱ را به کمک دایره موهر حل کنید.

مسئله ۵-۸-۱ صفحه نازکی در تنش دو محوری تحت تنش‌های $\sigma_x = 10000\text{Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 20000\text{Kg/cm}^2$ قرار دارد. تنش‌های عمودی و برشی ماکزیمم در صفحه چقدر می‌باشند؟

مسئله ۵-۹-۱ در داخل یک قطعه فولادی ضخیم شیار مربع شکلی به اضلاع ۱cm وجود دارد (شکل ۵-۹-۱). یک مکعب آلومینیومی با ابعاد ۱x۱x۱ cm در داخل شیار مزبور جا گرفته و مطابق شکل تحت نیروی $P = 600\text{Kg}$ فشرده می‌شود. با فرض اینکه قطعه آلومینیومی تغییر شکل ناچیزی داشته باشد تنش‌های اصلی را برای مکعب آلومینیومی پیدا کنید. برای آلومینیوم $E = 0.7 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ و $\nu = 0.33$.



شکل ۵-۹-۱



شکل ۵-۹-۲

۲۶۲

$$\sigma_{\max} = 20000 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \tau_{\max} = 10000 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \quad ۵-۸-۱$$

$$\sigma_1 = 0 ; \quad \sigma_2 = -198 ; \quad \sigma_3 = -600 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \quad ۵-۹-۱$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -300 ; \quad \sigma_3 = -700 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \quad ۵-۹-۲$$

$$\sigma_1 = 1600 ; \quad \sigma_3 = -600 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \quad ۵-۱۰-۱$$

σ_1 نسبت به محور افقی به اندازه 30° در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده است.

$$\epsilon_1 = 575 \times 10^{-6} ; \quad \theta_p = -22.5^\circ \quad : \quad ۵-۱۰-۲$$

فصل ششم

پورسته‌ها و مخازن جدار نازک تحت فشار

۱-۶ مقدمه

در فصل‌های ۱ تا ۳ ما حالت‌های مختلف تنش‌های عمودی با توزیع یکپارچه را بررسی کردیم. کاربرد دیگر تنش‌های عمودی با توزیع یکپارچه در تحلیل تقریبی پورسته‌ها و مخازن تحت فشار از قبیل پورسته‌های استوانه‌ای، کره‌ای، مخروطی و تروئید تحت فشار داخلی با خارجی ناشی از یک گاز یا مایع می‌باشد. در این فصل ابتدا ما حلقه‌های نازک تحت بارگذاری شعاعی با توزیع یکپارچه را بررسی می‌کنیم و سپس به مطالعه تنش‌ها در انواع پورسته‌های دوار جدار نازک می‌پردازیم. در مطالعه پورسته‌ها فقط تغییر شکل‌های با تقارن محوری را در نظر می‌گیریم. مخازن تحت فشار جدار نازک کاربرد زیادی دارند از جمله: مخازن ذخیره مایعات، لوله‌های آب، دیگ‌های بخار، بدنه کشتی‌های زیر دریایی و بعضی از قسمت‌های هواپیما.

۲-۶ حلقه‌های نازک

در این بخش با حالت حلقه دایره‌ای نازکی را که تحت اثر بارهای شعاعی با توزیع یکپارچه مطابق شکل ۱a-۶ می‌باشد مطالعه می‌کنیم. اگر مساحت سطح مقطع حلقه در طول محیط آن ثابت و ضخامت t حلقه در مقایسه با شعاع r حلقه کوچک باشد، بارگذاری مزبور در حلقه تنش و کرنش محیطی یکپارچه

۲۶۵

چون محیط و قطر دایره به نسبت ثابت π می باشد، اضافه طول در واحد طول قطر با کرنش محیطی برابر می باشد، یعنی $\epsilon_d = \epsilon_c$. به کرنش قطری حلقه موسوم است. بار گذاری شعاعی یکساخت شکل ۱-۶ را می توان با دوران دادن حلقه حول محور هندسی عمود بر صفحه حلقه با سرعت زاویه ای ثابت ω ایجاد نمود. عنصر حلقه کوچکی به جرم dm تحت چنین شرایطی با سرعت ثابتی در یک مسیر دایره ای به شعاع r دوران می کند و دارای شتاب عمودی $a_n = \omega^2 r$ با جهتی به طرف مرکز حلقه می باشد. نیروی گریز از مرکز مربوطه که شعاعی و به طرف خارج از مرکز است برابر $\omega^2 r dm$ می باشد. جرم عنصری به طول $ds = r d\theta$ و وزن واحد طول محیط w برابر $dm = wr d\theta / g$ است. بنابراین نیروهای گریز از مرکز مزبور معادل با بار شعاعی یکساختی با شدت

$$q = \frac{w}{g} \omega^2 r^2 \quad (6-4)$$

می باشد. با جایگزینی q از معادله فوق در معادلات 1-6 و 2-6 تنش محیطی S و تنش محیطی σ_c بدست می آیند.

$$S = qr = \frac{w}{g} \omega^2 r^2 \quad (6-5)$$

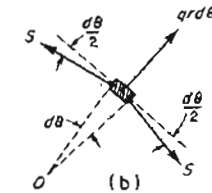
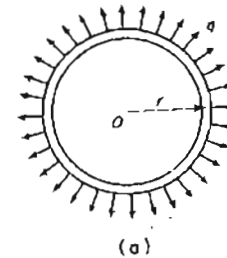
$$\sigma_c = \frac{S}{A} = \frac{w}{Ag} \omega^2 r^2 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 \quad (6-6)$$

در رابطه 6-6 کمیت $\gamma = w/A$ وزن واحد حجم مصالح حلقه می باشد. از این رابطه مشاهده می شود که تنش محیطی ناشی از نیروهای گریز از مرکز با مربع شعاع حلقه و سرعت زاویه ای افزایش می یابد. از این رو حلقه ای به شعاع زیاد که با سرعت زیادی دوران می کند ممکن است تحت تأثیر تنش های خیلی زیادی قرار گیرد.

مثال ۱-۶

لوله آب فولادی طویل به قطر متوسط $d = 60 \text{ cm}$ و ضخامت جدار $t = 3 \text{ mm}$ فشار داخلی $p = 10 \text{ Kg/cm}^2$ را تحمل می کند (شکل ۲-۶). مقدار تنش محیطی در جدار لوله و افزایش قطر آن را محاسبه کنید. $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

۲۶۴



شکل ۱-۶

ایجاد خواهد کرد و مسئله مشابه حالت کشش و فشار ساده در می آید. اگر بار گذاری شعاعی به طرف خارج حلقه باشد، حلقه تحت کشش محیطی، و اگر بار گذاری شعاعی به طرف داخل حلقه باشد، حلقه تحت فشار محیطی قرار خواهد گرفت. بار گسترده شعاعی ممکن است در اثر فشار داخلی یا خارجی و یا در مورد حلقه ای که در حال دوران می باشد در اثر نیروی گریز از مرکز ایجاد شود. در هر صورت شدت بار q را می توان به صورت نیرو در واحد طول محیط دایره مرکزی متوسط به شعاع r تعریف نمود.

برای اینکه نیروهای داخلی ایجاد شده در اثر بار گذاری شعاعی در روی حلقه را پیدا کنیم، تعادل عنصری از حلقه به طول $ds = r d\theta$ را در شکل ۱-۶ b در نظر می گیریم. در این شکل، S نیروی کششی محیطی و $qrd\theta$ بار شعاعی خارجی وارد بر عنصر مزبور می باشد. با نوشتن معادله تعادل عنصر در امتداد شعاعی و استفاده از رابطه $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$ نتیجه می شود

$$qrd\theta - 2S \frac{d\theta}{2} = 0$$

از این رابطه نیروی S بدست می آید.

$$S = qr \quad (6-1)$$

اگر جهت بار گسترده q به طرف داخل حلقه باشد، معادله 1-6 فشار محیطی یکساخت را در حلقه می دهد.

چون ضخامت t حلقه در مقایسه با شعاع متوسط r آن کوچک فرض می شود، کشش محیطی S را در روی سطح مقطع A حلقه می توان یکساخت فرض نمود. در این صورت تنش محیطی σ_c برابر می شود با

$$\sigma_c = \frac{S}{A} = \frac{qr}{A} \quad (6-2)$$

همین طور کرنش محیطی که در طول محیط حلقه یکساخت فرض می شود مساویست با

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{qr}{AE} \quad (6-3)$$

۲۶۷

برای بدست آوردن تنش محیطی σ_c قسمتی از استوانه به طول L را از بقیه استوانه جدا می‌کنیم. نمودار جسم آزاد نیمی از استوانه در شکل ۶-۳ a رسم شده است. شکل ۶-۳ b نیز نیروهای مؤثر بر مقطع استوانه را نشان می‌دهد. به علت تقارن مؤلفه‌های افقی فشارهای شعاعی یکدیگر را حذف می‌کنند، ولی در امتداد قائم معادله تعادل زیر موجود است:

$$\Sigma F_v = -2\sigma_c hL + \int_0^\pi p(r d\theta)(\sin\theta)L = 0$$

پس از انتگرال گیری، تنش محیطی σ_c بدست می‌آید.

$$\sigma_c = \frac{pr}{h} \quad (6-7)$$

توجه کنید مؤلفه قائم نیروی برآیند ناشی از فشار p را همچنین می‌توان با ضرب نمودن فشار در تصویر افقی سطحی که فشار بر آن اثر می‌کند بدست آورد.

برای بدست آوردن تنش طولی σ_1 در استوانه، بوسیله صفحه‌ای عمود بر محور هندسی استوانه آن را قطع می‌کنیم. نمودار جسم آزاد قسمت باقی مانده استوانه در شکل ۶-۳ c رسم شده است. از معادله تعادل در امتداد افق نتیجه می‌شود

$$\Sigma F_h = -p\pi r^2 + 2\pi r h \sigma_1 = 0$$

از این رابطه تنش طولی بدست می‌آید.

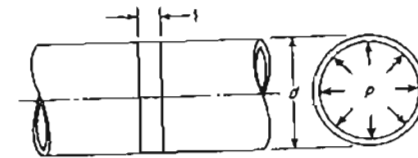
$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h} \quad (6-8)$$

در نتیجه تنش محیطی دو برابر تنش طولی می‌باشد. بنابراین اگر آب در لوله مسدودی یخ ببندد، لوله در امتداد خطی موازی محور طولی آن خواهد ترکید. فرمول‌های ساده فوق برای تنش‌ها در مجاورت دو انتهای لوله دقیق نمی‌باشند.

مثال ۶-۲

مخزن یک ماشین تراکم هوا شامل استوانه‌ای می‌باشد که در دو انتها بوسیله دونیم کره بسته شده است. اگر مخزن مزبور از فولاد با تنش تسلیم 250 MPa باشد، ضخامت جدار استوانه را با ضریب اطمینان ۳.۵ حساب کنید. از تأثیرات موضعی در محل

۲۶۶



شکل ۶-۲

حل: قسمتی از لوله به طول 1 cm را به صورت حلقه‌ای در نظر می‌گیریم. مساحت سطح مقطع حلقه مزبور $A = 1 \text{ cm} \times 0.3 \text{ cm} = 0.3 \text{ cm}^2$ می‌باشد. فشار داخلی p برای این حلقه معرف شدت بار در واحد طول محیط آن می‌باشد. بنابراین از معادله 6-2 نتیجه می‌شود

$$\sigma_c = \frac{pr}{A} = \frac{10 \times 30}{0.3} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

کرنش محیطی با استفاده از معادله 6-3 برابر است با

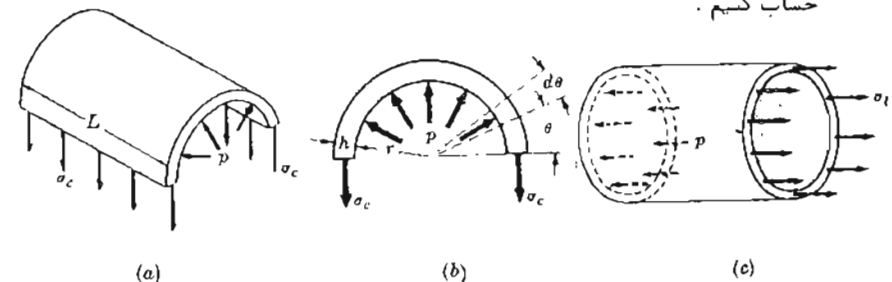
$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{1000}{2(10^6)} = 5 \times 10^{-4}$$

چون کرنش قطری با کرنش محیطی یکسان است، اضافه طول قطر لوله مساوی است با

$$\Delta d = 5 \times 10^{-4} \times 60 = 0.03 \text{ cm}$$

۶-۳ استوانه‌های جدار نازک

فرض کنید استوانه حدار نازکی در دو انتهایش بوسیله صفحه‌هایی بسته و تحت فشار داخلی یکنواخت p باشد (شکل ۶-۳). ضخامت جدار استوانه را h و شعاع داخلی آن را r فرض می‌کنیم. با صرف نظر کردن از اثرهای ناشی از گیر داری دو انتهای استوانه می‌توانیم تنش‌های عمودی طولی و محیطی را در اثر بار گذاری مذکور حساب کنیم.



شکل ۶-۳

۲۶۹

مشخص شده است بدست می‌آید. بنابراین با فرض اینکه شعاع داخلی سیم کره r و ضخامت جدار آن h باشد داریم

$$\Sigma F_h = \sigma_c (2\pi r h) - p\pi r^2 = 0$$

$$\sigma_c = \frac{pr}{2h} \quad (6-9)$$

به علت تقارن این تنش محیطی در هر نقطه از جدار کره در تمام جهات یکسان می‌باشد.

مثال ۳-۶

یک مخزن کروی به قطر 20m باید برای ذخیره کردن گاز بکار رود. ضخامت جدار مخزن 10mm و تنش مجاز مصالح آن 125 MPa می‌باشد. حداکثر فشار گاز مجاز p چقدر می‌باشد؟

حل: حداکثر فشار گاز مجاز p از رابطه 6-9 بدست می‌آید.

$$125 = \frac{p(10 \times 10^3)}{2(10)} \quad : \quad p = 0.25 \text{ MPa}$$

۵-۶ پوسته‌های مخروطی

محاسبه تنش‌ها در پوسته‌های مخروطی را به کمک مثالی شرح می‌دهیم.

مثال ۴-۶

پوسته مخروطی شکل a-۵ شامل مایعی به وزن مخصوص γ می‌باشد. پوسته در اطراف لبه فوقانی تکیه دارد و ارتفاع مایع در آن H می‌باشد. تنش‌های ایجاد شده در جدار پوسته را حساب کنید. محور هندسی پوسته قائم می‌باشد.

حل: حالت تنش در پوسته دارای تقارن محوری می‌باشد. فرض می‌شود که ضخامت

۲۶۸

اتصال استوانه و نیم کره صرف نظر نمائید. قطر داخلی استوانه 600mm و فشار داخلی آن 3.5 MPa می‌باشد.

حل: چون دو انتهای مخزن سسته می‌باشد، از فرمول‌های 6-7 و 6-8 برای تعیین ضخامت جدار استوانه می‌توان استفاده نمود.
تنش محیطی در جدار استوانه دو برابر تنش طولی است. بنابراین تنش بحرانی تنش محیطی می‌باشد که نباید از تنش مجاز 250/3.5MPa تجاوز کند. با استفاده از رابطه 6-7 داریم

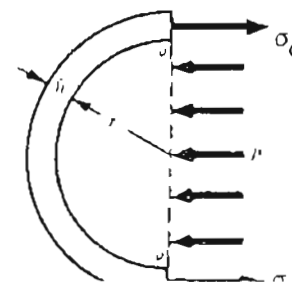
$$\frac{250}{3.5} = \frac{3.5(300)}{h}$$

از این رابطه $h = 14.7\text{mm}$ بدست می‌آید.

در تحلیل‌های کامل‌تر تنش‌ها در دو انتهای نیم کره‌ای نیز باید بررسی شود.

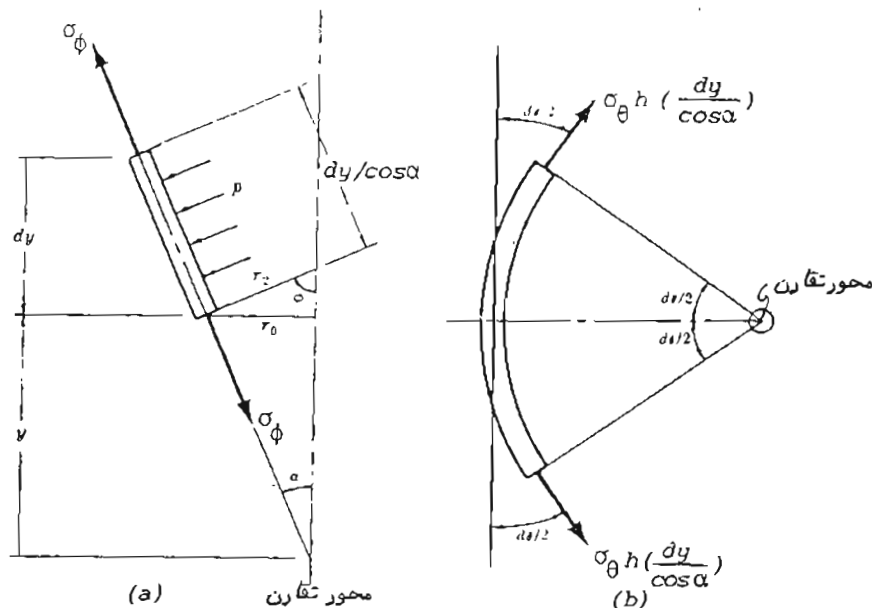
۴-۶ پوسته‌های کروی

یک پوسته کروی تحت فشار داخلی یکنواخت p را در نظر می‌گیریم. در اثر فشار مزبور در پوسته تنش‌های کششی ایجاد می‌شود. برای بدست آوردن مقدار این تنش‌ها سیمی از کره را مطابق شکل ۴-۶ در نظر می‌گیریم و نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم. به علت تقارن بار گذاری و تغییر شکل، در پوسته تنش‌های کششی محیطی σ_c مطابق شکل ۴-۶ ایجاد می‌گردد. با نوشتن معادله تعادل نیم کره در امتداد افق تنش σ_c بدست می‌آید. چون نیم کره و بار گذاری روی آن نسبت به یک محور افقی متقارن می‌باشند موافق‌های قائم نیروهای ناشی از فشار p یکدیگر را خنثی می‌کنند، و برآیند این نیروها با ضرب نمودن فشار p در مساحت تصویر قائم سطح نیم کره که در شکل ۴-۶ با $a-a$



شکل ۴-۶

۲۷۱



شکل ۶-۶

چون $\sin \theta / 2$ کوچک است برآیند مزبور برابر می شود با

$$\sigma_{\theta} h (dy / \cos \alpha) d\theta$$

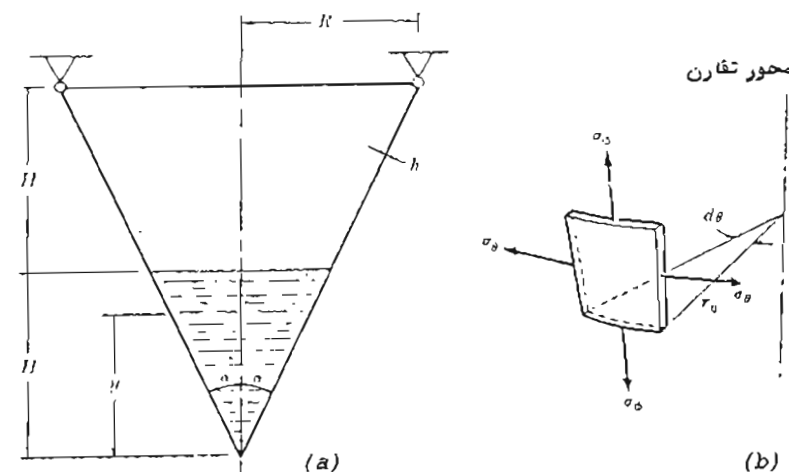
از شکل a-۶ مشاهده می شود که این برآیند باید در $\cos \alpha$ ضرب شود تا مؤلفه برآیند در جهت عمود بر سطح پوسته بدست آید. واضح است که نیروهای نصف النهاری مربوط به شکل a-۶ یکدیگر را خنثی می کنند. مابقی مطابق شکل فشار p را بر سطحی به مساحت $(r_0 d\theta) (dy / \cos \alpha)$ وارد می کند. بنابراین از تعادل عنصر در جهت عمود بر سطح آن داریم

$$\sigma_{\theta} h \left(\frac{dy}{\cos \alpha} \right) (d\theta) (\cos \alpha) - p (r_0 d\theta) \frac{dy}{\cos \alpha} = 0$$

از این رابطه تنش محیطی σ_{θ} بدست می آید.

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr_0}{h \cos \alpha} = \frac{p y \tan \alpha}{h \cos \alpha} = \frac{pr_2}{h} \quad (6-10)$$

۲۷۰



شکل ۶-۵

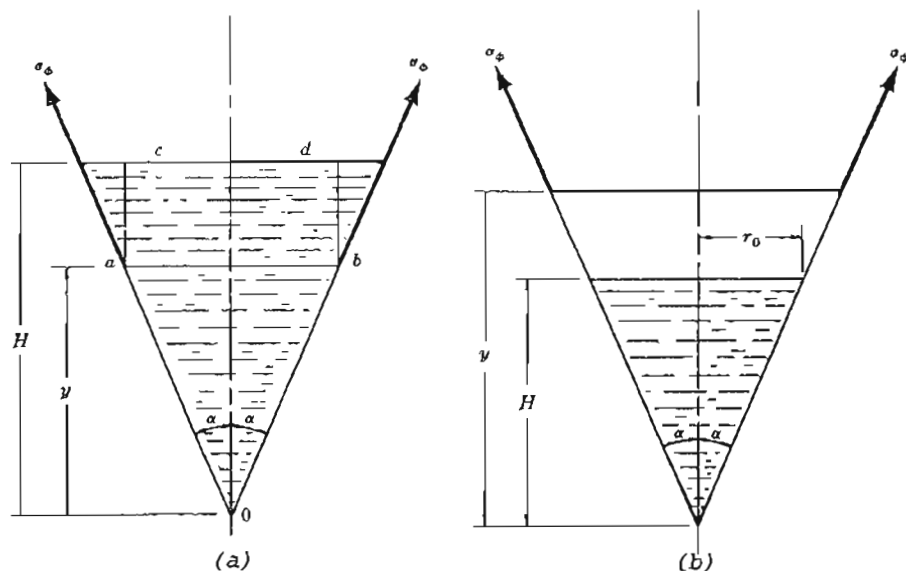
h پوسته در مقایسه با H و R کوچک باشد. با مطالعه تعادل عنصری از پوسته بین دو صفحه موازی افقی مجاور هم (عمود بر محور تقارن) و دو مولد نزدیک بهم مخروط، تنش ها در پوسته مخروطی را حساب می کنیم. بر روی عنصر مزبور تنش های σ_{θ} در جهت افقی (شکل b-۵) و σ_{ϕ} در جهت مولد مخروط اثر می کنند. تنش σ_{θ} به نام تنش محیطی و تنش σ_{ϕ} به نام تنش نصف النهاری موسوم می باشد.

زاویه θ در شکل b-۵ در یک صفحه افقی اندازه گیری می شود. شعاع r_0 مخروط در محل مزبور است که البته تابعی از محل عنصر مورد نظر نسبت به محور تقارن می باشد. یکی از مختصات مفید دیگر که هندسه مخروط را مشخص می کند کمیت r_2 است که شعاع انحناء سطح پوسته در جهت عمود بر مولد آن می باشد. از شکل a-۶ مشاهده می شود که بین r_0 و r_2 رابطه $r_0 = r_2 \cos \alpha$ وجود دارد و چون $r_0 = y \tan \alpha$ می باشد، شعاع انحناء r_2 برابر است با $r_2 = y \tan \alpha / \cos \alpha$.

نیروهای محیطی در شکل b-۶ که تصویر افقی عنصر است بهتر قابل تجسم می باشد. واضح است که هر یک از نیروهای محیطی $\sigma_{\theta} h (dy / \cos \alpha)$ با مماس بر عنصر زاویه $d\theta/2$ می سازد. برآیند این نیروهای محیطی برابر

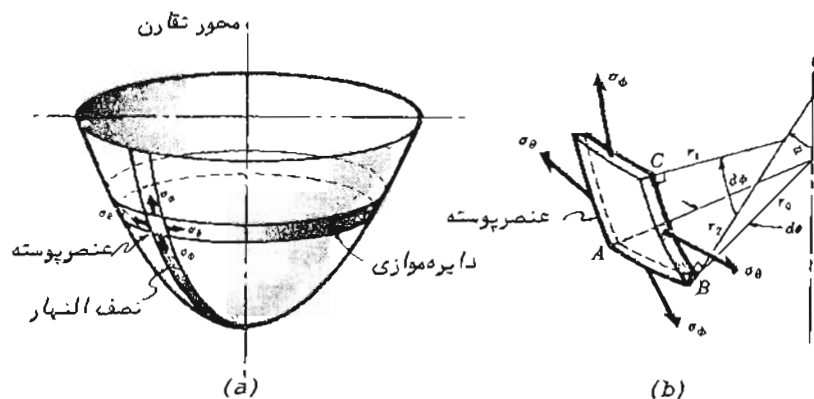
$$2\sigma_{\theta} h (dy / \cos \alpha) \sin \theta / 2$$

است که در یک صفحه افقی عمل می کند و جهت آن به طرف محور هندسی پوسته می باشد.



شکل ۶-۷

حول محوری در داخل صفحه منحنی ایجاد می شود. منحنی مزبور که همان منحنی مولد پوسته دوار می باشد به نام نصف النهار پوسته خوانده می شود. شعاع انحنا نصف النهار با r_1 نشان داده می شود، و البته این شعاع در طول نصف النهار متغیر می باشد. این شعاع انحنا بوسیله دو خط عمود بر پوسته که از نقاط B و C عبور میکنند مشخص



شکل ۶-۸

۲۷۲

این معادله در هر نقطه پوسته مخروطی صادقی است. در نیمه پایین ($0 < y < H$) داریم
 $p = \gamma(H-y)$ ، بنابراین

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma(H-y)\gamma \tan \alpha}{h \cos \alpha} \quad (6-11)$$

در نیمه بالا ($H < y < 2H$) $p = 0$ می باشد و در نتیجه داریم $\sigma_\theta = 0$. تنش نصف النهاری σ_ϕ را می توان با مطالعه تعادل قائم پوسته مخروطی بدست آورد. در ناحیه $0 < y < H$ وزن مایع در ناحیه مخروطی abo و ناحیه استوانه ای abcd در معادله تعادل در امتداد قائم برای تعیین σ_ϕ وارد می شوند (شکل ۶-۷ a). در این صورت معادله تعادل قائم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sigma_\phi h (2\pi y \tan \alpha) \cos \alpha - \frac{1}{3} \pi (y \tan \alpha)^2 \gamma y + (H-y) \pi (y \tan \alpha)^2 \gamma = 0$$

از این رابطه σ_ϕ بدست می آید.

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma \tan \alpha}{h \cos \alpha} \left(\frac{Hy}{2} - \frac{y^2}{3} \right) \quad (6-12) \text{ برای } 0 < y < H$$

همین طور در ناحیه $H < y < 2H$ وزن تمام مایع در معادله تعادل در امتداد قائم وارد می شود (شکل ۶-۷ b) بطوریکه

$$\sigma_\phi h (2\pi y \tan \alpha) \cos \alpha - \frac{1}{3} \pi r_0^2 H \gamma = 0$$

پس از حل برای σ_ϕ و استفاده از رابطه $r_0 = H \tan \alpha$ خواهیم داشت

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma H^3 \tan \alpha}{6 h y \cos \alpha} \quad (6-13) \text{ برای } H < y < 2H$$

باید توجه نمود که تنش های مربوط به تغییر شکل های با تقارن محوری پوسته ایزواستاتیک می باشند، یعنی اینکه تنش های مزبور بدون استفاده از هیچ رابطه تغییر شکلی بدست می آیند. بنابراین روابط فوق در حد خمیری مصالح نیز صادق می باشند.

۶-۶ تنش ها در یک پوسته دوار

پوسته دواری که در شکل ۶-۸ a مشاهده می شود از دوران یک منحنی سطح

۲۷۵

و مؤلفه آنها عمود بر سطح عنصر پوسته $\sigma_\phi hr_0 d\theta d\phi$ می باشد. فشار p در روی سطحی به مساحت $(r_0 d\theta)(r_1 d\phi)$ اثر می کند. بنابراین معادله تعادل عنصر در امتداد عمود بر سطح عنصر پوسته عبارت است از

$$\sigma_\phi hr_1 d\theta d\phi \sin\phi + \sigma_\phi hr_0 d\theta d\phi - pr_0 d\theta r_1 d\phi = 0$$

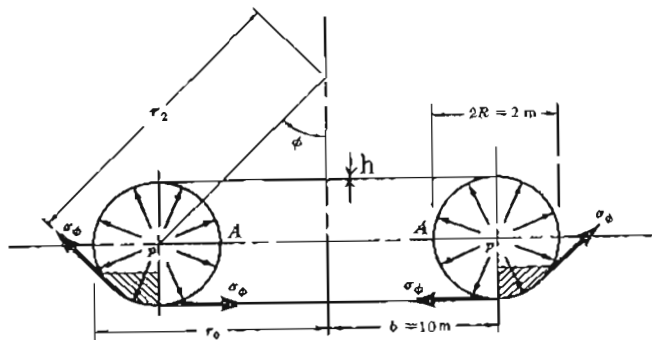
با استفاده از رابطه $r_0 = r_2 \sin\phi$ رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{p}{h} \quad (6-14)$$

این فرمول اساسی در مورد تمام پوسته های دوار که تغییر شکل آنها دارای تقارن محوری است صادق می باشد. با در نظر گرفتن تعادل قائم قسمتی از پوسته در پایین یک صفحه افقی (مشابه آنچه که در مثال ۴-۶ عمل شد) می توان معادله دیگری برای تنش ها بدست آورد. این معادلات در حد خمیری مصالح نیز صادق می باشند. کار برد فرمول 6-14 در مثال زیر نشان داده می شود.

مثال ۵-۶

پوسته های توروئیدی بعضی از مواقع بعنوان مخازن ذخیره گاز در وسایل نقلیه فضایی بکار می روند. یکی از طرح هایی که بوسیله اداره فضاوردی ایالات متحده امریکا (ناسا) پیشنهاد شده در شکل ۱۰-۶ مشاهده می گردد. قطر متوسط توروئید مزبور $2b = 20 \text{ m}$ و قطر سطح مقطع آن $2R = 2 \text{ m}$ می باشد. فشار داخلی p برابر 0.15 MPa

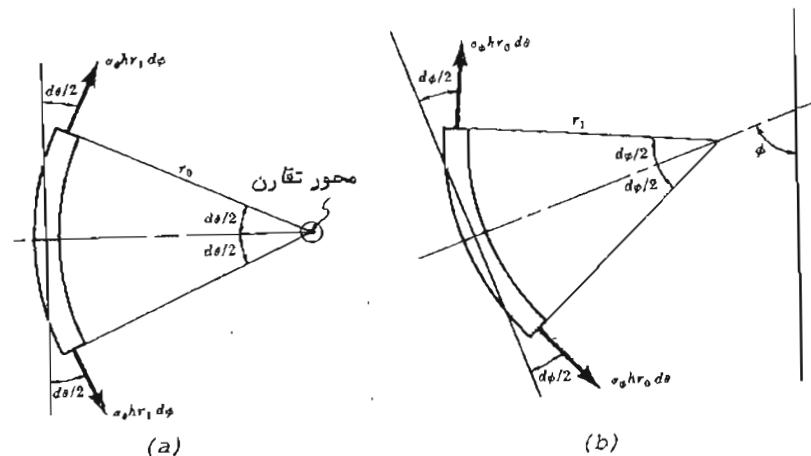


شکل ۱۰-۶

۲۷۴

می شود. پارامتر دیگر پوسته شعاع r_2 است که شعاع انحنا سطح پوسته در جهت عمود بر نصف النهار می باشد. این شعاع انحنا بوسیله دو خط عمود بر پوسته که از نقاط A و B عبور می کنند مشخص می گردد. مرکز انحنا مربوط به شعاع r_2 باید در روی محور تقارن پوسته قرار داشته باشد، ولی مرکز انحنا مربوط به r_1 در حالت کلی بر روی محور پوسته قرار ندارد. موقعی که پوسته تحت فشار داخلی p عمود بر سطح منحنی آن قرار می گیرد در آن تنش های نصف النهاری σ_ϕ و تنش های محیطی σ_θ مطابق شکل b-۸-۶ وجود می آید.

برای تعیین تنش ها در پوسته دوار موقعی که تحت فشار داخلی p می باشد عنصری از پوسته را مطابق شکل b-۸-۶ در نظر می گیریم. این عنصر بوسیله دو دایره موازی مجاور هم که صفحه آنها عمود بر محور تقارن قائم پوسته است و دو مولد یا نصف النهار مجاور هم محدود شده است. عنصر مزبور شبیه عنصر شکل b-۵-۶ می باشد با این تفاوت که اصلاص قائم آن مستقیم نیستند بلکه منحنی می باشند.

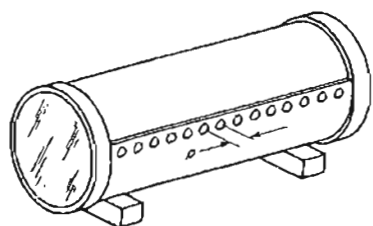


شکل ۹-۶

در تصویر افقی عنصر در شکل a-۹-۶ نیروهای محیطی نشان داده شده اند (مشابه آنچه که در مثال ۴-۶ بحث شد). مؤلفه این نیروها در امتداد افق برابر $2\sigma_\theta hr_1 d\phi (d\theta/2)$ می باشد که جهت آنها به سوی محور تقارن پوسته است. این مؤلفه در $\sin\phi$ ضرب می شود تا مؤلفه عمود بر سطح عنصر پوسته به دست آید. نیروهای نصف النهاری در شکل b-۹-۶ که تصویر قائم عنصر می باشد مشاهده میشوند

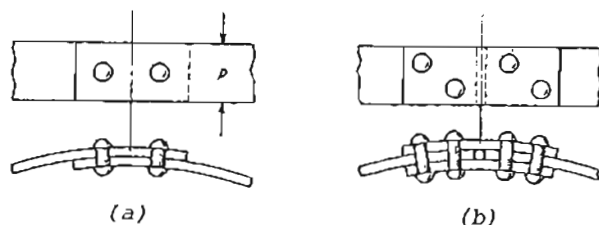
۶-۷ اتصالات با پرچ و جوش در مخازن تحت فشار

در هنگام ساختن انواع مختلف مخازن تحت فشار معمولاً "اتصالات با پرچ یا جوش لازم می‌گردد (شکل ۱۱-۶). انتخاب نوع اتصال بستگی به نوع مصالح و شرایط بهره‌برداری مخزن تحت فشار دارد.



شکل ۱۱-۶

اتصالات با پرچ در دیگ‌های بخار و سایر مخازن تحت فشار معمولاً به دو صورت انجام می‌شود: اتصال روی هم (شکل ۱۲a-۶) و اتصال لب به لب (شکل ۱۲b-۶). پرچ‌ها در این اتصالات آنقدر حرارت داده می‌شوند تا به حالت قرمز درآیند. در این صورت پرچ‌ها پس از خنک شدن ورق‌های فلز را کاملاً به یکدیگر می‌فشارند و غیر قابل نفوذ می‌سازند. موقعی که پوسته تحت فشار داخلی قرار می‌گیرد، پرچ‌ها از حرکت نسبی بین ورق‌ها بوسیله اصطکاک و مقاومت برشی شان جلوگیری می‌کنند. بدین ترتیب رفتار یک اتصال با پرچ تحت بار بسیار پیچیده است. برای ساده نمودن مسئله معمولاً از اصطکاک صرف نظر می‌گردد و فرض می‌شود که پرچ‌ها تمام بار را بوسیله مقاومت برشی شان که به طور یکساخت در سطح مقطع پرچ توزیع شده است تحمل کنند. شکست اتصالات پرچی فقط به صورت برش صورت نمی‌گیرد. در شکل ۱۳-۶ حالت های مختلف شکست اتصال شان داده شده است. همان طوریکه قلاً بحث



شکل ۱۳-۶

و مصالح پوسته از آلیاژ آلومینیوم با تنش تسلیم 350 MPa (در درجه حرارت اتاق) می‌باشد. اگر ضریب اطمینانی برابر 1.5 بکار رود، ضخامت لازم برای جدار توروشید را حساب کنید.

حـل: تعادل قائم قسمتی از توروشید به شکل حلقه را (قسمت هاشور خورده در شکل ۱۰-۶) در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه مولفه قائم نیروهای ناشی از فشار p با ضرب نمودن فشار p در تصویر افقی سطح منحنی بدست می‌آید، می‌توانیم بنویسیم

$$2\pi r_0 \sigma_\phi h \sin\phi = \pi p (r_0^2 - b^2)$$

تنش نصف الیهاری σ_ϕ از معادله فوق با استفاده از رابطه $\sin\phi = (r_0 - b) / R$ بدست می‌آید.

$$\sigma_\phi = \frac{pR(r_0 + b)}{2r_0 h} \quad (6-15)$$

تنش σ_ϕ وقتی ماکزیمم است که r_0 حداقل باشد. بنابراین این تنش در نقطه A ماکزیمم می‌باشد.

$$(\sigma_\phi)_{\max} = \frac{pR}{2h} \left(\frac{2b-R}{b-R} \right) \quad (6-16)$$

اگر $b = 0$ باشد، توروشید به کره تبدیل می‌شود و معادله 6-16 با معادله 6-9 برای پوسته‌های کروی یکسان می‌گردد. با جایگزینی مقادیر عددی در معادله 6-16 ضخامت جدار h توروشید بدست می‌آید.

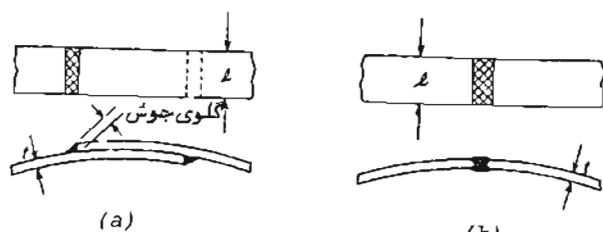
$$\frac{350}{1.5} = \frac{(0.15)(1000)(20000-1000)}{2h(10000-1000)} : h = 0.7 \text{ mm}$$

اگر σ_ϕ از معادله 6-15 در معادله 6-14 جایگزین شود و با توجه به روابط $r_1 = R$ و $r_2 = r_0 / \sin\phi = (b + R \sin\phi) / \sin\phi$ ، تنش محیطی σ_θ بدست می‌آید.

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{2h} \quad (6-17)$$

مقدار ماکزیمم σ_ϕ از σ_θ بیشتر است. بنابراین σ_ϕ تعیین کننده طرح می‌باشد و ضخامت جدار لازم همان $h = 0.7 \text{ mm}$ است.

۲۷۹



شکل ۱۴-۶

مساحت سطح مقطع جوش برابر است با حاصل ضرب طول جوش در طول گلوئی جوش. در جوش لب به لب شکل b-۱۴ مساحت سطح مقطع جوش برابر است با حاصل ضرب طول جوش در ضخامت ورق. محاسبات اتصال با جوش معمولاً به صورت تقریبی صورت می‌گیرد (فصل چهارم را ببینید).

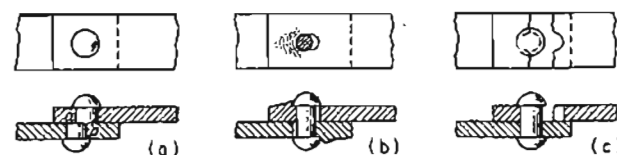
مثال ۶-۶

مخزن استوانه‌ای شکل ۶-۱۱ از ورق فولاد به ضخامت $t = 6 \text{ mm}$ ساخته شده است. برچها به قطر 18 mm و فاصله بین آنها $p = 4 \text{ cm}$ می‌باشد. مقاومت نهایی اتصال را بر حسب آیین نامه جامعه مهندسين مکانیک امریکا حساب کنید.

حل: با مراجعه به شکل a-۱۲ مساحت سطح مقطع هر برچ برابر با $p = 4 \text{ cm}$ در نظر می‌گیریم. برای این طول مقاومت پوسته بدون سوراخ $3870 \times 0.6 \times 4 = 9290 \text{ Kg}$ می‌باشد. مساحت سطح مقطع هر برچ برابر 2.55 cm^2 و مقاومت برشی نظیر آن $3090 \times 2.55 = 7880 \text{ Kg}$ است. مساحت مقطع قائم تصویر شده هر برچ برابر $0.6 \times 1.8 = 1.08 \text{ cm}^2$ و مقاومت خرد شوندگی مربوطه $6680 \times 1.08 = 7210 \text{ Kg}$ می‌باشد. مساحت سطح مقطع خالص ورق بین سوراخ‌های برچ برابر $0.6(4 - 1.8) = 1.32 \text{ cm}^2$ و مقاومت کششی نظیر اتصال برابر $3870 \times 1.32 = 5110 \text{ Kg}$ است. کوچکترین مقادیر فوق (5110 Kg) مقاومت اتصال می‌باشد.

۸-۶ مسائل حل شده

۲۷۸



شکل ۱۳-۶

شد برچ ممکن است در اثر برش در امتداد مقطع a-a (شکل ۶-۱۳a) گسیخته شود. مقاومت برچ را در مقابل شکست برشی می‌توان با زیاد نمودن قطر آن افزایش داد. یک حالت دیگر شکست که در شکل b-۱۳ مشاهده می‌شود خرد شدن ورق در اثر فشار ایجاد شده در پشت برچ می‌باشد که باعث باز شدن اتصال می‌گردد. با اضافه نمودن قطر برچ یا ضخامت ورق می‌توان بر مقاومت اتصال در مقابل این نوع شکست افزود. اگر برچها خیلی نزدیک بهم بکار روند، سطح مقطع خالص ورق در بین سوراخ‌های برچ ممکن است به قدری کاهش یابد که شکست اتصال در اثر پاره شدن کششی ورق در بین برچها مطابق شکل c-۱۳ صورت گیرد. مقاومت در مقابل این نوع شکست را می‌توان با زیاد نمودن فاصله بین برچها (فاصله p در شکل ۶-۱۱) افزایش داد.

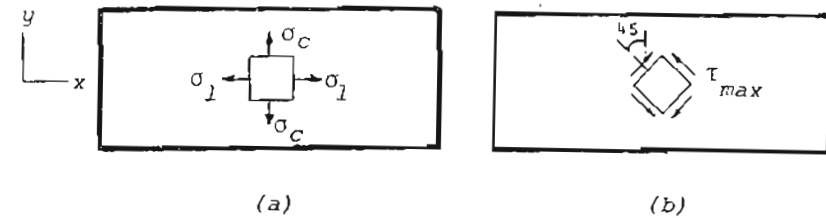
مسئله طرح اتصال یک دیگ بخار (یا مخازن تحت فشار دیگر) شامل تنظیم ضخامت ورق، قطر برچ و فاصله بین برچها می‌باشد بطوریکه اتصال در مقابل هر یک از حالت‌های شکست بطور یکسان قوی باشد. برای اتصالات مخازن تحت فشار فولادی، آیین نامه جامعه مهندسين مکانیک امریکا تنش‌های نهایی زیر را با ضریب اطمینان 5 توصیه می‌کند:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 3870 \text{ Kg/cm}^2 & \text{برای کشش;} \\ \tau &= 3090 \text{ Kg/cm}^2 & \text{برای برش;} \\ \sigma_c &= 6680 \text{ Kg/cm}^2 & \text{برای خرد شدن;} \end{aligned}$$

واضح است که مقاومت اتصال یک مخزن تحت فشار در عمل هرگز نمیتواند بیش از مقاومت خود پوسته مخزن باشد.

با پیشرفت‌هایی که امروزه در زمینه جوشکاری حاصل شده است، اتصالات با جوش برای مخازن تحت فشار و سازه‌های دیگر به سرعت جایگزین اتصالات با برچ می‌شود. دو نوع اتصال روی هم و لب به لب در شکل ۶-۱۴ مشاهده می‌شود. در شکل a-۱۴

حداکثر تنش برشی را در جدار یک لوله حدار نازک دو سر بسته به ضخامت حدار h و شعاع داخلی r تعیین کنید. فشار داخلی لوله p می باشد.



شکل ۱۵-۶

حل: اگر در جدار لوله عنصری را مانند شکل a ۱۵-۶ در نظر بگیریم در امتداد x بر آن تنش طولی σ_1 و در امتداد y بر آن تنش محیطی σ_c اثر میکند. حالت تنش برای عنصر مزبور دو محوری می باشد. تنش های اصلی عبارتند از

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pr}{h} ; \quad \sigma_2 = \sigma_1 = \frac{pr}{2h}$$

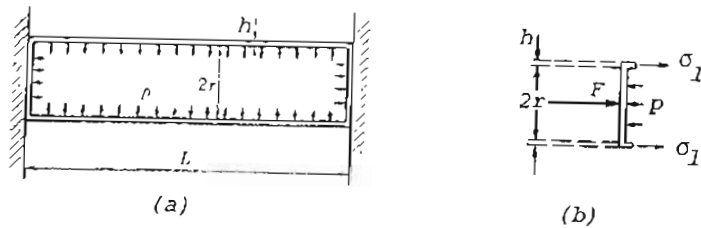
تنش برشی ماکزیم برابر است با

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{pr}{4h}$$

تنش برشی ماکزیم در صفحه هایی وجود دارد که با صفحه های اصلی زاویه ۴۵ درجه تشکیل می دهند (شکل b ۱۵-۶).

وقتی که در درون مخزن استوانه ای جدار نازک و طویل شکل a ۱۶-۶ فشاری وجود ندارد، مخزن دقیقاً بین دو دیوار صلب جا می گیرد. شعاع داخلی مخزن استوانه ای r و ضخامت جدار آن h می باشد. اگر فشار در داخل مخزن p و مخزن از ماده ای ساخته شده باشد که از قانون هوک پیروی کند نیرویی را که از طرف مخزن به دیوار وارد

می شود تعیین کنید.



شکل ۱۶-۶

حل: تنش محیطی در جدار استوانه برابر است با

$$\sigma_c = \frac{pr}{h}$$

چون فاصله دیوارها ثابت است و دیوارها تغییر شکل نمی دهند تغییر شکل در امتداد طول استوانه و در نتیجه کرنش طولی باید برابر صفر باشد.

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_c}{E} = 0$$

در این رابطه E ضریب ارتجاعی و ν ضریب پواسون ماده جدار استوانه می باشد. از رابطه مزبور تنش طولی σ_1 بدست می آید.

$$\sigma_1 = \nu \sigma_c = \frac{\nu pr}{h}$$

نمودار جسم آزاد انتهای چپ استوانه در شکل b ۱۶-۶ رسم شده است. در این شکل F نیرویی است که دیوار به مخزن وارد می کند. σ_1 تنش طولی است که در جدار استوانه وجود دارد و در روی حلقه ای به شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r+h$ اثر می کند و برآیند آن برابر است با

$$F_1 = 2\pi r h \sigma_1 = 2\pi r h \frac{\nu pr}{h} = 2\nu \pi r^2 p$$

فشار p بر روی سطحی به شعاع r اثر می کند و برآیند آن برابر است با

$$F_2 = \pi r^2 p$$

۲۸۳

اگر وزن مخصوص آب را γ بنامیم فشار آب در عمق x برابر γx می باشد. بنابراین فشار آب و در نتیجه تنش های محیطی در ته استوانه حداکثر می باشد. وقتی که حداکثر ارتفاع آب $H = 15 \text{ m}$ باشد حداکثر تنش محیطی برابر است با

$$\sigma_c = \frac{pr}{h} = \frac{\gamma H r}{h} = \frac{0.001(1500)(360)}{2.5} = 216 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{کششی})$$

تنش طولی در اثر وزن خود مخزن ایجاد می شود و حداکثر آن نیز در ته استوانه می باشد. اگر A ، H_1 و δ به ترتیب مساحت سطح مقطع استوانه، ارتفاع استوانه و وزن مخصوص فولاد باشد حداکثر تنش طولی در مخزن برابر است با

$$\sigma_1 = \frac{\text{وزن استوانه}}{\text{مساحت سطح مقطع}} = \frac{\delta A H_1}{A} = \delta H_1 = 0.008(1800) = 14.4 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{فشاری})$$

ب - چون حداکثر تنش های محیطی و طولی در ته مخزن می باشد حداکثر تنش برشی نیز در ته مخزن خواهد بود و مقدار آن با استفاده از دایره موهر برابر است با (شکل b-۱۷-۶)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_c - \sigma_1}{2} = \frac{216 - (-14.4)}{2} = 115.2 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۴-۶

دیگ بخاری از ورق های فولادی به ضخامت 8 mm ساخته شده است (شکل ۱۸-۶). طول قسمت استوانه ای دیگ 4 m و قطر داخلی استوانه 1.8 m می باشد. دیگ مزبور تحت فشار داخلی 10 Kg/cm^2 قرار دارد. ازدیاد طول فطر استوانه و ازدیاد طول قسمت استوانه ای دیگ و همچنین اضافه حجم نسبی قسمت استوانه ای دیگر را حساب کنید. ضریب پواسون و ضریب ارتجاعی برای فولاد به ترتیب 0.3 و $2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشند.

حل: تنش های محیطی σ_c و طولی σ_1 در جدار دیگ عبارتند از

$$\sigma_c = \frac{pr}{t} = \frac{10(0.9)(100)}{0.8} = 1125 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t} = \frac{1}{2} \sigma_c = 562.5 \text{ Kg/cm}^2$$

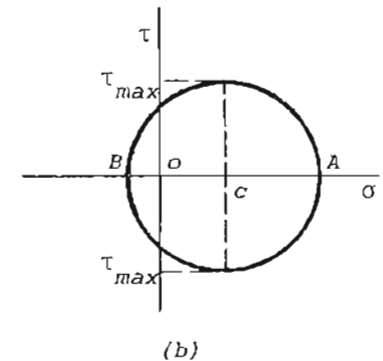
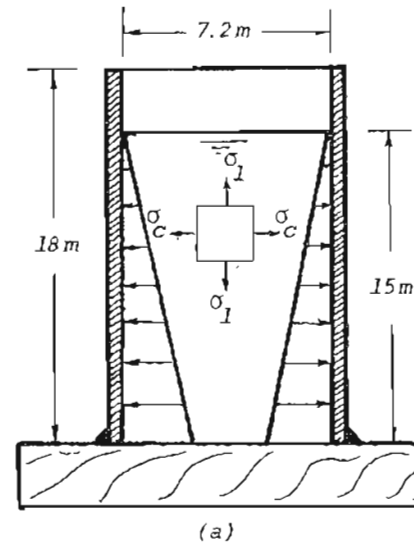
۲۸۲

با برشتن معادله تعادل در امتداد افق نیروی F بدست می آید.

$$F = F_2 - F_1 = \pi r^2 p - 2\nu \pi r^2 p = (1-2\nu) \pi r^2 p$$

مسئله ۳-۶

مخزن آب سرریزی از فولاد به شکل استوانه ساخته شده است (شکل a-۱۷-۶). ارتفاع مخزن آب 18 m و ضخامت آن 2.5 سانتیمتر است. حداکثر ارتفاع آب در مخزن به 15 m متر می رسد. وزن واحد حجم فولاد مصرف شده 0.008 Kg/cm^3 و وزن واحد حجم آب 0.001 Kg/cm^3 می باشد. قطر استوانه 7.2 m است. الف - حداکثر تنش های عمودی (فشاری و کششی) ایجاد شده در مخزن را حساب کنید. ب - با استفاده از دایره موهر حداکثر تنش برشی را در مخزن حساب کنید. در حل این مسئله از خمش استوانه صرف نظر کنید.



شکل ۱۷-۶

حل: الف - در اثر فشار آب در جدار استوانه تنش های محیطی ایجاد می شود.

۲۸۵

$$\ln V = \ln \pi + 2 \ln r + \ln L$$

$$\frac{dV}{V} = 2 \frac{dr}{r} + \frac{dL}{L}$$

چون تغییر شکل‌های ارتجاعی کوچک هستند می‌توانیم بنویسیم

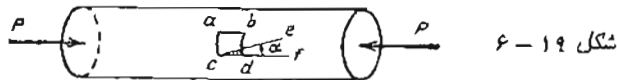
$$\epsilon_c = \frac{dr}{r} \quad ; \quad \epsilon_l = \frac{dL}{L}$$

بنابراین

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\epsilon_c + \epsilon_l = 2 \times 455 \times 10^{-6} + 107 \times 10^{-6} = 1.017 \times 10^{-3}$$

مسئله ۵-۶

استوانه شکل ۱۹-۶ به قطر ۱۰۰ cm و ضخامت جدار ۱۰ mm می‌باشد و تحت فشار داخلی ۲۰ atm قرار دارد. استوانه همچنین بوسیله نیروهای $P = 50$ t در دو انتهایش فشرده می‌شود. اضلاع ab و cd عنصر abcd در روی استوانه موازی محور استوانه می‌باشند. تنش‌های عمودی و برشی را در روی مقطع ce که با مولد cf استوانه زاویه $\alpha = 60^\circ$ در جه می‌سازد پیدا کنید.



شکل ۱۹-۶

حل: ابتدا تنش‌های محیطی σ_c و طولی σ_l را که تنش‌های اصلی برای عنصر می‌باشند پیدا می‌کنیم.

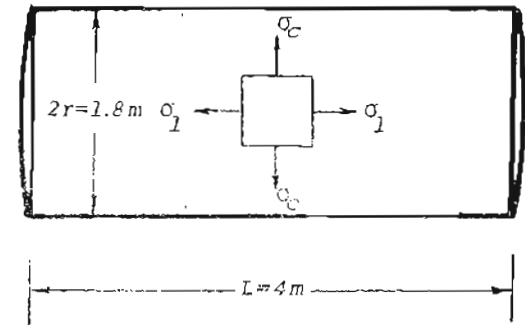
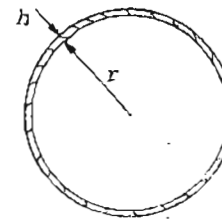
$$\sigma_c = \frac{Pr}{h} = \frac{20(50)}{1} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_l = \frac{Pr}{2h} - \frac{P}{2\pi r t} = \frac{20 \times 50}{2 \times 1} - \frac{50000}{2\pi(50)(1)} = 341 \text{ Kg/cm}^2$$

بنابراین تنش‌های اصلی عبارتند از

$$\sigma_1 = 1000 \text{ Kg/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_2 = 341 \text{ Kg/cm}^2$$

۲۸۴



شکل ۱۸-۶

با استفاده از مقادیر فوق کرنش محیطی ϵ_c و کرنش طولی ϵ_l را حساب می‌کنیم. در روابط زیر ν ضریب پواسون و E ضریب ارتجاعی می‌باشد.

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_l) = \frac{\sigma_c}{E} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

$$= \frac{1125}{21000000} \left(1 - \frac{0.3}{2} \right) = 455 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_l = \frac{1}{E} (\sigma_l - \nu \sigma_c) = \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

$$= \frac{1125}{21000000} \left(\frac{1}{2} - 0.3 \right) = 107 \times 10^{-6}$$

اضافه طول استوانه برابر است با

$$\Delta L = L \epsilon_l = 4000(107)(10^{-6}) = 0.43 \text{ mm}$$

اضافه طول قطر استوانه مساوی است با

$$\Delta D = D \epsilon_d = D \epsilon_c = 1800(455)(10^{-6}) = 0.82 \text{ mm}$$

در رابطه فوق ϵ_d کرنش در جهت قطر استوانه است که با کرنش محیطی یکسان می‌باشد (چون بین محیط و قطر نسبت ثابت π وجود دارد). حجم قسمت استوانه‌ای دیگر مساویست با

$$V = \pi r^2 L$$

از طرفین رابطه فوق ابتدا لگاریتم و سپس دیفرانسیل می‌گیریم.

۲۸۷

نیروی وجود ندارد. تغییر طول شعاع استوانه‌ای تحت فشار شعاعی p برابر است با

$$\Delta r = r\epsilon_r = r\epsilon_c = \frac{r\sigma_c}{E} = \frac{pr^2}{Eh} \quad (6-18)$$

ϵ_r در رابطه فوق کرنش در جهت شعاع استوانه است که با کرنش محیطی برابر می‌باشد (چون بین محیط و شعاع دایره نسبت ثابت 2π وجود دارد). اضافه طول شعاع پوسته خارجی در اثر فشار p بعلاوه کاهش طول شعاع پوسته داخلی در اثر p باید برابر با اضافه طول اولیه شعاع استوانه داخلی باشد.

$$\frac{p(50)^2}{2 \times 10^{11} \times 10^{-6} \times 2.5} + \frac{p(50)^2}{2 \times 10^{11} \times 10^{-6} \times 2} = \frac{0.25}{2}$$

از این رابطه $p = 11.1 \text{ MPa}$ بدست می‌آید. این فشار در استوانه داخلی تنش محیطی فشاری

$$\sigma_c = \frac{pr}{h} = -\frac{11.1 \times 50}{2.5} = -222 \text{ MPa}$$

ایجاد می‌کند. تنش محیطی کششی در استوانه خارجی در اثر فشار p برابر است با

$$\sigma'_c = \frac{pr}{h} = \frac{11.1 \times 50}{2} = 277 \text{ MPa}$$

اگر مخزن مزبور تحت فشار داخلی باشد، تنش‌های فوق باید بر تنش‌های ایجاد شده بوسیله فشار داخلی افزوده شود.

مسئله ۶-۷

استوانه فولادی جدار نازکی مطابق شکل ۶-۲۱ دقیقاً در روی استوانه مسی جدار نازکی قرار می‌گیرد. اگر درجه حرارت به اندازه 30°C اضافه شود تنش‌های محیطی ایجاد شده در هر یک از استوانه‌ها را پیدا کنید. از تائیرات ناشی از انبساط طولی صرف نظر کنید. ضرایب انبساط حرارتی فولاد و مس به ترتیب برابر $\alpha_s = 12 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و $\alpha_c = 18 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$ و ضرایب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب برابر $E_s = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ و $E_c = 9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ می‌باشد. این نوع استوانه‌ها بعضی از مواقع برای ذخیره کردن مایعات خورنده (مایعاتی که باعث زنگ زدگی می‌شوند) بکار می‌روند.

۲۸۶

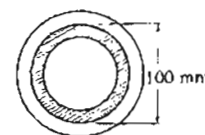
تنش‌ها در روی مقطع ce از روابط ۵-۹ و ۵-۱۲ بدست می‌آیند. زاویه θ در این روابط زاویه بین عمود بر سطح ce و امتداد تنش اصلی ماکزیمم σ_1 می‌باشد. در این مثال σ_1 عمود بر محور استوانه است. در نتیجه زاویه بین عمود بر صفحه و امتداد σ_1 برابر 60° درجه می‌باشد.

$$\sigma_{60} = 1000 \cos^2 60^\circ + 341 \sin^2 60^\circ = 506 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{60} = \frac{1000 - 341}{2} \sin 120^\circ = 285 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۶-۶

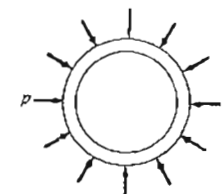
مخزن تحت فشاری از دو استوانه هم محور مطابق شکل ۶-۲۰ ساخته شده است. قبل از ساختن مخزن مشاهده می‌شود که استوانه داخلی کمی بزرگتر از اندازه است و در داخل استوانه خارجی جا نمی‌گیرد. استوانه خارجی حرارت داده شده و در روی استوانه داخلی جا داده می‌شود. سپس استوانه خارجی خنک شده به درجه حرارت اولیه‌اش باز می‌گردد. اگر هر دو استوانه از فولاد و قطر متوسط مجموعه استوانه‌ها برابر 100 mm باشد، تنش‌های محیطی ایجاد شده در هر یک از پوسته‌ها را حساب کنید. اضافه طول اولیه قطر استوانه داخلی را 0.25 mm فرض کنید. ضخامت جدار پوسته داخلی 2.5 mm و ضخامت جدار پوسته خارجی 2 mm می‌باشد. برای فولاد $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.



مخزن دو جداره



استوانه خارجی



استوانه داخلی

شکل ۶-۲۰

حل: در اثر انقباض لوله خارجی بین دو استوانه فشار p مطابق شکل ۶-۲۰ ایجاد می‌گردد. توجه کنید که هیچ گونه بار خارجی وجود ندارد. فشار p باعث می‌شود که قطر پوسته خارجی افزایش و قطر پوسته داخلی کاهش یابد. در جهت طول استوانه‌ها

۲۸۹

از این رابطه $p=0.109 \text{ MPa}$ بدست می آید. این فشار در استوانه های فولادی و مسی تنش های محیطی ایجاد می کند که مقدار آن از رابطه 6-7 بدست می آید.

$$\sigma_s = \frac{0.109(507.5)}{5} = 11.06 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_c = -\frac{0.109(502.5)}{5} = -10.95 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

مسئله ۸-۶

یک وسیله نقلیه تحقیقاتی زیر دریایی دارای بدنه ای به شکل کره به شعاع یک متر و ضخامت جدار 30 میلی متر می باشد. زیر دریایی مزبور از فولاد با تنش تسلیم 700 MPa ساخته شده است. تعیین کنید عمقی از دریا را که در آن تنش در پوسته کروی به حد تسلیم می رسد. وزن مخصوص آب دریا را 10^4 N/m^3 فرض کنید.

حل: تنش فشاری ناشی از فشار هیدرواستاتیک خارجی در جدار پوسته از رابطه 6-9 بدست می آید. فشار هیدرواستاتیک p که در پوسته تنش تسلیم ایجاد می کند از رابطه زیر بدست می آید:

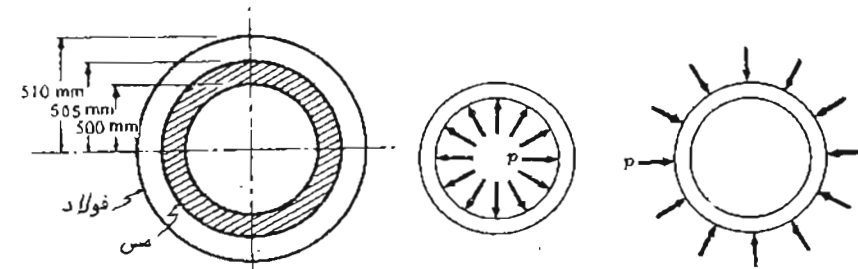
$$700 = \frac{p(1000)}{2(30)} : p = 42 \text{ MPa}$$

اگر وزن مخصوص آب γ باشد، فشار هیدرواستاتیک در عمق H برابر $p = \gamma H$ است. بنابراین

$$42 \times 10^6 = (10^4)(H) : H = 4200 \text{ m}$$

در این مسئله از اختلاف فشار بین بالا و پایین پوسته کروی صرف نظر شده است (چون قطر 2 m کره در مقابل عمق 4200 m ناچیز است). در این مسئله از احتمال گمانش کره در اثر فشار هیدرواستاتیک و همچنین تأثیرات درهای ورودی در روی مقاومت پوسته کروی صرف نظر شده است. به حساب آوردن این عوامل خارج از موضوع این کتاب می باشد.

۲۸۸



استوانه فولادی
شکل ۲۱-۶

حل: اگر دو استوانه فولادی و مسی با یکدیگر در تماس نبوده و از یکدیگر جدا بودند در اثر ازدیاد درجه حرارت به اندازه 30°C محیط استوانه فولادی به اندازه

$$2\pi(507.5)(30)(12 \times 10^{-6}) = 1.148 \text{ mm}$$

و محیط استوانه مسی به اندازه

$$2\pi(502.5)(30)(18 \times 10^{-6}) = 1.705 \text{ mm}$$

اضافه می شد. بدین ترتیب پس از گرم شدن اختلاف بین شعاع های استوانه ها در اثر گرم شدن برابر می بود با

$$(1.705 - 1.148)/2\pi = 0.089 \text{ mm}$$

اما بر اساس فرض مسئله دو استوانه در داخل یکدیگر قرار دارند و با یکدیگر در تماس می باشند و در نتیجه بین آنها فشار p ایجاد می گردد. این فشار p موجب اضافه شدن شعاع استوانه فولادی و کم شدن شعاع استوانه مسی می شود. فشار p در روی نمودارهای جسم آزاد استوانه های فولادی و مسی در شکل ۲۱-۶ نشان داده شده است.

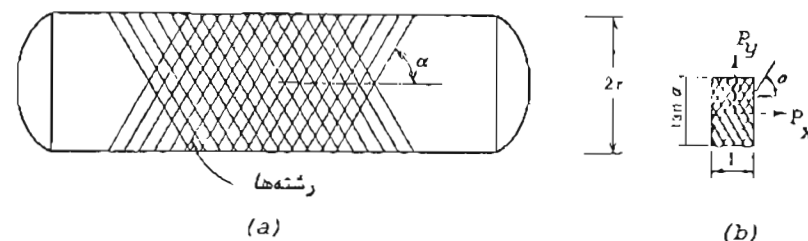
تعمیر شعاع یک استوانه جدار نازک تحت فشار شعاعی یکنواخت p که در مسئله ۶-۶ حساب شد (رابطه 18-6) برابر است با

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh}$$

بنابراین اضافه طول شعاع استوانه فولادی در اثر فشار p بعلاوه کاهش طول شعاع استوانه مسی در اثر فشار p باید مساوی باشد با اختلاف بین شعاع های استوانه ها در اثر گرم شدن (موقعی که استوانه ها از یکدیگر جدا باشند).

$$\frac{p(507.5)^2}{2 \times 10^{11} \times 10^{-6} \times 5} + \frac{p(502.5)^2}{9 \times 10^{10} \times 10^{-6} \times 5} = 0.089$$

مخازن تحت فشار سبک وزن اغلب از رشته‌های شیشه برای تحمل نیروی کششی و از صمغ اپاکسی به عنوان چسبنده استفاده می‌کنند (شکل a ۲۳-۶). اگر لوله تحت فشار در دو انتهایش باز باشد در این صورت در آن فقط تنش‌های محیطی ایجاد می‌شود و زاویه مارپیچ رشته‌ها $\alpha = 90^\circ$ می‌باشد. اما اگر دو انتهای استوانه بسته باشد در آن تنش‌های طولی نیز ایجاد می‌شود. در این حالت زاویه α چقدر باید باشد تا نیروهای کششی در رشته‌های شیشه پکان باشند؟



شکل ۲۳-۶

حل: عنصری از استوانه را به عرض واحد و ارتفاع $\tan \alpha$ جدا می‌کنیم (شکل b ۲۳-۶). برای عنصر مزبور تعداد رشته‌ها در هر یک از مقاطع آن پکان می‌باشد. اگر F نیروی کششی در هر یک از رشته‌ها و n تعداد رشته‌ها در یک مقطع عنصر مزبور باشد، برآیند نیروهای کششی رشته‌ها در امتداد طول و محیط استوانه از روابط زیر بدست می‌آید.

$$P_x = n F \cos \alpha \quad ; \quad P_y = n F \sin \alpha \quad (1)$$

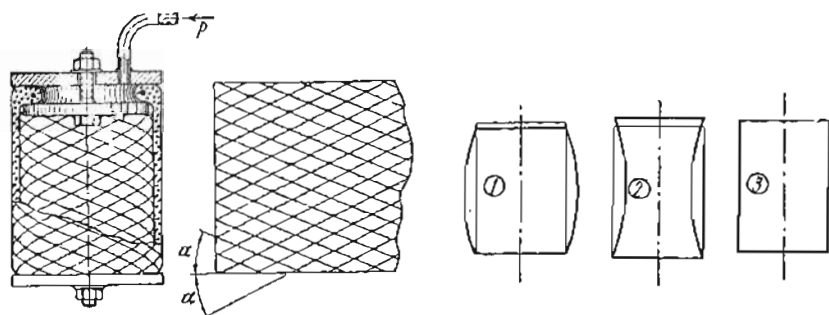
اگر ضخامت جدار استوانه را h فرض کنیم بین نیروهای فوق رابطه زیر وجود دارد (با استفاده از روابط 6-7 و 6-8):

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{\sigma_c(1)(h)}{\sigma_1(\tan \alpha)(h)} = \frac{2}{\tan \alpha} \quad (2)$$

اگر P_x و P_y را بین معادلات 1 و 2 حذف کنیم معادله‌ای برای زاویه α بدست می‌آید.

$$\frac{2}{\tan \alpha} = \tan \alpha \quad ; \quad \alpha = 54.8^\circ$$

استوانه‌ای از لاستیک و دو لایه سیم مطابق شکل ۲۴-۶ ساخته شده است و تحت فشار داخلی p قرار دارد. مشاهده می‌شود که استوانه در اثر فشار داخلی بسته‌زاویه α سیم‌ها به یکی از صورت‌های شکل ۲۵-۶ تغییر شکل می‌دهد. در حالت 1 مولد منحنی استوانه به طرف خارج محدب است، در حالت 2 مولد منحنی استوانه به طرف خارج مقعر می‌باشد و در حالت 3 با فرض اینکه سیم‌ها غیر قابل انبساط باشند استوانه تغییر شکل محسوسی نمی‌دهد و شکل اولیه خود را حفظ می‌کند. مقادیر زاویه α مربوط به هر یک از تغییر شکل‌های بالا چقدر می‌باشد؟



شکل ۲۴-۶

شکل ۲۵-۶

حل: با فرض اینکه انبساط سیم‌ها قابل صرف نظر باشد، بر اساس مسئله قبل برای $\alpha = 35.2^\circ$ تمام بار بوسیله سیم‌ها تحمل می‌شود و در نتیجه استوانه تغییر شکل نمی‌دهد و شکل اولیه خود را حفظ می‌کند (توجه کنید α در مسئله قبل زاویه‌ایست که رشته‌ها با محور استوانه می‌سازند، در حالی که در این مسئله α زاویه‌ایست که سیم‌ها با عمود بر محور استوانه تشکیل می‌دهند). حال اگر $\alpha > 35.2^\circ$ باشد، استوانه مطابق حالت 1 شکل ۲۵-۶ و اگر $\alpha < 35.2^\circ$ باشد، استوانه مطابق حالت 2 شکل ۲۵-۶ تغییر شکل می‌دهد.

یکی از مسائل شبیه مسئله فوق در طرح رویه‌لاستیک‌های اتوموبیل ظاهر می‌شود (شکل ۲۶-۶). زاویه سیم‌های فولادی اهمیت زیادی در دوام رویه لاستیک دارد. تغییر زاویه سیم‌ها از مقدار ایتیمم در هر جهت (کمتر یا بیشتر) باعث کاهش عمر قابل

۲۹۳

استوانه مسی حداکثر فشار داخلی مجاز p را تعیین می‌کند. اگر قسمتی از استوانه به طول L را به دو نیم تقسیم کنیم و معادله تعادل در امتداد قائم را بنویسیم (مانند شکل ۳-۶) خواهیم داشت

$$2\sigma_c t_c L + 2\sigma_s t_s L - p(2r)L = 0 \quad (2)$$

در رابطه فوق t_c ضخامت جدار استوانه مسی، t_s ضخامت جدار استوانه فولادی و r شعاع داخلی استوانه مسی می‌باشد. پس از جایگزینی σ_s از معادله ۱ در معادله ۲ و حل معادله حاصل برای p خواهیم داشت

$$p = \frac{\sigma_c(t_c + 2t_s)}{r} = \frac{400(0.4 + 2 \times 0.2)}{25} = 12.8 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۱۲-۶

یک گنبد کروی به ضخامت جدار h و شعاع R تحت اثر وزن خودش (۹ در واحد سطح) قرار دارد (شکل ۲۷-۶). تنش‌های نصف النهاری σ_1 و محیطی σ_2 (عمود بر σ_1) را بدست آورید.

حل: قسمتی از کره را به صورت کلاهک ABC در بالای سطح افقی AC جدا می‌کنیم و تعادل آن را در امتداد قائم در نظر می‌گیریم. مساحت سطح کلاهک مزبور برابر است با $2\pi R^2(1 - \cos\phi)$. بنابراین وزن کلاهک مساوی $2\pi R^2(1 - \cos\phi)q$ می‌باشد و معادله تعادل کلاهک در امتداد قائم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_1(2\pi R \sin\phi)h \sin\phi + 2\pi R^2(1 - \cos\phi)q = 0$$

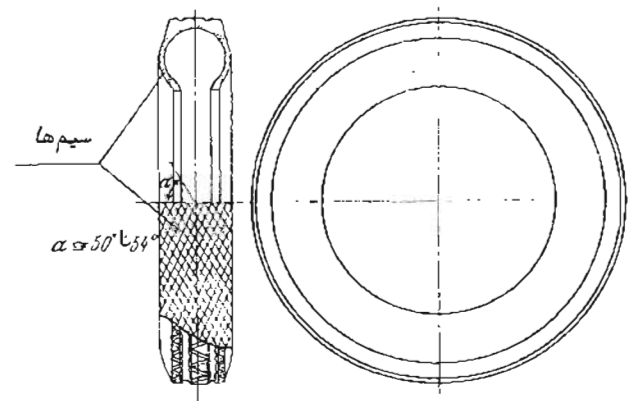
از حل این معادله تنش نصف النهاری σ_1 بدست می‌آید.

$$\sigma_1 = - \frac{qR}{h(1 + \cos\phi)}$$

با جایگزینی σ_1 بجای σ_ϕ در معادله ۱۴-۶ و با توجه به اینکه $r_1 = r_2 = R$ تنش محیطی $\sigma_2 = \sigma_\theta$ عمود بر σ_1 بدست می‌آید. توجه کنید p در رابطه ۱۴-۶ فشار داخلی عمود بر سطح عصر می‌باشد، بنابراین در این مسئله باید بجای p کمیت $-q \cos \phi$ را قرار دهیم:

۲۹۲

بهره برداری لاستیک می‌گردد. البته باید توجه نمود که تعیین زاویه اپتیمم برای رویه لاستیک نه تنها بر اساس شرایط تعادل قرار دارد بلکه شرایط اپتیمم چسبگی در اثر تنش‌های متغیر که در هنگام دوران چرخ ایجاد می‌شود نیز باید بررسی گردد.



شکل ۲۶-۶

مسئله ۱۱-۶

لوله‌ای از مس به قطر داخلی ۵۰ cm و ضخامت جدار ۰.۴ cm که روی آن را لایه‌ای از فولاد به ضخامت ۰.۲ cm پوشانده است تحت فشار داخلی p می‌باشد. اگر تنش مجاز مس 400 Kg/cm^2 و تنش مجاز فولاد 1600 Kg/cm^2 باشد، حداکثر فشار مجاز p را حساب کنید. از تنش‌های موازی طول استوانه صرف نظر کنید (به عبارت دیگر استوانه را در دو انتهایش باز فرض نمایید). ضریب ارتجاعی فولاد دو برابر ضریب ارتجاعی مس می‌باشد.

حل: کرنش‌های محیطی و فطری هر دو استوانه یکسان می‌باشد. بنابراین نسبت تنش محیطی در فولاد به تنش محیطی در مس برابر نسبت ضرایب ارتجاعی آنها می‌باشد.

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{E_s}{E_c} = 2 \quad (1)$$

چون تنش مجاز مس یک چهارم تنش مجاز فولاد می‌باشد با توجه به رابطه فوق تنش در

۲۹۵

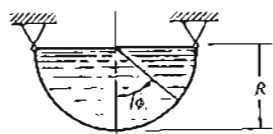
مسئله ۶-۳-۲ رابطه‌ای برای اضافه حجم در واحد حجم استوانه جدار نازکی تحت فشار داخلی یکنواخت p حساب کنید. دو انتهای استوانه بوسیله صفحه‌های دایره‌ای بسته شده‌اند. انبساط شعاعی استوانه را در تمام طول آن ثابت فرض کنید. شعاع استوانه r ، ضخامت آن h ، ضریب ارتجاعی E و ضریب پواسون ν می‌باشد.

مسئله ۶-۳-۳ تعیین کنید ضخامت جدار لازم برای یک لوله آب چدنی به قطر 100 cm که در عمق 120 متری آب قرار دارد. تنش مجاز کششی برای چدن برابر 200 Kg/cm^2 می‌باشد.

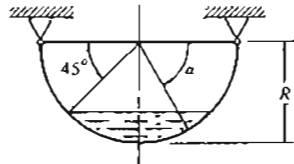
مسئله ۶-۳-۴ تنش ایجاد شده در جدار یک لوله فولادی را که بوسیله یک رویه آلومینیومی پوشیده شده است و تحت فشار داخلی 33 Kg/cm^2 می‌باشد حساب کنید. قطر داخلی استوانه فولادی 160 mm، ضخامت جدار آن 3 mm و ضخامت رویه آلومینیومی 6.5 mm می‌باشد. از تنش‌ها در امتداد طول استوانه صرف نظر کنید.

مسئله ۶-۳-۵ مخزن استوانه‌ای جدار نازکی به شعاع r و ضخامت جدار h در دو انتهایش مسدود می‌باشد. موقعی که مخزن تحت فشار داخلی p قرار دارد، کرنش سنجی که در سطح خارجی مخزن قرار دارد در جهت موازی محور استوانه کرنش ϵ_0 را اندازه می‌گیرد. فشار داخلی مخزن در این حالت چقدر می‌باشد؟

مسئله ۶-۴-۱ مخزن نیم کره‌ای شکل ۶-۴-۱ به شعاع R و ضخامت جدار h با مایعی به وزن مخصوص γ پر شده است. پوسته مزبور در سراسر طول لبه فوقانی بر تکیه گاه متکی می‌باشد. تنش‌ها را در پوسته حساب کنید.



شکل ۶-۴-۱



شکل ۶-۴-۲

مسئله ۶-۴-۲ مخزن نیم کره‌ای شکل ۶-۴-۲ به شعاع R و ضخامت جدار h می‌باشد و مایعی به وزن مخصوص γ قسمتی از آن را مطابق شکل پر می‌کند. پوسته مزبور

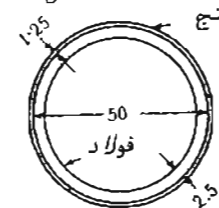
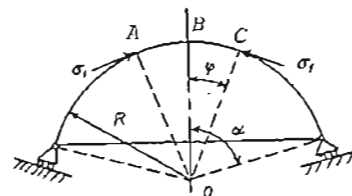
۲۹۴

$$\sigma_2 = \frac{Rp}{h} - \sigma_1 = - \frac{Rq \cos \phi}{h} + \frac{qR}{h(1+\cos \phi)}$$

$$\sigma_2 = \frac{qR}{h} \left(\frac{1}{1+\cos \phi} - \cos \phi \right)$$

۶-۹ مسائل حل نشده

مسئله ۶-۲-۱ دو حلقه برنجی و فولادی در درجه حرارت 216° دقیقاً بر روی یکدیگر قرار می‌گیرند و در هیچ یک تنشی ایجاد نمی‌شود (شکل ۶-۲-۱). عرض هر دو حلقه در جهت عمود بر صفحه تصویر برابر 2.5 cm می‌باشد. اگر درجه حرارت دستگاه مزبور به 21°C تنزل پیدا کند، فشار شعاعی q بین دو حلقه و تنش محیطی در حلقه برنجی را در اثر تغییر درجه حرارت حساب کنید. برای ساده نمودن محاسبات، بدون اینکه به دقت محاسبات لطمه زیادی وارد شود، فرض کنید هر یک از حلقه‌ها شعاع متوسط $r = 25 \text{ cm}$ دارد. ضریب ارتجاعی و ضریب انبساط حرارتی برای فولاد به ترتیب $E_s = 2(10)^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $\alpha_s = 12(10)^{-6} \text{ C}^{-1}$ و برای برنج به ترتیب $E_b = 9(10)^5 \text{ Kg/cm}^2$ و $\alpha_b = 19(10)^{-6} \text{ C}^{-1}$ می‌باشد.



شکل ۶-۲-۱

مسئله ۶-۳-۱ مخزن ذخیره بنزینی به شکل استوانه قائم و به قطر 30 m می‌باشد. تا ارتفاع 15 m آن از بنزین با چگالی نسبی 0.74 پر شده است. اگر تنش تسلیم ورق فولادی که پوسته از آن ساخته شده است برابر 250 MPa و ضریب اطمینان 2.5 کافی باشد، ضخامت لازم برای جدار استوانه را در ته آن حساب کنید. از تأثیرات خمش موضعی صرف نظر کنید.

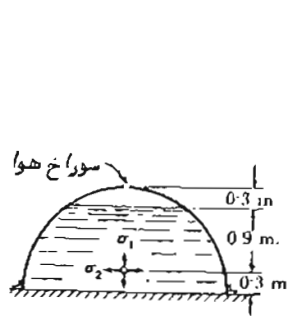
۲۹۷

۷ فرض کنید.

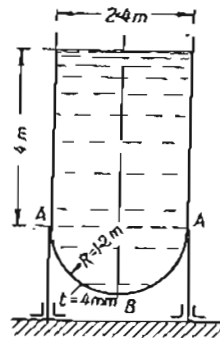
مسئله ۶-۴-۷ پوسته کروی شکل ۶-۴-۷ به شعاع متوسط r و ضخامت جدار t تحت اثر نیروهای کششی P در امتداد یکی از قطرهای آن قرار دارد. تنشهای غشائی اصلی σ_1 و σ_2 را در نقطه A پوسته که با زاویه ϕ مشخص شده است پیدا کنید.

مسئله ۶-۴-۸ پوسته نیم کروی شکل ۶-۴-۸ به شعاع 1.5 m و ضخامت جدار $t=0.025\text{ cm}$ به یک دال افقی پیچ شده و تا ارتفاع 1.2 m از آب (با وزن مخصوص $\gamma=1\text{ g/cm}^3$) پر شده است. در بالای پوسته سوراخ هوای کوچکی وجود دارد تا فشار هوا در داخل و خارج پوسته یکسان باشد. تنشهای غشائی اصلی σ_1 و σ_2 را برای عنصری که در ارتفاع 0.3 متر قرار دارد حساب کنید.

مسئله ۶-۴-۹ یک مخزن استوانه‌ای به قطر 2.4 m که قسمت پایین آن به شکل نیم کره می‌باشد تا ارتفاع 4 m با آب پر شده است (شکل ۶-۴-۹) ضخامت جدار استوانه و قسمت نیم کروی آن برابر 4 mm است. ماکزیم تنشهای عمودی را در جدار قسمت های استوانه‌ای و کروی مخزن حساب کنید.



شکل ۶-۴-۸



شکل ۶-۴-۹

مسئله ۶-۵-۱ مخزن مایعی به شکل مخروط ناقص (شکل ۶-۵-۱) بر انتهای کوچکترش تکیه دارد و با مایعی به وزن مخصوص 0.9 t/m^3 پر شده است. ضخامت

۲۹۶

در اطراف له فوقایش بر تکیه گاه متکی می‌باشد. تنش‌ها را در پوسته حساب کنید.

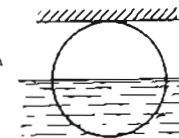
مسئله ۶-۴-۳ اضافه طول شعاع یک پوسته کروی تحت فشار داخلی p را حساب کنید. شعاع پوسته را r ، ضخامت آن را h ، ضریب ارتجاعی را E و ضریب بواسون را ν فرض کنید.

مسئله ۶-۴-۴ یک مخزن کروی برای ذخیره نمودن گاز تحت فشار از فولاد به ضخامت 15 mm ساخته شده است. قطر مخزن 25 m و تنش تسلیم فولاد 250 MPa است. با بکار بردن ضریب اطمینانی برابر 2.5 حداکثر فشار داخلی مجاز را حساب کنید اگر الف - مقاومت اتصالات ورق‌های فولاد برابر مقاومت خود فولاد باشد. ب - مقاومت اتصالات ورق‌های فولاد 75% در صد مقاومت خود فولاد باشد.

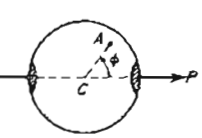
مسئله ۶-۴-۵ وسیله نقلیه دریایی شکل ۶-۴-۵ که برای کمک به زیر دریایی‌ها در مواقع اضطراری ساخته شده است از سه پوسته کروی چسبیده بهم تشکیل شده است. پوسته‌ها از فولاد به قطر خارجی 2.5 m و ضخامت جدار 20 mm ساخته شده و تنش تسلیم فولاد 900 MPa می‌باشد. تنش محیطی ایجاد شده در پوسته‌های کروی را در عمق 1000 متری دریا حساب کنید. از تأثیرات ناشی از تمرکز تنش در محل اتصال کره‌ها و همچنین امکان گمانش در اثر فشار هیدرواستاتیکی صرف نظر نمایید. وزن مخصوص آب دریا را 10^4 N/m^3 فرض کنید.



شکل ۶-۴-۵



شکل ۶-۴-۶



شکل ۶-۴-۷

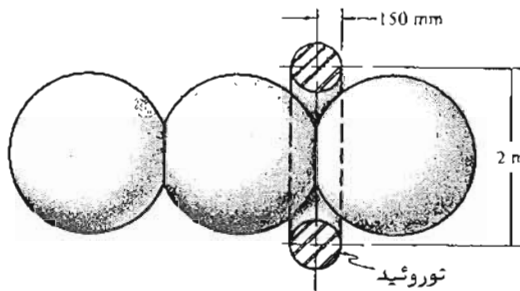
مسئله ۶-۴-۶ پوسته کروی شکل ۶-۴-۶ به شعاع متوسط R و ضخامت جدار t بوسیله سقف ثابتی در داخل آب غوطه ور نگه داشته شده است بطوریکه نیمی از آن در داخل آب قرار دارد. با صرف نظر نمودن از وزن پوسته تنشهای اصلی σ_1 و σ_2 را در پوسته در سطح آب (در خط استوای کره) پیدا کنید. وزن مخصوص آب را

۲۹۹

مسئله ۴-۵-۶ مخزنی به شکل مخروط ناقص (شکل ۴-۵-۶) با آب به وزن مخصوص $\gamma = 1 \text{ g/cm}^3$ پر شده است. تنش‌های غشایی σ_1 و σ_2 را برای عنصر A که در روی شکل مشخص شده است پیدا کنید. ضخامت حدار مخزن 0.03cm می‌باشد.

مسئله ۵-۵-۶ اگر مخروط شکل ۳-۵-۶ دارای فشار داخلی نبوده ولی در راس آن نیروی قائم متعکزی P به طرف پایین وارد شود، تنش‌های غشایی σ_1 و σ_2 را در تراز h زیر راس مخروط پیدا کنید. ضخامت حدار مخروط را t فرض کنید.

مسئله ۱-۶-۶ زیر دریایی شکل ۱-۶-۶ دارای مخزن هوای فشرده‌ای به شکل توروئید می‌باشد که دو تا از پوسته‌های کروی را در بر می‌گیرد. مخزن توروئیدی از فولاد با مقاومت کششی نهایی 1000 MPa ساخته شده است. با بکار بردن ضریب اطمینانی برابر 3 در مقابل مقاومت نهایی، ضخامت لازم حدار توروئید را برای تحمل فشار داخلی 30 MPa حساب کنید.



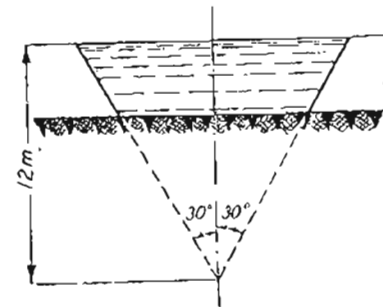
شکل ۱-۶-۶

مسئله ۱-۲-۶ مخزن شکل ۱۱-۶ از ورق فولاد به ضخامت 12 mm ساخته شده است و دارای دو ردیف اتصال با پرچ روی هم می‌باشد. فاصله پرچ‌ها از یکدیگر در ردیف اول برابر 12 cm و در ردیف دوم برابر 6 cm و قطر هر یک از پرچ‌ها 25 mm است. اگر تنش مجاز کششی برابر $\sigma_w = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش مجاز برشی برابر $\tau_w = 840 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، حداکثر فشار داخلی مجاز p را حساب کنید. قطر مخزن 1.5 m است.

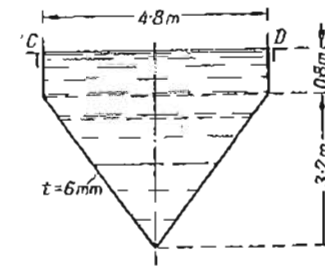
مسئله ۲-۲-۶ صفحه‌های انتهایی یک دیگ بخار بوسیله پرچ و نبشی مطابق شکل ۲-۲-۶ به حدار دیگ متصل شده‌اند. قطر دیگ بخار 100 cm و فشار داخلی آن

۲۹۸

حدار مخزن 8mm است. حداکثر تنش‌های عمودی نصف النهاری و محیطی را در حدار مخزن حساب کنید.



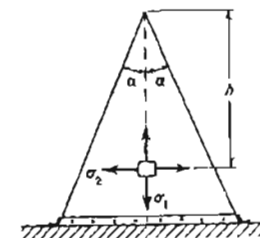
شکل ۱-۵-۶



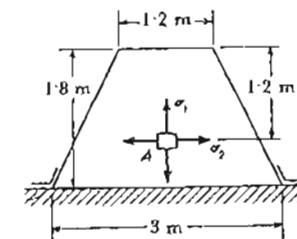
شکل ۲-۵-۶

مسئله ۲-۵-۶ مخزن مایعی شامل دو قسمت می‌باشد (شکل ۲-۵-۶)، قسمت استوانه‌ای فوقانی به قطر 4.8 m و ارتفاع 80 cm، و قسمت مخروطی تحتانی به ارتفاع 3.2 m و ضخامت حدار 6 mm می‌باشد. مخزن در اطراف محیطش در مقطع CD آویزان است و با نفع به وزن مخصوص 0.72 t/m^3 پر شده است. تنش‌های عمودی ماکزیم نصف النهاری و محیطی را در حدار قسمت مخروطی مخزن حساب کنید.

مسئله ۳-۵-۶ مخروط حدار نازکی بر روی یک پایه افقی مطابق شکل ۳-۵-۶ قرار دارد و تحت اثر فشار گاز داخلی p می‌باشد. ضخامت حدار مخروط t است. با صرف نظر نمودن از وزن مخروط تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 را در نقطه‌ای که در روی شکل مشخص شده است پیدا کنید.



شکل ۳-۵-۶



شکل ۴-۵-۶

۳۰۱

$$\sigma_1 = \frac{\gamma R^2}{3t} ; \sigma_2 = -\frac{\gamma R^2}{3t} \quad 312.5 \text{ MPa} \quad : ۶-۴-۵$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{P}{2\pi r t} \quad : ۶-۴-۶$$

$$\sigma_1 = 68 ; \sigma_2 = 472 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۴-۸$$

$$\sigma_{\theta} = 240 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_{\phi} = 70 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۴-۹$$

$$\sigma_{\phi} = 33.8 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_{\theta} = 45 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۵-۱$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{\text{phtan}\alpha}{2t\cos\alpha} \quad : ۶-۵-۲$$

$$\sigma_1 = 101 ; \sigma_2 = 536 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۵-۳$$

$$\sigma_1 = 101 ; \sigma_2 = 536 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۵-۴$$

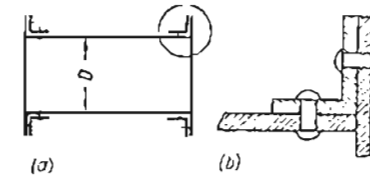
$$\sigma_1 = -\frac{P}{2\pi h t \sin\alpha} ; \sigma_2 = 0 \quad : ۶-۵-۵$$

$$p = 10.5 \text{ Kg/cm}^2 ; ۶-۷-۱ \quad 14.7 \text{ mm} \quad : ۶-۶-۱$$

$$36 \quad : ۶-۷-۲$$

۳۰۰

10 atm است. ضخامت حدار دیگ بخار و سی ها 10 mm می باشد. اگر قطر پرچ ها 20 mm باشد تعداد پرچ های لازم برای اتصال حدار دیگ به نبشی ها را پیدا کنید. تنش محاز در برش 700 Kg/cm² و در فشار 1600 Kg/cm² می باشد.



شکل ۶-۷-۲

۶-۱۰ جواب های مسائل حل نشده

$$q = 125 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_b = 1000 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۲-۱$$

$$16.7 \text{ mm} \quad : ۶-۲-۱$$

$$30 \text{ mm} \quad : ۶-۲-۲ \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{Eh} \left(\frac{5}{2} - 2\nu \right) \quad : ۶-۲-۲$$

$$p = \frac{2hE\epsilon_0}{r(1-2\nu)} \quad : ۶-۲-۵ \quad 500 \text{ Kg/cm}^2 \quad : ۶-۲-۴$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{\gamma R^2}{3h} \left(\frac{1-\cos^3\phi}{\sin^2\phi} \right) \quad : ۶-۴-۱$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\gamma R^2}{3h} \left(3\cos\phi - \frac{1-\cos^3\phi}{\sin^2\phi} \right)$$

$$\sigma_{\phi} = -\sigma_{\theta} = \frac{\gamma R^2}{h} \frac{0.0382}{\cos^2\alpha} \quad \alpha < 45^\circ \quad : ۶-۴-۲$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{1+\sin\alpha+\sin^2\alpha}{3(1+\sin\alpha)} - 0.355 \right] \quad \text{برای } 45^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\gamma R^2}{h} (\sin\alpha - 0.707) - \sigma_{\phi}$$

$$\Delta r = pr^2 (1 - \nu) / (2Eh) \quad : ۶-۴-۳$$

$$0.24 ; 0.18 \text{ MPa} \quad : ۶-۴-۴$$

شکل ۷-۱a که در انتهای چپ تکیه گاه مفصلی و در انتهای راست تکیه گاه مفصلی غلطکی (یا به اختصار تکیه گاه غلطکی) دارد موسوم به "تیر با تکیه گاههای ساده" و یا به اختصار "تیر ساده" می باشد. خصوصیت اساسی یک تیر ساده این است که دو انتهای آن در موقع خمش می توانند به آزادی دورانی کنند ولی در جهت جانبی (عمود بر محور تیر) نمی توانند حرکتی داشته باشند. همچنین یکی از دو اسبهای تیر (تکیه گاه غلطکی) می تواند در جهت محور تیر (یعنی افقی) به آزادی حرکت کند. تکیه گاههای یک تیر ساده قادر به تحمل واکنشهای قائم چه در جهت رو به بالا و چه در جهت رو به پایین می باشند.

شکل ۷-۱b تیر که در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد است به تیر طره ای موسوم می باشد. تیر در تکیه گاه گیردار نه حرکت دورانی و نه حرکت انتقالی می تواند داشته باشد، در حالی که در انتهای آزاد هر دو نوع حرکت امکان پذیر است. پیمثال سوم در شکل ۷-۱ تیری را نشان می دهد که دارای پیش آمدگی می باشد، این تیر دارای تکیه گاههای ساده A و B و انتهای آزاد C می باشد.

بارهای روی یک تیر معمولاً به صورت بارهای متمرکز (مانند بارهای P_1 و P_2 در شکل های ۷-۱a و ۷-۱c) یا گسترده (مانند بار q در شکل ۷-۱b) می باشند. بارهای گسترده بوسیله شدتشان مشخص می شوند که بر حسب نیرو در واحد طول در امتداد محور تیر بیان می شوند. برای یک بار گسترده یکنواخت (مانند بار شکل ۷-۱b) شدت بار گسترده ثابت است، ولی اگر بار گسترده در طول تیر متغیر باشد شدت بار گسترده نیز به صورت تابعی از فاصله در امتداد محور تیر تغییر خواهد کرد. تیرهای شکل ۷-۱ تیرهای ایزو استاتیک می باشند زیرا تمام واکنش های آنها را می توان از معادلات تعادل بدست آورد. برای مثال در حالت تیر ساده شکل ۷-۱a که تحت بار متمرکز P_1 می باشد، هر دو واکنش قائم می باشند و با نوشتن معادله تعادل لنگری حول دو نقطه انتهایی تیر بدست می آیند.*

$$R_a = \frac{P_1(L-a)}{L} ; R_b = \frac{P_1 a}{L}$$

واکنش های تیر شکل ۷-۱c که دارای پیش آمدگی می باشد نیز به همین صورت بدست می آید.

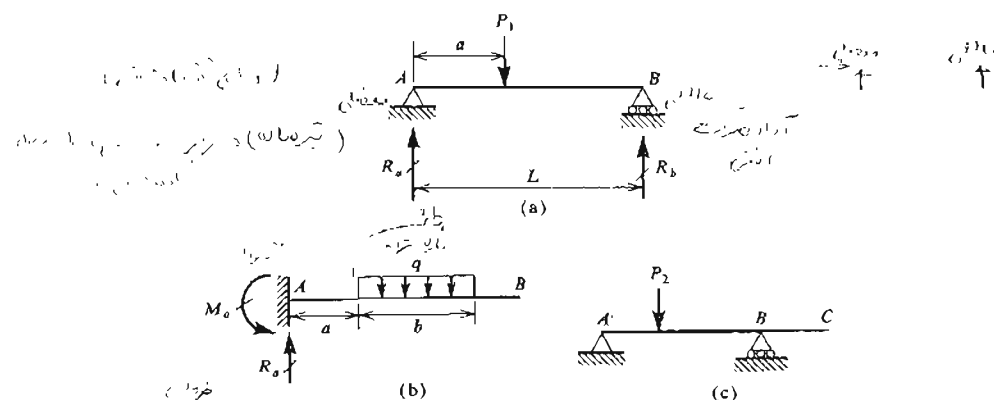
* برای اینکه بین بارها و واکنش ها فرق گذاشته شود، در روی پیگان های مربوط به واکنش ها یک خط مایل رسم شده است.

فصل هفتم

نیروی برشی و لنگر خمشی

۷-۱ انواع تیرها

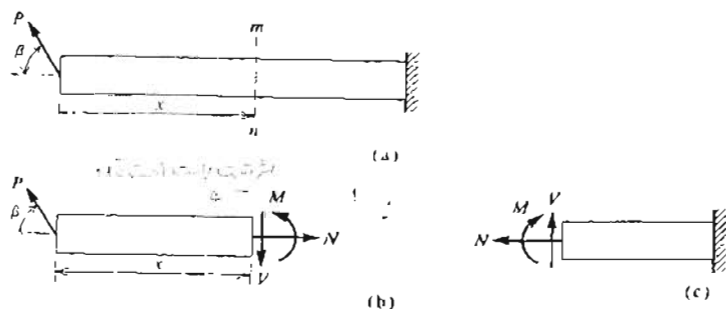
میل های که تحت تاء تیر نیروهای عمود بر محورشان قرار دارد به نام تیر نامیده می شود. چند نوع تیر در شکل ۷-۱ مشاهده می گردد. در تمام این فصل فرض می شود



شکل ۷-۱

که تیر یک صفحه تقارن موازی صفحه تصویر داشته باشد. بدین ترتیب سطح مقطع تیر یک محور تقارن قائم دارد. همچنین فرض می شود که بارها (یا برآیند آنها) در صفحه تقارن اثر کنند و در نتیجه خمش تیر در این صفحه رخ می دهد.

۳۰۵



شکل ۳-۲

نیروی برشی V موازی سطح مقطع، و لنگر خمشی M که در صفحه تیر اثر می‌کند تجزیه می‌کند.

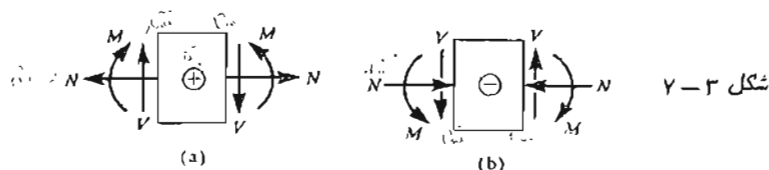
نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی مؤثر در یک مقطع عرضی تیر موسوم به برآیندهای تنش می‌باشند. برآیندهای تنش برای یک تیر ایزو استاتیک را می‌توان به کمک معادلات تعادل بدست آورد. بدین ترتیب برای تیر طره‌ای شکل ۳-۲ می‌توانیم به معادله تعادل برای نمودار جسم آزاد شکل ۳-۲ ب) بنویسیم. از معادلات تعادل در امتداد های افقی و قائم نتیجه می‌شود

$$N = P \cos \beta \quad ; \quad V = P \sin \beta$$

و از مجموع جبری لنگرها حول محوری که از مرکز سطح مقطع mn عبور کند بدست می‌آوریم

$$M = P x \sin \beta$$

x در این رابطه فاصله انتهای آزاد تیر از مقطع mn می‌باشد. بدین ترتیب می‌توانیم برآیندهای تنش را در هر مقطع تیر با استفاده از نمودار جسم آزاد و معادلات تعادل بدست آوریم. تنش‌های ناشی از نیروی محوری N در تیر قبلاً در فصل‌های اول و دوم



شکل ۳-۳

مورد بحث قرار گرفتند. در فصل‌های بعد خواهیم دید چطور می‌توان تنش‌های مربوط به

۳۰۴

در مورد تیر طره‌ای شکل ۳-۱ ب) عمل بار گسترده یکساخت q با نیروی قائم R_a و لنگر M_a در تکیه گاه گیردار در حال تعادل می‌باشد. با نوشتن معادله تعادل تیر در امتداد قائم واکنش R_a بدست می‌آید.

$$R_a = qb$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع جبری لنگرها حول نقطه A واکنش M_a حاصل می‌شود.

$$M_a = qb \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

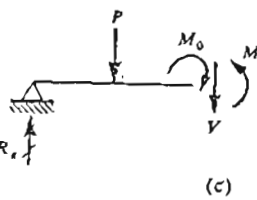
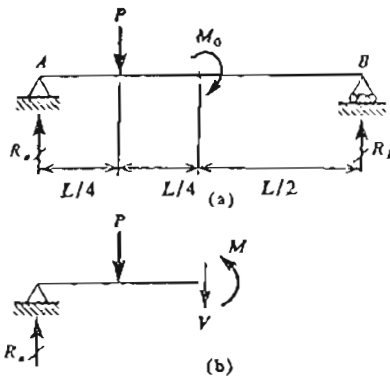
لنگر واکنشی M_a مطابق شکل ۳-۱ ب) در خلاف جهت عقربه‌های ساعت عمل می‌کند. مثال‌های قبیل نشان می‌دهند چگونه واکنش‌های (نیروها و لنگرها) تیرهای ایزو استاتیک را می‌توان به کمک معادلات تعادل استاتیک محاسبه نمود. برای تعیین واکنش‌های تیرهای هیبر استاتیک لازم است که تغییر شکل تیر نیز بررسی شود. در مورد تیرهای هیبر استاتیک در فصل دیگری بحث خواهد شد.

تکیه گاه‌های شکل ۳-۱ تکیه گاه‌های ایده‌آل می‌باشند که ممکن است بانکیه گاه‌های واقعی فرق داشته باشند. تیرهای با دهانه طویل در پل‌ها بعضی از موافع با تکیه گاه‌های مفصلی و غلطکی مطابق شکل مربوط ساخته می‌شود. اما در تیرهای با دهانه کوچک معمولاً "معداری گیرداری در مقابل هم‌بزر مکان افقی تکیه گاه‌ها وجود دارد. این تیرگیرداری مزبور در اغلب اوقات قابل صرف نظر می‌باشد (بخش ۵-۱۱ را ببینید). اما اگر تیر خیلی انعطاف پذیر و گیرداری‌های افقی در دو اینها خیلی صلب باشد ممکن است لازم شود که اثر مربوط به حساب آورده شود. در این صورت تیر به صورت هیبر استاتیک در می‌آید که درباره آن در فصل تیرهای هیبر استاتیک بحث خواهد شد.

۳-۲ برآیندهای تنش در تیرها

در شکل ۳-۲ a) یک تیر طره‌ای که بر آن بار مایل P در انتهای آزادش اثر می‌کند نشان داده شده است. اگر ما تیر را در مقطع mn قطع کنیم و نمودار جسم آزاد قسمت چپ تیر را رسم نمائیم (شکل ۳-۲ ب)، مشاهده می‌کنیم که اثر قسمت راست در روی قسمت چپ باید چنان باشد که قسمت جدا شده در حال تعادل باقی بماند. چگونگی توزیع تنش‌ها در مقطع mn هنوز برای ما مشخص نیست، اما می‌دانیم که برآیندهای این تنش‌ها باید با نیروی P در حال تعادل باشد. برای سهولت کار معمولاً "برآیندهای تنش‌ها را به نیروی محوری N عمود بر سطح مقطع که از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند،

۳۰۷



شکل ۴-۷

شده اند). لنگر خمشی M_0 در روی شکل ظاهر نمی شود چون نیرو از سمت چپ نقطه اثر M_0 بریده شده و نمودار جسم آزاد برای قسمت چپ تیر رسم شده است. از جمع جبری نیروها در امتداد قائم حاصل می شود

$$V = R_a - P = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

این معادله نشان می دهد که نیروی برشی منفی است و در نتیجه در جهت مخالف جهت نشان داده شده در شکل ۴-۷ b اثر می کند. با لنگر گرفتن حول محوری که از مقطع راست قسمت چپ تیر عبور می کند (شکل ۴-۷ b) نتیجه می شود

$$M = \frac{R_a L}{2} - \frac{PL}{4} = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2}$$

مشاهده می کنیم که لنگر خمشی بسته به مقادیر نسبی جملات ممکن است مثبت یا منفی باشد. برای اینکه برآیندهای تنش را در مقطعی درست در سمت راست وسط دهانه تیر پیدا کنیم، تیر را در این مقطع قطع می کنیم و مجدداً نمودار جسم آزاد را برای قسمت چپ رسم می نماییم (شکل ۴-۷ c). تنها تفاوت این نمودار با نمودار قبلی در این است که در نمودار اخیر لنگر M_0 نیز وارد شده است. مجدداً با نوشتن معادلات تعادل نیروها در امتداد قائم و تعادل لنگری حول محوری که از مقطع راست قسمت چپ تیر عبور کند خواهیم داشت

$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} ; \quad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2}$$

این نتایج نشان می دهد که هنگام عبور از سمت چپ لنگر M_0 به سمت راست لنگر M_0 در روی تیر، نیروی برشی تغییر نمی کند ولی لنگر خمشی به اندازه M_0 به طور جبری

۳۰۶

لنگر خمشی M و نیروی برشی V را در تیر پیدا کرد.

برآیندهای تنش N ، V و M وقتی مثبت فرض می شوند که در جهت های نشان داده شده در شکل ۴-۷ b اثر کنند. اما این فرار داد علامت فقط وقتی مفید است که ما تعادل قسمت چپ تیر را در نظر می گیریم. اگر قسمت سمت راست تیر را در نظر بگیریم (شکل ۴-۷ c)، در خواهیم یافت که برآیندهای تنش همان مقادیر قبلی ولی جهت های مخالف دارند. باسرایین باید تشخیص دهیم که علامت جبری یک برآیند تنش نباید بستگی به جهت آن در فضا (مثلاً به طرف چپ یا راست) داشته باشد، بلکه علامت آن باید بستگی به جهش نسبت به سطح ماده ای که بر آن اثر می کند داشته باشد. برای نشان دادن این نکته، قرار دادهای علامت برای N ، V و M مجدداً در شکل ۴-۷ برای عنصری از تیر نشان داده شده اند. مشاهده می کنیم که نیروی محوری مثبت از سطحی که بر آن عمل می کند دور می شود (نیروی کششی)، نیروی برشی مثبت در جهت عقربه های ساعت بر سطح عمل می کند، و لنگر خمشی مثبت باعث فشردن قسمت فوقانی تیر می گردد.

مثال ۱-۷

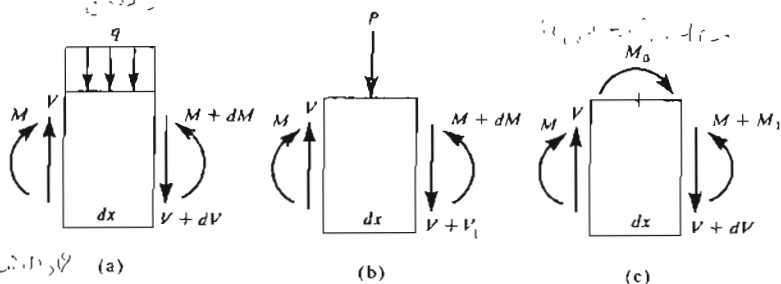
تیر ساده AB نیروی متمرکز P و لنگر خمشی M_0 را مطابق شکل ۴-۷ a حمل می کند. نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر را در مقاطع زیر پیدا کنید: (الف) - به فاصله کوچکی در سمت چپ وسط دهانه تیر. (ب) - به فاصله کوچکی در سمت راست وسط دهانه تیر.

حل: اولین قدم برای تحلیل این تیر پیدا کردن واکنش های R_a و R_b می باشد. این واکنش ها با لنگر گرفتن حول نقاط A و B بدست می آیند.

$$R_a = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{L} ; \quad R_b = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{L}$$

پس تیر در مقطعی درست در سمت چپ وسط دهانه بریده و نمودار جسم آزاد نیمه چپ تیر رسم می شود (شکل ۴-۷ b). البته می توانستیم نمودار جسم آزاد نیمه راست تیر را نیز رسم کنیم و در جواب مسئله هیچ تغییری حاصل نمی شود. نیروی P و واکنش R_a و همچنین نیروی برشی V و لنگر خمشی M که مقادیر مجهول می باشند در روی نمودار جسم آزاد مزبور رسم شده اند (V و M هر دو در جهت مثبت رسم

روابط مهمی بین نیروی برشی V و لنگر خمشی M و بار روی تیر وجود دارد. برای بدست آوردن این روابط، عنصری از تیر را که بین دو مقطع مجاور هم به فاصله dx بریده شده در نظر می‌گیریم (شکل ۷-۶ a). اگر نیروی برشی V و لنگر خمشی M در وجه سمت چپ عنصر مثبت باشند جهتشان مطابق شکل ۷-۶ a خواهد بود.



شکل ۷-۶

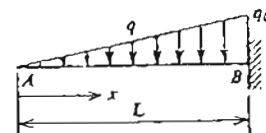
نیروی برشی و لنگر خمشی بطور کلی با فاصله x در طول محور تیر تغییر می‌کنند، در نتیجه مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در وجه سمت راست عنصر با مقادیر نظیر در وجه سمت چپ عنصر اختلاف مختصری خواهند داشت. اگر این اختلاف V و M را به ترتیب با dV و dM نشان دهیم، مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در وجه سمت راست عنصر $V + dV$ و $M + dM$ می‌باشند. این اختلافات به دلیل تغییرات بار و لنگر در طول عنصر می‌باشد. اگر بار روی عنصر بار گسترده‌ای با شدت q باشد، از شکل ۷-۶ a مشاهده می‌شود که بار کل برابر $q dx$ است (q به طرف پایین مثبت فرض می‌شود). در این صورت از معادله تعادل نیروها در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$-dV = q dx \quad (7-3)$$

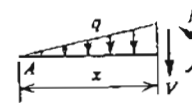
بنابراین وقتی بار گسترده‌ای به شدت q در روی تیر اثر می‌نماید، نیروی برشی در طول تیر تغییر می‌کند و شدت تغییرات نسبت به x برابر $-q$ است. از معادله فوق همچنین

مثال ۷-۲

سیر طره‌ای شکل ۷-۵ a در انتهای A آزاد و در انتهای B گیردار می‌باشد و تحت اثر بار گسترده‌ای با شدت متغیر q قرار دارد. نیروی برشی V و لنگر خمشی M را در فاصله x از انتهای آزاد تیر پیدا کنید.



(a)



(b)

شکل ۷-۵

$$q = q_0 x / L$$

حل: تیر را در فاصله x از A می‌بریم و نمودار جسم آزاد قسمت چپ تیر را رسم می‌کنیم (شکل ۷-۵ b). در این مسئله نیز مانند مسئله قبل نیروی برشی V و لنگر خمشی M را مثبت فرض می‌کنیم. شدت بار گسترده برابر $q = q_0 x / L$ و در نتیجه بار کل (رو به پایین) در نمودار جسم آزاد شکل ۷-۵ b برابر $(q_0 x^2) / (2L)$ می‌باشد. بنابراین از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$V = - \frac{q_0 x^2}{2L} \quad (7-1)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که در انتهای آزاد A ($x=0$) نیروی برشی $V=0$ و در انتهای گیردار B ($x=L$) نیروی برشی $V = -q_0 L / 2$ می‌باشد. برای پیدا کردن لنگر خمشی در تیر، معادله تعادل لنگری قسمت جدا شده تیر را حول محوری که از مقطع x عبور می‌کند می‌نویسیم.

$$M = - \frac{q_0 x^3}{6L} \quad (7-2)$$

در انتهای آزاد A ($x=0$) لنگر خمشی برابر صفر و در انتهای گیردار B ($x=L$) لنگر خمشی برابر $-q_0 L^2 / 6$ می‌باشد. معادلات 7-1 و 7-2 نیروی برشی V و لنگر خمشی M را در هر نقطه از طول تیر می‌دهند. از این معادلات نتیجه می‌شود که بیشترین مقدار عددی نیروی برشی و لنگر خمشی در انتهای گیردار تیر می‌باشد.

۳۱۱

M_1 در این رابطه نمو با تغییر لنگر خمشی می باشد. این معادله نشان می دهد که در اثر لنگر خمشی M_0 هنگام عبور از سمت چپ نقطه اثر لنگر مزبور به سمت راست آن، لنگر خمشی در تیر بطور ناگهانی به اندازه M_0 افزایش می یابد. معادلات 7-3 تا 7-6 در موقع بررسی کامل تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر بکار می روند.

مثال ۲-۷

معادلات 7-3 و 7-4 را برای تیر طره ای مثال ۲-۷ تایید کنید.

حل: اگر از معادلات 7-1 و 7-2 نسبت به x مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{q_0 x}{L}; \quad \frac{dM}{dx} = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

با توجه به اینکه شدت بار q در این مثال $q_0 x/L$ است، معادلات فوق نشان می دهند که روابط 7-3 و 7-4 بین بار، نیروی برشی و لنگر خمشی برقرار می باشند.

۷-۴ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

نیروی برشی V و لنگر خمشی M در یک تیر معمولاً با فاصله x که مشخص کننده مقاطع عرضی مختلف در طول تیر می باشد تغییر می کند. در هنگام طرح یک تیر، دانستن مقادیر V و M در همه مقاطع عرضی تیر مطلوب است و یک راه ساده برای نشان دادن این کمیت ها منحنی هایی می باشد که تغییرات آنها را در طول تیر نشان دهد. برای رسم این منحنی ها در روی محور طول ها محل مقطع مورد نظر و در روی محور عرض ها نیروی برشی یا لنگر خمشی برده می شود. منحنی هایی که باین ترتیب بدست می آیند به نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی موسوم می باشند.

برای نشان دادن نحوه رسم این نمودارها، تیر ساده AB را که بار متمرکز P را تحمل می کند در نظر می گیریم (شکل ۷-۲ a). واکنش های این تیر عبارتند از

$$R_a = \frac{Pb}{L}; \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

۳۱۰

نتیجه می شود اگر $q=0$ باشد، نیروی برشی V ثابت می باشد. با جمع نمودن لنگرها حول محوری که از وجه سمت چپ عنصر شکل ۷-۶ a عبور می کند خواهیم یافت

$$M + q dx \left(\frac{dx}{2} \right) + (V + dV) dx - (M + dM) = 0$$

اگر از حاصل ضرب دیفرانسیل ها صرفاً نظر کنیم، معادله زیر حاصل می شود:

$$\left(\frac{dM}{dx} \right) = V \quad (7-4)$$

این معادله نشان می دهد هرگاه بر روی تیر بار گسترده وارد شود (یا اصلاً باری وارد نشود)، شدت تغییرات لنگر خمشی نسبت به x برابر با مقدار جبری نیروی برشی می باشد.

حال فرض می کنیم بر روی عنصر تیر نیروی متمرکز P اثر کند (شکل ۷-۶ b). از معادله تعادل عنصر در امتداد قائم نتیجه می شود که یک تغییر ناگهانی یا گسستگی در نیروی برشی بین دو وجه عنصر وجود دارد. این تغییر ناگهانی نیروی برشی به اندازه V_1 می باشد که برابر است با

$$V_1 = -P \quad (7-5)$$

بنابراین هنگام عبور از سمت چپ نقطه اثر بار P به سمت راست آن نیروی برشی به اندازه P به طور ناگهانی کاهش می یابد.

شدت تغییرات لنگر خمشی در لبه سمت چپ عنصر شکل ۷-۶ b از معادله 7-4 برابر است با $dM/dx = V$: شدت تغییرات در لبه سمت راست برابر است با $dM/dx = V + V_1$. بنابراین می توان نتیجه گرفت که شدت تغییرات لنگر خمشی (dM/dx) در نقطه اثر یک بار متمرکز P به اندازه بار P به طور ناگهانی کاهش می یابد.

آخرین نوع بار گذاری که در نظر می گیریم لنگر متمرکز M_0 می باشد (شکل ۷-۶ c). از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می شود $dV = 0$. این نتیجه نشان می دهد که نیروی برشی هنگام عبور از سمت چپ نقطه اثر لنگر M_0 به سمت راست آن ثابت باقی می ماند. از تعادل لنگری عنصر نتیجه می شود

$$M + M_0 + Vdx - (M + M_1) = 0$$

$$M_1 = M_0 \quad (7-6)$$

۳۱۳

(معادلات 7-8) ما تعادل قسمت چپ تیر (قسمتی از تیر که بر آن نیروهای R_A و P اثر می‌کند) را در نظر گرفتیم . برای بدست آوردن این مقادیر ساده‌تر بود قسمت راست تیر را که بر آن فقط واکنش R_B (برابر با Pa/L) اثر می‌کند در نظر می‌گرفتیم . اگر این روش را انتخاب کنیم مستقیماً معادلات زیر حاصل می‌شوند که همان معادلات 7-8 می‌باشند .

$$V = -\frac{Pa}{L} \quad ; \quad M = \frac{Pa}{L} (L-x)$$

یک نکته حالت در نمودار نیروی برشی این مثال وجود دارد و آن مساوی بودن مساحت‌های دو مستطیل در این نمودار می‌باشد . این نکته یک نتیجه اتفاقی نیست زیرا با انتگرال گیری از طرفین رابطه 7-4 داریم

$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx \quad (7-9)$$

حدود A و B انتگرال نشان می‌دهند که انتگرال در روی تمام طول تیر از ابتدای A تا انتهای B صورت می‌گیرد . قسمت سمت راست این معادله معرف مساحت کل نمودار نیروی برشی می‌باشد . قسمت سمت چپ این معادله پس از انتگرال گیری تفاوت لنگرهای خمشی در انتهای A و B یعنی $M_B - M_A$ را می‌دهد . در مورد یک تیر ساده ، در دو انتها لنگری وجود ندارد و انتگرال سمت چپ معادله صفر می‌شود . بنابراین میتوان نتیجه گرفت که مساحت کل نمودار نیروی برشی در این مثال باید برابر صفر باشد .

موقعی که باری به شکل یک لنگر متعرج در روی تیر اثر میکند ، معادله 7-9 را باید با احتیاط به کار برد ، زیرا در این صورت در نمودار لنگر خمشی یک گسستگی وجود دارد و انتگرال قسمت سمت چپ معادله مزبور را نمی‌توان در روی چنین گسستگی حساب نمود . در این مورد باید انتگرال را در روی دو قسمت از تیر واقع در چپ و راست لنگر مزبور بطور جداگانه حساب و نتایج را با یکدیگر جمع نمود تا مقدار نهایی انتگرال بدست آید . موقعی که بارهای متمرکز متعددی در روی یک تیر ساده اثر می‌کنند (شکل 7-8a) ، معادلات V و M برای هر یک از نواحی تیر بین نقاط اثر بارهای متمرکز باید بطور جداگانه تعیین گردد . مجدداً با اندازه گیری x از انتهای چپ تیر ، برای اولین قسمت تیر ($0 < x < a_1$) داریم

$$V = R_A \quad ; \quad M = R_A x \quad (7-10)$$

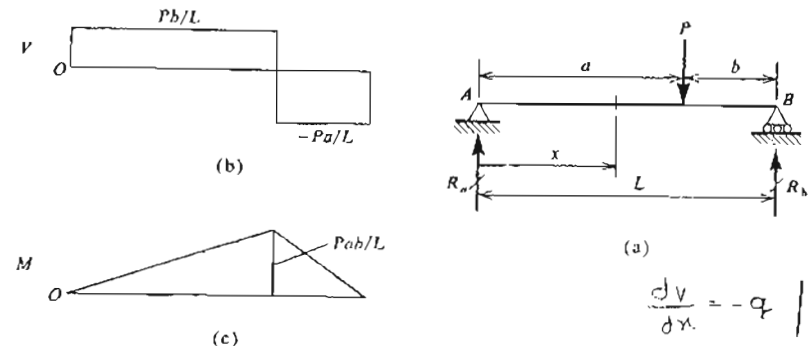
برای دومین قسمت تیر ($a_1 < x < a_2$) می‌توانیم بنویسیم

۳۱۲

در هر مقطع عرضی واقع در سمت چپ بار P ($0 < x < a$) از تعادل تیر می‌توان نتیجه گرفت

$$V = \frac{Pb}{L} \quad ; \quad M = \frac{Pb}{L} x \quad (7-7)$$

از این معادلات نتیجه می‌شود که از تکیه گاه A تا نقطه اثر بار P ، نیروی برشی ثابت می‌باشد ولی لنگر خمشی با x بطور خطی تغییر می‌کند . لنگر خمشی در $x=0$ برابر صفر و در $x=a$ برابر Pab/L می‌باشد . این نتایج در روی نمودارهای نیروی برشی (شکل 7-7b) و لنگر خمشی (شکل 7-7c) رسم شده است .



$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \left| \quad \frac{dM}{dx} = V \right.$$

شکل 7-7

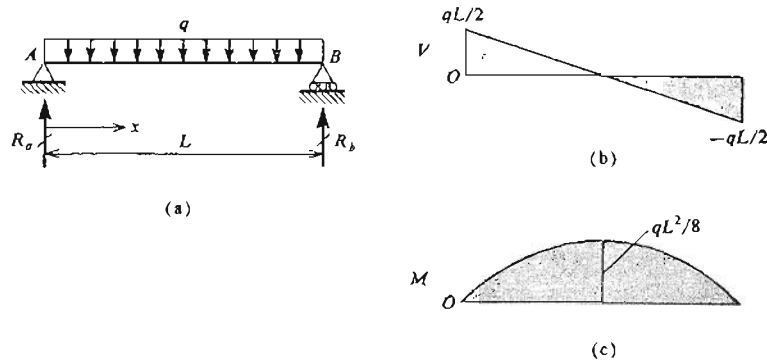
برای یک مقطع عرضی در طرف راست بار P ($a < x < L$) داریم

$$V = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \quad ; \quad M = \frac{Pb}{L} x - P(x-a) = Pa(1 - \frac{x}{L}) \quad (7-8)$$

مجدداً مشاهده می‌کنیم که نیروی برشی در طول تیر ثابت و لنگر خمشی تابعی خطی از x می‌باشد . لنگر خمشی در $x=a$ برابر Pab/L و در $x=L$ برابر صفر است . نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی برای تمام تیر در شکل‌های 7-7b و 7-7c رسم شده‌اند . مشاهده می‌شود که شیب dM/dx نمودار لنگر خمشی برابر V (معادله 7-4) و شیب dV/dx نمودار نیروی برشی برابر $-q=0$ (معادله 7-3) می‌باشد . در نقطه اثر بار P ، یک تغییر ناگهانی در روی نمودار نیروی برشی (برابر با P) و یک تغییر ناگهانی در شیب نمودار لنگر خمشی وجود دارد . در هنگام بدست آوردن نیروی برشی و لنگر خمشی در سمت راست بار P

۳۱۵

(مانند شکل ۷-۸) در این صورت شیب نمودار لنگر خمشی از یک مقدار مثبت به یک مقدار منفی تغییر می‌کند. بنابراین لنگر خمشی در مقطع عرضی می‌باید ماکزیمم باشد. بر عکس اگر نیروی برشی در مقطعی از تیر از منفی به مثبت تغییر علامت دهد، لنگر خمشی در آن مقطع مینیمم می‌باشد. نمودار نیروی برشی ممکن است محور افقی را در چند نقطه قطع کند. برای هر یک از این نقاط تقاطع یک ماکزیمم یا مینیمم در نمودار لنگر خمشی وجود دارد. همه این ماکزیمم‌ها و مینیمم‌ها باید بررسی شوند تا بیشترین مقدار لنگر خمشی بطور عددی بدست آید.



شکل ۷-۹

مثال ۷-۴

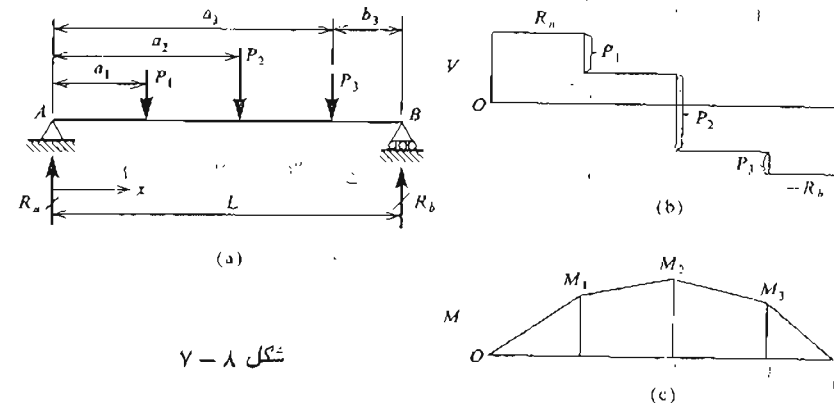
نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر ساده شکل ۷-۹ با بار گسترده بخواخت رسم کنید.

حل: واکنش‌های R_a و R_b تیر برابر $qL/2$ می‌باشند. در یک مقطع عرضی به فاصله x از تکیه گاه A داریم

$$V = \frac{qL}{2} - qx \quad ; \quad M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (7-14)$$

از این معادلات مشاهده می‌شود که نمودار نیروی برشی یک خط مستقیم است و مختصات آن در $x=0$ و $x=L$ به ترتیب $qL/2$ و $-qL/2$ می‌باشد (شکل ۷-۹). همچنین نمودار لنگر خمشی یک سهمی است (شکل ۷-۹) که نسبت به وسط دهانه

۳۱۴



شکل ۷-۸

$$V = R_a - P_1 \quad ; \quad M = R_a x - P_1(x - a_1) \quad (7-11)$$

برای سومین قسمت تیر ($a_2 < x < a_3$) بهتر است قسمت راست تیر را در نظر بگیریم. در این صورت داریم

$$V = -R_b + P_3 \quad ; \quad M = R_b(L - x) - P_3(L - b_3 - x) \quad (7-12)$$

سرانجام برای آخرین قسمت تیر می‌توانیم بنویسیم

$$V = -R_b \quad ; \quad M = R_b(L - x) \quad (7-13)$$

از معادلات فوق مشاهده می‌شود نیروی برشی در هر یک از قسمت‌ها ثابت است و در نتیجه نمودار نیروی برشی مطابق شکل ۷-۸ می‌باشد. همچنین لنگر خمشی در هر یک از قسمت‌ها تابعی خطی از x می‌باشد. برای رسم نمودار لنگر خمشی ابتدا لنگر خمشی را در زیر بارهای متمرکز پیدا می‌کنیم (با جایگزینی $x = a_1$ ، $x = a_2$ و $x = a_3$ به ترتیب در معادلات 7-10، 7-11 و 7-13).

$$M_1 = R_a a_1 \quad ; \quad M_2 = R_a a_2 - P_1(a_2 - a_1) \quad ; \quad M_3 = R_b b_3$$

با بکار بردن این مقادیر، نمودار لنگر خمشی مطابق شکل ۷-۸ رسم می‌گردد.

باید توجه نمود که نظیر هر گسستگی در نمودار نیروی برشی، در شیب dM/dx نمودار

لنگر خمشی یک تغییر ناگهانی وجود دارد. هر یک از این تغییرات در تیر،

در طرح تیرها غالباً پیدا کردن مقاطع عرضی که در آنها لنگر خمشی ماکزیمم یا

مینیمم است لازم می‌گردد. در تیری مانند تیر شکل ۷-۸ که تحت بارهای متمرکز

قرار دارد، لنگر خمشی ماکزیمم همیشه در زیر نقطه اثر یکی از بارها می‌باشد مطابق

معادله 7-4، شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه برابر نیروی برشی در همان نقطه

می‌باشد. اگر نیروی برشی در طول تیر از یک مقدار مثبت به یک مقدار منفی تغییر کند

۳۱۷

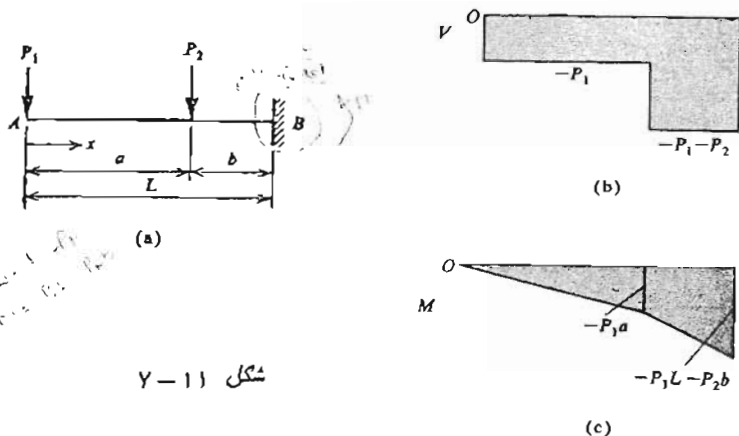
بالاخره برای قسمت بدون بار انتهای راست تیر داریم

$$V = -R_b \quad ; \quad M = R_b (L - x)$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در شکل‌های ۷-۱۰ b و ۷-۱۰ c رسم شده-
اند. نمودار نیروی برشی از دو خط افقی و یک خط مایل تشکیل شده است. نمودار لنگر
خمشی تیر شامل دو خط مستقیم مایل (مربوط به قسمت‌های بارگذاری نشده تیر) و یک منحنی
سهمی (مربوط به قسمت بارگذاری شده تیر) می‌باشد. خطوط مایل در محل برخورد با
سهمی بر آن مماس می‌باشند زیرا در نقاط مزبور نیروی برشی بطور ناگهانی تغییر نمی‌کند
و در نتیجه با توجه به معادله ۷-۴ شیب نمودار لنگر خمشی در نقاط مزبور نمی‌تواند
بطور ناگهانی تغییر کند. ماکزیمم لنگر خمشی در نقطه‌ایست که در آن نیروی برشی تغییر
علامت می‌دهد. برای بدست آوردن این مقدار ماکزیمم، ابتدا از معادله $V=0$ مقدار x
مربوط به محل لنگر ماکزیمم را بدست می‌آوریم و سپس آن را در معادله لنگر خمشی
جایگزین می‌کنیم.

مثال ۷-۶ ✓

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر طره‌ای شکل ۷-۱۱ a رسم کنید.



شکل ۷-۱۱

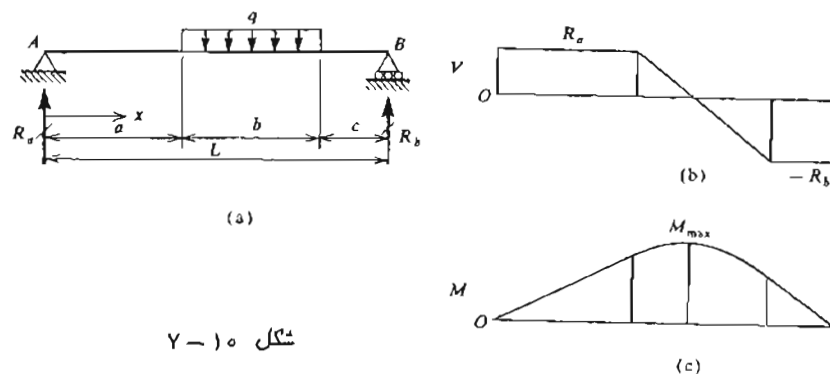
۳۱۶

تیر متقارن می‌باشد. لنگر خمشی در دو انتها برابر صفر و در وسط دهانه تیر، در جایی
که نیروی برشی تغییر علامت می‌دهد، ماکزیمم می‌باشد. با جایگزینی $x=L/2$ در
معادله لنگر خمشی مقدار ماکزیمم آن بدست می‌آید.

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} \quad (7-15)$$

مثال ۷-۵ ✓

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر ساده شکل ۷-۱۰ a که در
قسمتی از آن بار گسترده یکنواخت q قرار دارد رسم کنید.



شکل ۷-۱۰

حل: ابتدا واکنش‌های تیر را تعیین می‌کنیم

$$R_a = \frac{qb}{L} \left(c + \frac{b}{2} \right) \quad ; \quad R_b = \frac{qb}{L} \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

برای بدست آوردن نیروهای برشی و لنگرهای خمشی در طول تیر باید سه قسمت تیر را
به طور جداگانه در نظر بگیریم. برای قسمت بدون بار انتهای چپ تیر ($0 < x < a$)
داریم

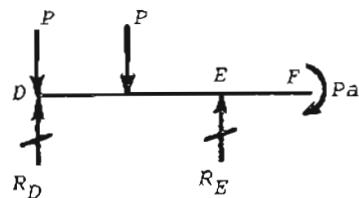
$$V = R_a \quad ; \quad M = R_a x$$

برای یک مقطع عرضی در قسمت بارگذاری شده تیر می‌توانیم بنویسیم

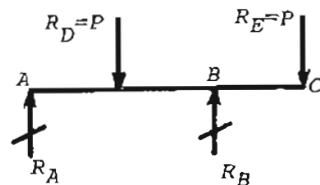
$$V = R_a - q(x-a) \quad ; \quad M = R_a x - q(x-a)^2/2$$

۳۱۹

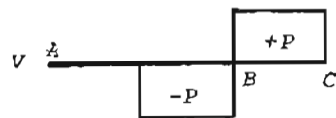
حل: با نوشتن معادلات تعادل تیر فوقانی در امتداد قائم و تعادل لنگری آن حول نقطه D واکنشهای R_D و R_E بدست می‌آیند (شکل ۷-۱۳).
 $R_D = R_E = P$
 با نوشتن معادلات تعادل لنگری تیر ABC حول نقطه A و تعادل آن در امتداد قائم واکنشهای R_A و R_B بدست می‌آیند (شکل ۷-۱۴).
 $R_B = 2P$; $R_A = 0$
 نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر ABC به ترتیب در شکل‌های ۷-۱۵ و ۷-۱۶ رسم شده‌اند. بزرگترین مقدار لنگر خمشی (بطور عددی) در تیر ABC برابر $P a$ می‌باشد.



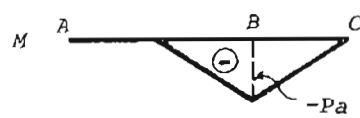
نمودار جسم آزاد DEF
شکل ۷-۱۳



نمودار جسم آزاد تیر ABC
شکل ۷-۱۴



شکل ۷-۱۵



شکل ۷-۱۶

مسئله ۷-۲ ✓

میله منحنی ABC به شکل نیم دایره تحت دو بار مساوی و مختلف الجهت P قرار دارد (شکل ۷-۱۷). شعاع محور میله r می‌باشد. نیروی محوری N، نیروی

۳۱۸

حل: با اندازه گیری x از انتهای چپ تیر در ناحیه $0 < x < a$ داریم

$$V = -P_1 \quad ; \quad M = -P_1 x$$

در ناحیه $a < x < L$ نیز می‌توانیم بنویسیم

$$V = -P_1 - P_2 \quad ; \quad M = -P_1 x - P_2 (x-a)$$

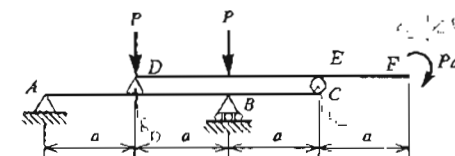
نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در شکل‌های ۷-۱۱ b و ۷-۱۱ c رسم شده‌اند. نمودار لنگر خمشی شامل دو خط مایل می‌باشد که شیب آنها برابر نیروی برشی در قسمت‌های مربوطه است. مساحت کل نمودار نیروی برشی صفر نبوده بلکه برابر $-P_1 L - P_2 b$ می‌باشد که برابر با لنگر خمشی در انتهای B تیر است.

موقعی که بیش از یک بار بر روی تیر اثر می‌کند، نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را می‌توان با جمع نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی ناشی از هر یک از بارها بطور جداگانه بدست آورد. برای مثال اگر برای تیر شکل ۷-۱۱ a نمودارهای نیروی برشی ناشی از بارهای P_1 و P_2 را به طور جداگانه رسم کنیم و دو منحنی حاصل را با هم جمع نماییم نمودار شکل ۷-۱۱ b بدست می‌آید (به عبارت دیگر از اصل اجتماع اثر قوا استفاده می‌کنیم که در بخش ۱-۲ مورد بحث قرار گرفت). همین عمل را در مورد نمودار لنگر خمشی نیز می‌توانیم انجام دهیم.

۷-۵ مسائل حل شده

✓ مسئله ۷-۱

بزرگترین مقدار لنگر خمشی بطور عددی را در تیر ABC (شکل ۷-۱۲) تعیین کنید. نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را نیز برای تیر مزبور رسم کنید.



شکل ۷-۱۲

۳۲۱

حل: در اثر دوران دستگاه مزبور حول محور 2 در بازوها و همچنین وزنه‌های W شتاب مماسی ایجاد میشود که مماس بر مسیر حرکت جرم‌ها می‌باشد. در اثر شتاب‌های مماسی بر بازوها نیروهایی عمود بر امتداد آنها اثر می‌کند. این نیروها شامل یک نیروی متمرکز در انتهای بازوها است که از وزنه‌ها نتیجه می‌شود و نیروهای گسترده که از جرم خود بازوها حاصل می‌شود.

حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در بازوها در نقاط A و B می‌باشد که به فاصله b از محور دوران قرار دارند. توجه کنید شتاب مماسی در هر نقطه از جرمی که حول محور ثابتی دوران می‌کند برابر است با شتاب زاویه‌ای ضربدر فاصله آن نقطه از محور دوران.

$$V_{\max} = \alpha(L+c+b) \frac{W}{g} + \int_b^{L+b} r \alpha \frac{w}{g} dr$$

$$= \alpha(L+c+b) \frac{2wL}{g} + \frac{\alpha w}{2g} [(L+b)^2 - b^2]$$

$$= \frac{\alpha w L}{2g} (5L+6b+4c) = \frac{\alpha w L}{2g} (5L + \frac{6}{10}L + \frac{4}{15}L) = \frac{44}{15} \frac{\alpha w L^2}{g}$$

$$M_{\max} = \alpha(L+c+b) \frac{W}{g} (L+c) + \int_b^{L+b} (r \alpha \frac{w}{g} dr) (r-b)$$

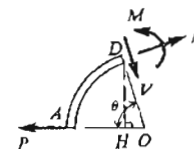
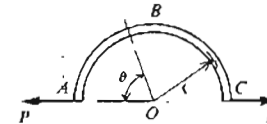
$$= \frac{2wL\alpha}{g} (L+c+b) (L+c) + \frac{w\alpha}{g} [\frac{1}{3}r^3 - \frac{b}{2}r^2]_b^{L+b} = \frac{517wL^3\alpha}{180g}$$

مسئله ۴-۷

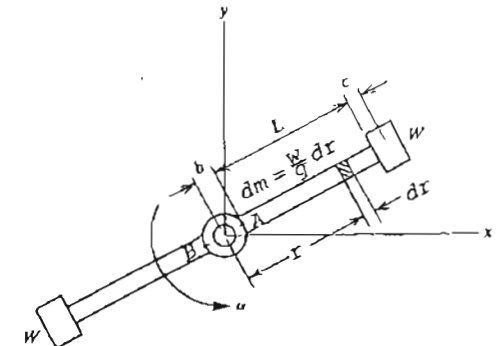
نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر شکل ۷-۱۹ رسم کنید.

۳۲۰

برشی V و لنگر خمشی M را در بقطعی که در شکل با زاویه θ مشخص شده است تعیین کنید.



شکل ۷-۱۷



شکل ۷-۱۸

حل: با توجه به نمودار جسم آزاد قطعه AD تعادل آن را در نظر می‌گیریم.

$$V = P \cos \theta \quad \text{تعادل نیروها در امتداد } \overline{OD}$$

$$N = P \sin \theta \quad \text{تعادل نیروها در امتداد عمود بر } \overline{OD}$$

$$M = P(\overline{DH}) = Pr \sin \theta \quad \text{تعادل لنگرها حول D}$$

مسئله ۳-۷

دستگاه شکل ۷-۱۸ در روی سطح صافی در یک صفحه افقی حول محور قائم z با شتاب زاویه‌ای α دوران می‌کند. وزن واحد طول هر یک از دو بازوی دستگاه w میباشد و به دو انتهای بازوها وزنه‌های $W = 2wL$ متصل شده است. با فرض اینکه $b = L/10$ و $c = L/15$ باشد روابطی برای تعیین ماکزیم نیروی برشی و لنگر خمشی در بازوها پیدا کنید.

۳۲۳

نمودار نیروی برشی بر حسب Kg برای تیری در شکل ۲۲ - ۷ رسم شده است. حداکثر لنگر مثبت و منفی در تیر چقدر است؟ لنگر خمشی در انتهای چپ تیر را برابر صفر فرض کنید.

حاصل: ماکزیمم یا مینیمم لنگر خمشی در جایی اتفاق می افتد که نیروی برشی تغییر علامت دهد (معادله ۷-۴). در نقطه A لنگر خمشی ماکزیمم می باشد زیرا نیروی برشی در این نقطه از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد، در نتیجه شیب نمودار لنگر خمشی از مثبت به منفی تغییر پیدا می کند.

$$\int_0^A dM = \int_0^A V dx$$

$$M_A - M_0 = \text{مساحت قسمت } A-A = \frac{1449 + 1271}{2} (1.2) = 1632 \text{ mKg}$$

$$M_A = M_0 + 1632 = 1632 \text{ mKg} \quad \text{حداکثر لنگر خمشی مثبت}$$

در نقطه B لنگر خمشی مینیمم می باشد زیرا نیروی برشی در این نقطه از منفی به مثبت تغییر علامت می دهد، در نتیجه شیب نمودار لنگر خمشی از منفی به مثبت تغییر پیدا می کند.

$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx$$

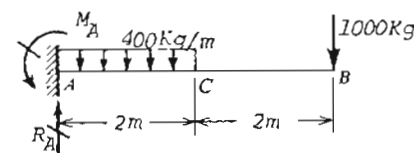
$$M_B - M_A = \text{مساحت قسمت } A_1B_1B = \frac{-284 - 996}{2} (4.8) = -3072 \text{ mKg}$$

$$M_B = M_A - 3072 = 1632 - 3072 = -1440 \text{ mKg} \quad \text{حداکثر لنگر خمشی منفی}$$

مسئله ۶-۷

فاصله a بین تکیه گاهها را در شکل ۲۳ - ۷ چنان تعیین کنید که لنگر خمشی در وسط تیر بطور عددی برابر با لنگر خمشی در تکیه گاهها باشد. نمودارهای نیروی برشی

۳۲۲



شکل ۱۹-۷

حل: ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تیر AB (شکل ۱۹-۷) واکنش های M_A و R_A را تعیین می کنیم.

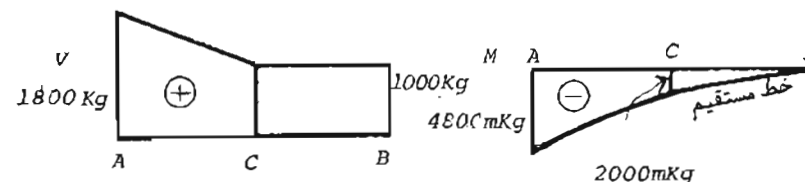
$$R_A = 1800 \text{ Kg} ; M_A = 4800 \text{ mKg}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر به صورت زیر می باشند:

$$0 \leq x \leq 2 \text{ m} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = 1800 - 400x \\ M = -4800 + 1800x - 200x^2 \end{array} \right.$$

$$2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = 1000 \\ M = -(4-x)(1000) = 1000x - 4000 \end{array} \right.$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل های ۲۰ - ۷ و ۲۱ - ۷ رسم شده است. چون در نقطه C بار متمرکز و تغییر ناگهانی نیروی برشی وجود ندارد، در نمودار لنگر خمشی خط مستقیم بر منحنی درجه دوم مماس می باشد.



شکل ۲۰-۷

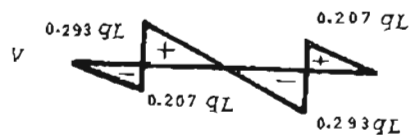
شکل ۲۱-۷

مسئله ۵-۷

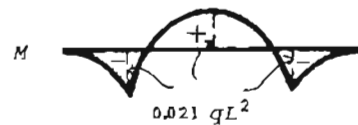
۳۲۵

$$M_C = -M_A = -M_B = \frac{q(L-0.586L)^2}{8} = 0.021 qL^2$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل های ۷-۲۴ و ۷-۲۵ رسم شده است.



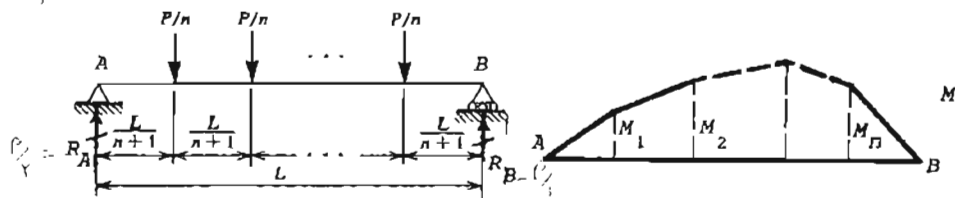
شکل ۷-۲۴



شکل ۷-۲۵

مسئله ۷-۷

بار گذاری در روی تیری با تکیه گاههای ساده شامل n بار متمرکز و مساوی میباشد که در مواصل یکسان قرار گرفته اند (شکل ۷-۲۶). مجموع تمام بارها برابر P و در نتیجه هر یک از بارها برابر P/n است. طول دهانه تیر L و فاصله بین بارها $L/(n+1)$ می باشد. الف - رابطه ای برای لنگر خمشی ماکزیمم در تیر بدست آورید. ب - نتایج این مسئله را با لنگر خمشی ماکزیمم در تیر تحت بار گسترده یکنواخت با شدت q که برای آن $qL = P$ باشد مقایسه کنید.

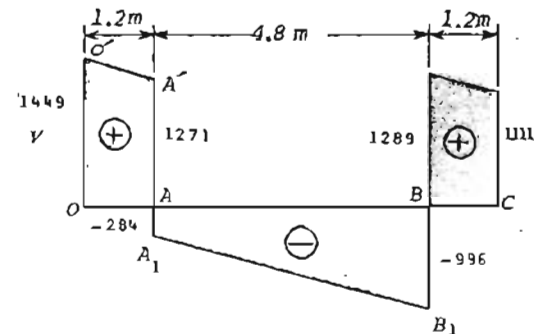


شکل ۷-۲۶

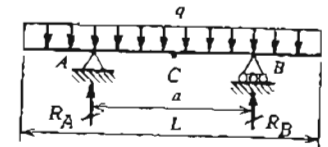
شکل ۷-۲۷

حل: واکنشهای R_A و R_B به علت تقارن برابرند $R_A = R_B = P/2$. لنگرهای نمودار لنگر خمشی تحت بار گذاری مزبور در شکل ۷-۲۷ رسم شده است. لنگرهای $M_1, M_2, M_3, \dots$ در زیر بارهای متمرکز را حساب می کنیم.

۳۲۴



شکل ۷-۲۲



شکل ۷-۲۳

و لنگر خمشی را برای این حالت رسم کنید.

حل: واکنشهای R_A و R_B به علت تقارن با یکدیگر مساوی می باشند و از تعادل تیر در امتداد قائم نتیجه می شود

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

لنگر خمشی در تکیه گاههای A و B برابر است با

$$M_A = M_B = -\frac{q(L-a)^2}{8}$$

لنگر در وسط دهانه تیر مساوی است با

$$M_C = -\frac{1}{2}q\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R_A \frac{a}{2} = -\frac{qL^2}{8} + \frac{qaL}{4}$$

بر اساس فرض مسئله داریم

$$|M_C| = |M_A| : -\frac{qL^2}{8} + \frac{qaL}{4} = \frac{q(L-a)^2}{8}$$

از این رابطه مقدار a بر حسب L بدست می آید.

$$a = (2 - \sqrt{2})L = 0.586L$$

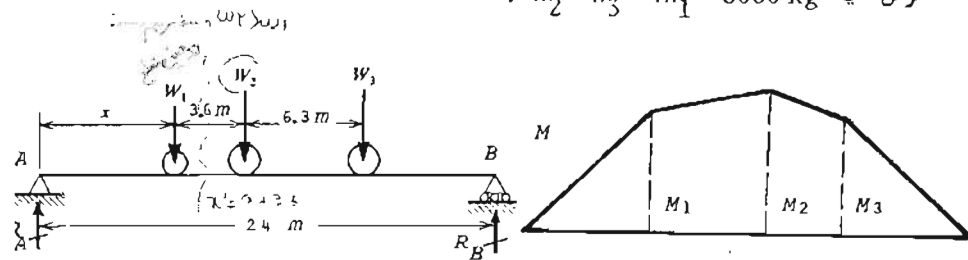
در این صورت لنگر خمشی در نقاط A ، B و C از رابطه زیر بدست می آید:

۲۲۷

این مقدار برابر لنگر خمشی ماکزیمم در یک تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت میبایست
(معادله 7-15) . اگر بجای رابطه 7-16 از رابطه 7-17 استفاده کنیم باز
هم به همین نتیجه می‌رسیم .

مسئله ۸-۷

کامیوسی با بارهای محوری نشان داده شده در شکل ۲۸-۷ از روی پلی به دهانه
24 متر عبور می‌کند . محل کامیون در روی پل (فاصله x) را که در آن لنگر خمشی
ماکزیمم ایجاد می‌شود تعیین کنید . لنگر خمشی ماکزیمم را نیز در این حالت حساب کنید .
فرض کنید $W_2 = W_3 = 4W_1 = 8000 \text{ Kg}$



شکل ۲۸-۷

شکل ۲۹-۷

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل لنگری حول نقطه A و تعادل در امتداد
قائم واکش‌های R_A و R_B را تعیین می‌کنیم .

$$\sum M_A = 0 : 24R_B - 2000x - 8000(x + 3.6) - 8000(x + 9.9) = 0$$

$$R_B = 4500 + 750x$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + 4500 + 750x - 2000 - 8000 - 8000 = 0$$

$$R_A = 13500 - 750x$$

حال لنگرهای M_1 ، M_2 و M_3 به ترتیب در زیر بارهای متمرکز W_1 ، W_2 و W_3
را بر حسب x حساب می‌کنیم (شکل ۲۹-۷) .

$$x' = x + 17.7$$

۲۲۶

$$M_1 = \frac{P}{2} \frac{L}{n+1} = \frac{PL}{2(n+1)}$$

$$M_2 = \frac{P}{2} \frac{2L}{n+1} - \frac{P}{n} \frac{L}{n+1} = \frac{PL}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$M_3 = \frac{P}{2} \frac{3L}{n+1} - \frac{P}{n} \frac{2L}{n+1} - \frac{P}{n} \frac{L}{n+1}$$

اگر n فرد باشد لنگر خمشی ماکزیمم در وسط تیر و در زیر بار $\frac{n+1}{2}$ (از سمت
چپ) می‌باشد .

$$M_{\max} = \frac{P}{2} \frac{L}{2} - \frac{P}{n} \frac{L}{n+1} \left[1+2+3+\dots+\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]$$

با استفاده از رابطه نصاب حسابی

$$1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

با فرض اینکه n فرد باشد ، لنگر خمشی ماکزیمم از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} - \frac{PL}{n(n+1)} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} = \frac{PL(n+1)}{8n} \quad (7-16)$$

اگر n زوج باشد ، لنگر خمشی ماکزیمم در زیر بار $n/2$ (از سمت چپ) می‌باشد .

$$M'_{\max} = \frac{P}{2} \left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2(n+1)} \right] - \frac{P}{n} \frac{L}{n+1} \left[1+2+3+\dots+\left(\frac{n}{2}-1\right) \right]$$

$$= \frac{PL}{4} \frac{n}{n+1} - \frac{P}{n} \frac{L}{n+1} \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{PL(n+2)}{8(n+1)} \quad (7-17)$$

هرگاه n خیلی زیاد باشد بارهای متمرکز در روی تیر به سمت بار گسترده‌شده
یکنواخت $q = \frac{P}{L}$ میل می‌کند . در این صورت از معادله 7-16 خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{PL(n+1)}{8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{qL^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{8} = \frac{qL^2}{8}$$

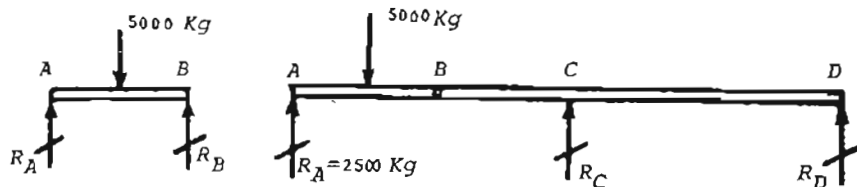
۳۲۹

از معادله تعادل لنگری تیر ABCD حول نقطه D (شکل ۳۲-۷) واکنش R_C به دست می‌آید.

$$\sum M_D = 0 : 2500(12) - 5000(10.5) + 6R_C = 0 : R_C = 3750 \text{ Kg}$$

بالاخره از معادله تعادل تیر ABCD در امتداد قائم واکنش R_D حاصل می‌شود.

$$\sum F_y = 0 : 2500 - 5000 + 3750 + R_D = 0 : R_D = 1250 \text{ Kg}$$

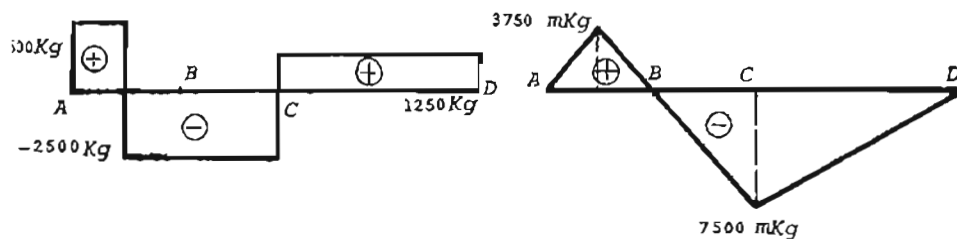


شکل ۳۱-۷

نمودار جسم آزاد ABCD

شکل ۳۲-۷ نمودار جسم آزاد ABCD

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر به ترتیب در شکل‌های ۳۳-۷ و ۳۴-۷ رسم شده است.



شکل ۳۳-۷ نمودار نیروی برشی

شکل ۳۴-۷ نمودار لنگر خمشی

مسئله ۱۰-۷

با فرض اینکه $M_0 = PL/8$ باشد نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای قسمت ABCD تیر شکل ۳۵-۷ رسم کنید.

حل: به علت تقارن داریم $R_B = R_C = P$. از معادلات تعادل قسمت AA_1A_2 (شکل ۳۶-۷) نتیجه می‌شود

۳۲۸

$$M_1 = 13500x - 750x^2$$

$$M_2 = (13500 - 750x)(x + 3.6) - 2000(3.6) = 41400 + 10800x - 750x^2$$

$$M_3 = (4500 + 750x)(24 - x - 3.6 - 6.3) = 63450 + 6075x - 750x^2$$

اکنون تعیین می‌کنیم که به ازای چه مقداری از x هر یک از این لنگرها ماکزیمم میشوند و ماکزیمم‌های مربوطه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{dM_1}{dx} = 0 : 13500 - 1500x = 0 : x = 9 \text{ m} ; (M_1)_{\max} = 60750 \text{ mKg}$$

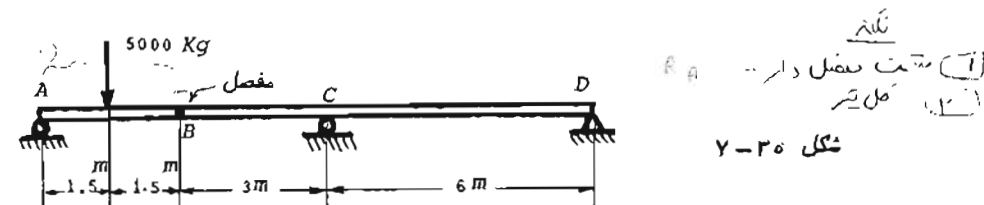
$$\frac{dM_2}{dx} = 0 : 10800 - 1500x = 0 : x = 7.2 \text{ m} ; (M_2)_{\max} = 80280 \text{ mKg}$$

$$\frac{dM_3}{dx} = 0 : 6075 - 1500x = 0 : x = 4.05 \text{ m} ; (M_3)_{\max} = 75752 \text{ mKg}$$

بنابراین لنگر خمشی ماکزیمم وقتی ایجاد می‌شود که $x = 7.2 \text{ m}$ باشد و مقدار لنگر ماکزیمم $M_{\max} = 80280 \text{ mKg}$ است.

مسئله ۹-۷

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر شکل ۳۰-۷ رسم کنید.

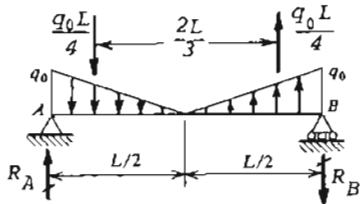


شکل ۳۰-۷

حل: از معادله تعادل لنگری قسمت AB حول نقطه B (شکل ۳۱-۷) واکنش R_A بدست می‌آید.

$$\sum M_B = 0 : 3R_A - 5000(1.5) = 0 : R_A = 2500 \text{ Kg}$$

۳۳۱



شکل ۷-۴۰

گذاری روی تیر معادل خواهد بود با دو نیروی مساوی $\frac{q_0 L}{4}$ ولی در جهت مخالف و به فاصله $2L/3$ از یکدیگر. بنابراین واکنشهای R_A و R_B نیز باید زوج نیرویی ایجاد کنند که با زوج نیروی فوق خنثی شود. در نتیجه داریم

$$R_A = R_B = \frac{(q_0 L/4)(2L/3)}{L} = \frac{q_0 L}{6}$$

چون بار گذاری روی تیر متقارن معکوس می باشد کافی است نیروی برشی و لنگر خمشی را فقط در نصف طول تیر حساب کنیم. شدت بار در فاصله x از تکیه گاه A برابر است با (شکل ۷-۴۱)

$$q_x = q_0 \frac{L/2 - x}{L/2} = (1 - \frac{2x}{L}) q_0 \quad 0 \leq x \leq L/2$$

بنابراین نیروی برشی و لنگر خمشی در روی تیر به صورت زیر حساب می شوند:

$$V = R_A - q_x(x) - \frac{1}{2}(q_0 - q_x)x = \frac{q_0 L}{6} - q_0 x + \frac{q_0}{L} x^2 \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M = \int_0^x V dx = \frac{q_0 L}{6} x - \frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{q_0}{3L} x^3 \quad 0 \leq x \leq L/2$$

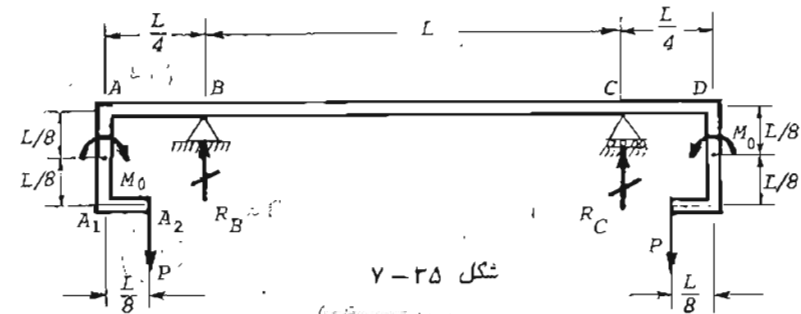
حال مقدار ماکزیمم لنگر خمشی را تعیین می کنیم.

$$V = \frac{dM}{dx} = 0 : x = 0.211 L : M_{max} = 0.016 q_0 L^2$$

لنگر خمشی در وسط تیر (در $x = L/2$) برابر صفر است. نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل های ۷-۴۲ و ۷-۴۳ رسم شده است.

مسئله ۷-۱۲

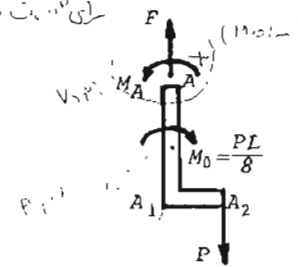
۳۳۰



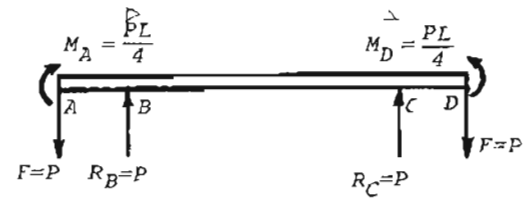
شکل ۷-۳۵

$$V = F = P ; M_A = M_0 + PL/8 = PL/4$$

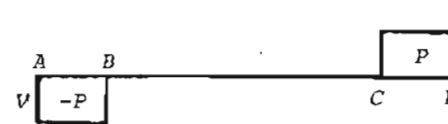
ما توجه به نمودار جسم آزاد قسمت ABCD (شکل ۷-۳۶)، نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل های ۷-۳۸ و ۷-۳۹ رسم شده است.



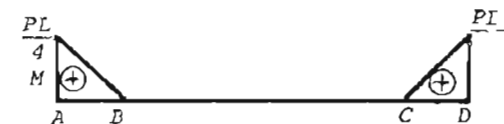
شکل ۷-۳۶ نمودار جسم آزاد A1A2



شکل ۷-۳۷ نمودار جسم آزاد ABCD



شکل ۷-۳۸ نمودار نیروی برشی

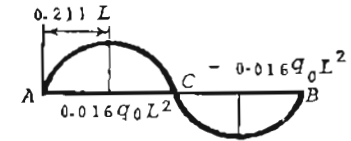
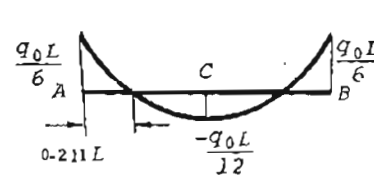


شکل ۷-۳۹ نمودار لنگر خمشی

مسئله ۷-۱۱

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر شکل ۷-۴۰ رسم کنید.

حل: اگر هر یک از بار گذاری های مثلثی را با برآند آنها جایگزین کنیم بار -



شکل ۷-۴۳ نمودار لنگر خمشی
شکل ۷-۴۲ نمودار نیروی برشی
تیر ساده AB (شکل ۷-۴۴) بار گسترده‌ای را که شدت آن در طول تیر به صورت $w_x = w_0 \sin(\pi x/L)$ تغییر می‌کند تحمل می‌نماید. ماکزیمم لنگر خمشی را در طول تیر حساب کنید.



شکل ۷-۴۴

حل: در چنین حالاتی بهتر است از روش انتگرال گیری برای تعیین لنگر خمشی در طول تیر استفاده نمود. به عبارت دیگر از روابط 7-3 و 7-4 انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{dV}{dx} = -w_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad ; \quad V = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1$$

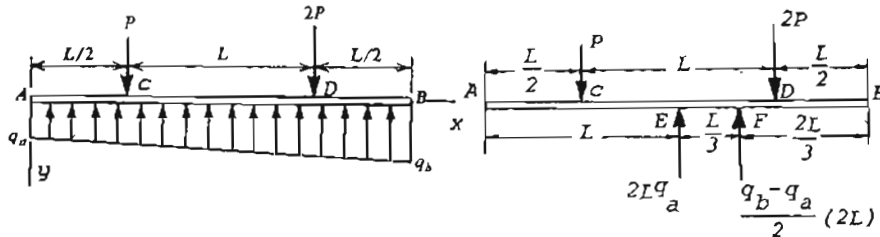
$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{w_0 L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1 \quad ; \quad M = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2$$

C_1 و C_2 در روابط فوق ثابت‌های انتگرال گیری هستند که از شرایط حدی بدست می‌آیند. در $x=0$ لنگر خمشی $M=0$ می‌باشد، بنابراین $C_2=0$ در $x=L$ نیز لنگر خمشی برابر صفر می‌باشد، بنابراین $C_1=0$ در نتیجه معادله لنگر خمشی بصورت زیر در می‌آید:

$$M = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

لنگر خمشی ماکزیمم در $x=L/2$ و برابر است با $M_{max} = w_0 L^2 / \pi^2$.

تیر AB به طول $2L$ تحت بارهای P و $2P$ مطابق شکل ۷-۴۵ قرار دارد. تیر روی فونداسیونی (مثلاً خاک) قرار دارد که بطور پیوسته روی آن نیرو وارد می‌کند. با فرض اینکه واکنش گسترده فونداسیون به طور خطی از A تا B تغییر کند، شدت واکنش‌های گسترده q_a و q_b را در دو انتهای A و B حساب کنید. همچنین مقدار و مکان لنگر خمشی ماکزیمم را در طول تیر تعیین کنید.



شکل ۷-۴۵

شکل ۷-۴۶

حل: برای تعیین شدت واکنش‌ها می‌توانیم واکنش گسترده دوزنق‌ای را به دو بار مستطیلی و مثلثی تقسیم کنیم (شکل ۷-۴۶) و هر یک از این بارها را با برآیند آنها جایگزین نماییم. از تعادل لنگر حول نقطه F شدت بار q_a بدست می‌آید.

$$\sum M_F = 0 : -P\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{3}\right) + 2Lq_a\left(\frac{L}{3}\right) + 2P\left(\frac{2L}{3} - \frac{L}{2}\right) = 0 \quad ; \quad q_a = \frac{3}{4} \frac{P}{L}$$

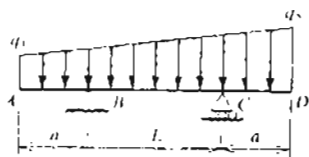
از تعادل نیروها در امتداد قائم شدت بار q_b بدست می‌آید.

$$\sum F_y = 0 : -3P + 2Lq_a + q_b L - q_a L = 0 \quad ; \quad q_b = \frac{9}{4} \frac{P}{L}$$

حال نیروی برشی و لنگر خمشی در فواصل AC و CD را تعیین می‌کنیم.

$$V = q_a x + \frac{x}{4L} (q_b - q_a)x = \frac{3}{4} \frac{P}{L} x + \frac{3}{8} \frac{P}{L^2} x^2 \quad 0 \leq x < L/2$$

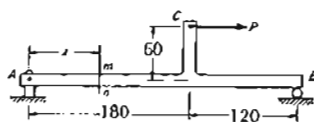
۳۳۵



شکل ۷-۲-۱

مسئله ۷-۲-۲ لنگرهای خمشی را در مقاطع عرضی C و D بر شکل ۷-۲-۱ پیدا کنید.

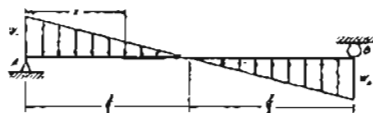
مسئله ۷-۲-۳ نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقطع mn بر شکل ۷-۲-۳ پیدا کنید.



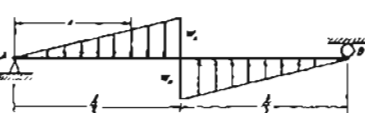
شکل ۷-۲-۳

مسئله ۷-۲-۴ در تیر شکل ۷-۲-۴، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقطع عرضی D تعیین کنید.

مسئله ۷-۳-۱ در شکل ۷-۳-۱ با استفاده از روابط 7-3 و 7-4 نیروی برشی و لنگر خمشی را در نقطه‌ای به فاصله x از تکیه گاه A بر حسب x بیان کنید. نیروی برشی در وسط تیر چقدر است؟ در کدام نقطه از تیر لنگر خمشی ماکزیمم است؟



شکل ۷-۳-۱



شکل ۷-۳-۲

۳۳۴

$$M = \int_0^x V dx = \frac{3}{8} \frac{P}{L} x^2 + \frac{1}{8} \frac{P}{L^2} x^3 \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M_C = M(x = L/2) = \frac{7}{64} PL$$

$$V = \frac{3}{4} \frac{P}{L} x + \frac{3}{8} \frac{P}{L^2} x^2 - P \quad L/2 < x < 3L/2$$

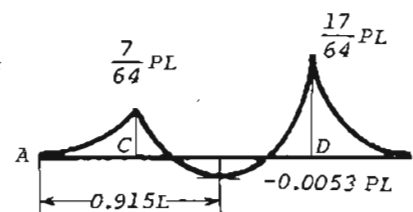
$$M = \frac{3}{8} \frac{P}{L} x^2 + \frac{1}{8} \frac{P}{L^2} x^3 - P(x - L/2) \quad L/2 \leq x \leq 3L/2$$

$$V = \frac{dM}{dx} = 0 : \frac{3}{8} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{L}\right) - 1 = 0 \quad : \quad x = 0.915 L$$

$$M(x = 0.915 L) = -0.0053 PL$$

$$M_D = M(x = 1.5 L) = \frac{17}{64} PL$$

نمودار لنگر خمشی تیر در شکل ۷-۴۷ رسم شده است. از این نمودار نتیجه می‌شود که حداکثر لنگر خمشی در طول تیر در نقطه D و برابر است با $M_{max} = \frac{17}{64} PL$.

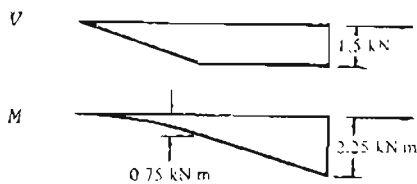
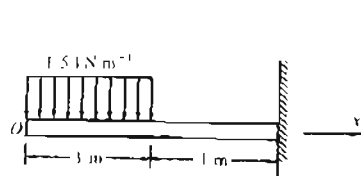


شکل ۷-۴۷ نمودار لنگر خمشی

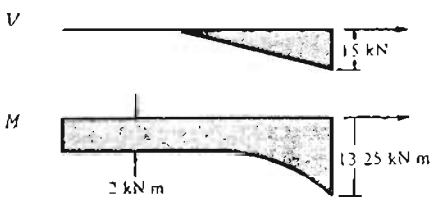
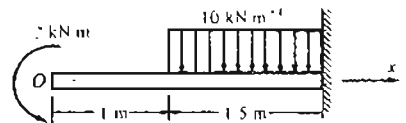
۷-۶ مسائل حل نشده

مسئله ۷-۲-۱ در تیر شکل ۷-۲-۱ برای چه نسبتی از a/L نیروی برشی در وسط دهانه تیر برابر صفر می‌باشد؟

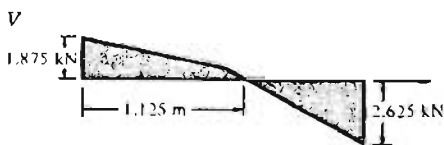
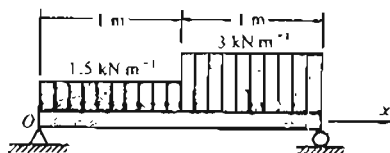
۳۳۷



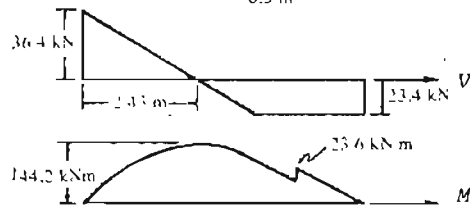
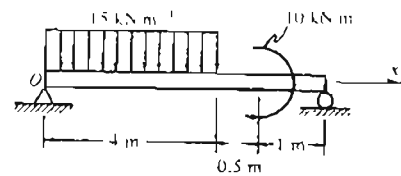
شکل ۷-۴-۳



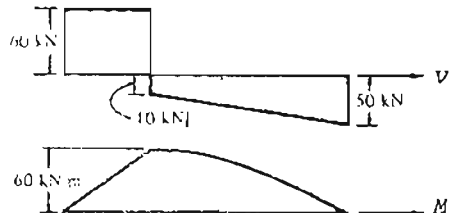
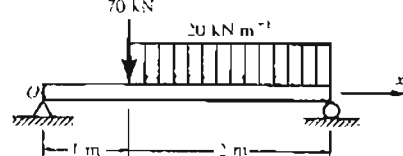
شکل ۷-۴-۵



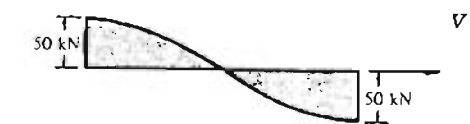
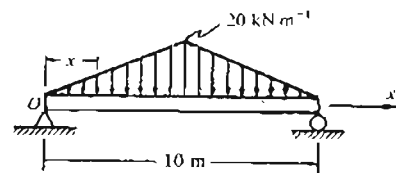
شکل ۷-۴-۷



شکل ۷-۴-۴



شکل ۷-۴-۶

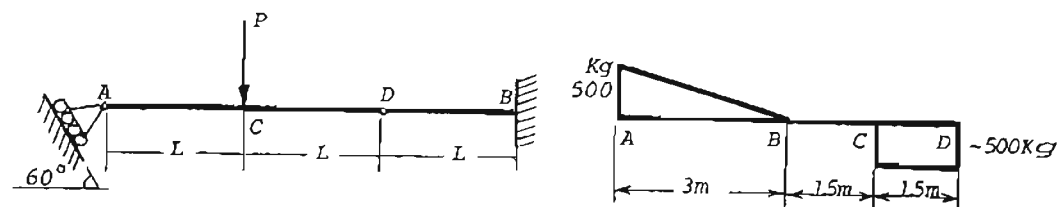


شکل ۷-۴-۸

۳۳۶

مسئله ۷-۳-۲ در شکل ۷-۳-۲ در چه فاصله x از انتهای A نیروی برشی صفر می‌باشد؟ نیروی برشی در مقطع عرضی وسط تیر چقدر است؟

مسئله ۷-۴-۱ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر شکل ۷-۴-۱ را رسم کنید.



شکل ۷-۴-۱

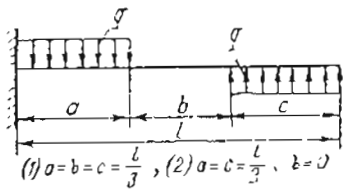
شکل ۷-۴-۲

مسئله ۷-۴-۲ نمودار نیروی برشی تیر ساده‌ای در شکل ۷-۴-۲ رسم شده است. بار گذاری روی تیر را تعیین کنید و نمودار لنگر خمشی آن را رسم کنید.

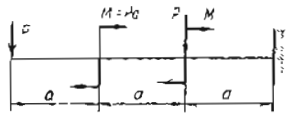
مسئله ۷-۴-۳ تا ۷-۴-۸ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیرهای شکل‌های ۷-۴-۳ تا ۷-۴-۸ رسم و با جواب‌های داده شده مقایسه کنید.

مسئله ۷-۴-۹ تا ۷-۴-۵۷ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیرهای شکل‌های ۷-۴-۹ تا ۷-۴-۵۷ رسم نمایید.

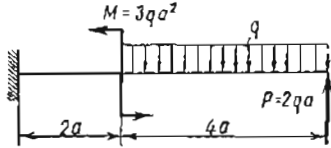
۳۳۹



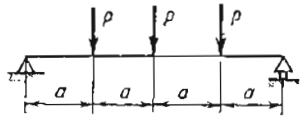
شکل ۷-۴-۲۱



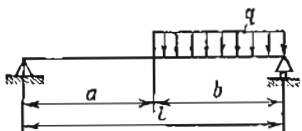
شکل ۷-۴-۲۳



شکل ۷-۴-۲۵

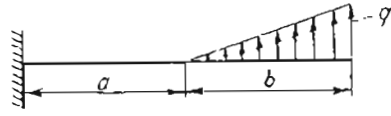


شکل ۷-۴-۲۷

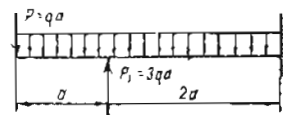


(1) $a=b=\frac{l}{2}$; (2) $a=\frac{l}{4}$; $b=\frac{3}{4}l$;
(3) $a=\frac{3}{4}l$, $b=\frac{l}{4}$

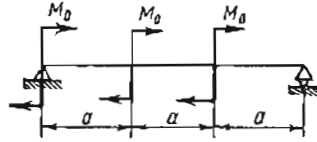
شکل ۷-۴-۲۹



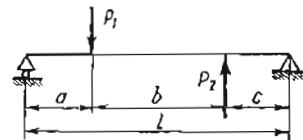
شکل ۷-۴-۲۲



شکل ۷-۴-۲۴

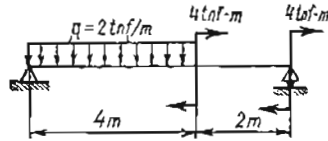


شکل ۷-۴-۲۶



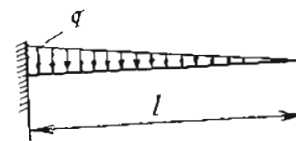
(1) $P_1=P_2=P$, $a=b=c=\frac{l}{3}$
(2) $P_1=2P_2$, $a=c$, $b=2a$

شکل ۷-۴-۲۸

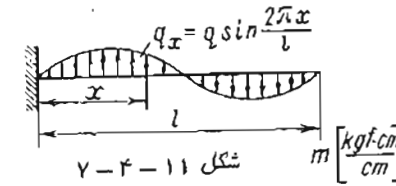


شکل ۷-۴-۳۰

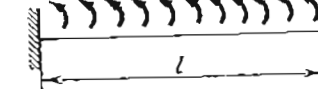
۳۳۸



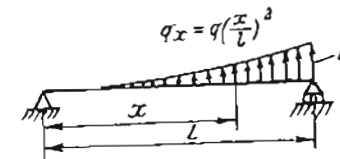
شکل ۷-۴-۹



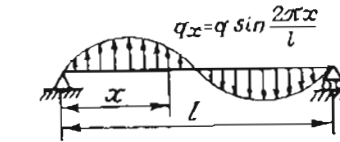
شکل ۷-۴-۱۱



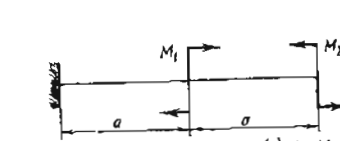
شکل ۷-۴-۱۳



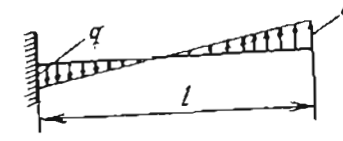
شکل ۷-۴-۱۵



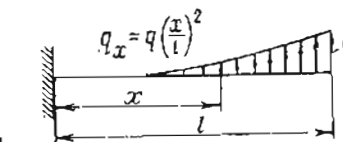
شکل ۷-۴-۱۷



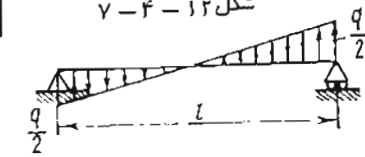
شکل ۷-۴-۱۹



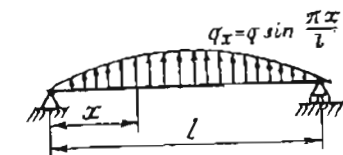
شکل ۷-۴-۱۰



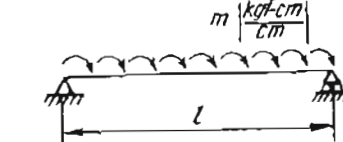
شکل ۷-۴-۱۲



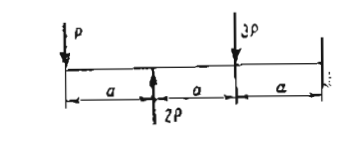
شکل ۷-۴-۱۴



شکل ۷-۴-۱۶

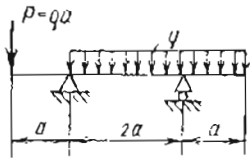


شکل ۷-۴-۱۸

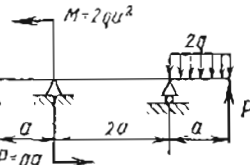


شکل ۷-۴-۲۰

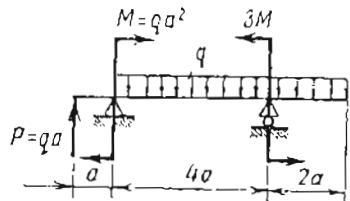
۳۴۱



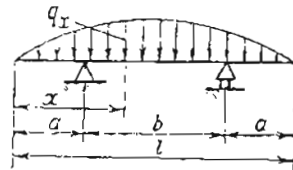
شکل ۷-۴-۴۳



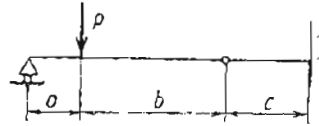
شکل ۷-۴-۴۴



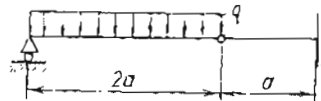
شکل ۷-۴-۴۵



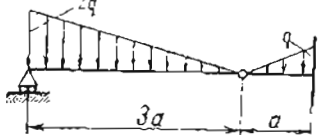
شکل ۷-۴-۴۶



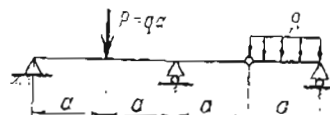
شکل ۷-۴-۴۷



شکل ۷-۴-۴۸



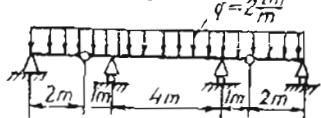
شکل ۷-۴-۴۹



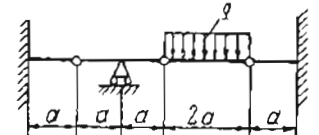
شکل ۷-۴-۵۰



شکل ۷-۴-۵۱

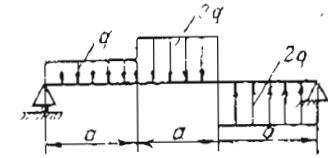


شکل ۷-۴-۵۲

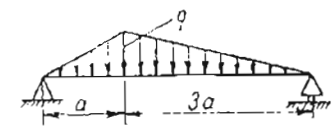


شکل ۷-۴-۵۳

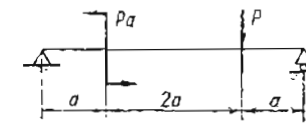
۳۴۰



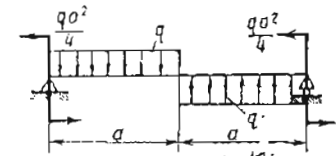
شکل ۷-۴-۳۱



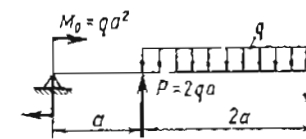
شکل ۷-۴-۳۲



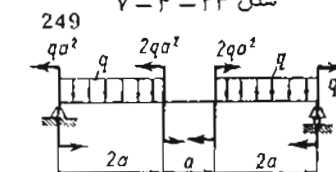
شکل ۷-۴-۳۳



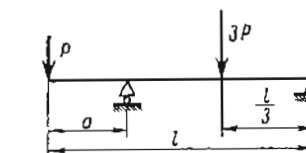
شکل ۷-۴-۳۴



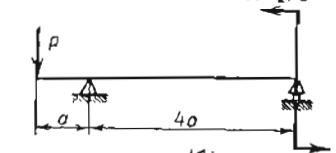
شکل ۷-۴-۳۵



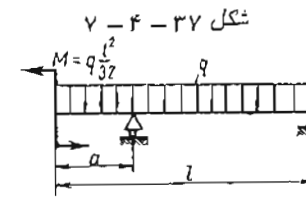
شکل ۷-۴-۳۶



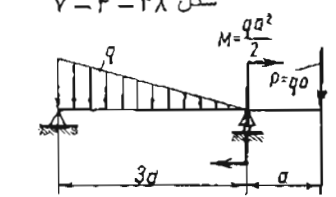
شکل ۷-۴-۳۷



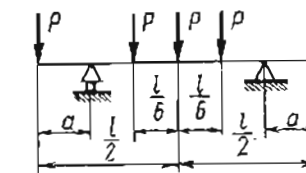
شکل ۷-۴-۳۸



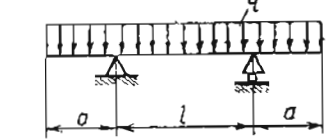
شکل ۷-۴-۳۹



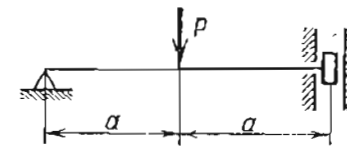
شکل ۷-۴-۴۰



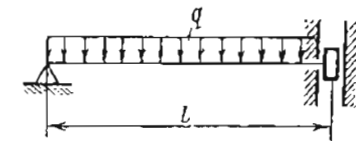
شکل ۷-۴-۴۱



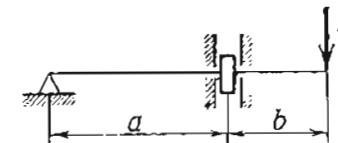
شکل ۷-۴-۴۲



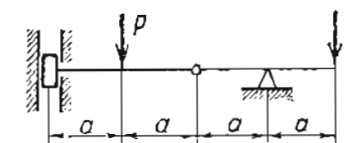
شکل ۵۴-۴-۷



شکل ۵۵-۴-۷



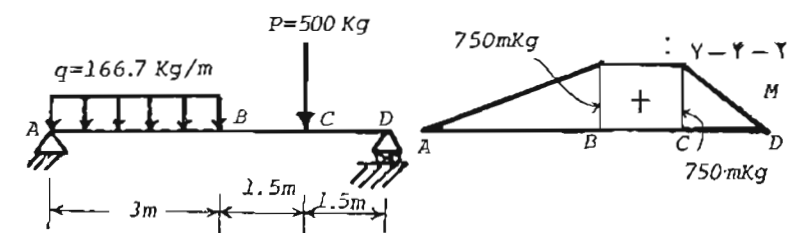
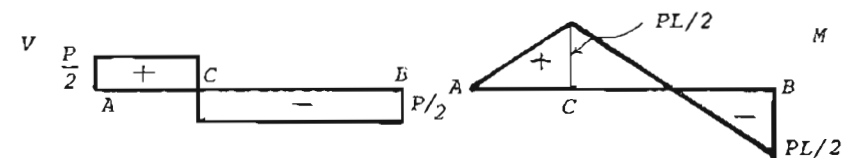
شکل ۵۶-۴-۷



شکل ۵۷-۴-۷

۷-۷ جواب‌های مسائل حل نشده

$M_C = 0$; $M_D = -2250 \text{ mKg}$	: ۷-۲-۲	$a/L = 1/4$	: ۷-۲-۱
$N = P$; $V = -0.2 P$; $M = -0.2 Px$	: ۷-۲-۳		
$V_D = -125 \text{ Kg}$; $M_D = 75 \text{ mKg}$	: ۷-۲-۴		
$V = -w_0 l/12$; $x = 0.2114 l$	: ۷-۲-۱		
$x = l / (2\sqrt{3})$; $V = \pm w_0 l/6$	: ۷-۳-۲		
	: ۷-۴-۱		

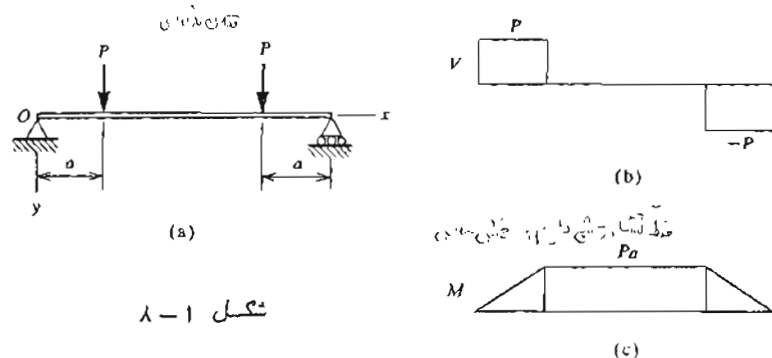


فصل هشتم

تنشها در تیرها

۱-۸ تنشهای عمودی در تیرها

برای اینکه بحث تنشها در تیرها را شروع کنیم ابتدا نیروی را که تحت دوبرمتر مرکز P مطابق شکل ۱-۸-۱ قرار دارد در نظر می‌گیریم. در ناحیه مرکزی این تیر نیروی برشی وجود ندارد و این ناحیه تنها تحت لنگر خمشی ثابتی برابر Pa قرار دارد. این



شکل ۱-۸

حالت لنگر خمشی ثابت موسوم به "خمش خالص" می‌باشد. برای پیدا کردن توزیع تنشهای داخلی در حالت خمش خالص باید تغییر شکل تیر را مطالعه کنیم. فرض می‌کنیم صفحه xy یک صفحه ثقلان تیر باشد (شکل ۱-۸-۱)

۲۴۵

$$\epsilon_x = \frac{y}{r} = k_y y \quad (8-1)$$

در این رابطه K انحنا (برابر با عکس شعاع انحنا) و dx طول عنصر تیر بین دو مقطع عرضی مجاور mn و pq می باشد. ما در سراسر این فصل فرض می کنیم که تغییر شکل ها کوچک باشد، بنابراین طول تیر بین دو مقطع نزدیک سیم را برابر با طول افقی dx فرض می کنیم.

حال می توانیم اضافه طول (یا کاهش طول) یک تار طولی نمونه مانند ab را که به فاصله y از سطح خنثی قرار دارد حساب کنیم. طول کل تار مزبور برابر با $(\rho+y) d\theta$ یا $(1+y/\rho) dx$ است. چون طول اولیه تار dx می باشد معبر طول آن $y dx / \rho$ و کرنش مربوطه برابر است با

$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho} = k_y y \quad (8-2)$$

این معادله نشان می دهد کرنش طولی ϵ_x مستقیماً با انحنا و فاصله y تار مزبور از سطح خنثی متناسب می باشد. موقعی که تار مورد نظر در زیر سطح خنثی قرار دارد، فاصله y و در نتیجه کرنش، مثبت (کششی) است. موقعی که تار در بالای سطح خنثی قرار دارد، y و ϵ_x هر دو منفی خواهند بود و این نشان می دهد که ماده تحت فشار است. معادله 8-2 صرفاً بر اساس هندسه تیر تغییر شکل یافته بدست آمد و در نتیجه مستقل از خواص مصالح می باشد. بنابراین این معادله برای هر نوع نمودار تنش - کرنش ماده تیر صادق است.

مانند حالت کشش یا فشار ساده مورد بحث در بخش ۶-۱، بحره یا تیرها نیز نشان می دهد که کرنش های محوری در تارها با کرنش های جانبی همراه می باشند. اسباط تارهای طولی در زیر سطح خنثی با انقباض جانبی، و انقباض تارهای طولی در بالای سطح خنثی با اسباط جانبی همراه است. شکل ۸-۲ b دو ضلع مستطیل نسبت به یکدیگر متمایل می شوند و کرنش جاسی برابر است با

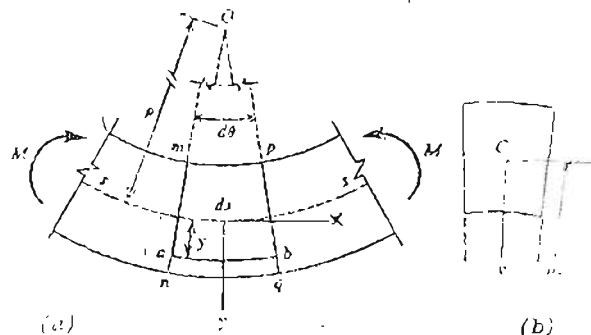
$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\nu k_y y \quad (8-3)$$

ν در این رابطه ضریب پواسون می باشد. به علت این تغییر شکل، تمام خطوط مستقیم در مقطع عرضی که در ابتدا موازی محور z بودند به صورت منحنی در می آیند تا بر اسطلاح مقطع عمود باشند. شعاع انحنا ρ این خطوط منحنی به همان نسبتی که ϵ_x



۲۴۴

و تارها (با برآیند آنها) در همین صفحه بر سر وارد شوند. در سبجه تغییر شکل یابی از خمش نیز در همین صفحه صورت می گیرد. محور تیر در اثر لنگرهای خمشی M (شکل ۸-۲ a) به صورت یک قوس دایره ای خم می شود و مقاطع عرضی تیر مانند mn و pq مسطح و عمود بر تارهای طولی تیر باقی می مانند. این واقعیت که مقاطع عرضی تیر در خمش حالتی مسطح باقی می ماند بطور نحوی به کمک اندازه گیری های دقیق کرنش ها یا صرفاً بر اساس تئوری قابل اثبات می باشد. در حالت دوم کافی است توجه کنیم که در اثر تفران یار گذاری، همه عناصر تیر باید بطور یکسان تغییر شکل دهند و این تنها در صورتی امکان پذیر است که مقاطع عرضی مسطح باقی بمانند. این نتیجه بدون توجه به اینکه ماده تیر بطور حقیقی ارتجاعی باشد یا نباشد صادق است.



شکل ۸-۲

در اثر تغییر شکل های خمشی نشان داده شده در شکل ۸-۲ a مقاطع mn و pq حول محورهای عمود بر صفحه xy نسبت به یکدیگر دوران می کنند بطوریکه تارهای طولی تیر در طرف محدب نیز ازدیاد طول و در طرف مقعر آن کاهش طول می یابند. بدین ترتیب تارهای قسمت فوقانی تیر تحت فشار و تارهای قسمت تحتانی تیر تحت کشش می باشند. بین بالا و پایین تیر سطحی وجود دارد که در آن تارها تغییر طولی نمی دهند. این سطح که در شکل ۸-۲ a با خط منقطع SS مشخص شده به سطح خنثی موسوم است. تقاطع این صفحه با هر صفحه مقطع عرضی محور خنثی آن مقطع خوانده می شود. برای مثال محور z در شکل ۸-۲ b محور خنثی مقطع عرضی شکل مزبور می باشد. صفحه های دو مقطع عرضی مجاور هم mn و pq (شکل ۸-۲ a) بعد از تغییر شکل یکدیگر را در نقطه O قطع می کنند که مرکز انحنا محور طولی تیر است. زاویه بین این دو صفحه را با $d\theta$ و شعاع انحنا را با ρ نشان می دهیم. از هندسه شکل می توانیم

۳۴۷

چون شعاع انحنا ρ و ضریب ارتجاعی E مقادیر ثابتی هستند از این معادله نتیجه می شود که برای سیری در خمش حالص رابطه زیر برقرار است :

$$\int y dA = 0 \quad (8-6)$$

این معادله به این صورت بیان می شود : گشتاور اول سطح مقطع عرضی نسبت به محور خشی (یعنی محور z) برابر صفر است. بنابراین از اینجا نتیجه می شود که محور خشی از مرکز سطح مقطع عرضی عبور می کند. از این خاصیت می توان برای تعیین محل محور خشی تیرهای L مقاطع عرضی مختلف به شرط اینکه محور y محور تقارن باشد استفاده نمود. محور y نیز علت محور تقارن بودن باید از مرکز سطح مقطع عرضی عبور کند، بنابراین مبدأ محورها y و z (شکل ۸-۴ b) در مرکز سطح مقطع عرضی می باشد. به علاوه هر دو محور محورهای اصلی سطح مقطع عرضی می باشد. لنگر نیروی خیلی کوچک $\sigma_x dA$ حول محور خشی برابر $\sigma_x y dA$ است. انتگرال همه این نیروهای کوچک روی تمام سطح مقطع عرضی باید برابر لنگر خمشی M باشد.

$$M = \int \sigma_x y dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = \frac{EI}{\rho} \quad (8-7)$$

در این رابطه I گشتاور لختی سطح مقطع عرضی نسبت به محور z می باشد و مقدار آن با انتگرال زیر تعریف می شود :

$$I = \int y^2 dA \quad (8-8)$$

معادله 8-7 را به صورت

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (8-9)$$

می نویسیم. این معادله نشان می دهد که انحنا محور طولی تیر مستقیماً با لنگر خمشی M و معکوساً با کمیت EI موسوم به صلبیت خمشی تیر متناسب می باشد.

اگر به جای انحنا از معادله 8-9 در معادله 8-5 قرار دهیم خواهیم داشت

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \quad (8-10)$$

در این معادله، M وقتی مثبت است که در بالای تیر فشار ایجاد کند و y بطرف پایین مثبت می باشد (شکل ۸-۴ را ببینید).

تنش های کششی و فشاری ماکزیمم در تیر در تارهایی که بیشترین فاصله را از محور خشی دارند رخ می دهند. اگر فاصله دورترین تارهای کششی و فشاری را به ترتیب با c_1 و c_2 (مطابق شکل ۸-۴ b) نشان دهیم، از معادله 8-10 می توانیم بنویسیم

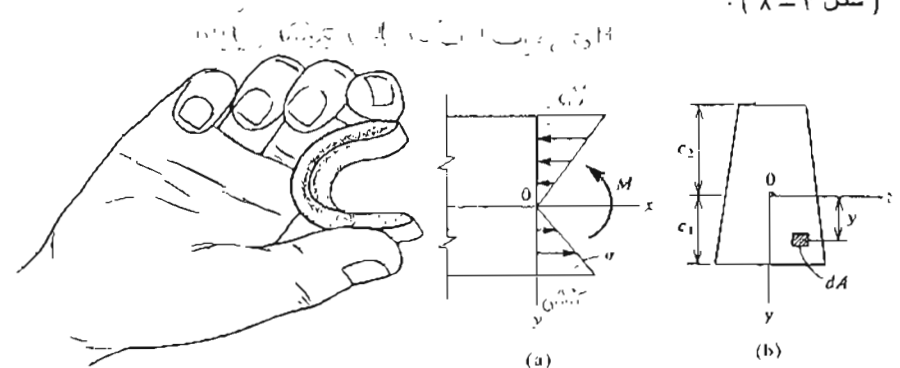
$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} ; (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \quad (8-11)$$

۳۴۶

بطور عددی از E_z بزرگتر است (معادله 8-3) از شعاع انحنا ρ بزرگتر می باشد. در این صورت داریم

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\nu} ; K_1 = \nu K \quad (8-4)$$

در این رابطه $K_1 = 1/\rho_1$ انحنا در صفحه yz می باشد. تغییر شکل های ناشی از گوشه های جایی را می توان به سهولت با خم کردن یک پاک کن لاستیکی مشاهده کرد (شکل ۸-۳)



شکل ۸-۳

شکل ۸-۴ توزیع تنش در یک تیر

برای نیروی که از ماده ارتجاعی با نمودار تنش- کرنش خطی ساخته شده است (به این نوع ماده اصطلاحاً " ماده هooke می گویند) داریم $\sigma = E\epsilon$ ، بنابراین با استفاده از معادله 8-2 تنش های عمودی در تیرها عبارتند از

$$\sigma_x = KEy = \frac{Ey}{\rho} \quad (8-5)$$

این تنش ها با فاصله y از محور خشی (مطابق شکل ۸-۴ a) بطور خطی تغییر میکنند. تنش ها در زیر محور خشی کششی و در بالای محور خشی فشاری هستند و برآیند آنها باید برابر با لنگر خمشی M مؤثر در مقطع عرضی باشد.

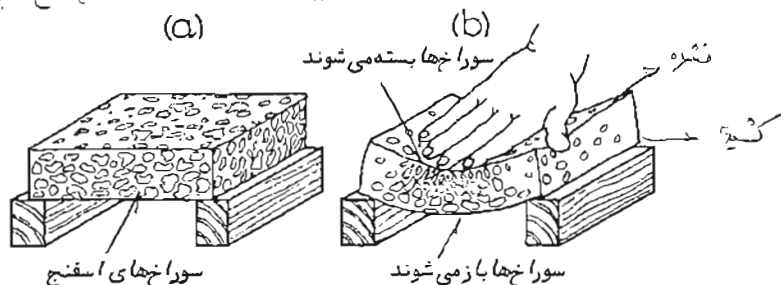
معرض کنیم dA مساحت سطح عنصر کوچکی از مقطع عرضی در فاصله y از محور خشی باشد (شکل ۸-۴ b). نیروی کوچکی که بر این سطح اثر می کند برابر $\sigma_x dA$ می باشد. چون نیروی عمودی برآیندی در مقطع عرضی اثر نمی کند، انتگرال $\sigma_x dA$ در روی تمام سطح مقطع باید برابر صفر باشد. بنابراین $\int \sigma_x dA = \int \frac{Ey}{\rho} dA = 0$

$$\sum F_x = 0$$

به صورت غیر یکنواخت باشد قابل قبول است. محاسبه تنش‌های برشی در بخش‌های ۸-۵ تا ۸-۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

گالبله اولین دانشمندی بود که به بررسی مسئله خمش پرداخت. او در کاسی که در سال ۱۶۳۸ منتشر شد مسئله خمش یک سیر طره‌ای را مورد بحث قرار داد و سعی نمود بار شکست تیر را بر حسب ابعاد آن تعیین کند. ولی او فرض نمود نیروها در تارهای تیر در تمام ارتفاع آن به صورت نیروهای کششی مساوی می‌باشند و تیر در هنگام شکست حول نقطه B در شکل ۸-۶ دوران خواهد کرد. بار شکستی که بوسیله تئوری گالبله بدست می‌آید سه برابر بار بدست آمده از تئوری صحیح تیرها می‌باشد. علت اشتباه گالبله و بعضی دیگر از دانشمندان عدم اطلاع آنها درباره خواص ارتجاعی مصالح بود و تئوری صحیح خمش پس از اینکه هوک دریافت "تنش با کرنش متناسب است" پیدا شد.

با آزمایش‌های ساده‌ای می‌توان خمش یک تیر ساده را مشاهده نمود. برای این کار یک تیرکمانی به ابعاد مثلاً ۱۵۰mm×۱۰۰mm×۵۰mm را مطابق شکل ۸-۷ a بر روی دو تکیه‌گاه قرار دهید و با دست بر آن فشار وارد کنید (شکل ۸-۷ b). مشاهده خواهید کرد که سوراخ‌های اسفنج در بالای آن بسته (نشان دهنده فشار در بالای اسفنج) و در پایین آن باز (نشان دهنده کشش در پایین اسفنج) می‌شوند. سوراخ‌ها در مجاورت دو تکیه‌گاه تقریباً بدون تغییر باقی می‌مانند زیرا لنگرهای خمشی در دو انتهای تیر در مقایسه با وسط تیر خیلی کوچک هستند.



شکل ۸-۷

مثال ۸-۱

در این رابطه $S_1 = I/c_1$ و $S_2 = I/c_2$ ضرایب مقطع سطح مقطع عرضی می‌باشد. اگر مقطع عرضی نسبت به محور ۲ متقارن باشد در این صورت $c_1 = c_2 = c$ و سترهای کششی و فشاری ماکزیمم بطور عددی مساوی می‌باشند.

$$(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma_x)_{\min} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \quad (8-12)$$

در این رابطه ضریب مقطع برابر است با

$$S = \frac{I}{c} \quad (8-13)$$

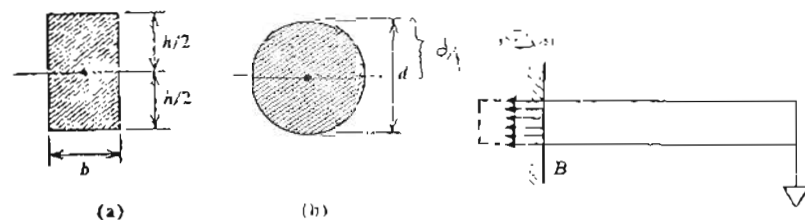
برای تیری به مقطع عرضی مستطیل به عرض b و ارتفاع مقطع h (شکل ۸-۵ a) گشتاور لختی و ضریب مقطع عبارتند از

$$I = \frac{bh^3}{12} ; S = \frac{bh^2}{6} \quad (8-14)$$

برای یک مقطع عرضی دایره‌ای به قطر d داریم (شکل ۸-۵ b)

$$I = \frac{\pi d^4}{64} ; S = \frac{\pi d^3}{32} \quad (8-15)$$

وزگی‌های شکل‌های مختلف مقاطع عرضی در پیوست ۱ کتاب داده شده‌اند.



شکل ۸-۵

شکل ۸-۶

تحلیل تنش‌های عمودی در تیرها که در بالا صورت گرفت بر اساس خمش حاصل قرار دارد که در آن نیروی برشی در مقطع اثر نمی‌کند. مقطع عرضی در انتزاعی‌ترین حالت باب خوردگی پیدا می‌کند بطوریکه مقاطع مسطح پس از خمش دیگر مسطح باقی نخواهند ماند. این تاب خوردگی تحلیل تنش‌ها را پیچیده می‌کند ولی تحلیل‌های دقیق‌تر نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن تنش‌های برشی و تاب خوردگی ناشی از آن در مقدار تنش‌های عمودی محاسبه شده از فرمول خمش ۸-۱۰ تغییر قابل توجهی حاصل نمی‌شود. بدین ترتیب استفاده از تئوری خمش خالص برای محاسبه تنش‌های عمودی حتی وقتی که خمش

۳۵۱

در طرح تیرها معمولاً چهار نکته زیر باید بررسی شود :

- الف - تیر باید مقاومت خمشی کافی برای تحمل لنگرهای خمشی داشته باشد.
- ب - تیر باید در مقابل نیروهای برشی مقاومت کافی داشته باشد.
- پ - تغییر شکل تیر نباید بیش از اندازه باشد.
- ت - تیر نباید به طور جانبی کمانه کند.

معمولاً تیرها ابتدا برای مقاومت خمشی طرح می گردند و سپس بررسی می شود که آیا از نقطه نظرهای دیگر نیز کفایت می کنند یا نه. از نقطه نظر مقاومت خمشی، ضریب مقطع لازم از رابطه زیر بدست می آید :

$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_w} \quad (8-16)$$

در این رابطه σ_w تنش عمودی مجاز و $M_{\max}$ ماکزیم لنگر خمشی می باشد. اگر σ_w برای کشش و فشار یکسان باشد منطقی است که مقطع عرضی تیر دارای دو محور تقارن و مرکز سطح مقطع عرضی در وسط ارتفاع تیر باشد. اگر تنش های مجاز در کشش و فشار متفاوت باشند ممکن است استفاده از یک مقطع نامتقارن مطلوب باشد بطوریکه فواصل دور ترین تارهای آن در کشش و فشار به همان نسبت تنش های مجاز مربوطه باشد. در موقع انتخاب یک مقطع عرضی معمولاً نه فقط ضریب مقطع در نظر گرفته می شود بلکه سعی می گردد مساحت سطح مقطع عرضی تیر نیز حداقل باشد تا وزن خود تیر حداقل گردد.

در موقع طرح تیرهای فولادی یا آلومینیومی معمولاً از کتاب های راهنما استفاده می شود که در آن انواع مقاطع استاندارد موجود با ابعاد و مشخصات وجود دارد. چند نمونه از جداول مقاطع استاندارد در پیوست ۲ کتاب آمده است.

حال بیایم شکل های مختلف مقاطع عرضی را با یکدیگر مقایسه کنیم. برای مستطیلی به عرض b و ارتفاع h (شکل ۸-۵ a) ضریب مقطع برابر است با

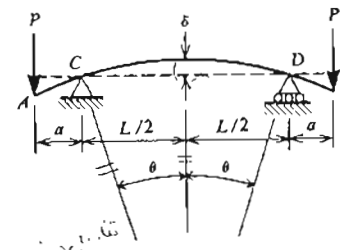
$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167 Ah \quad (8-17)$$

در این رابطه A مساحت سطح مقطع می باشد. از این معادله مشاهده می شود با افزایش هر چه بیشتر ارتفاع تیر مقطع اقتصادی تر می گردد. اما برای این افزایش محدودیت وجود دارد زیرا اگر مقطع خیلی باریک شود تیر بطور جانبی نا پایدار می گردد. یک تیر مستطیلی باریک ممکن است در اثر کمانش جانبی فرو بریزد نه در اثر عدم مقاومت کافی مصالح.

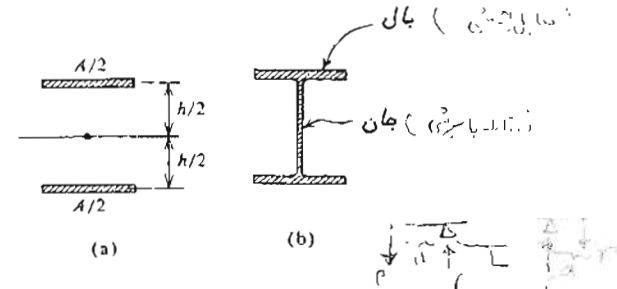
برای مقطع عرضی دایره ای داریم (شکل ۸-۵ b)

۳۵۰

ماکزیم تنش عمودی در تیر و تغییر مکان δ را در وسط تیر CD شکل ۸-۸ تعیین کنید. مقطع تیر دایره ای به قطر $d=25$ cm می باشد. همچنین فرض کنید $a=33.75$ cm ، $E = 2.1 \times 10^6$ Kg/cm² و $P = 13000$ Kg ، $L = 147.5$ cm



شکل ۸-۸



شکل ۸-۹

حل : قسمتی از تیر که بین دو تکیه گاه قرار دارد تحت خمش خالص یا لنگر خمشی

$$M = Pa = 13000 \times 33.75 = 438750 \text{ cmKg}$$

می باشد. بنابراین با استفاده از معادلات ۸-۱۲ و ۸-۱۵ تنش عمودی ماکزیم در

قسمت CD تیر برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{(438750)(32)}{\pi(25)^3} = 286 \text{ Kg/cm}^2$$

شعاع انحنا، قوس CD از معادله ۸-۹ بدست می آید.

$$\rho = \frac{EI}{M} = \frac{2.1(10)^6 \times \pi(25)^4}{438750 \times 64} = 91800 \text{ cm}$$

با توجه به شکل ۸-۸ تغییر مکان δ برابر است با

$$\delta = \rho(1 - \cos \theta)$$

در این رابطه θ زاویه کوچکی برابر $L/(2\rho) = 0.000805$ rad میباشد. برای زوایای

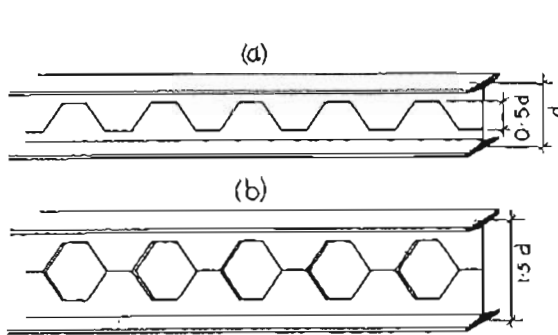
$$\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$$

$$\delta \approx \frac{\rho \theta^2}{2} = \frac{\rho L^2}{8\rho^2} = \frac{L^2}{8\rho} = \frac{147.5 \times 147.5}{8 \times 91800} = 0.0296 \text{ cm}$$

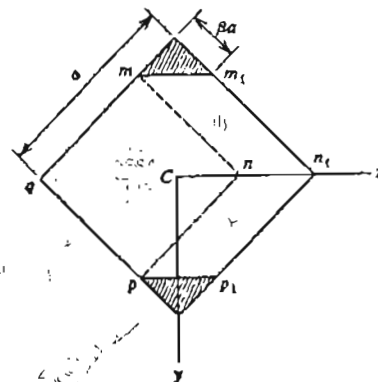
$$\rho = \frac{EI}{M}$$

۸-۲ طرح تیرها

۳۵۳



شکل ۸-۱۰



شکل ۸-۱۱

مثال ۸-۲

تیری با مقطع مربع در صفحه یکی از قطرهایش تحت خمش قرار دارد (شکل ۸-۱۱). نشان دهید که با بریدن گوشه‌های هاشور خورده مقطع، تنش عمودی ماکزیمم در تیر کاهش می‌یابد.

حل: با استفاده از پیوست ۱ کتاب، گشتاور لختی و ضریب مقطع تمام مربع حول

محور z عبارتند از

$$I_1 = \frac{a^4}{12} ; S_1 = \frac{\sqrt{2} a^3}{12}$$

a در این رابطه طول ضلع مربع می‌باشد. حال گوشه‌های مربع را می‌بریم بطوریکه طول هر یک از اضلاع به اندازه βa کاهش یابد (β عددی بین صفر و واحد است). مقطع عرضی جدید شامل مربع $mnpq$ به اضلاع $a(1-\beta)$ و دو متوازی الاضلاع mm_1n_1n و nn_1p_1p می‌باشد. گشتاور لختی این مقطع عرضی کاهش یافته نسبت به محور z برابر است با

$$I_2 = \frac{a^4(1-\beta)^4}{12} + \frac{2\beta a \sqrt{2}}{3} \left[\frac{a(1-\beta)}{\sqrt{2}} \right]^3 = \frac{a^4(1-\beta)^3(1+3\beta)}{12}$$

۳۵۲

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0.125 Ad \quad (8-18)$$

برای مقایسه دو مقطع عرضی دایره‌ای و مربعی هم مساحت مشاهده می‌کنیم که ضلع مربع برابر $h = d\sqrt{\pi}/2$ است و از معادله 8-17 برای مربع مرور داریم

$$S = 0.145 Ad$$

مقایسه این رابطه با معادله 8-18 نشان می‌دهد که مقطع مربع از مقطع دایره اقتصادی‌تر است.

بررسی توزیع تنش در ارتفاع مقطع عرضی ما را به این نتیجه هدایت می‌کند (شکل

۸-۴ a) که برای یک طرح اقتصادی شش مصالح تر باید حتی الامکان از محور خنثی دور باشد. مطلوب‌ترین حالت برای مقطع عرضی به مساحت A و ارتفاع h این است که مساحت مربوط به دو نیم شود و هر نیمه در فاصله $h/2$ از محور خنثی قرار گیرد (شکل ۸-۴ a) در این صورت داریم

$$I = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4} ; S = 0.5 Ah \quad (8-19)$$

در عمل با نگر بردن مقاطعی به شکل I می‌توان تا حدودی به این حالت ایده‌آل نزدیک شد (شکل ۸-۴ b). دو قسمت افقی مقطع موسوم به بال تیر و قسمت قائم مقطع موسوم به جان تیر می‌باشد. چون لارم است قسمتی از مصالح در جان تیر نگر رود به حالت حدی 8-19 هرگز نمی‌توان رسید. برای مقاطع I استاندارد داریم

$$S \approx 0.55 Ah \quad (8-20)$$

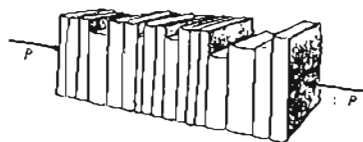
از مقایسه معادلات 8-20 و 8-17 می‌توان نتیجه گرفت که مقطع I خیلی اقتصادی‌تر از یک مقطع مستطیلی با مساحت و ارتفاع یکسان می‌باشد. از این بحث منحصر می‌توان به علت کار برد وسیع مقاطع I در سازه‌های فلزی پی برد.

برای استفاده حداکثر از مصالح، نیروی موسوم به نر لانه زسوری ابداع شده است. برای تولید این گونه نیرها جان یک سیر با مقطع I را مطابق شکل ۸-۱۰ a به کمک شعله می‌برند. سپس دو که تیر را از یکدیگر جدا می‌کند و مطابق شکل ۸-۱۰ b به یکدیگر جوش می‌دهد. بدین ترتیب بر ارتفاع مقطع تیر حدود 50 درصد اضافه می‌شود و مقاومت خمشی آن افزایش می‌یابد. در اثر این عمل تغییر شکل تیر کاهش می‌یابد. از مقاومت برشی تیر کاسته می‌شود ولی این نکته برای نیرهای با دهانه زیاد که خمشی برای آنها مهم‌ترین عامل است مهم نمی‌باشد. اما کاهش مقاومت برشی در سیرهای با دهانه کوتاه باید بررسی شود. این نوع نیرها برای دهانه‌های طویل با بار سبک بسیار مناسب

۳۵۵

با ساده ترین حالت که همان تیر با مقطع مستطیلی به عرض b و ارتفاع h می باشد (شکل ۸-۱۲) شروع می کنیم. طبیعی است برای این تیر فرض شود که تنش های برشی τ موازی نیروی برشی V یعنی موازی اضلاع قائم مقطع عرضی میباشند. همچنین فرض می کنیم توزیع تنش های برشی در عرض تیر یکنواخت باشد. با استفاده از این دو فرض می توانیم توزیع تنش های برشی در مقطع عرضی تیر را بطور کامل تعیین کنیم. عنصر کوچکی از تیر مانند mn را (شکل های ۸-۱۲ a و b) که بین دو مقطع عرضی مجاور هم و دو صفحه موازی سطح خنثی بریده شده در نظر می گیریم. در این صورت مطابق فرضیات بالا، تنش های برشی قائم τ با توزیع یکنواخت در وجه قائم این عنصر وجود دارد. بعلاوه بر اساس بحث بخش ۱-۴ تنش های برشی در روی چهار وجه یک عنصر با تنش های برشی مساوی در وجه عمود بر آن همراه می باشند. بنابراین در بین لایه های افقی تیر تنش های برشی افقی و در مقاطع عرضی قائم تنش های برشی قائم وجود دارد. این تنش های برشی مکمل در هر نقطه از تیر مقدار مساوی دارند. اگر عنصر mn در شکل ۸-۱۲ در بالا یا پایین تر انتخاب شود واضح است تنش های برشی افقی باید برابر صفر باشد زیرا در سطوح خارجی تیر اصولاً تنش وجود ندارد. بنابراین تنش برشی قائم τ در بالا و پایین ترین (در $y = \pm h/2$) باید برابر صفر باشد.

با تجربه زیر می توانیم وجود تنش های برشی قائم را در تیرها نشان دهیم. اگر بخواهیم یک ردیف کتاب را بلند کنیم (شکل ۸-۱۳) باید آنها را تحت فشار P قرار دهیم. در اثر این فشار بین کتاب ها اصطکاک ایجاد می شود و همین نیروهای اصطکاکی قائم است که از لغزش و افتادن کتاب ها در اثر وزنشان جلوگیری می کند. بنابراین تیری که در امتداد قائم بریده شده باشد قادر به تحمل نیروهای قائم نیست.



شکل ۸-۱۳

وجود تنش های برشی افقی در تیر را می توان با تجربه ساده ای نشان داد. دو تیر مستطیلی به ارتفاع h را در روی تکیه گاه های ساده (مطابق شکل ۸-۱۴ a) قرار دهید و بر روی آنها بار متمرکز P را وارد کنید. اگر بین تیرها اصطکاکی وجود نداشته باشد، خمش دو تیر به صورت مستقل صورت خواهد گرفت. هر یک از تیرها در

۳۵۴

ضریب مقطع مربوطه مساویست با

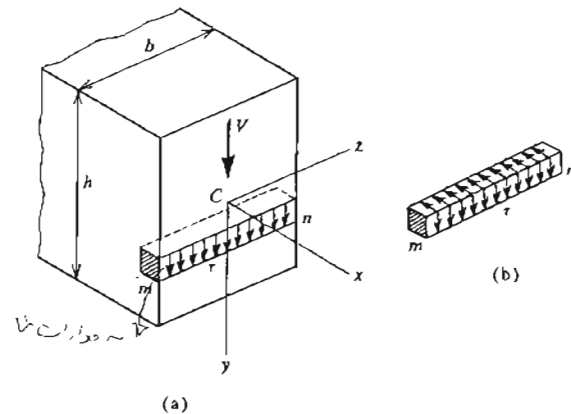
$$S_2 = \frac{I_2 \sqrt{2}}{a(1-\beta)} = \frac{\sqrt{2} a^3 (1-\beta)^2 (1+3\beta)}{12}$$

برای بدست آوردن ماکزیمم ضریب مقطع، مشتق عبارت فوق را نسبت به β مساوی صفر قرار می دهیم. در این صورت نتیجه می شود $\beta = 1/9$. با جایگزینی این مقدار β در معادله S_2 بدست می آوریم $S_{max} = 1.053 S_1$. بدین ترتیب مشاهده می کنیم با بریدن گوشه ها، ضریب مقطع تقریباً به اندازه ۵ درصد افزایش می یابد. در نتیجه تنش خمشی ماکزیمم به همان نسبت کاهش می یابد.

اگر توجه کنیم که ضریب مقطع نسبت گشتاور لختی به نصف ارتفاع مقطع عرضی می باشد نتیجه فوق به سهولت قابل درک است. با بریدن گوشه ها، گشتاور لختی مقطع نسبت به ارتفاع مقطع به مقدار کمتری کاهش می یابد. در نتیجه ضریب مقطع افزایش پیدا می کند.

۸-۳ تنش های برشی در تیرهای با مقطع مستطیل

در فصل قبل مشاهده کردیم وقتی تیری تحت تأثیر بارهای جانبی قرار دارد در هر مقطع عرضی آن لنگر خمشی M و نیروی برشی V اثر می کند. در بخش ۸-۱ توزیع تنش های عمودی ناشی از لنگر خمشی را تعیین کردیم و در این بخش توزیع تنش های برشی را بررسی می کنیم.



شکل ۸-۱۲

۳۵۷

اگر لنگرهای خمشی در مقاطع عرضی m_n و m_1 مساوی باشند (یعنی اگر تیر در خمش خالص باشد)، تنش‌های عمودی σ_x در اضلاع np و n_1p_1 نیز برابر خواهند بود. در نتیجه عنصر مزبور در حال تعادل خواهد بود و تنش برشی τ باید برابر صفر باشد. در حالت عمومی تر که لنگر خمشی در طول تیر تغییر میکند، لنگرهای خمشی در مقاطع عرضی m_n و m_1 را به ترتیب با M و $M + dM$ نشان می‌دهیم. نیروی عمودی بر روی مساحت dA در وجه انتهای چپ عنصر برابر است با (معادله 8-10)

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I} dA$$

مجموع تمام این نیروهای کوچک که در وجه pn توزیع شده‌اند مساوی است با

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA \quad (8-21)$$

به همین ترتیب مجموع نیروهای عمودی در وجه p_1n_1 برابر است با

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I} dA \quad (8-22)$$

نیروی برشی افقی در وجه فوقانی pp_1 نیز مساوی است با

$$\tau b dx = \tau b dx \quad (8-23)$$

نیروهایی که بوسیله معادلات 8-21 تا 8-23 معین می‌شوند باید در تعادل باشند، بنابراین

$$\tau b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{h/2} \frac{My}{I} dA$$

تنش برشی τ از رابطه فوق بدست می‌آید.

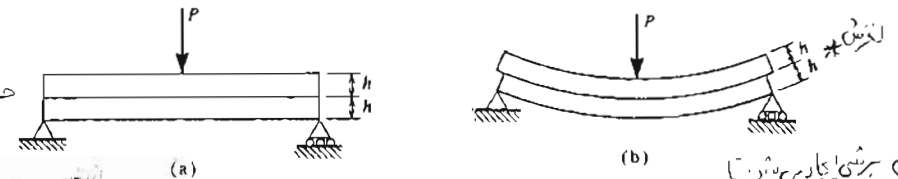
$$\tau \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{Ib} \right) \int_{y_1}^{h/2} y dA = \frac{1}{Ib} \int_{y_1}^{h/2} y dA \quad (8-24)$$

انتگرال در این رابطه برابر با گشتاور اول سطحی از مقطع عرضی که در زیر تراز y_1 قرار دارد حول محور خمشی z می‌باشد. در مواقعی که y_1 در بالای محور خمشی اندازه گرفته می‌شود، انتگرال مزبور برابر با گشتاور اول سطحی که در بالای تراز y_1 قرار دارد حول محور خمشی z خواهد بود. اگر این انتگرال را با Q نشان دهیم، معادله 8-24 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \quad (8-25)$$

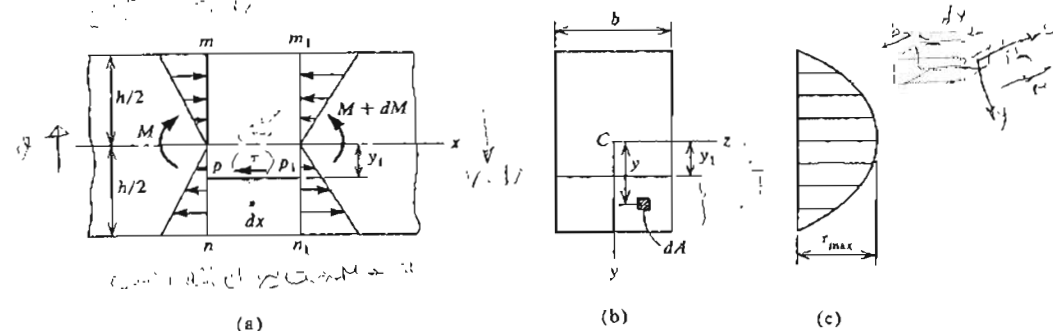
۳۵۶

قسمت فوقانی تحت فشار و در قسمت تحتانی تحت کشش قرار خواهد گرفت و به صورت شکل ۸-۱۴b تغییر شکل خواهد داد. تارهای طولی تحتانی تیر فوقانی نسبت به تارهای فوقانی تیر تحتانی خواهند لغزید. اگر به جای دو تیر تیری به ارتفاع $2h$ داشته باشیم، در طول سطح خمشی باید تنش‌های برشی ایجاد شود تا از لغزش نشان داده شده در شکل ۸-۱۴b جلوگیری شود. چون از این لغزش جلوگیری به عمل می‌آید، یک تیر به ارتفاع $2h$ خیلی سخت تر و قوی تر از دو تیر جداگانه به ارتفاع h می‌باشد.



شکل ۸-۱۴ تنش برشی در تیر. (a) تنش برشی در تیرهای جداگانه، (b) تنش برشی در تیر یکپارچه.

قبلاً نشان دادیم که تنش برشی قائم τ در هر نقطه از مقطع عرضی بطور عددی برابر با تنش برشی افقی در همان نقطه می‌باشد. تنش برشی افقی را می‌توان از تعادل عنصر pnm_1p_1 (شکل ۸-۱۵a) که از دو مقطع عرضی مجاور m_n و m_1 تیر فاصله dx از یکدیگر بریده شده است محاسبه نمود. وجه تحتانی این عنصر منطبق بر سطح تحتانی تیر و بدون تنش می‌باشد. وجه فوقانی عنصر مزبور موازی سطح خمشی و در فاصله اختیاری y_1 از سطح خمشی قرار دارد. تنش برشی افقی τ بر وجه فوقانی عنصر اثر می‌کند. بر وجههای قائم عنصر تنش‌های عمودی σ_x ناشی از لنگرهای خمشی وارد می‌شود. تنش‌های برشی قائم نیز بر وجههای قائم اثر می‌کند. ولی این تنش‌ها در معادله تعادل عنصر در امتداد افق (امتداد x) وارد نمی‌شوند و از این رو در شکل ۸-۱۵a نشان داده نشده‌اند.



شکل ۸-۱۵ تنش‌های برشی در تیر با مقطع مستطیل

۳۵۹

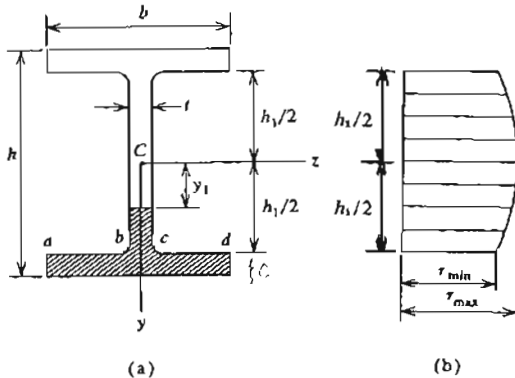
خمش عمود بر سطوح فوقانی و تحتانی تیر بافی می‌مانند. زوایای بین مماس‌های بر منحنی‌های m_1n_1 و p_1q_1 در سطح خمشی و مقاطع عمودی mn و pq برابر با کرنش برشی $\gamma = \tau_{max}/G$ می‌باشد. موقعی که نیروی برشی V در طول تیر ثابت است، تاب خوردگی همه مقاطع عرضی یکسان می‌باشد بطوریکه $m_1m = p_1p$ و $n_1n = q_1q$. در نتیجه کرنش‌های برشی در روی کوتاه شدن یا دراز شدن تارهای طولی در اثر لنگر خمشی تأثیری ندارند، و توزیع تنش‌های عمودی σ همان توزیع تنش‌های عمودی در حالت خمش خالص است.

بررسی‌های دقیق‌تر در روی این مسئله نشان می‌دهد حتی در حالت بار گسترده در روی تیر که در آن صورت نیروی برشی بطور پیوسته در طول تیر تغییر می‌کند، تاب خوردگی مقاطع عرضی در اثر کرنش‌های برشی در روی کرنش‌های طولی تأثیر زیادی ندارد. در حالت بارهای متمرکز، توزیع تنش در مجاورت بارها پیچیده‌تر است ولی این بی‌قاعدگی‌ها خیلی موضعی بوده و در روی توزیع کلی تنش در تیر تأثیر قابل ملاحظه‌ای ندارند. از این جهت استفاده از فرمول خمش 8-10 که برای خمش خالص بدست آمد برای خمش غیر یکنواخت کاملاً قابل قبول است.



۴-۸ تنش‌های برشی در جان تیرهای I

برای بدست آوردن تنش‌های برشی در جان یک تیر I (تیری که مقطع عرضی آن به شکل I می‌باشد) همان فرضیاتی را می‌کنیم که برای تیرهای مستطیلی کردیم، یعنی تنش‌های برشی τ موازی محور y هستند و در روی ضخامت t جان تیر (شکل ۱۷-۸)



شکل ۱۷-۸

۳۵۸

برای اینکه تغییرات τ را با فاصله y_1 از محور خمشی تعیین کنیم باید V ، I و b را ثابت فرض کنیم و تغییرات Q را نسبت به y_1 بررسی کنیم.

کمیت Q برای مقطع عرضی مستطیلی شکل b ۱۵-۸ برابر است با

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (8-26)$$

در این رابطه Q از ضرب نمودن مساحت سطح زیر تراز y_1 (سطح سایه دار) در فاصله مرکز سطح از محور z بدست آمده است. حال با جایگزینی معادله 8-26 در معادله 8-25 حاصل می‌شود

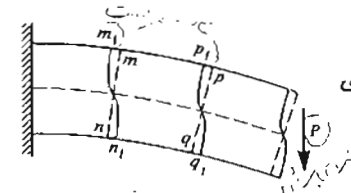
$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (8-27)$$

این معادله نشان می‌دهد تغییرات تنش برشی با y_1 بصورت یک سهمی می‌باشد (شکل ۸-۱۵ c). تنش برشی در $y_1 = \pm h/2$ برابر صفر و در محل محور خمشی ($y_1 = 0$) ماکزیمم می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A} \quad (8-28)$$

در این رابطه $A = bh$ مساحت مقطع عرضی می‌باشد. بدین ترتیب تنش برشی ماکزیمم (افقی یا قائم) 50 درصد از V/A ، تنش برشی متوسط، بیشتر است.

چون تنش برشی τ از بالا تا پایین تیر به صورت یک سهمی تغییر می‌کند کرنش برشی $\gamma = \tau/G$ نیز باید به همین ترتیب تغییر کند. در نتیجه مقاطع عرضی تیر که در ابتدا مسطح بودند تاب خوردگی پیدا می‌کنند. این تاب خوردگی را می‌توان با خم نمودن یک تیر طره‌ای بوسیله بار متمرکز P در انتهای آزاد آن نشان داد (شکل ۱۶-۸). مقاطع pq و m_1n_1 بعد از تغییر شکل مسطح باقی نمی‌مانند بلکه به صورت سطوح منحنی p_1q_1 و m_1n_1 در می‌آیند بطوریکه ماکزیمم کرنش برشی در سطح خمشی اتفاق می‌افتد. در نقاط p_1 ، q_1 ، n_1 و m_1 کرنش برشی برابر صفر و منحنی‌های p_1q_1 و m_1n_1 بعد از



شکل ۱۶-۸ تاب خوردگی مقاطع عرضی یک تیر در اثر نیروی برشی

۳۶۰

بطور یکنواخت توزیع شده است. در این صورت معادله 8-25 را می توان برای محاسبه تنش های برشی بکار برد. نقطه ای به فاصله y_1 از محور خنثی را در نظر می گیریم، گشتاور اول قسمت سایه دار مقطع عرضی نسبت به محور خنثی برابر است با

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right)$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right)$$

بنابراین تنش برشی τ در جان تیر مساویست با

$$\tau = \frac{V}{It} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right] \quad (8-29)$$

از این معادله مشاهده می کنیم که τ در ارتفاع جان تیر به صورت سهمی تغییر می کند. تنش برشی ماکزیمم در محور خنثی ($y_1 = 0$) و تنش برشی مینیمم در جان تیر در $y_1 = \pm h_1/2$ می باشد.

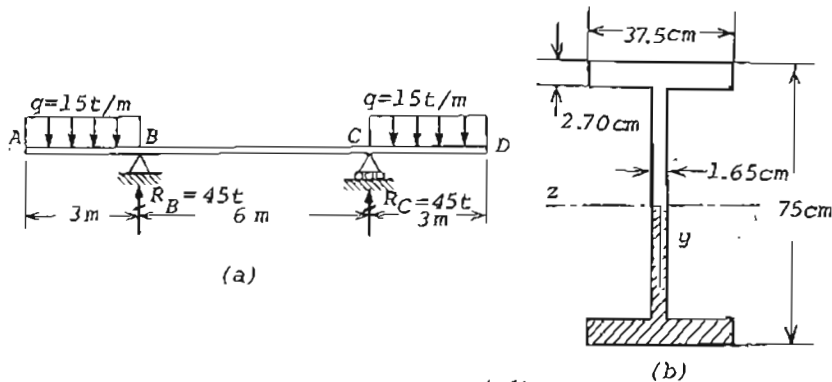
$$\tau_{\max} = \frac{V}{It} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} + \frac{th_1^2}{8} \right); \quad \tau_{\min} = \frac{V}{It} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right) \quad (8-30)$$

ضخامت t جان در مقایسه با b معمولاً خیلی کوچک است. از این جهت فرق زیادی بین $\tau_{\max}$ و $\tau_{\min}$ وجود ندارد و توزیع تنش های برشی در مقطع عرضی جان تیر تقریباً یکنواخت است. بنابراین $\tau_{\max}$ با تقسیم نمودن نیروی برشی کل V بر مساحت مقطع عرضی جان تیر ($h_1 t$) با تقریب خوب بدست می آید. جان تیر تقریباً تمام نیروی برشی را می گیرد و بال ها قسمت خیلی کمی از نیروی برشی را حمل می کنند. در مطالعه توزیع تنش های برشی در بال های تیر نمی توان تنش برشی را در عرض بال ثابت فرض نمود. برای مثال در $y_1 = h_1/2$ تنش برشی در سطوح آزاد ab و cd (شکل ۱۷a) باید برابر صفر باشد و حال آنکه تنش در محل اتصال bc از معادله 8-30 بدست می آید. تحلیل توزیع تنش های برشی در محل اتصال جان و بال پیچیده می باشد و با یک تحلیل مقدماتی بدست نمی آید. برای اینکه از تمرکز تنش در نقاط b و c جلوگیری شود، اتصال جان به بال ها مطابق شکل ۱۷a - ۸ با قوس صورت می گیرد.

مثال ۸-۳

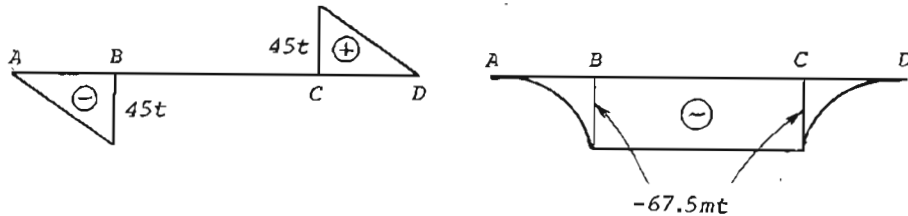
۳۶۱

حداکثر تنش های عمودی و برشی را در تیر شکل ۸-۱۸ که مقطع عرضی آن در شکل ۸-۱۸b نشان داده شده است پیدا کنید. جنس تیر فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.



شکل ۸-۱۸

حل: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر به ترتیب در شکل های ۸-۱۹ و ۸-۲۰ رسم شده است. حداکثر لنگر خمشی در طول تیر $M_{\max} = 67.5 \text{ mt}$ می باشد.



شکل ۸-۱۹

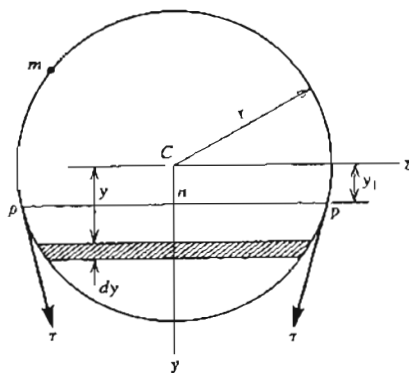
شکل ۸-۲۰

برای تعیین تنش عمودی ماکزیمم ابتدا باید گشتاور لختی سطح مقطع را نسبت به محور خنثی پیدا کنیم. سطح مذکور را مرکب از سه سطح مستطیلی (دو بال و یک جان) در نظر می گیریم.

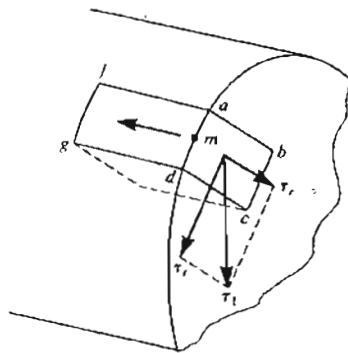
$$I_z = \frac{1}{12} (1.65)(75-5.4)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} (37.5)(2.7)^3 + (2.7)(37.5)(37.5-1.35)^2 \right]$$

$$= 311113 \text{ cm}^4$$

۲۶۳



(a)



(b)

شکل ۸-۲۱

در فاصله y_1 از محور خنثی بکار می‌بریم. تنش‌های برشی τ در دو انتهای وتر باید مطابق شکل مماس بر سرحد مقطع عرضی باشد. تنش برشی در نقطه میانی n وتر بعلت تقارن باید در امتداد محور y باشد. امتدادهای تنش‌های برشی در نقاط p و n یکدیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور y قطع می‌کنند. با فرض اینکه امتداد تنش برشی در هر نقطه دیگر واقع بر خط pp از نقطه تقاطع مزبور عبور کند، امتدادهای تنش‌های برشی کاملاً مشخص خواهد بود.

برای بدست آوردن تنش‌های برشی فرض دیگری می‌کنیم و آن اینکه مؤلفه‌های قائم تنش‌های برشی برای تمام نقاط واقع بر خط pp مساوی می‌باشند. چون این فرض کاملاً منطبق بر فرضی است که برای مقاطع عرضی مستطیلی کردیم، برای محاسبه مؤلفه قائم تنش‌های برشی می‌توانیم از رابطه ۸-۲۵ استفاده کنیم. در این صورت مقدار b در این رابطه طول وتر pp می‌باشد. با دانستن امتداد تنش برشی و مؤلفه قائم آن مقدار آن را می‌توان برای هر نقطه مقطع عرضی حساب نمود.

حال تنش‌های برشی را در طول خط pp مقطع عرضی (شکل ۸-۲۱ a) حساب می‌کنیم. در موقع استفاده از رابطه ۸-۲۵ برای محاسبه مؤلفه قائم τ_y تنش‌های برشی باید گشتاور اول قسمتی از سطح دایره را که در زیر خط pp قرار دارد نسبت به محور z حساب کنیم. سطح کوچکی که در شکل ۸-۲۱ a هاشور خورده است به طول $2\sqrt{r^2 - y^2}$ و عرض dy می‌باشد (شعاع دایره است) و مساحت آن $dA = 2\sqrt{r^2 - y^2}dy$ است.

۲۶۲

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C}{I_z} = \frac{(67.5)(10^5)(37.5)}{311113} = 813.61 \text{ Kg/cm}^2$$

حداکثر نیروی برشی در طول تیر $V_{\max} = 45 \text{ t}$ می‌باشد. برای تعیین تنش برشی ماکزیمم ابتدا باید گشتاور اول سطح هاشور خورده را حول محور خنثی حساب کنیم زیرا تنش برشی در محل محور خنثی حداکثر می‌باشد.

$$Q = \int y dA = (37.5)(2.7)(37.5 - 1.35) + (1.65)(37.5 - 2.7)^2 / 2 = 4659.3 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} Q}{I_z b} = \frac{(45000)(4659.3)}{(311113)(1.65)} = 408.44 \text{ Kg/cm}^2$$

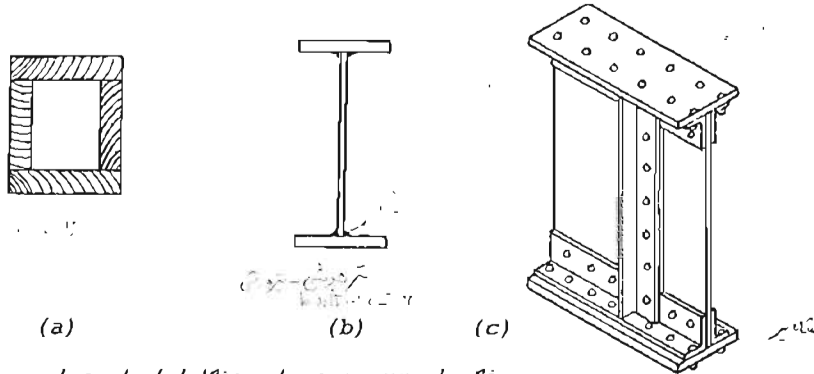
b در رابطه فوق عرض تیر در محل محور خنثی می‌باشد که برابر است با 1.65 cm .

۸-۵ تنش‌های برشی در تیرهای با مقطع عرضی دایره

برای تیرهای با مقطع عرضی دایره (شکل ۸-۲۱ a) دیگر نمی‌توان فرض نمود که تنش‌های برشی در مقطع تیر موازی محور y می‌باشد. در واقع به سهولت می‌توان نشان داد که تنش برشی در نقطه‌ای مانند m در روی سرحد مقطع عرضی (شکل ۸-۲۱ a) باید بر دایره مماس باشد. عنصر بی‌نهایت کوچک $abcd$ (شکل ۸-۲۱ b) به شکل مکعب مستطیل را که وجه $adgf$ آن در سطح خارجی تیر و وجه $abcd$ آن در صفحه مقطع عرضی قرار دارد در نظر می‌گیریم. اگر تنش برشی در وجه $abcd$ عنصر مزبور جهت غیر مشخص τ_1 (مطابق شکل ۸-۲۱ b) داشته باشد می‌توان آن را به دو مؤلفه τ_x در امتداد شعاع دایره و τ_y در امتداد مماس بر دایره سرحدی تجزیه نمود. قبلاً مشاهده کردیم (با مطالعه تعادل یک عنصر) که اگر تنش برشی τ بر یک وجه عنصر عمل کند تنش برشی مساوی با آن (بطور عددی) نیز باید بر وجه عمود بر وجه مزبور اثر کند. اگر این نکته را در مورد عنصر شکل ۸-۲۱ b بکار ببریم فوراً نتیجه می‌شود که تنش برشی τ_y باید برابر صفر باشد زیرا در سطح خارجی تیر تنش وجود ندارد. بنابراین تنش τ_1 در امتداد مماس بر سرحد مقطع عرضی تیر اثر می‌کند. حال نتیجه فوق را برای بررسی تنش‌های برشی در طول وتر pp (شکل ۸-۲۱ a)

۳۶۵

استفاده از تیرهای متشکل از اجزای متصل بهم در بسیاری از انواع سازه‌ها مطلوب است. به مثال از این نوع تیرها در شکل ۸-۲۲ مشاهده می‌شود. مثال اول یک تیر صندوقی متشکل از چهار الوار چوبی است که بوسیله میخ، پیچ و یا چسب به یکدیگر متصل



شکل ۸-۲۲ تیرهای متشکل از اجزای متصل بهم شده‌اند. مثال دوم شاه تیری است که با جوش دادن سه ورق فولادی ساخته شده است. مثال سوم سیز یک شاه تیر فولادی است که با متصل کردن مقاطع نبشی به ورق‌ها بوسیله پرچ ساخته شده است. تنش‌ها در تیرهای متشکل از اجزای متصل بهم معمولاً با این فرض محاسبه می‌شود که اجزای مختلف کاملاً به یکدیگر متصل می‌باشند بطوریکه تیر مانند یک تیر یک پارچه عمل می‌کند. محاسبه این نوع تیرها شامل دو مرحله می‌باشد. مرحله اول طرح خود تیر مانند یک تیر یک پارچه و مرحله دوم طرح عناصر متصل کننده (میخ‌ها، جوش‌ها، پرچ‌ها و غیره) می‌باشد بطوریکه تیر به صورت یک پارچه عمل کند. از فرمول‌های معمولی تیرها برای طرح خود تیر می‌توان استفاده نمود، البته مساحت سوراخ‌های پرچ‌ها را باید از مساحت مقطع عرضی تیر کم نمود. طرح عناصر متصل کننده تیر براساس نیروی برشی افقی کلی که بین قسمت‌های مختلف تیر باید منتقل شود قرار دارد.

مثال ۴-۸

تیری در دو انتها دارای تکیه گاه ساده و با دهانه $L = 1.8 \text{ m}$ می‌باشد. مقطع عرضی تیر مطابق شکل ۸-۲۳a است. تیر بار متمرکز قائم P را در وسط دهانه تحمل می‌کند. تنش مجاز در خمش $\sigma_w = 70 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد. فاصله مناسب e بین پیچ‌ها را تعیین کنید. هر یک از پیچ‌ها قادر به انتقال نیروی برشی $F = 280 \text{ Kg}$ می‌باشد.

۳۶۴

گشتاور اول نوار هاشور خورده حول محور خنثی برابر $y dA$ و گشتاور اول کل Q برای تمام قطعه مساویست با

$$Q = \int_{y_1}^r 2y \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}$$

با جایگزینی نتیجه فوق و همچنین $b = 2\sqrt{r^2 - y_1^2}$ در معادله 8-25، مولفه قائم تنش برشی بدست می‌آید.

$$\tau_y = \frac{V(r^2 - y_1^2)}{3I} \quad (8-31)$$

تنش برشی کل در نقاط سرحدی (مانند p) برابر است با

$$\tau = \frac{\tau_y r}{\sqrt{r^2 - y_1^2}} = \frac{V r \sqrt{r^2 - y_1^2}}{3I} \quad (8-32)$$

از این معادله مشاهده می‌شود ماکزیم تنش برشی τ در $y_1 = 0$ (محل محور خنثی مقطع عرضی) می‌باشد. پس از جایگزینی $I = \pi r^4 / 4$ حاصل می‌شود

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A} \quad (8-33)$$

این معادله نشان می‌دهد ماکزیم تنش برشی در یک مقطع عرضی دایره‌ای یک سوم بیشتر از مقدار متوسطی است که از تقسیم نمودن نیروی برشی بر مساحت مقطع عرضی بدست می‌آید. تنش‌های برشی τ در محل محور خنثی موازی محور y و با بزرگی یکسان می‌باشند، از این رو آنها را می‌توان مستقیماً از معادله 8-25 بدست آورد.

تئوری تقریبی مورد بحث در بالا برای محاسبه تنش‌های برشی در تیرهای دایره‌ای توپر با تقریب خوب جواب می‌دهد. مقایسه این تئوری با تئوری دقیق بر اساس تئوری ارتجاعی (مرجع 26) نشان می‌دهد که خطای محاسباتی فقط چند درصد است.

موقعی که تیر دارای مقطع دایره‌ای تو خالی جدار نازک می‌باشد، با تقریب خوب می‌توان فرض نمود که تنش‌های برشی در محل محور خنثی در ضخامت لوله بطور یکنواخت توزیع شده‌اند. در نتیجه برای محاسبه تنش‌های برشی ماکزیم می‌توان از معادله 8-25 استفاده نمود.

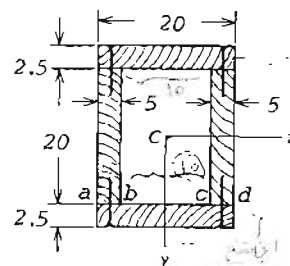
✓ ۸-۶ تیرهای متشکل از اجزای متصل بهم

با استفاده از معادلات $\sigma = My/I$ و $\tau = VQ/Ib$ می‌توانیم تنش‌های عمودی و برشی را در هر نقطه از مقطع عرضی تیر تعیین کنیم. تنش عمودی در لبه‌های خارجی تیر ماکزیمم و در محل محور خنثی صفر است. تنش برشی در لبه‌های خارجی تیر برابر صفر می‌باشد و معمولاً در محل محور خنثی به حد ماکزیمم می‌رسد. برای تحلیل کامل تر تنش‌ها در تیر باید اثر نواح این تنش‌های برشی و عمودی را در نظر بگیریم. به ویژه با روش‌های مورد بحث در فصل پنجم می‌توانیم تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم را در هر نقطه از تیر حساب کنیم.

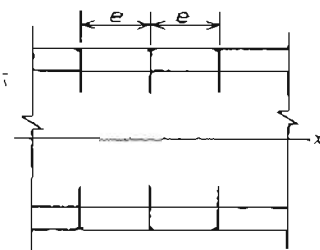
برای اینکه ببینیم چگونه بزرگی و امتداد تنش‌های اصلی در تیر تغییر می‌کند، ابتدا حالت تنش را در تیری با مقطع عرضی مستطیل (شکل a-۲۴) بررسی می‌کنیم. پنج نقطه A، B، C، D و E در مقطع عرضی انتخاب شده‌اند. نقاط A و E به ترتیب در سطوح فوقانی و تحتانی تیر قرار دارند و نقطه C در وسط ارتفاع تیر می‌باشد. اگر لنگر خمشی M و نیروی برشی V در مقطع عرضی معلوم باشند، تنش‌ها را در هر یک از نقاط مزبور می‌توان تعیین نمود. این تنش‌ها را می‌توان در روی عنصرهای کوچکی که از تیر بریده شده‌اند نشان داد (شکل b-۲۴). برای بدست آوردن تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم می‌توان از معادلات تنش سطح (بخش ۶-۵) و یا از دایره موهر (بخش ۷-۵) استفاده نمود. امتدادهای تنش‌های اصلی در هر یک از نقاط به طور تقریبی در شکل ۸-۲۴c و تنش‌های برشی ماکزیمم در شکل ۸-۲۴d رسم شده است.

چگونگی تغییرات تنش‌های اصلی در شکل ۸-۲۴c مشاهده می‌شود. تنش فشاری اصلی در بالای تیر در امتداد افق اثر می‌کند. با نزدیک شدن به محور خنثی، تنش فشاری اصلی نسبت به افق مایل می‌شود تا اینکه در محور خنثی (نقطه C) در امتداد 45° نسبت به افق اثر می‌کند. تنش فشاری اصلی با نزدیک شدن به قسمت تحتانی تیر به امتداد قائم نزدیک می‌شود. مقدار این تنش بطور پیوسته از بالا تا پایین تیر تغییر می‌کند تا اینکه در نقطه E برابر صفر می‌شود. مقدار عددی ماکزیمم این تنش در یک تیر مستطیلی معمولاً در نقطه A رخ می‌دهد، هر چند که این ماکزیمم ممکن است در داخل تیر در نقطه‌ای مانند B اتفاق افتد. ملاحظات مشابهی را در مورد تنش اصلی کششی می‌توان ذکر نمود. این تنش نیز بطور پیوسته از A تا E تغییر می‌کند.

با بررسی تنش‌ها در تعداد زیادی از مقاطع عرضی تیر می‌توان تصویر کاملی از



(a)



(b)

شکل ۲۳-۸

حل: گشتاور لختی مقطع عرضی نسبت به محور خنثی برابر است با

$$I = \frac{(10)(20)^3}{12} + 2 \left[\frac{(20)(2.5)^3}{12} + (20)(2.5)(11.25)^2 \right] = 19378 \text{ cm}^4$$

ضریب مقطع مربوطه مساویست با

$$S = \frac{I}{c} = \frac{19378}{12.5} = 1550 \text{ cm}^3$$

با استفاده از رابطه 8-12 می‌توانیم بنویسیم

$$\sigma_w = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{P \times 180}{4 \times 1550} = 70 \text{ Kg/cm}^2$$

از این رابطه $P = 2410 \text{ Kg}$ بدست می‌آید. نیروی برشی در هر یک از مقاطع عرضی تیر

$$V = \frac{P}{2} = 1205 \text{ Kg}$$

تنش برشی در محل اتصال ab و cd مقطع تیر (شکل a-۲۳) از معادله 8-25 بدست می‌آید.

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(1205)(20)(2.5)(11.25)}{(19378)(10)} = 3.5 \text{ Kg/cm}^2$$

نیروی برشی افقی F که بوسیله هر یک از پیچ‌ها منتقل می‌شود برابر است با

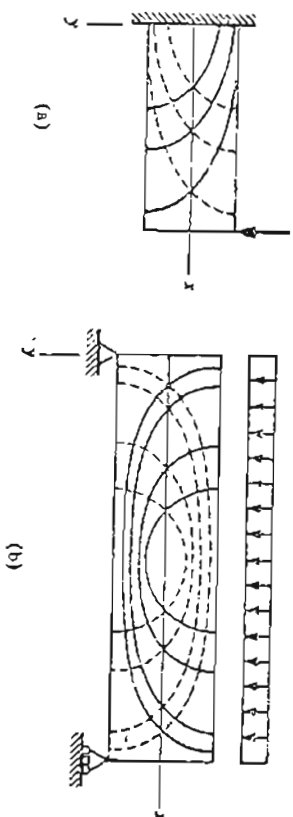
$$F = (10/2)(e\tau)$$

فاصله مناسب بین پیچ‌ها از رابطه فوق بدست می‌آید.

$$e = \frac{F}{5\tau} = \frac{280}{(5)(3.5)} = 16 \text{ cm}$$

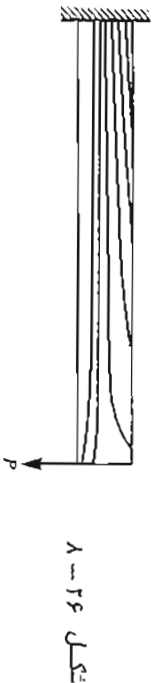
۳۶۹

را برای یک تیر طره‌ای با مقطع عرضی مستطیل که تحت اثر بار متمرکزی در انتهای آزادش می‌باشد نشان می‌دهد. در این شکل، خطوط پر برای تنش‌های اصلی کششی و خطوط منقطع برای تنش‌های اصلی فشاری می‌باشند. دو دسته منحنی‌ها یکدیگر را با زاویه قائمه و تمام منحنی‌ها محور خنثی را با زاویه 45° قطع می‌کنند. در سطوح افقی و عمودی تیر که در روی آنها تنش برشی صفر است، مماس بر منحنی‌های مسیر تنش افقی یا قائم می‌باشد. منحنی‌های مسیر تنش برای تیر ساده با مقطع عرضی مستطیل تحت اثر بار متمرکز به شکل b-۲۵-۸ رسم شده است.



شکل ۸-۲۵ منحنی‌های مسیر تنش‌های اصلی

بعضی از مواقع منحنی‌های دیگری برای نشان دادن تغییرات تنش‌ها در یک تیر رسم می‌شود که موسوم به منحنی‌های هم تنش می‌باشند. این منحنی‌ها تقاطعی را که دارای تنش اصلی مساوی هستند به یکدیگر وصل می‌کنند. یک نمونه از این منحنی‌ها برای یک تیر طره‌ای با مقطع مربع مستطیل که در انتهای آزادش تحت اثر بار متمرکز P می‌باشد در شکل ۸-۲۶ مشاهده می‌شود. منحنی‌های این شکل فقط برای تنش‌های اصلی کششی رسم شده‌اند.

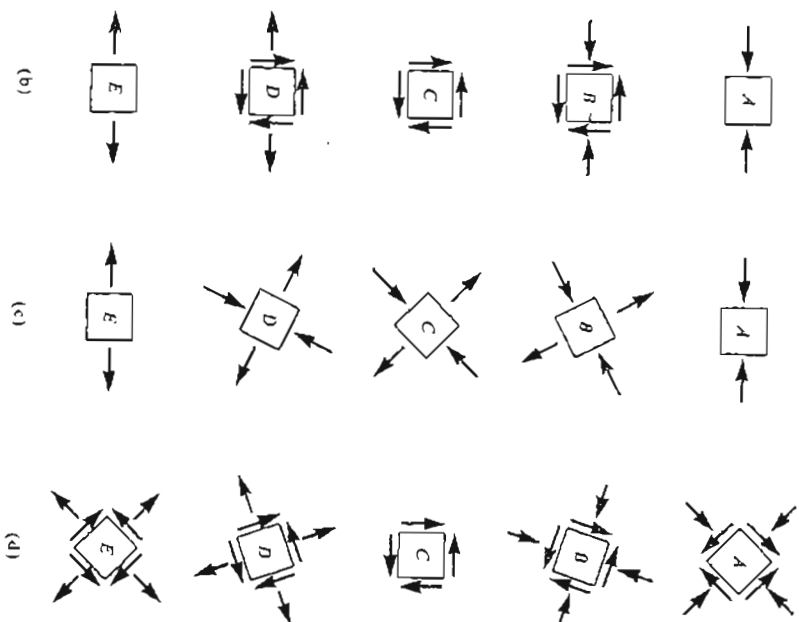
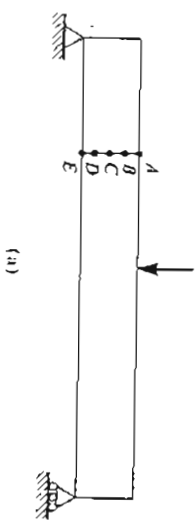


شکل ۸-۲۶

تنش‌های اصلی در تیرهای با مقاطع عرضی دیگر را می‌توان با همان ترتیب بالا تحلیل نمود. در تیرهای I با وجود اینکه بیشترین تنش معمولاً در لبه خارجی تیر رخ می‌دهد، ماکزیمم تنش اصلی در این تیرها ممکن است در جان تیر در محل اتصال آن با بال رخ دهد. تنش برشی ماکزیمم معمولاً در محل محور خنثی اتفاق می‌افتد ولی در

۳۶۸

چگونگی تغییرات تنش‌های اصلی بدست آورد. با استعاده از این اطلاعات می‌توان دو دسته منحنی عمود بر هم موسوم به منحنی‌های "مسیر تنش" رسم نمود. مماس بر این منحنی‌ها ابتدای تنش‌های اصلی را می‌دهد. شکل ۸-۲۵ a-۸ منحنی‌های مسیر تنش



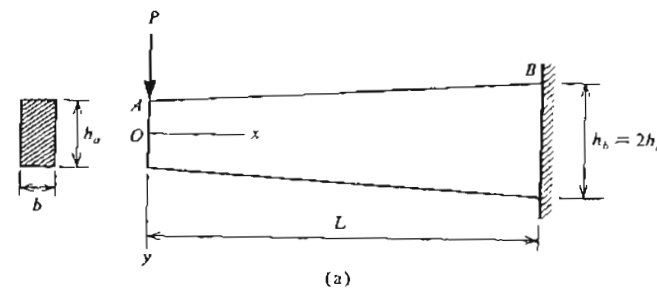
شکل ۸-۲۶ تنش‌ها در تیری با مقطع عرضی مستطیل

۲۷۰

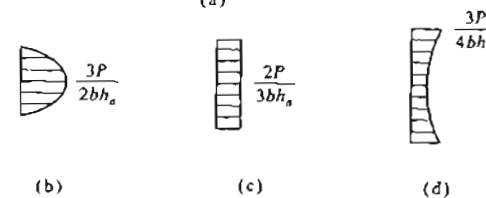
شرایط استثنائی بار گذاری ممکن است در بالا یا زیر محور خشی رخ دهد . در موقع تعیین تنش‌های ماکزیمم در تیرها همواره باید به خاطر داشت که در مجاورت تکیه گاههای تیر و نقاط اثر بارهای متمرکز و همچنین در جایی که تغییرات ناکهانی در شکل وجود دارد تنش‌های زیادی بطور موضعی ایجاد می‌شود که مقدار آنها را نمی توان با فرمول‌های متداول تیرها بدست آورد . این تنش‌های موضعی به تمرکز تنش موسوم می باشند .

۸-۸ تنش‌ها در تیرهای غیر منشوری

تا کنون در مطالعه تنش‌ها در تیرها فرض بر این بود که تیرها منشوری باشند ، به عبارت دیگر در تمام طولشان دارای مقطع عرضی ثابت باشند . اگر تغییرات در ابعاد مقطع عرضی خیلی تدریجی باشد با تقریب خود می‌توان از فرمول‌های تیرهای منشوری استفاده نمود . برای مثال تنش‌های عمودی ناشی از خمش را در تیر شکل ۸-۲۷ a که سطوح فوقانی و تحتانی آن دارای شیب کمی است می‌توان از معادله $\sigma = My/I$ به دست آورد . اگر شیب سطوح فوقانی و تحتانی کم باشد خطای محاسبه بیش از چند درصد نخواهد بود (بعداً با مقایسه با نتایج دقیق این نکته را نشان خواهیم داد) .

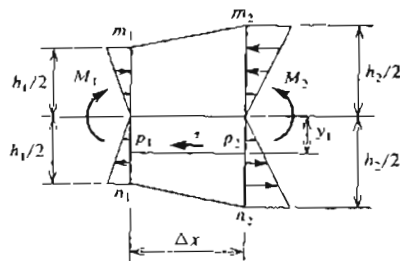


شکل ۸-۲۷



اما فرمول $\tau = VQ/Ib$ که برای یک تیر منشوری بدست آمد برای تنش‌های برشی

کفایت نمی‌کند و ما باید رابطه جدیدی بدست آوریم که در آن اثر تغییر ارتفاع تیر سیر داخل شود . برای این کار عنصر کوچکی از تیر به طول Δx را از تیر غیر منشوری مطابق شکل ۸-۲۸ a می‌گیریم . در وجه چپ $m_1 n_1$ این عنصر لنگر خمشی M_1 و در وجه راست $m_2 n_2$ آن لنگر خمشی M_2 اثر می‌کند . ارتفاع تیر در سمت چپ عنصر برابر h_1 و در سمت راست



شکل ۸-۲۸ a

آن برابر h_2 و فاصله نقطه‌ای که در آن تنش برشی τ اثر می‌کند تا نار خشی برابر y_1 است (این شکل را با شکل ۸-۱۵ a برای یک تیر منشوری مقایسه کنید) .

تنش برشی τ با نوشتن معادله تعادل عنصر $p_1 n_1 p_2 n_2$ در امتداد افق بدست می‌آید . نیروهای ناشی از تنش‌های خمشی عمودی در دو وجه چپ و راست عنصر به ترتیب $M_1 Q_1 / I_1$ و $M_2 Q_2 / I_2$ می‌باشند (معادله 8-21 را ببینید) . در این عبارات ، I_1 و I_2 گشتاورهای لختی دو مقطع عرضی Q_1 و Q_2 به ترتیب گشتاورهای اول سطوح اضلاع $p_1 n_1$ و $p_2 n_2$ حول محور خشی می‌باشند . نیروی کل بر وجه فوقانی $p_1 n_1$ عنصر برابر $\tau b \Delta x$ است که در آن b عرض تیر در فاصله y_1 از محور خشی می باشد . بنابراین معادله تعادل در امتداد افق به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\tau b \Delta x = \frac{M_2 Q_2}{I_2} - \frac{M_1 Q_1}{I_1} \quad (8-34)$$

با جایگزینی مقادیر عددی در این معادله ، تنش برشی برای هر تیر ویژه‌ای بطور تقریبی بدست می‌آید . روش حل به صورت زیر می‌باشد . ابتدا مقطع عرضی تیر که در آن تنش برشی τ مطلوب است انتخاب می‌شود . سپس مقطع دیگری به فاصله کوچک Δx از آن در نظر گرفته می‌شود . کمیت‌های زیر در هر یک از مقاطع تعیین می‌شود : (الف) - لنگر خمشی M ، (ب) - گشتاور اول Q سطح بین لبه خارجی تیر و مقطعی که τ در آنجا مطلوب است و (پ) - گشتاور لختی I مقطع . پس از جایگزینی این مقادیر در معادله 8-34 تنش برشی τ بدست می‌آید . هر چه فاصله Δx کوچکتر انتخاب شود

۲۷۲

(مساوی با نیروی برشی V) و در نتیجه معادله به صورت زیر در می آید :

$$\tau b I_1 = \frac{M_1 b h_1}{4} \frac{dh}{dx} + Q_1 V - \frac{M_1 Q_1 b h_1^2}{4 I_1} \frac{dh}{dx}$$

بالاخره طرفین رابطه فوق را بر $b I_1$ تقسیم و زیر نویس عددی را حذف می کنیم (چون دیگر به آن احتیاجی نیست) . بدین ترتیب شکل نهایی معادله تنش برشی τ در یک تیر غیر منشوری با مقطع عرضی مستطیل به صورت زیر می باشد :

$$\tau = \frac{VQ}{I_1 b} + \frac{Mh}{4I_1} \left(1 - \frac{Qh}{I_1} \right) \frac{dh}{dx} \quad (8-35)$$

این معادله برای تیری به عرض ثابت b و ارتفاع متغیر h صادق است. ارتفاع تیر می تواند بهر صورتی تغییر کند به شرط آنکه این تغییر تدریجی باشد. از معادله فوق نتیجه می شود تنش برشی در مقطع عرضی نه تنها به نیروی برشی بلکه به لنگر خمشی M و شدت تغییر h نسبت به x نیز بستگی دارد.

به عنوان یک مثال ویژه، توزیع تنش های برشی در یک تیر طره ای با مقطع عرضی مستطیل (شکل ۸-۲۷) را بررسی می کنیم. مقطع تیر به صورت یکنواخت تغییر می کند و در دو انتها به ارتفاع های h_a و $h_b = 2h_a$ می باشد. بنابراین کمیت dh/dx ثابت و برابر است با

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_b - h_a}{L} = \frac{h_a}{L}$$

لنگر خمشی در انتهای چپ تیر (نقطه A) صفر است و در نتیجه معادله 8-35 همان توزیع تنش برشی در یک تیر منشوری را می دهد (معادله 8-25 را ببینید). این توزیع تنش در شکل ۸-۲۷ رسم شده است. ماکزیمم تنش برشی در این مقطع در محور خنثی و برابر $1.5 P/bh_a$ می باشد.

در وسط طول تیر ($x = L/2$) مقادیر زیر بدست می آید :

$$V = P ; h = 1.5 h_a ; Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) ; M = \frac{PL}{2} ; I = \frac{bh^3}{12}$$

از جایگزینی مقادیر فوق در معادله 8-35 حاصل می شود

$$\tau = \frac{2P}{3bh_a}$$

۲۷۲

جواب بدست آمده دقیق تر خواهد بود. اما اگر Δx خیلی کوچک انتخاب شود از دقت عددی کاسه خواهد شد زیرا در این صورت در معادله 8-34 دو کمیت تقریباً " مساوی را باید از یکدیگر کم نمود. معادله 8-34 یک معادله کاملاً کلی است و در بسیاری از موارد عملی از آن می توان برای تعیین تنش های برشی در یک تیر با مقطع عرضی متغیر استفاده نمود.

اکنون حالت خاصی را در نظر می گیریم که مقطع عرضی تیر مستطیلی با عرض ثابت b و ارتفاع متغیر h باشد. در این صورت معادله 8-34 را می توان به معادله دقیق تری تبدیل نمود. برای این حالت خاص داریم

$$Q_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) ; Q_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{h_2^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{12} ; I_2 = \frac{bh_2^3}{12}$$

اگر Δh نمو h بین دو مقطع مجاور 1 و 2 باشد داریم $h_2 = h_1 + \Delta h$ و از معادلات بالا نتیجه می شود

$$Q_2 = Q_1 + \frac{bh_1 \Delta h}{4} ; I_2 = I_1 + \frac{bh_1^2 \Delta h}{4}$$

در هنگام بدست آوردن روابط بالا از حملاتی که شامل توان های دوم و سوم Δh می باشند به علت کوچک بودن در مقایسه با سایر جملات صرف نظر نموده است. همچنین با توجه به اینکه $M_2 = M_1 + \Delta M$ مقادیر Q_2 ، I_2 و M_2 را در معادله 8-34 جایگزین می کنیم.

$$\tau b \Delta x = \frac{(M_1 + \Delta M) \left(Q_1 + \frac{bh_1 \Delta h}{4} \right)}{I_1 + \frac{bh_1^2 \Delta h}{4}} - \frac{M_1 Q_1}{I_1}$$

طرفین این رابطه را در مخارج جمله اول سمت راست علامت تساوی ضرب می کنیم.

$$\tau b I_1 \Delta x + \frac{\tau b^2 h_1^2}{4} \Delta h \Delta x = \frac{M_1 b h_1}{4} \Delta h + Q_1 \Delta M + \frac{b h_1}{4} \Delta h \Delta M - \frac{M_1 Q_1}{4 I_1} b h_1^2 \Delta h$$

از جملات شامل حاصل ضرب دو کمیت کوچک در معادله فوق می توان صرف نظر نمود. طرفین معادله ساده شده را بر Δx تقسیم می کنیم. در حالت حدی وقتی Δx خیلی کوچک می شود، جمله $\Delta h / \Delta x$ به صورت dh/dx و جمله $\Delta M / \Delta x$ بصورت dM/dx

۳۷۵

در نتیجه تنش عمودی ماکزیمم برابر است با

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{Px}{S} = \frac{32Px}{\pi d_a^3 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق $(d\sigma/dx = 0)$ مقداری از x که آن را ماکزیمم می-سازد بدست می-آید. نتیجه $x=L/2$ است و تنش ماکزیمم مربوطه مساوی است با

$$\sigma_{\max} = \frac{128PL}{27\pi d_a^3} = 4.741 \frac{PL}{\pi d_a^3}$$

تنش در مقطع لنگر خمشی ماکزیمم (تکیه گاه B) برابر است با

$$\sigma_b = \frac{4PL}{\pi d_a^3}$$

بدین ترتیب تنش عمودی ماکزیمم در این مثال خاص در وسط طول تیر و 19 درصد بیشتر از تنش در انتهای گیر دار سیر (در جایی که لنگر خمشی ماکزیمم است) میباشد. اگر از شیب جدار تیر کاسته شود، مقطع تنش عمودی ماکزیمم به طرف تکیه گاه گیر دار تیر منتقل می-شود. برای شیب‌های خیلی کوچک، تنش عمودی ماکزیمم همچون در تیر طره‌ای منشوری در انتهای B تیر رخ می-دهد.

برای اینکه حداقل مصالح در تیر مصرف شود، مقطع عرضی تیر را در طول تیر می-توان چنان تغییر داد که تنش ماکزیمم در تمام مقاطع ثابت باشد. در حالت ایده‌آل که تنش ماکزیمم در تمام مقاطع عرضی برابر تنش مجاز می-باشد، طرح موسوم به طرح با حداقل وزن می-باشد. البته به علت اشکالات عملی در ساختن تیر و امکان اینکه بارهای وارده با بارهای فرض نده در طرح اختلاف داشته باشند، به این حالت ایده‌آل بندرت می-توان رسید. مثال‌های آشنای سازه‌های با ابعاد متغیر که برای تنش‌های ماکزیمم ثابت (تا آنجایی که امکان دارد) طرح شده‌اند عبارتند از فنرهای نواری اتوموبیل‌ها (شکل ۲۹-۸) و خرپاهای پل‌ها (شکل ۳۰-۸) که در بالا و پایین آن‌ها ورق‌های با طول متغیر قرار دارد.

تیر طره‌ای شکل ۳۱-۸ با بار متمرکز P در انتهای آزاد آن مثالی از طرح با حداقل وزن می-باشد. مقطع عرضی تیر به شکل مستطیل با عرض ثابت b و ارتفاع متغیر h می-باشد. می‌خواهیم تنش عمودی ماکزیمم در تمام مقاطع ثابت و برابر σ_w باشد. در این صورت در هر یک از مقاطع عرضی باید معادله زیر برقرار باشد:

۳۷۴

این توزیع تنش در شکل ۳۲-۸ رسم شده است. در این حالت خاص مشاهده می‌شود که تنش برشی در ارتفاع مقطع تیر بطور یکساخت توزیع شده است. توزیع تنش برشی بین انتهای چپ تیر تا وسط طول تیر به صورت ندرجی تغییر می‌کند تا اینکه در وسط تیر به صورت یکساخت در می‌آید.

در انتهای راست تیر ($x=L$) داریم

$$V = P; h = h_b = 2h_a; M = PL$$

پس از جایگزینی این مقادیر در معادله 8-35 حاصل می‌شود

$$\tau = \frac{3P}{8bh_a} \left(1 + \frac{y_1^2}{h_a^2}\right)$$

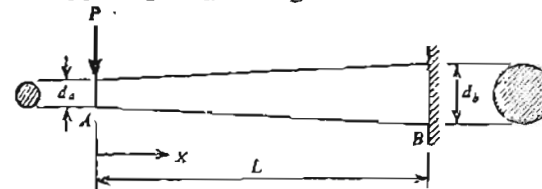
این توزیع تنش نیز در شکل ۳۲-۸ رسم شده است. توجه کنید که تنش برشی ماکزیمم در این مقطع برابر با $3P/4bh_a$ در لبه‌های خارجی تیر می‌باشد. تنش برشی مینیمم، برابر با نصف تنش برشی ماکزیمم، در محل محور خنثی ($y_1=0$) رخ می‌دهد. تنش‌های برشی در تیرهای مستطیلی که یک لبه آن‌ها افقی و لبه دیگر آن‌ها شیب‌دار است نیز با همین نشوری مورد بحث در بالا بدست می‌آید.

تنش‌های عمودی ماکزیمم در یک تیر منشوری همواره در مقطع لنگر خمشی ماکزیمم رخ می‌دهد، اما در مورد یک تیر غیر منشوری ممکن است این طور نباشد. مثالی که این امکان را نشان می‌دهد تیر طره‌ای با مقطع عرضی دایره شکل ۲۸-۸ می‌باشد. اگر فرض کنیم $d_b/d_a = 2$ باشد، در این صورت قطر d تیر در فاصله x از انتهای چپ تیر برابر است با

$$d = d_a + (d_b - d_a) \frac{x}{L} = d_a \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

و ضریب مقطع مربوطه مساوی است با

$$S = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{32} d_a^3 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3$$



شکل ۲۸-۸

۳۷۷

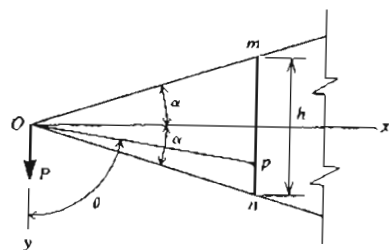
نتایج دقیق بر اساس تئوری ارجاعی

ننشاها در یک گاو طره ای با مقطع عرضی مستطیل (شکل ۳۲-۸) با استفاده از روشهای تئوری ارجاعی محاسبه شده اند. تنشهای عمودی و برشی در نقطه p از مقطع عرضی mn از روابط زیر بدست می آیند (مرجع ۲۶) :

$$\sigma = - \frac{Pxy \sin^4 \theta}{bx^3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} ; \tau = \frac{Py^2 \sin^4 \theta}{bx^3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (8-36)$$

در این رابطه، x و y مختصات نقطه p، θ زاویه بین خط Op و محور y و b ضخامت گاو (ثابت فرض می شود) و α زاویه ایست که شیب جدارهای گاو را مشخص می کند. به منظور مقایسه با روابط تیرهای منشوری، روابط فوق را به صورت دیگری می نویسیم. لنگر خمشی در مقطع عرضی mn برابر $M = Px$ و ارتفاع گاو در همان مقطع برابر $h = 2x \tan \alpha$ است. گشتاور لختی مقطع عرضی mn نیز مساویست با

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2bx^3 \tan^3 \alpha}{3}$$



شکل ۳۲-۸ طره ای با مقطع عرضی مستطیل

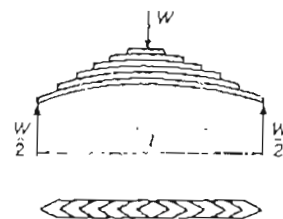
پس از جایگزینی عباراتهای M، h و I در معادلات ۸-۳۶ خواهیم داشت

$$\sigma = - \frac{My}{I} \frac{2 \tan^3 \alpha \sin^4 \theta}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (8-37)$$

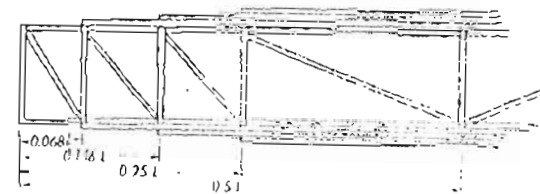
$$\tau = \frac{P}{bh} \frac{8y^2 \tan^3 \alpha \sin^4 \theta}{h^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad (8-38)$$

۳۷۶

$$\sigma_w = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6Px}{bh^2}$$



شکل ۳۹-۸



شکل ۴۰-۸

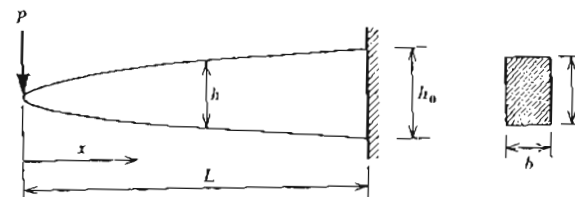
ساراین ارتفاع h_0 تیر در محل تکیه گاه برابر است با

$$h_0 = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_w}}$$

و ارتفاع هر یک از مقاطع عرضی دیگر مساویست با

$$h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_w}} = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

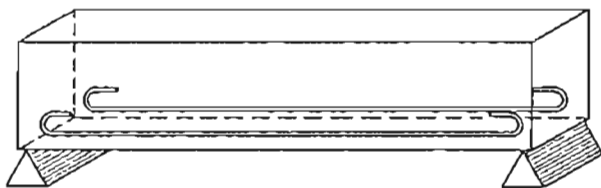
این معادله نشان می دهد که ارتفاع تیر با x به صورت یک سهمی تغییر می کند و در نتیجه شکل کلی تیر مطابق شکل ۳۱-۸ می باشد. مساحت مقطع عرضی تیر در انتهای بار شده آن برابر صفر است زیرا در این مسئله فقط تنشهای عمودی ناشی از خم شدن تیر گرفته شده اند. البته در این نقطه تنش برشی نیز وجود دارد و مقطع عرضی تیر در عمل باید برای انتقال نیروی برشی سیز سطح کافی داشته باشد.



شکل ۳۱-۸

۱-۹-۱ تنش‌های عمودی در تیرهای چند ماده‌ای

تیرهایی که از بیش از یک نوع مصالح ساخته شده‌اند به تیرهای چند ماده‌ای موسوم می‌باشند. مثال‌های تیرهای چند ماده‌ای عبارتند از تیرهای دو فلزی (تیرهایی که از متصل کردن دو نوع فلز ساخته می‌شوند)، تیرهای بتن مسلح (شکل ۸-۳۳) و تیرهای ساندویچی (شکل ۸-۳۶). بخش ۸-۹-۲ را ببینید. برای تحلیل این نوع تیرها



شکل ۸-۳۳

می‌توان از تئوری خمشی بخش ۱-۸ استفاده نمود. چون بدون توجه به اینکه تیر از یک یا چند نوع مصالح ساخته شده باشد مقاطع عرضی آن در خمشی خالص سطح باقی می‌مانند، تغییرات کرنش در یک تیر مرکب از بالا تا پایین تیر خطی می‌باشد (معادله ۸-۲ را ببینید). برای مثال، این توزیع تنش برای تیر مستطیلی شکل ۸-۳۴a که از دو نوع مصالح ساخته شده است در شکل ۸-۳۴b رسم شده است. محل محور خمشی در ابتدا معلوم نیست بجز در موردی که مقطع عرضی دارای تقارن مضاعف می‌باشد که در این صورت محور خمشی در وسط ارتفاع تیر قرار دارد.

تنش‌های عمودی در مقطع را می‌توان با ضرب نمودن کرنشها در ضریب ارتجاعی مصالح مربوطه بدست آورد. در مثال شکل ۸-۳۴ فرض می‌شود که ضرائب ارتجاعی دو نوع مصالح که با شماره‌های ۱ و ۲ مشخص شده‌اند به ترتیب E_1 و E_2 باشد. با فرض $E_2 > E_1$ نمودار تنش شکل ۸-۳۴c بدست می‌آید. تنش عمودی σ_x در فاصله y از محور خمشی برای مصالح ۱ و ۲ از روابط زیر حاصل می‌شود (با معادله ۸-۵ مقایسه کنید).

$$\sigma_{x1} = KE_1 y \quad ; \quad \sigma_{x2} = KE_2 y \quad (8-42)$$

محل محور خمشی را با توجه به اینکه نیروی محوری برآیند در مقطع عرضی باید برابر صفر باشد می‌توان بدست آورد.

تنش عمودی σ در محور خمشی ($\theta = \pi/2$ و $y = 0$) برابر صفر و در لبه خارجی تیر ماکزیمم می‌باشد. این تنش در بالای تیر ($\theta = \alpha + \pi/2$ و $y = -h/2$) برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2I} \frac{2 \tan^3 \alpha \cos^4 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \beta \frac{Mh}{2I} \quad (8-39)$$

ضریب β برای مقادیر زاویه α برابر با $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ و 20° به ترتیب مساوی ۱، ۱.۰۰، ۰.۹۷۰، ۰.۹۴۷ و ۰.۹۰۶ می‌باشد. بدین ترتیب مشاهده می‌کنیم که برای زوایای کوچک حدارهای فوقانی و تحتانی، بین تنش‌های محاسبه شده از تئوری دقیق و تنش‌های بدست آمده از فرمول تیر $\sigma = My/I$ اختلاف کمی وجود دارد.

تنش برشی τ (از معادله ۸-۳۸) در محور خمشی ($y = 0$) برابر صفر است. ماکزیمم تنش برشی در لبه‌های خارجی و برابر است با

$$\tau_{\max} = \frac{P}{bh} \frac{2 \tan^3 \alpha \cos^4 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \gamma \frac{P}{bh} \quad (8-40)$$

ضریب γ برای مقادیر زاویه α برابر $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ و 20° به ترتیب مساوی ۳، ۳.۰۰، ۲.۹۱، ۲.۸۴ و ۲.۷۲ می‌باشد. بدین ترتیب تنش برشی ماکزیمم تقریباً سه برابر تنش برشی متوسط P/bh می‌باشد و در لبه‌های خارجی اتفاق می‌افتد. اگر ما تئوری تقریبی تنش‌های برشی در یک تیر مستطیلی (معادله ۸-۳۵) را را برای گازه شکل ۸-۳۲ بکار ببریم، برای مقطع mn خواهیم داشت

$$V = P \quad ; \quad Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad ; \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad M = Px \quad ; \quad \frac{dh}{dx} = \frac{h}{x}$$

پس از جایگزینی عبارات فوق در معادله ۸-۳۵ و با توجه به اینکه $y_1 = y$ بدست می‌آوریم

$$\tau = \frac{12Py^2}{bh^3} \quad (8-41)$$

این معادله در محور خمشی مقدار $\tau = 0$ را می‌دهد که با نتیجه دقیق معادله ۸-۳۸ منطبق می‌باشد. معادله ۸-۴۱ در لبه‌های خارجی $\tau_{\max} = 3P/bh$ می‌دهد که برای زوایای کوچک حدارهای تیر با تقریب خوب با معادله ۸-۴۰ مطابقت دارد. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که تئوری تقریبی تنش‌های برشی در یک تیر غیر منشوری برای طرح‌های عملی کفایت می‌کند. از طرف دیگر، کاربرد فرمول $\tau = VQ/Ib$ برای تیرهای غیر منشوری به نتایج کاملاً گمراه کننده منجر می‌شود.

۲۸۰

$$\int_1 \sigma_{x1} dA + \int_2 \sigma_{x2} dA = 0$$

در این رابطه، انتگرال اول در روی سطح مقطع عرضی ماده 1 و انتگرال دوم در روی سطح مقطع عرضی ماده 2 محاسبه می شود. اگر تنش های σ_{x1} و σ_{x2} را از معادلات 8-42 در این رابطه جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$E_1 \int_1 y dA + E_2 \int_2 y dA = 0 \quad (8-43)$$

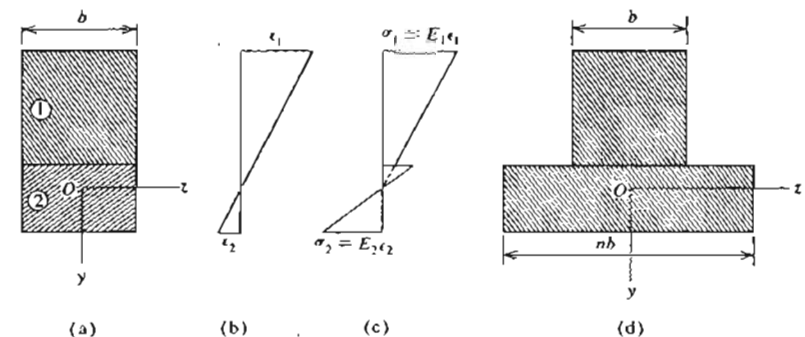
از این معادله که شکل کلی معادله 8-6 می باشد می توان برای تعیین محل محور خنثی نیز شکل ۳۴-۸ استفاده نمود. برای تیرهایی که از بیش از دو نوع مصالح ساخته شده اند از رابطه ای شبیه رابطه فوق ولی با حملات بیشتر می توان استفاده کرد. استفاده از رابطه 8-43 مشکل نیست زیرا انتگرال ها معرف گشتاورهای اول قسمت های مختلف سطح مقطع عرضی می باشند.

رابطه بین لنگر خمشی M و تنش های عمودی یا همان روش مورد استفاده برای معادله 8-7 بدست می آید.

$$M = \int \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_{x1} y dA + \int_2 \sigma_{x2} y dA = KE_1 \int_1 y^2 dA + KE_2 \int_2 y^2 dA \quad (8-44)$$

$$= K(E_1 I_1 + E_2 I_2)$$

I_1 و I_2 در این رابطه به ترتیب گشتاور لختی سطوح 1 و 2 حول محور خنثی می باشند.



شکل ۳۴-۸ تیر مرکب

۲۸۱

توجه کنید $I = I_1 + I_2$ گشتاور لختی تمام سطح مقطع عرضی می باشد. با ترکیب نمودن معادلات 8-42 و 8-44 تنش ها در تیر بر حسب لنگر خمشی M بدست می آیند.

$$\sigma_{x1} = \frac{MyE_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}; \sigma_{x2} = \frac{MyE_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad (8-45)$$

معادله اول تنش ها را در ماده 1 و معادله دوم تنش ها را در ماده 2 می دهد. اگر $E_1 = E_2 = E$ باشد مشاهده می کنیم که هر دو معادله به معادله $\sigma_x = My/I$ برای تیر یک ماده ای تبدیل می شوند.

۳-۹-۱ روش مقطع تبدیل شده

با استفاده از روش مقطع تبدیل شده می توان نیروهای چند ماده ای را به سهولت حل نمود. در این روش تیری که از چند نوع مصالح ساخته شده به تیر معادلی از یک نوع ماده تبدیل می شود. سپس تیر معادل مانند یک تیر معمولی که از یک نوع ماده ساخته شده حل می گردد.

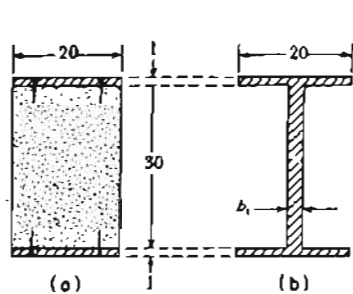
مقطع تبدیل شده باید همان محور خنثی و طرفیت لنگر خمشی تیر اولیه را داشته باشد تا با آن معادل گردد. برای پیدا کردن مقطع تبدیل شده ابتدا طرفین معادله 8-43 را بر E_1 تقسیم می کنیم و نسبت E_2/E_1 را با n نشان می دهیم.

$$\int_1 y dA + \int_2 n y dA = 0 \quad (8-46)$$

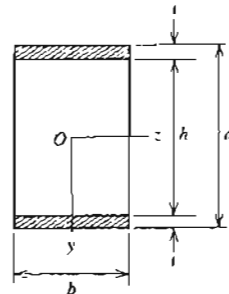
این معادله نشان می دهد اگر هر عنصر سطح dA در ماده 2 را در ضریب n ضرب کنیم، به شرط اینکه فاصله y عنصر سطح مزبور تغییر نکند، محل محور خنثی مقطع تیر تغییر نخواهد کرد. به عبارت دیگر، مقطع عرضی را می توانیم شامل دو قسمت فرض کنیم: (الف) - سطح 1 در حالت اولیه اش و (ب) - سطح 2 که عرض آن در n ضرب شود. بدین ترتیب ما مقطع عرضی جدیدی داریم که از یک نوع ماده، یعنی ماده 1، تشکیل شده است.

مقطع تبدیل شده برای تیر شکل ۳۴-۸a در شکل ۳۴-۸d نشان داده شده است. ماده 1 بدون تغییر باقی مانده ولی عرض ماده 2 در n ضرب شده است (در این مثال $n > 1$ فرض شده است ولی این شرط لازمی نیست). اکنون ما می توانیم مقطع

۳۸۳



شکل ۸-۳۵



شکل ۸-۳۶

حل: اگر تمام مقطع را به فولاد تبدیل کنیم، $n = E_w/E_s = 1/20$ و مقطع تبدیل شده یک مقطع I با ضخامت جان $b_1 = b/20 = 1 \text{ cm}$ (شکل ۸-۳۵ b) خواهد بود. گشتاور لختی مقطع تبدیل شده برابر است با

$$I = 2 \left[\frac{20(1)^3}{12} + 20 \times 1(15.5)^2 + \frac{1(15)^3}{3} \right] = 11863 \text{ cm}^4$$

برای پیدا کردن حداکثر لنگر خمشی مجاز، ابتدا باید تعیین کنیم کدامیک از تنش های مجاز عامل تعیین کننده می باشد. تنش مجاز در جان تیر تبدیل شده $\sigma_s = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ است. تنش مجاز در بال ها $\sigma_s = 20 \times 84 = 1680 \text{ Kg/cm}^2$ است. بنابراین تنش در بال ها عامل تعیین کننده است. حداکثر لنگر خمشی مجاز با استفاده از معادله ۸-۱۲ برابر است با

$$M_{\max} = \frac{I}{c} \sigma_s = \frac{11863}{15+1} (1120) = 830410 \text{ cmKg} = 8304 \text{ mKg}$$

۳-۹-۸ تیرهای ساندویچی

یک تیر ساندویچی شامل یک هسته ضخیم می باشد که در بالا و پایین آن دو لایه نازک از مصالح دیگر موسوم به رویه های تیر قرار دارد (شکل ۸-۳۶). هسته تیر معمولاً از ماده سبک و کم مقاومت می باشد که به عنوان پر کننده عمل می کند، ولی رویه های تیر از ماده با مقاومت زیاد می باشند. مقاطع ساندویچی در جایی که مقاومت زیاد توأم با وزن کم مطلوب است (مثلاً بدنه هواپیماها) بکار می رود. برای محاسبه تیرهای ساندویچی چون ضریب ارتجاعی هسته در امتداد طول تیر

۳۸۲

تبدیل شده را به صورت تیری شامل فقط یک نوع ماده در نظر بگیریم. هم‌سطوریکه از معادله ۸-۴۶ دیده می شود، محور خمشی مقطع تبدیل شده در همان محل محور خمشی تیر اولیه (شکل ۸-۳۴ a) می باشد. به علاوه، ظرفیت لنگر خمشی مقطع تبدیل شده همان ظرفیت لنگر خمشی مقطع اولیه خواهد بود. این نکته را با توجه به اینکه برای مقطع تبدیل شده $\sigma_x = KE_1 y$ می باشد می توانیم به سبب نیت ثابت کنیم.

$$M = \int \sigma_x y dA = \int_1 \sigma_x y dA + \int_2 \sigma_x y dA = KE_1 \int_1 y^2 dA + KE_2 \int_2 y^2 dA$$

$$= K(E_1 I_1 + E_2 I_2) = K(E_1 I_1 + E_2 I_2)$$

این نتیجه با معادله ۸-۴۴ مطابقت دارد.

تنش ها در مقطع تبدیل شده را می توان با فرمول معمولی تنش در تیرها پیدا کرد زیرا تیر معادل فقط از یک نوع ماده تشکیل شده است.

$$\sigma_{x1} = \frac{My}{I_t} \quad (8-47)$$

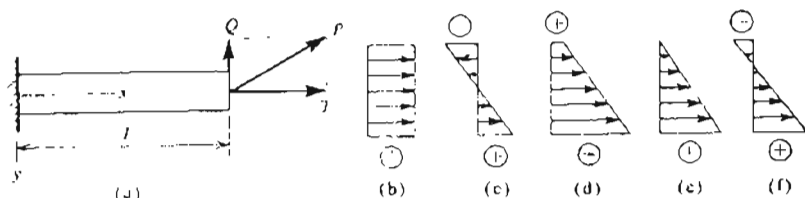
I_t در این رابطه گشتاور لختی مقطع تبدیل شده حول محور حسی می باشد ($I_t = I_1 + nI_2$). معادله ۸-۴۷ با معادله اول ۸-۴۵ مطابقت دارد و از این رو نتیجه می گیریم که تنش ها در ماده ۱ تیر اولیه همان تنش های بدست آمده از مقطع تبدیل شده می باشد. اما این نکته در مورد ماده ۲ تیر اولیه درست نمی باشد. مقایسه معادله ۸-۴۷ با معادله دوم ۸-۴۵ نشان می دهد که تنش ها در تیر تبدیل شده را باید در n ضرب نمود تا تنش ها در ماده ۲ تیر اولیه بدست آید.

روش مقطع تبدیل شده را می توان به سهولت در مورد تیرهای مرکب از چند نوع (بیش از دو نوع) مصالح سطداد.

مثال ۸-۵

یک تیر چوبی با مقطع عرضی مستطیل به ابعاد $20 \times 30 \text{ cm}$ بوسیله دو ورق فولادی در بالا و پایین آن تقویت شده است (شکل ۸-۳۵). ضرایب ارتجاعی فولاد و چوب به ترتیب $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $E_w = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب $\sigma_s = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_w = 84 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد. حداکثر لنگر خمشی مجاز را برای مقطع مزبور تعیین کنید.

۳۸۵



شکل ۸-۳۷ خمش توأم با بار محوری

سروی T گردد. این سرو در آن موقع لنگرهای خمشی اضافی در تیر ایجاد خواهد کرد و در نتیجه س اثر نیروی محوری و اثر لنگر خمشی تا، تیر متقابل وجود دارد (این حالت در فصل ستون ها و کمانش مورد بحث قرار خواهد گرفت). در این بخش فقط تیرهای نسبتاً سحت که شرایط فسم (الف) در آنها صادق است مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تنش‌های برآیند در هر مقطع عرضی تیر شکل ۸-۳۷ a با ترکیب نمودن تنش‌های محوری ناشی از T و تنش‌های خمشی ناشی از Q بدست می‌آید. توزیع تنش‌های ناشی از این دو نیرو بطور جداگانه در شکل‌های ۸-۳۷ b و ۸-۳۷ c رسم شده‌اند. تنش‌های نهائی که در شکل ۸-۳۷ d نشان داده شده است از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} \quad (8-50)$$

در این رابطه، N نیروی محوری و M لنگر خمشی در مقطع عرضی مورد نظر می‌باشد. برای تیر طره‌ای شکل ۸-۳۷ a داریم $N=T$ و $M=Q(L-x)$. توجه کنید N وقتی مثبت است که کشش ایجاد کند و M وقتی مثبت است که در پایین تیر کشش و در بالای تیر فشار ایجاد کند. تحت این شرایط، علامت تنش عمودی σ در معادله 8-50 برای کشش مثبت و برای فشار منفی خواهد بود. توزیع تنش نهائی به مقادیر جبری نسبی جملات در معادله مزبور بستگی خواهد داشت. توزیع تنش ممکن است چنان باشد که تمام مقطع عرضی تحت کشش (مطابق شکل ۸-۳۷ d) قرار گیرد، یا توزیع تنش ممکن است مثلثی باشد (شکل ۸-۳۷ e)، یا قسمتی از مقطع ممکن است تحت کشش و قسمتی دیگر از آن تحت فشار باشد (شکل ۸-۳۷ f). و با اگر نیروی محوری N فشاری باشد تمام مقطع ممکن است تحت فشار قرار گیرد. در همه این حالات خمش توأم با بار محوری واضح است که محور خنثی مقطع عرضی (یعنی خطی که در آن تنش صفر است) دیگر از مرکز سطح عبور نمی‌کند و حتی ممکن است خارج از مقطع قرار بگیرد.

۳۸۴

در مقایسه با رویه‌ها کم است، می‌توان فرض نمود که رویه‌ها تمام تنش‌های خمشی طولی را تحمل می‌کنند. در این صورت تنش‌های عمودی در لبه‌های خارجی تیر از رابطه زیر بدست می‌آیند (شکل ۸-۳۶ را ببینید):

$$\sigma_x = \frac{Md}{2I_f} \quad (4-48)$$

در این فرمول تفرسی $I_f = bt(h+t)^2/2$ گشتاور لختی رویه‌ها نسبت به محور z می‌باشد. چون رویه‌ها مارک هستند می‌توان فرض نمود که هسته نیز تمام تنش‌های برشی را حمل می‌نماید. در این صورت تنش و کرنش برشی متوسط در هسته از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\tau = \frac{V}{bh} \quad ; \quad \gamma = \frac{V}{bhG_c} \quad (8-49)$$

در این رابطه، V نیروی برشی و G_c ضریب ارتجاعی برشی ماده هسته می‌باشد.

۸-۱۰ خمش توأم با بار محوری

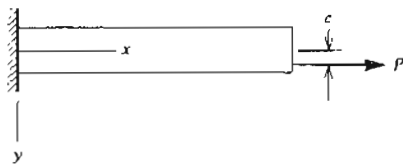
۸-۱۰-۱ اثر توأم بارهای خمشی و نیروهای محوری

اکنون تحلیل تیرهایی را بررسی می‌کنیم که تحت اثر توأم بارهای خمشی و نیروهای محوری قرار دارند. مثال ساده‌ای از این نوع بار گذاری در شکل ۸-۳۷ a مشاهده می‌شود که یک تیر طره‌ای را با یک نیروی مایل P در انتهای آزاد آن نشان می‌دهد. این بار را می‌توان به دو مؤلفه تجزیه نمود یکی نیروی عرضی Q که ایجاد خمش میکند دیگری نیروی محوری T. برای تعیین تنش‌های ایجاد شده در میله لازم است که بین دو حالت ممکن فرق گذاشته شود: (الف) - طول تیر در مقایسه با ارتفاع مقطع عرضی آن نسبتاً "کوچک" می‌باشد بطوریکه تیر در خمش نسبتاً "سخت" است. در این صورت تغییر شکل جانبی تیر کوچک خواهد بود و تغییر ناچیزی در خط اثر نیروی محوری خواهد داشت. در این حالت می‌توانیم تنش‌های ناشی از T و Q را مستقل از یکدیگر بدست آورده و با یکدیگر جمع کنیم. (ب) - تیر ممکن است نسبتاً "باریک و انعطاف پذیر" باشد. تغییر شکل‌های خمشی در این حالت ممکن است آنقدر زیاد باشد که باعث تغییر خط اثر

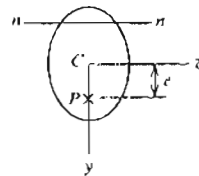
۳۸۷

حالت خاصی از خمش نواحی با نیروی محوری که در عمل مورد توجه می‌باشد حالت بار محوری خارج از مرکز است (شکل a-۳۹) . عمل نیروی خارج از مرکز معادل است با نیروی P که در مرکز سطح مقطع عرضی اثر کند علاوه لنگر خمشی برابر با Pe . از این روش در هر نقطه مقطع عرضی برابر است با

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe y}{I} \quad (8-51)$$



(a)



(b)

شکل ۳۹-۸

معادله محور خمشی (خط mn در شکل b-۳۹) را می‌توان با مساوی صفر قرار دادن σ در معادله 8-51 بدست آورد . بنابراین

$$y = -\frac{I}{Ae} \quad (8-52)$$

معادله خطی است که در آن تنش صفر می‌باشد . علامت منفی در این معادله نشان می‌دهد موقعی که P یک نیروی کششی در زیر محور z می‌باشد محور خمشی در بالای محور z قرار دارد . اگر خروج از مرکز e کاهش یابد ، محور خمشی از مرکز سطح دور خواهد شد و اگر e افزایش یابد ، محور خمشی به مرکز سطح نزدیک می‌شود .

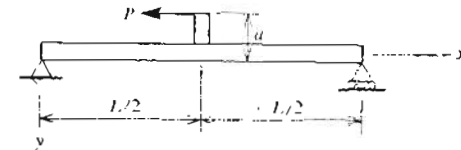
موقعی که نقطه اثر نیروی کششی خارج از مرکز P در روی یکی از محوره‌های اصلی مقطع عرضی قرار ندارد ، خمش بطور همزمان حول محوره‌های اصلی صورت خواهد گرفت . اگر مختصات نقطه اثر P را با e_y و e_z مشخص کنیم (شکل a-۴۰) ، لنگرهای خمشی حول محوره‌های y و z بطور عددی به ترتیب برابر Pe_y و Pe_z خواهند بود . در این صورت تنش عمودی برآیند در نقطه‌ای از مقطع عرضی به مختصات y و z برابر است با

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{I_y} + \frac{Pe_y y}{I_z} \quad (8-53)$$

۳۸۶

مثال ۶-۸

نیروی ساده‌ای با مقطع عرضی مستطیل به عرض b و ارتفاع h بار P را مطابق شکل ۳۸-۸ تحمل می‌کند . با فرض اینکه فاصله $a = 2h$ باشد ، تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم را در تیر تعیین کنید .



شکل ۳۸-۸

حل : لنگر خمشی در وسط دهانه تیر ماکزیمم و نیروی فشاری محوری در نیمه چپ تیر برابر P است . سایرین نیروی محوری و لنگر خمشی در مقلدی به فاصله کوچک از وسط دهانه تیر و در سمت چپ آن عبارتند از

$$N = -P \quad ; \quad M = \frac{Pa}{2} = Ph$$

تنش‌های σ_b در لبه پایینی تیر ($y=h/2$) و σ_t در لبه بالایی تیر ($y=-h/2$) استفاده از رابطه 8-50 محاسبه می‌شوند

$$\sigma_b = -\frac{P}{bh} + \frac{6P}{bh} = \frac{5P}{bh} \quad ; \quad \sigma_t = -\frac{P}{bh} - \frac{6P}{bh} = -\frac{7P}{bh}$$

تنش‌ها در یک مقطع عرضی درست در سمت راست وسط تیر (در جایی که $M = -Ph$ و $N=0$ است) بر بطور مشابه‌ای بدست می‌آیند .

$$\sigma_b = -\frac{6P}{bh} \quad ; \quad \sigma_t = \frac{6P}{bh}$$

با مقایسه این تنش‌های مخالف مشاهده می‌کنیم که تنش کششی ماکزیمم در تیر برابر $6P/bh$ و تنش فشاری ماکزیمم در تیر برابر $7P/bh$ است .

۳۸۹

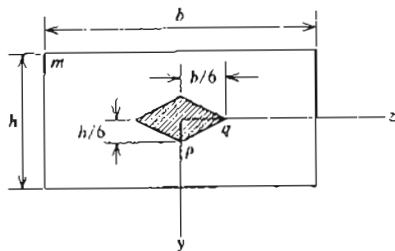
قطه R (محل تقاطع دو خط منقطع در نکل b - ۴۰) همواره بر محور حشی mm واقع خواهد بود. بنابراین همچنانکه بار P در طول خط mm حرکت می کند، محل نقطه R ثابت باقی می ماند و محور خنثی مقطع همواره از این نقطه عبور خواهد کرد.

۱-۱۵-۳ هسته یک مقطع عرضی

موقعی که خروج از مرکز بار محوری P (شکل ۳۹-۸) کوچک است، محور حشی در خارج مقطع عرضی قرار خواهد گرفت. این بدان معنی است که تنش های عمودی در سراسر مقطع عرضی علامت یکسان خواهد داشت. در حالی که بار محوری بر ماده ای با مقاومت کششی خیلی ضعیف مانند بتن اثر می کند، باید مطمئن شد که در هیچ نقطه از مقطع عرضی کشش ایجاد نمی شود. ناحیه کوچکی در حوالی مرکز سطح وجود دارد که اگر بار فشاری P در آن وارد شود تمام مقطع عرضی تحت فشار قرار خواهد گرفت. این ناحیه موسوم به هسته مقطع عرضی می باشد.

مثال ۸-۷

هسته یک مقطع عرضی مستطیلی را پیدا کنید.



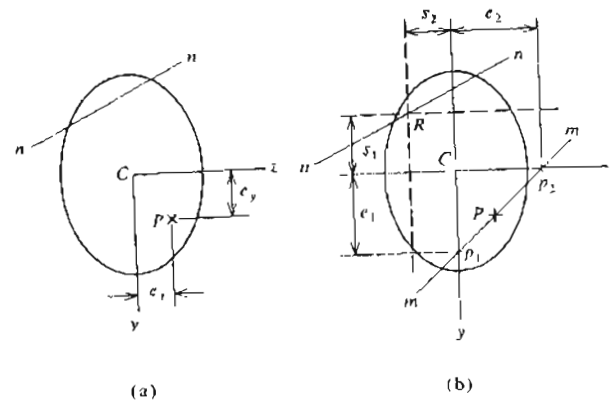
شکل ۸-۴۱ هسته یک مقطع عرضی مستطیلی

حل: اگر بار در روی قسمت مثبت محور y حرکت کند (شکل ۴۱-۸) موقعی که در نقطه p در فاصله e_1 از مرکز سطح قرار می گیرد، محور خنثی بر لبه فوقانی مقطع منطبق خواهد شد. با جایگزینی $y = -h/2$ و $I = bh^3/12$ و $A = bh$ در معادله 8-52 فاصله $e_1 = h/6$ بدست می آید. همین طور موقعی که بار P در نقطه q واقع بر قسمت

۳۸۸

در این رابطه، I_y و I_z به ترتیب گشتاورهای لختی حول محورهای y و z می باشد. هنگامی که P در روی محور y قرار می گیرد و c_z برابر صفر می شود، معادله فوق به معادله 8-51 تبدیل می شود. در این مورد نیز معادله محور خنثی با تساوی صفر قرار دادن σ بدست می آید.

$$\frac{Ae_y}{I_z} y + \frac{Ae_z}{I_y} z + 1 = 0 \quad (8-54)$$



شکل ۸-۴۰

این معادله بر حسب y و z حطی می باشد، بنابراین محور خنثی خط مستیمی مانند خط mm در شکل a - ۴۰ می باشد. این خط بسته به شکل مقطع عرضی و محل اثر نیروی محوری P ممکن است مقطع عرضی را قطع کند و خارج آن قرار بگیرد. محل های تقاطع خط mm با محورهای y و z به ترتیب با تساوی صفر قرار دادن z و y در معادله 8-54 و حل معادله حاصل بدست می آید.

بن نقطه اثر نیروی P و محل محور خنثی رابطه حالی وجود دارد؛ هنگامی که نیروی P در روی خط مستیمی مانند mm حرکت می کند، محور خنثی حول نقطه ثابت R دوران می نماید (شکل b - ۴۰). برای اثبات این نکته ابتدا نیروی P را به دو مؤلفه موازی در نقاط p_1 و p_2 تجزیه می کنیم. مؤلفه ای که در p_1 وارد می شود در یک صفحه اصلی خمش قرار دارد و در نتیجه خط بدون تنش (با تنش صفر) مربوطه موازی محور z و در فاصله $s_1 = I_z/Ae_1$ از محور z می باشد (شکل b - ۴۰). همین طور مؤلفه وارد در p_2 حول محور y خمش ایجاد می کند و خط بدون تنش مربوطه در فاصله $s_2 = I_y/Ae_2$ از محور y قرار دارد. هنگامی که هر دو مؤلفه بطور همزمان اثر می کنند،

۳۹۱

کار سطح مقطع سیر را به دو سطح مستطیلی با مساحت‌های A_1 و A_2 تقسیم می‌کنیم و فاصله مرکز سطح A_1 و A_2 را از محور Z به ترتیب y_1 و y_2 می‌نامیم.

$$C_1 = \frac{\int y_1 dA_1}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{\frac{2.5}{2} (7.5)(2.5) + (\frac{7.5}{2} + 2.5)(2.5)(7.5)}{(7.5)(2.5) + (2.5)(7.5)} = 3.75 \text{ cm}$$

$$C_2 = 10 - 3.75 = 6.25 \text{ cm}$$

برای محاسبه گشتاور لختی سطح مقطع حول محور خنثی (I) از قضیه محورهای موازی استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{1}{12} (7.5)(2.5)^3 + (7.5)(2.5)(3.75 - \frac{2.5}{2})^2 +$$

$$\frac{1}{12} (2.5)(7.5)^3 + (2.5)(7.5)(6.25 - \frac{7.5}{2})^2 = 332.03 \text{ cm}^4$$

حداکثر تنش عمودی در مقطع C و در تار نحاسی می‌باشد ($C_2 > C_1$) که برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C_2}{I} = \frac{(43200)(6.25)}{332.03} = 813.2 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{گشتی})$$

مسئله ۸-۲

یک سد چوبی تشکیل شده است از الوارهای افقی A که روی تیرهای قائم B تکیه دارد (شکل ۴۵-۸). تیرهای B به مقطع مربع و در قسمت پایین گیردار هستند. تعیین کنید طول بعد لازم b مقطع تیرهای قائم را اگر ارتفاع آب $h = 1.8 \text{ m}$ فاصله تیرها $s = 0.90 \text{ m}$ و تنش مجاز چوب $\sigma_w = 35 \text{ Kg/cm}^2$ باشد. وزن مخصوص آب $\gamma = 1000 \text{ Kg/m}^3$ می‌باشد.

حل: بار گذاری در روی تیر به صورت مثلثی و لنگر خمشی ماکزیمم در پایین تیرین نقطه آن می‌باشد (شکل ۴۶-۸). با توجه به اینکه شدت بار در پایین آن $\gamma h s$ می‌باشد لنگر خمشی ماکزیمم برابر است با

۳۹۰

مثبت محور Z و به فاصله $b/6$ از مرکز سطح قرار می‌گیرد. محور خنثی بر لبه سمت چپ مقطع منطبق خواهد گشت. هنگامی که بار P در روی خط مستقیم PQ حرکت می‌کند، محور خنثی حول نقطه m در گونه مقطع عرضی مستطیلی دوران خواهد نمود. بنابراین خط PQ یکی از اضلاع هسه مقطع مربوط می‌باشد. اضلاع دیگر را در نظر گرفتن تقارن مقطع بدست می‌آید و ما مشاهده می‌کنیم که هسته مقطع عرضی یک لوری به افطار $b/3$ و $h/3$ می‌باشد. نا رمانی که بار فشاری P در داخل لوزی مرور قرار دارد، محور خنثی مقطع عرضی را قطع نخواهد نمود و تمام مقطع تحت فشار خواهد بود.

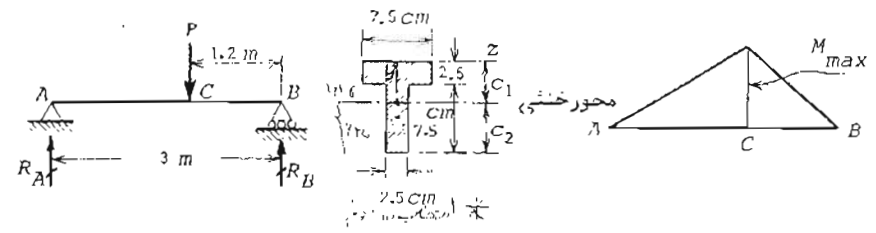
۸-۱۱ مسائل حل شده

$$\frac{b^2 h^2}{12} + A y^2$$

برای یافتن مرکز ثقل و لوریت

مسئله ۸-۱

تعیین کنید حداکثر تنش عمودی ناشی از حمش را در تیر ساده شکل ۴۲-۸ و وقتی که $P = 600 \text{ Kg}$ و سطح مقطع عرضی آن مطابق شکل ۴۳-۸ باشد.



شکل ۴۲-۸

شکل ۴۳-۸

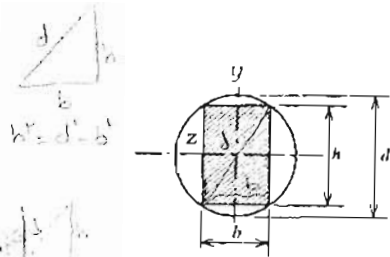
مودار لنگر خمشی در روی تیر
شکل ۴۴-۸

حل: حداکثر لنگر خمشی در مقطع C و بنابراین حداکثر تنش عمودی نیز در این مقطع می‌باشد (شکل ۴۴-۸).

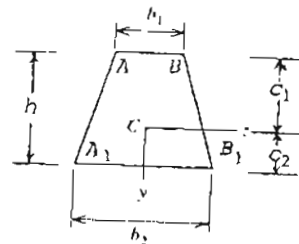
$$M_{\max} = \overline{AC} R_A = (1.8) \left(\frac{1.2}{3} \right) P = 0.72P = 432 \text{ mKg}$$

برای تعیین محل محور خنثی از فرمول تعیین مرکز سطح استفاده می‌کنیم. برای این

۳۹۲



شکل ۸-۴۷



شکل ۸-۴۸

فویترین تیر باید بیشترین ضریب مقطع (S) را داشته باشد تا مقدار تنشهای عمودی حداکثر در آن حداقل باشد ($\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S}$)

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} \quad \text{ضریب مقطع حول محور } z$$

$$\frac{dS}{db} = 0 \Rightarrow d^2 - b^2 + b(-2b) = 0$$

$$b = d/\sqrt{3}$$

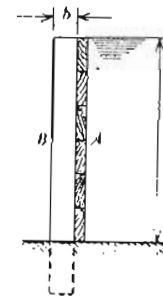
$$h = \sqrt{d^2 - b^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}} d$$

مسئله ۸-۴

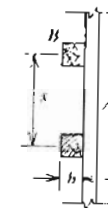
مسئله ۸-۴

یک تیر منشوری با مقطع ذوزنقه‌ای تحت خمشی خالص قرار دارد (شکل ۸-۴۸). بالای تیر تحت فشار و پایین آن تحت کشش است. اگر تنشهای مجاز در کشش و فشار به نسبت $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \beta$ باشد نسبت $\frac{b_1}{b_2}$ را چنان بیابید که وزن تیر حداقل باشد. ارتفاع مقطع را ثابت فرض کنید.

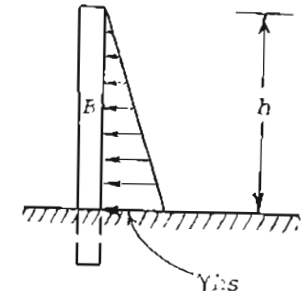
۳۹۲



شکل ۸-۴۵



شکل ۸-۴۶



$$M_{max} = \frac{1}{2} (h) (\gamma h s) \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{\gamma h^3 s}{6}$$

شش عمودی ماکزیمم در مقطع لگر خمشی ماکزیمم برابر است با

$$\sigma_w = \frac{M_{max} c}{I} = \frac{\frac{\gamma h^3 s}{6} \frac{b}{2}}{\frac{1}{12} b^4} = \frac{\gamma h^3 s}{b^3}$$

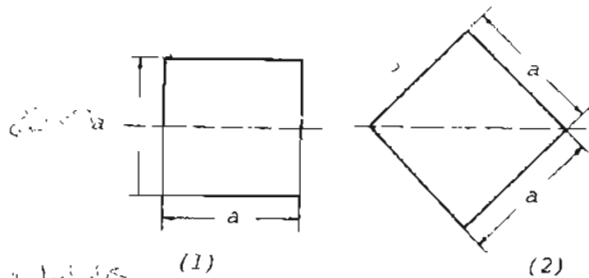
$$b = h \sqrt[3]{\frac{\gamma s}{\sigma_w}} = 180 \sqrt[3]{\frac{(1000)(90)}{10^6 (35)}} = 24.66 \approx 25 \text{ cm}$$

مسئله ۸-۳ ✓

از یک قطعه درخت به قطر d باید یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل بریده شود (شکل ۸-۴۷). ابعاد تیر (b و h) چقدر باید باشد تا قویترین تیر را داشته باشیم؟

حل: در طرح نیرها غالباً "تنشهای عمودی عامل تعیین کننده می باشد. از این رو

۳۹۵



شکل ۴۹-۸

ضریب مقطع در حالت ۱ مساوی است با

$$S_1 = \frac{I_1}{c_1} = \frac{\frac{1}{12} a^4}{\frac{1}{2} a} = \frac{1}{6} a^3$$

ضریب مقطع در حالت ۲ برابر است با (مقطع مزبور را مجموعه‌ای از دو مثلث فرض می‌کنیم و از حداقل بیوت ۱ کاب استفاده می‌کنیم)

$$S_2 = \frac{I_2}{c_2} = \frac{\frac{2}{12} (\sqrt{2} a) (\frac{a}{\sqrt{2}})^3}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

نسبت

نسبت لنگرهای ماکزیم در دو وضعیت ۱ و ۲ برابر است با

$$\frac{M_{max1}}{M_{max2}} = \frac{\sigma_w S_1}{\sigma_w S_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{6} a^3}{\frac{\sqrt{2}}{12} a^3} = \sqrt{2}$$

توجه کنید گشتاورهای لختی در دو حالت مساوی می‌باشد ($I_1 = I_2$) ولی c_1 و c_2 با یکدیگر فرق دارند. I فقط c ها را در نظر بگیرید.

مسئله ۶-۸ ✓

یک تراکتور ۶ تنی باید از روی پلی که از دو تیر موازی تشکیل شده است عبور کند

۳۹۴

حل: وزن سیر و فنی حداقل خواهد بود که پس فشاری ماکزیم در تار AB هم زمان با تنش کششی ماکزیم در تار $A_1 B_1$ به مقدار محاسبه شود. اگر C مرکز سطح دوزقه باشد فواصل c_1 و c_2 از روابط زیر بدست می‌آید (با استفاده از بیوت ۱ کاب):

$$c_1 = \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} ; c_2 = \frac{h(2b_1 + b_2)}{3(b_1 + b_2)} \quad (1)$$

تنش فشاری ماکزیم برابر است با

$$(\sigma_c)_{max} = \frac{M_{max} c_1}{I_z} \quad (2)$$

تنش کششی ماکزیم برابر است با

$$(\sigma_t)_{max} = \frac{M_{max} c_2}{I_z} \quad (3)$$

از تقسیم نمودن روابط ۲ و ۳ بر یکدیگر و با استفاده از روابط ۱ خواهیم داشت

$$\frac{(\sigma_t)_{max}}{(\sigma_c)_{max}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + 2b_2} = \beta$$

$$\frac{2 \frac{b_1}{b_2} + 1}{\frac{b_1}{b_2} + 2} = \beta ; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2\beta - 1}{2 - \beta}$$

مسئله ۵-۸ ✓

تعیین کنید نسبت لنگرهای ماکزیم را که تیری با مقطع مربع در دو وضعیت مختلف شکل ۴۹-۸ می‌تواند تحمل کند به شرط اینکه در هیچ حالتی تنش از تنش محار تجاوز نکند. فرض کنید خمش در حول محور افقی (حظ چین) صورت می‌گیرد.

حل: اگر تنش محاز را σ_w باسیم حداکثر لنگر خمشی که یک مقطع می‌تواند تحمل کند برابر است با

$$M_{max} = \sigma_w S$$

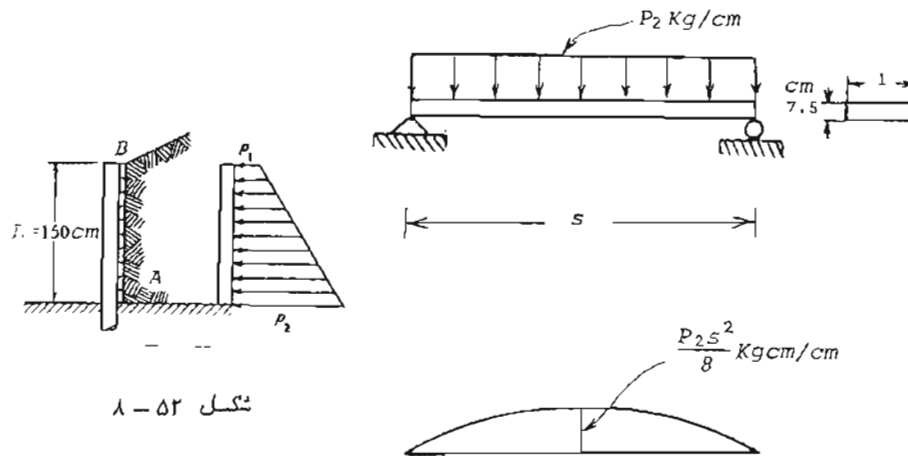
۳۹۷

سایر این صرب مقطع لازم برابر است با

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_w} = \frac{288900}{1120} = 258 \text{ cm}^3$$

مسئله ۷-۸

دیوار حائلی برای نگهداشتن یک خاکریز تشکیل شده است از سمع‌های چوبی به قطر ۳۰ cm که در پشت آنها الوارهایی به ضخامت ۲.۵ cm قرار دارد (مطابق شکل ۸-۵۲) فرض می‌شود که فشار خاک بر دیوار حائلی مطابق شکل به صورت دوزخه‌ای باشد که در آن $P_1 = 500 \text{ Kg/m}^2$ و $P_2 = 2000 \text{ Kg/m}^2$ همچنین فرض می‌شود که الوارها در بین سمع‌ها مانند تیرهای ساده عمل کنند و تنش مجاز در خمش برای الوارها و سمع‌ها $\sigma_w = 84 \text{ Kg/cm}^2$ باشد. فاصله مناسب بین سمع‌ها چقدر است ؟



شکل ۸-۵۲

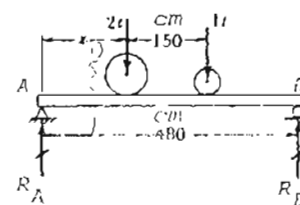
نمودار لنگر خمشی الواری که در پایین‌ترین نقطه قرار دارد.

شکل ۸-۵۳

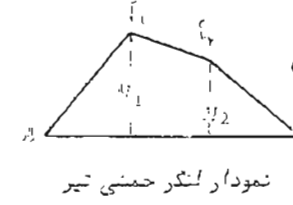
حل : فاصله بین سمع‌ها را s فرض می‌کنیم. بار وارد بر الوارها در طول دهانه

۳۹۶

(شکل ۸-۵۰) . فاصله بین محورهاهای تراکتور ۱۵۰ cm و بار محورهاهای عقب و جلوی آن به ترتیب ۲ و ۴ تن می‌باشد. اگر تنش مجاز مصالح تیرها $\sigma_w = 1120 \text{ Kg/cm}^2$ باشد



شکل ۸-۵۰



شکل ۸-۵۱

حل : فاصله چرخ عقب تراکتور از تکیه گاه A را x می‌نامیم. منحنی لنگر خمشی تیر مزبور مطابق شکل ۸-۵۱ است. لنگر خمشی ماکزیمم در ربر یکی از چرخ‌ها می‌باشد و ما باید تعیین کنیم خمش حرکت تراکتور در روی پیل (یا تعبیر x) چه موقع بیشترین لنگر خمشی حاصل می‌شود. برای این کار باید M_1 و M_2 را بر حسب x تعیین کنیم و ماکزیمم انواع $M_1(x)$ و $M_2(x)$ را بیابیم. ولی چون بار چرخ عقب دو برابر بار چرخ جلو می‌باشد ماکزیمم $M_1(x)$ از ماکزیمم $M_2(x)$ بیشتر خواهد شد و ما کافی است فقط ماکزیمم $M_1(x)$ را تعیین کنیم.

$$\sum M_A = R_A = \frac{2(480-x) + 1(480-x-150)}{480} = \frac{430-x}{160}$$

$$M_1 = R_A x = \frac{430x - x^2}{160}$$

$$\frac{dM_1}{dx} = 0 \Rightarrow 430 - 2x = 0 \quad x = 215 \text{ cm}$$

$$(M_1)_{max} = \frac{(430)(215) - (215)^2}{160} = 288.9 \text{ cmt}$$

۳۹۹

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{(2P_1 + P_2)L^2 s}{6} = \frac{16(2P_1 + P_2)L^2 s}{3\pi d^3} = \frac{\pi d^3}{32}$$

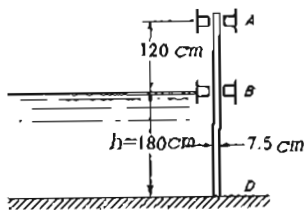
اگر تنش ماکزیمم برابر تنش محاز اخبار نبود حداکثر فاصله بین شمع‌ها بدست می‌آید.

$$s_{\max} = \frac{3\pi d^3 \sigma_w}{16(2P_1 + P_2)L^2} = \frac{3\pi (50)^3 8.4}{16(\frac{1000}{10000} + \frac{2000}{10000}) 150^2} = 198 \text{ cm} \quad (2)$$

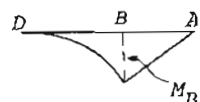
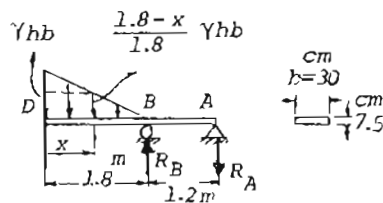
با مقایسه روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که فاصله مناسب بین شمع‌ها $s = 177 \text{ cm}$ می‌باشد. اگر فاصله شمع‌ها از این مقدار تجاوز کند تنش در الوارها از مقدار تنش مجاز تجاوز خواهد کرد.

توجه کنید در واقع خمش الوارها خمشی متعارف می‌باشد ولی چون عرض آنها کم است خمشی آنها به صورت متعارف فرض شده است.

مسئله ۸-۸



شکل ۸-۵۵



نمودار لنگر خمشی تیر

شکل ۸-۵۶

۳۹۸

آنها یکپارچه می‌شوند. چون عرض الوارها کم است می‌توان در عرض آنها بار را یکپارچه فرض نمود. الواری که در پایین ترین نقطه قرار دارد بیشترین بار را تحمل می‌کند و بار وارد بر آن $P_2 \text{ Kg/cm}$ می‌باشد (برای واحد عرض الوار). لنگر خمشی ماکزیمم در وسط الوار برابر است با $M_{\max} = \frac{P_2 s^2}{8} \text{ Kgcm/cm}$ بنابراین تنش خمشی ماکزیمم در طول الوار مساوی می‌شود با (ضخامت الوار h)

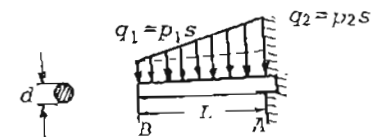
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{\frac{P_2 s^2}{8}}{\frac{1}{6}(1)h^2}$$

اگر تنش ماکزیمم برابر تنش محاز اخبار بود حداکثر طول دهانه الوارها s به دست می‌آید. بنابراین

$$s_{\max} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\sigma_w}{P_2}} h = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{8.4}{0.2}} (7.5) = 177 \text{ cm} \quad (1)$$

بار وارد بر شمع‌ها (شکل ۸-۵۴) به صورت دوزخه‌ای می‌باشد که شدت آن از $q_1 = P_1 s$ در بالا تا $q_2 = P_2 s$ در پایین آن تغییر می‌کند. حداکثر لنگر خمشی در نقطه A می‌باشد که برابر است با

$$M_{\max} = M_A = q_1 L \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} (q_2 - q_1) L \left(\frac{L}{3} \right) = \frac{(2q_1 + q_2)}{6} L^2 = \frac{(2P_1 + P_2)L^2 s}{6}$$



شکل ۸-۵۴

بنابراین حداکثر تنش خمشی در طول شمع در پایین‌ترین نقطه آن می‌باشد که برابر است با

۴۰۰

با استفاده از الوارهایی به مقطع $7.5\text{cm} \times 30\text{cm}$ و طول 3 m که از بین ریل‌های A و B مطابق شکل ۸-۵۵ عبور می‌کند یک سد موقتی در کانال آبی احداث شده است. با فرض اینکه در D تکیه گاه افقی وجود نداشته باشد ماکزیمم شش خمشی را در هر الوار وقتی که عمق آب در سمت چپ سد 1.8 متر می‌باشد حساب کنید. وزن مخصوص آب $\gamma = 1000\text{ Kg/m}^3$ می‌باشد.

حل: بارگذاری در روی هر الوار مطابق شکل ۸-۵۶ می‌باشد. ابتدا واکنش‌های R_A و R_B را پیدا می‌کنیم و سپس منحنی لنگر خمشی را رسم می‌کنیم.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 1.2 R_B = \frac{1}{2} (1.8) (\gamma h b) (2.4)$$

$$R_B = 1.8 \gamma h b = 1.8 \left(\frac{1000}{10^6} \right) (180) (30) : R_B = 9.72 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (1.8) (\gamma h b) + R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B - 0.9 \gamma h b = 0.9 \gamma h b = 4.86 \text{ Kg}$$

$$0 \leq x \leq 1.8 \text{ m} \quad M = \frac{1}{2} (x^2) \frac{1.8-x}{1.8} \gamma h b + \frac{1}{2} (x) \left(\frac{2x}{3} \right) \left[\gamma h b - \frac{1.8-x}{1.8} \gamma h b \right]$$

$$= \gamma h b \left[\frac{1.8 x^2 - x^3}{3.6} + \frac{x^3}{5.4} \right] = \frac{\gamma h b}{10.8} (5.4 x^2 - x^3)$$

ماکزیمم لنگر خمشی را در فاصله BD پیدا می‌کنیم.

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow 10.8x - 3x^2 = 0 : x = 0, 3.6 \text{ m}$$

بنابراین منحنی لنگر خمشی در فاصله BD مقدار ماکزیمم ندارد. منحنی لنگر خمشی در طول هر الوار مطابق شکل ۸-۵۶ است. حداکثر لنگر خمشی در نقطه B می‌باشد که برابر است با

$$M_{\max} = M_B = \frac{\gamma h b}{10.8} [5.4 (1.8)^2 - (1.8)^3] = 1.08 \gamma h b$$

$$= 1.08 (1000) (1.8) (0.3) = 583.2 \text{ mKg}$$

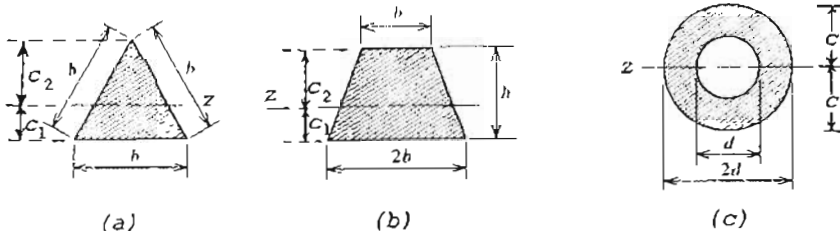
ماکزیمم تنش خمشی نیز در مقطع B الوار می‌باشد که برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} = \frac{58320 \left(\frac{7.5}{2} \right)}{\frac{1}{12} (30) (7.5)^3} = 207 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۹-۸

۴۰۱

اگر تنش محاز در کشش و فشار σ_w باشد حداکثر لنگر خمشی $M_{\max}$ که هر یک از مقاطع شکل ۸-۵۷ می‌توانند تحمل کنند چقدر است؟

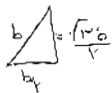


شکل ۸-۵۷

حل:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S_{\min}} = \sigma_w$$

$$M_{\max} = S_{\min} \sigma_w$$



$$I_z = \frac{b \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b \right)^3}{36} = \frac{\sqrt{3}}{96} b^4$$

$$S_{\min} = \frac{I_z}{c_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{96} b^4}{\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b \right)} = \frac{b^3}{32}$$

$$M_{\max} = \frac{b^3 \sigma_w}{32}$$

برای مقطع (a):

$$I_z = \frac{h^3 (b^2 + 8b^2 + 4b^2)}{36(b+2b)} = \frac{13}{108} h^3 b$$

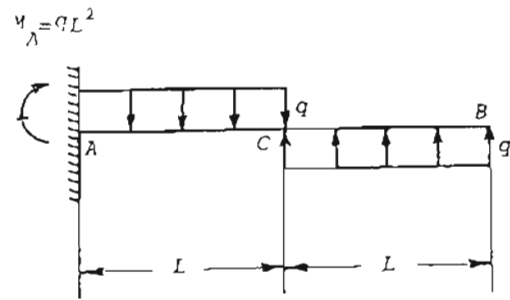
$$c_2 = h - \frac{h(2b+2b)}{3(b+2b)} = h \left(1 - \frac{4}{9} \right) = \frac{5}{9} h$$

$$S_{\min} = \frac{I_z}{c_2} = \frac{\frac{13}{108} h^3 b}{\frac{5}{9} h} = \frac{13}{60} b h^2$$

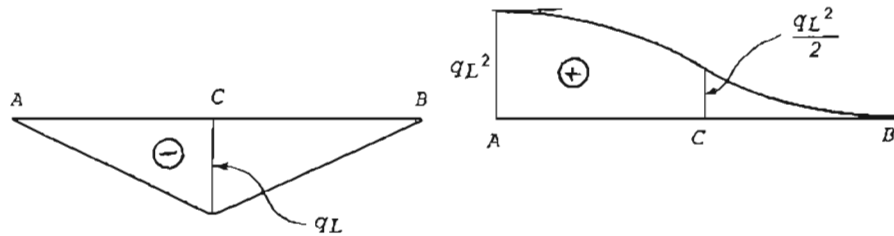
$$M_{\max} = \frac{13}{60} b h^2 \sigma_w$$

برای مقطع (b):

۴۰۳



شکل ۵۸-۸



شکل ۶۰-۸ نمودار نیروی برشی (V) شکل ۶۱-۸ نمودار لنگر خمشی (M)

بنابراین حداکثر تنش‌های فشاری و کششی که در مقطع A می‌باشد به ترتیب عبارتند از

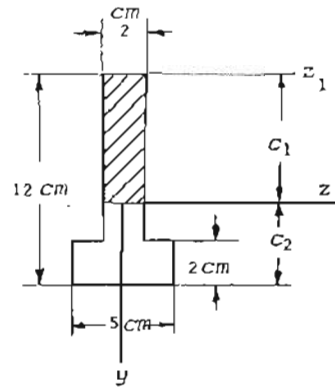
$$(\sigma_c)_{\max} = \frac{M_{\max} c_1}{I_z} = \frac{(40000)(7)}{410} = 682.9 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{فشاری})$$

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{M_{\max} c_2}{I_z} = \frac{(40000)(5)}{410} = 487.8 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{کشی})$$

سیروی برشی ماکزیمم در وسط تیر (مقطع C) می‌باشد که برابر است با

$$V_{\max} = qL = (100)(2) = 200 \text{ Kg}$$

بنابراین حداکثر تنش برشی در وسط تیر و در روی تار خنثی است. انتگرال Q باید در روی سطح هائور حورده حساب شود (شکل ۵۹-۸).



شکل ۵۹-۸

۴۰۴

برای محاسبه درایه است.

$$I_z = \frac{\pi (2d)^4}{64} - \frac{d^4}{64} = \frac{15\pi d^4}{64}$$

برای مقطع (C):

$$S = \frac{I_z}{c} = \frac{\frac{15\pi d^4}{64}}{\frac{2d}{2}} = \frac{15\pi d^3}{64}$$

$$M_{\max} = S \sigma_w = \frac{15\pi}{64} d^3 \sigma_w$$

مسئله ۱۰-۸

برای تیرهای AB، مقطع و بار گذاری نشان داده شده در شکل‌های ۵۸-۸ و ۵۹-۸ مطلوب است:

الف - رسم منحنی نیروی برشی، ب - رسم منحنی لنگر خمشی، پ - حداکثر تنش‌های فشاری و کششی در مقطع تیر با فرض اینکه $q=100 \text{ Kg/m}$ و $L=2 \text{ m}$ - حداکثر تنش برشی در حان سیر.

حل: برای تعیین محل محور خنثی از فرمول مرکز سطح در مختصات yz استفاده می‌کنیم (شکل ۵۹-۸).

$$c_1 = \frac{\int y dA}{A} = \frac{(10)(2)(5) + (5)(2)(11)}{(10)(2) + (5)(2)} = 7 \text{ cm}$$

$$c_2 = 12 - c_1 = 5 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{1}{12}(2)(10)^3 + (10)(2)(2)^2 + \frac{1}{12}(5)(2)^3 + (5)(2)(4)^2 = 410 \text{ cm}^4$$

لنگر خمشی ماکزیمم در طول تیر برابر است با (در محل تکیه گاه A)

$$M_{\max} = qL^2 = 100(2)^2 = 400 \text{ mKg}$$

۴۰۵

حل: نیروی برشی در تمام طول تیر ثابت و برابر P می‌باشد. برای تعیین تنش برشی در محل اتصال قطعات باید انگرال Q را در روی سطح هائور حورده حساب کنیم (شکل ۸-۶۵).

$$Q = f_y d A = \frac{A}{(10)(5)(5)} = 250 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (10)(15)^3 = 2812.5 \text{ cm}^4$$

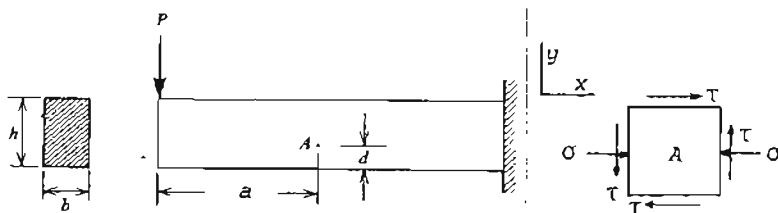
$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \Rightarrow P_w = \frac{I b \tau_w}{Q} = \frac{(2812.5)(10)(3.5)}{250} = 393.75 \text{ Kg}$$

تنش خمشی ماکزیمم در طول تیر در مقطع A و در روی تارهای فوقانی و تحتانی آن می‌باشد.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} = \frac{\frac{1}{2} P L \frac{h}{2}}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{6 P L}{b h^2} = \frac{6(393.75)(90)}{(10)(15)^2} = 94.5 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۸-۱۲

یک تیر طره‌ای با مقطع مستطیل (شکل ۸-۶۶) را در انتهای آزادش تحمل می‌کند. تنش‌های اصلی را در نقطه A که در روی شکل مشخص شده است پیدا کنید و آنها را روی عنصری با ابعادهای مشخص نشان دهید.



شکل ۸-۶۶

شکل ۸-۶۷

۴۰۴

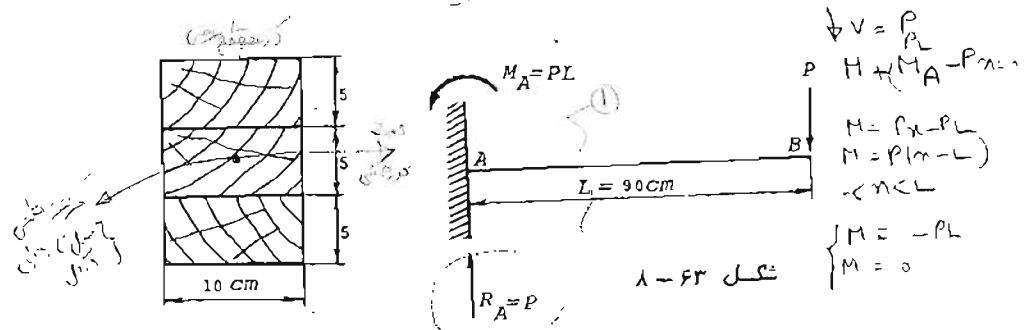
$$Q = f_y d A = (7)(2)(3.5) = 49 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} Q}{I t} = \frac{(200)(49)}{(410)(2)} = 11.95 \text{ Kg/cm}^2$$

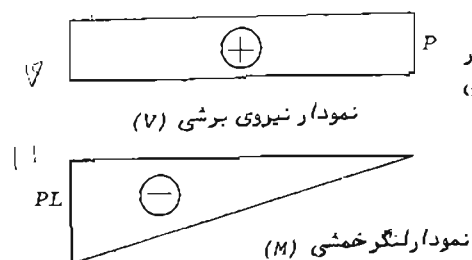
مسئله ۸-۱۱

تیر چوبی با چسباندن سه تکه چوب بوسیله چسب ساخته شده است (شکل ۸-۶۲).

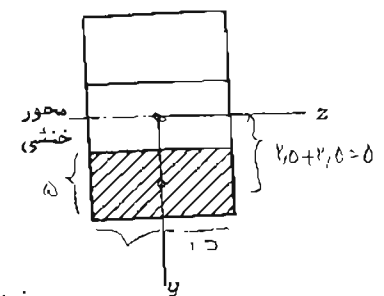
تنش برشی مجاز در محل اتصالات 3.5 Kg/cm^2 می‌باشد. اگر تیر مزبور به عنوان یک تیر طره‌ای (شکل ۸-۶۳) به طول 90 cm با یک بار استهابی P بکار رود، بار مجاز P_w چقدر می‌باشد تا قطعات چوب در محل اتصالات گسیخته نشود؟ تنش خمشی ماکزیمم برای بار مزبور چقدر است؟



شکل ۸-۶۲



شکل ۸-۶۴

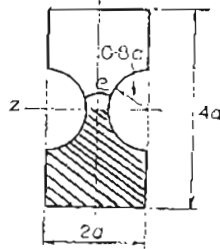


شکل ۸-۶۵

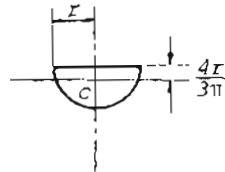
۴۰۷

مسئله ۱۳-۸

به مقطع متعارف شکل ۸-۶۹ نیروی برشی P و لنگر خمشی PL اثر می‌کند. اگر نسبت تنش برشی ماکزیمم (در محل محور خنثی) به تنش عمودی ماکزیمم نباید از 0.5 کمتر باشد حداکثر مقدار مجاز L را بر حسب a تعیین کنید.



شکل ۸-۶۹



شکل ۸-۷۰

طبق جدول تنش و کرنش

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{VQ}{Mc b}$$

حل:

$$b = 2a - 2(0.8a) = e$$

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{VQ}{Mc b} = \frac{PQ}{PL(2a)} = \frac{Q}{0.8La^2}$$

انتگرال Q باید در روی سطح هانور خورده حساب نمود. برای محاسبه Q توجه کنید فاصله مرکز سطح یک نیم دایره (به شعاع r) از فطر آن $\frac{4r}{3\pi}$ می‌باشد (شکل ۸-۷۰). Q برابر است با گشتاور اول مربعی به ابعاد $2a \times 2a$ منهای گشتاور اول نیم دایره‌ای به فطر $1.6a$.

$$Q = (2a)(2a)(a) - \frac{\pi}{2} (0.8a)^2 \left(\frac{4 \times 0.8a}{3\pi} \right) = 3.659 a^3$$

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{3.659a^3}{0.8La^2} = 4.573 \frac{a}{L} \geq 0.5$$

۴۰۶

فرض کنید $d=7.5 \text{ cm}$, $a=60 \text{ cm}$, $P=450 \text{ Kg}$, $h=25 \text{ cm}$, $b=10 \text{ cm}$

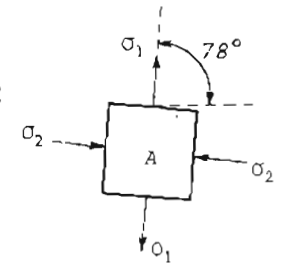
حل: عنصر A تحت تأثیر تنش‌هایی مطابق شکل ۸-۶۷ می‌باشد. تنش‌های σ و τ را در نقطه A حساب می‌کنیم.

$$\sigma = \frac{My}{I} = - \frac{Pa(\frac{h}{2} - d)}{\frac{1}{12}bh^3} = - \frac{6Pa(h-2d)}{bh^3}$$

$$= - \frac{6(450)(60)(25-15)}{(10)(25)^3} = -10.37 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{Pbd(\frac{h}{2} - \frac{d}{2})}{\frac{1}{12}bh^3b} = \frac{6Pd(h-d)}{bh^3}$$

$$= \frac{6(450)(7.5)(25-7.5)}{(10)(25)^3} = 2.27 \text{ Kg/cm}^2$$



شکل ۸-۶۸

حال تنش‌های اصلی را در نقطه A پیدا می‌کنیم.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_x = -10.37 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \sigma_y = 0 ; \quad \tau_{xy} = 2.27 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = - \frac{10.37}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.37}{2}\right)^2 + (2.27)^2} = -5.18 \pm 5.66$$

$$\sigma_1 = 0.48 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \sigma_2 = -10.84 \text{ Kg/cm}^2$$

اکنون زاویه θ_p را که σ_1 با امتداد x می‌سازد پیدا می‌کنیم.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(2.27)}{-10.37} = -0.44 ; \quad \theta_p = 78^\circ$$

جهت و امتداد تنش‌های اصلی روی عنصر شکل ۸-۶۸ رسم شده است.

۴۰۹

لنگر خمشی در فاصله x از نقطه A برابر است با

$$M = R_A \sin \alpha x = \left(\frac{P}{2}\right)(0.8)x = 0.4Px = 540x$$

منحنی لنگر خمشی فاب ABC در شکل ۷۲-۸ رسم شده است. حداکثر لنگر خمشی در نقطه B می‌باشد که برابر است با

$$M_B = 540(3) = 1620 \text{ mKg}$$

نیروی محوری در سراسر طول AB ثابت و برابر است با

$$N = R_A \cos \alpha = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

باینبارین حداکثر تنش‌های کششی و فشاری در فاب در مقطع B می‌باشد.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = -\frac{P \cos \alpha}{2A} + \frac{M_B y}{I}$$

حداکثر تنش فشاری در تار فوقانی مقطع B می‌باشد.

$$(\sigma_c)_{\max} = -\frac{P \cos \alpha}{2A} - \frac{M_B \left(\frac{d}{2}\right)}{I}$$

$$= -\frac{(1350)(0.6)}{(2)(103.9)} - \frac{(162000)(27.3)}{(2)(8820)} = 254.6 \text{ Kg/cm}^2$$

حداکثر تنش کششی در تار تحتانی مقطع B می‌باشد.

$$(\sigma_t)_{\max} = -\frac{P \cos \alpha}{2A} + \frac{M_B \left(\frac{d}{2}\right)}{I}$$

$$= -\frac{(1350)(0.6)}{(2)(103.9)} + \frac{(162000)(27.3)}{(2)(8820)} = 246.8 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۸-۱۵

سطح مقطع یک میله با مقطع مربع شکل در مقطع mn نصف شده است (شکل

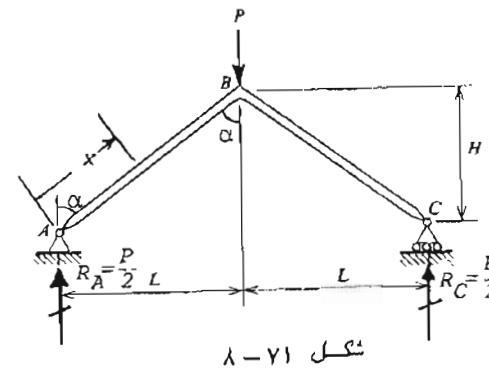
۷۲-۸) حداکثر تنش‌های کششی و فشاری را در مقطع کوچک شده میله تحت اثر بار P حساب کنید.

۴۰۸

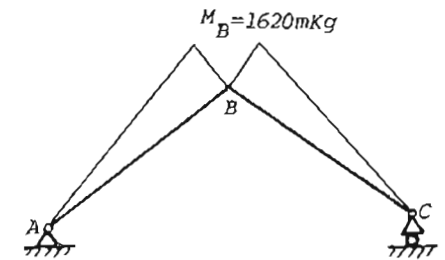
حداکثر مقدار محاز L : $l_{\max} = 9.15 a$

مسئله ۸-۱۴

فاب ABC با حوس دادن دو لوله فولادی در نقطه B تشکیل شده است (شکل ۷۱-۸). هر لوله سطح مقطع $A=103.9 \text{ cm}^2$ و گشتاور لختی $I=8820 \text{ cm}^4$ و فطر خارجی $d=27.3 \text{ cm}$ دارد. حداکثر تنش‌های کششی و فشاری در فاب را با فرض $H=1.8 \text{ m}$ و $L=2.4 \text{ m}$ و $P=1350 \text{ Kg}$ پیدا کنید.



شکل ۷۱-۸



نمودار لنگر خمشی فاب ABC

شکل ۷۲-۸

حل: به علت تقارن کافی است که فقط قسمت AB را در نظر بگیریم.

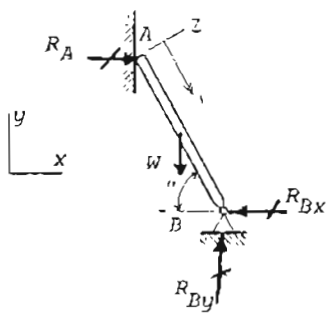
$$\overline{AB} = \sqrt{H^2 + L^2} = \sqrt{1.8^2 + 2.4^2} = 3 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{H}{\overline{AB}} = \frac{1.8}{3} = 0.6, \quad \sin \alpha = 0.8$$

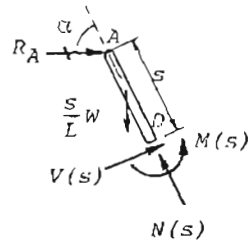
۳۱۱

مسئله ۱۶-۸

میله دایره‌ای نوپیر AB (شکل ۷۵-۸) در B دارای یک‌گانه مفصلی و در A روی یک‌گانه بدون اصطکاکی تکیه دارد. تعیین کنید فاصله s از نقطه A را که در آن مقطع تنش فشاری تحت اثر وزن میله ماکزیمم می‌باشد. طول میله را L، قطر میله را d و زاویه بین میله و افق را α فرض کنید.



شکل ۷۵-۸



نمودار جسم آزاد قطعه AD

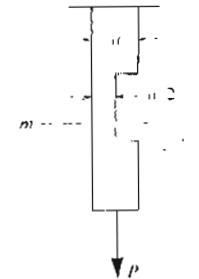
شکل ۷۶-۸

حسب: وزن میله را W فرض می‌کنیم و نمودار جسم آزاد آن را در نظر می‌گیریم. از تعادل لنگری میله AB حول اتصال B نتیجه می‌شود

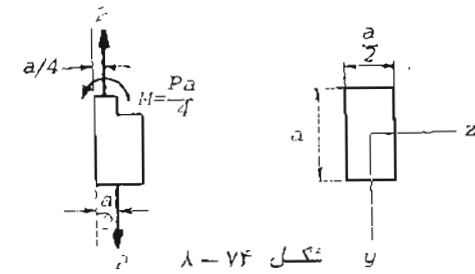
$$R_A L \sin \alpha = W \frac{L}{2} \cos \alpha : R_A = \frac{1}{2} \cot \alpha W$$

فرض می‌کنیم نقطه D از میله به فاصله s از تکیه‌گاه A باشد. نیروی برشی، نیروی محوری و لنگر خمشی در نقطه D را به ترتیب $V(s)$ ، $N(s)$ و $M(s)$ می‌نامیم. از نمودار جسم آزاد قطعه AD (شکل ۷۶-۸) می‌توان مقادیر مزبور را پیدا نمود. سوخته‌کند وزن قطعه AD برابر $\frac{S}{L} W$ می‌باشد. از تعادل قطعه AD در امتداد AD نتیجه می‌شود

۴۱۰



شکل ۷۳-۸



نمودار جسم آزاد میله از مقطع mn به پایین

حل: اگر میله مزبور را در مقطع mn قطع و نمودار جسم آزاد آن را رسم کنیم مشاهده می‌کنیم که در مقطع mn نیروی P در مرکز سطح آن و لنگر $M = \frac{Pa}{4} z$ وارد می‌شود. بنابراین این مقطع حول محور y تحت خمشی قرار دارد و تنش عمودی در فاصله z از محور y برابر است با

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mz}{I} = \frac{P}{\frac{a^2}{2}} + \frac{\frac{Pa}{4} z}{\frac{1}{12} (a)(\frac{a}{2})^3} = \frac{2P}{a^2} \left(1 + 12 \frac{z}{a} \right)$$

حداکثر تنش کششی در فاصله $z = \frac{a}{4}$ می‌باشد و برابر است با

$$(\sigma_t)_{\max} = \sigma \left(z = \frac{a}{4} \right) = \frac{8P}{a^2}$$

حداکثر تنش فشاری در فاصله $z = -\frac{a}{4}$ می‌باشد و برابر است با

$$(\sigma_c)_{\max} = \sigma \left(z = -\frac{a}{4} \right) = -\frac{4P}{a^2}$$

۴۱۲

(شکل ۷۷ - ۸) اگر بار محوری P در نقطه p_1 وارد شود تنش در نقطه p_2 باید برابر صفر گردد.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{My}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pe y}{I} = 0$$

$$r_1 = e = - \frac{I}{Ay}$$

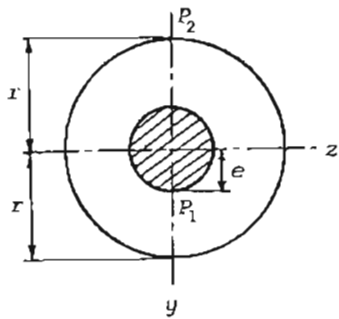
با جایگزینی $A = \pi r^2$, $I = \frac{\pi r^4}{4}$ و $y = -r$ در رابطه فوق مقدار r_1 بدست می آید.

$$r_1 = - \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{(\pi r^2)(-r)} = \frac{r}{4}$$

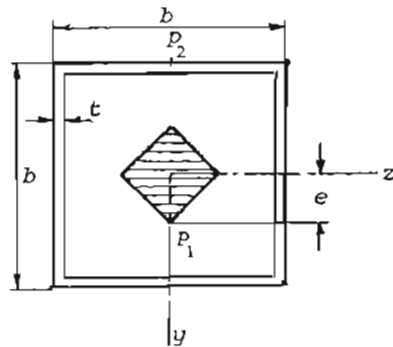
بنابراین هسته یک مقطع دایره‌ای دایره‌ای به شعاع $r_1 = \frac{r}{4}$ می باشد.

مسئله ۱۸ - ۸

هسته یک مقطع لوله‌ای جدار نازک به شکل مربع و طول اضلاع b را پیدا کنید (شکل ۷۸ - ۸)



شکل ۷۷ - ۸



شکل ۷۸ - ۸

۴۱۲

$$N(s) = -R_A \cos \alpha - \frac{S}{L} W \sin \alpha = - \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} W - \frac{S}{L} \sin \alpha W$$

از تعادل لنگری مقطع AD حول نقطه D نتیجه می شود

$$M(s) = s R_A \sin \alpha - \frac{S^2}{2L} W \cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha s W - \frac{1}{2} \cos \alpha \frac{S^2}{L} W$$

تنش عمودی در مقطع D از رابطه زیر بدست می آید :

$$\sigma(s) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I} = - \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} W + \frac{S}{L} \sin \alpha W}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha s W - \frac{1}{2} \cos \alpha \frac{S^2}{L} W}{\frac{\pi d^4}{64}} z$$

تنش فشاری ماکزیمم به ارای $z = - \frac{d}{2}$ حاصل می شود.

$$(\sigma_c)_{\max} = \sigma(z = -\frac{d}{2}) = - \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} W + \frac{S}{L} \sin \alpha W \right) - \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{1}{2} s \cos \alpha W - \frac{S^2}{2L} \cos \alpha W \right)$$

برای یافتن مقطعی که تنش فشاری در آن ماکزیمم است از رابطه فوق نسبت به S مشتق می گیریم و عبارت حاصله را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\frac{d(\sigma_c)_{\max}}{ds} = - \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{\sin \alpha}{L} W \right) - \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha W - \frac{S}{L} W \cos \alpha \right) = 0$$

پس از ساده نمودن این رابطه نتیجه می شود

$$s = \frac{L}{2} + \frac{d \tan \alpha}{8}$$

مسئله ۱۷ - ۸

هسته یک مقطع دایره‌ای را پیدا کنید.

حس : هسته یک مقطع دایره‌ای به شعاع r دایره‌ای می باشد به شعاع r_1

۴۱۵

حل: از رابطه $\sigma = \frac{M}{S}$ نتیجه می شود که برای یک تنش معین (در استحالت مجار) لنگر خمشی M با ضریب مقطع S متناسب می باشد. چون بار P در وسط دهانه سربال لنگر خمشی M متناسب می باشد سربال این P با S متناسب است. برای یک لوله دایره ای با استفاده از حداقل پیوست کتاب داریم

$$I_z = \frac{\pi}{64} (d_1^4 - d_2^4) = \frac{\pi}{64} (4^4 - 3^4) = 8.59 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{I_z}{\frac{d_1}{2}} = \frac{8.59}{2} = 4.295 \text{ cm}^3$$

برای چهار لوله مزبور می توانیم بسوییم:

$$I_z = 4 \left[8.59 + \frac{\pi}{4} (4^2 - 3^2) 2^2 \right] = 122.32 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{122.32}{4} = 30.58 \text{ cm}^3$$

بنابراین باری که چهار لوله می توانند تحمل کنند برابر است با

$$\frac{30.58}{4.295} (120) = 854 \text{ Kg}$$

مسئله ۲۰-۸

هسته یک مقطع دایره ای توخالی به شعاع خارجی r_2 و شعاع داخلی r_1 را بنیاد کنید (شکل ۸-۸۱). وقتی r_1 به r_2 نزدیک می شود (یعنی وقتی که مقطع به شکل حلقه نازک می باشد) هسته مقطع به چه صورت در می آید ؟

حل: هسته مقطع مزبور دایره ایست به شعاع r (سطح هائور خورده). اگر بار محوری P در نقطه p_1 وارد شود تنش در نقطه p_2 باید برابر صفر گردد.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mz}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pez}{I} = 0$$

$$r = e = - \frac{I}{Az}$$

۴۱۴

حل: اگر بار محوری P در نقطه p_1 وارد شود تنش در نقطه p_2 باید برابر صفر گردد. ضخامت حدار لوله را t فرض می کنیم.

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pcy}{I} = 0$$

$$e = - \frac{1}{Ay} = - \frac{\frac{1}{12} b^4 - \frac{1}{12} (b-2t)^4}{[b^2 - (b-2t)^2] (-\frac{h}{2})} = \frac{b^2 + (b-2t)^2}{6b}$$

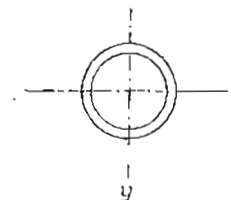
در مورد لوله های حدار نازک معادیر t^2 و tb کوچک می باشد و می توان از آنها صرف نظر نمود، در نتیجه داریم

$$e \approx \frac{b^2 + b^2}{6b} = \frac{b}{3}$$

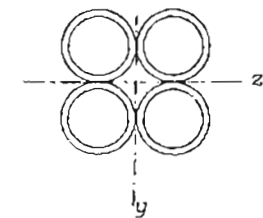
بنابراین هسته مقطع مزبور مربعی است که اضلاع آن با اضلاع مقطع زاویه 45° تشکیل می دهند و قطرهای آن به طول $\frac{2b}{3}$ می باشند.

مسئله ۱۹-۸

یک لوله فولادی به قطر خارجی $d_1 = 4 \text{ cm}$ و قطر داخلی $d_2 = 3 \text{ cm}$ به صورت تیر ساده برای پوشاندن دهانه یک منری بکار رفته است (شکل ۸-۷۹). حداکثر بار محازی که این لوله در وسط دهانه اش می تواند حمل کند 120 Kg می باشد. اگر چهار عدد از این لوله ها به صورت موازی به یکدیگر کاملاً متصل گردند (مطابق شکل ۸-۸۰) و برای پوشش همان دهانه بکار روند حداکثر باری که چهار لوله می توانند در وسط دهانه شان تحمل کنند چقدر است ؟



شکل ۷۹-۸



شکل ۸۰-۸

۴۱۷

حل: هسته مقطع مزبور یک لوزی است به اضلاع $2e_1$ و $2e_2$.

$$e_1 = -\frac{I_z}{A y} = \frac{27346}{(94.84)(20.65)} = 13.96 \text{ cm}$$

$$e_2 = -\frac{I_y}{A z} = \frac{1544}{(94.84)(9)} = 1.81 \text{ cm}$$

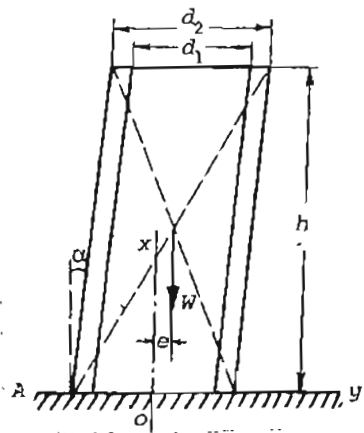
بنابراین هسته مزبور یک لوزی به اضلاع 27.92 cm و 3.62 cm می‌باشد.

مسئله ۸-۲۲

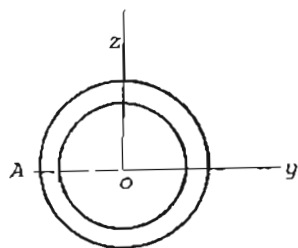
یک برج استوانه‌ای دایره‌ای به ارتفاع h و قطر داخلی d_1 و قطر خارجی d_2 شروع به کج شدن می‌کند. برای اینکه در برج کش ایجاد نشود حداکثر زاویه تمایل مجاز از قائم چقدر است؟ تنها بار وارده را وزن برج فرض کنید.

حل: وزن استوانه را W و زاویه تمایل آن از امتداد قائم را α می‌نامیم. تنش در مقاطع افقی برج استوانه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید (شکل ۸-۸۳):

$$\sigma = \frac{W}{A} + \frac{Wey}{I}$$



شکل ۸-۸۳



۴۱۶

$$r = -\frac{\frac{\pi r_2^4}{4} - \frac{\pi r_1^4}{4}}{(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)(-r_2)} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{4r_2}$$

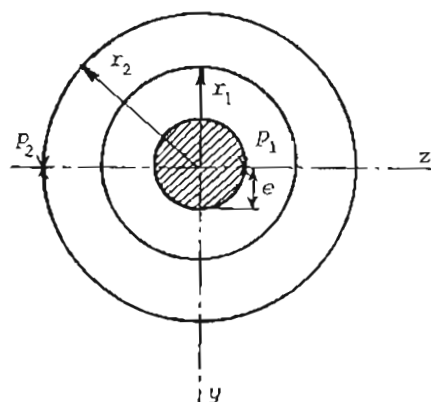
وفتی که r_1 به r_2 نزدیک می‌شود و مقطع به صورت حلقه نازکی در می‌آید مقدار r برابر خواهد بود با

$$r = \lim_{r_1 \rightarrow r_2} r = \frac{2r_2^2}{4r_2} = \frac{r_2}{2}$$

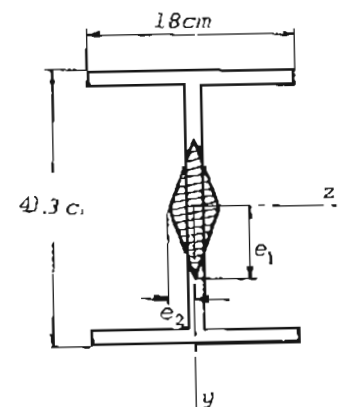
در این حالت هسته مقطع، دایره‌ای به شعاع $\frac{r_2}{2}$ می‌باشد.

مسئله ۸-۲۱

هسته مقطع I شکل ۸-۸۲ را پیدا کنید. مشخصات این مقطع عبارتند از: $I_z = 27346 \text{ cm}^4$; $I_y = 1544 \text{ cm}^4$; $A = 94.84 \text{ cm}^2$



شکل ۸-۸۱



شکل ۸-۸۲

۴۱۹

برای تعیین نمودن محل محور خنثی مقطع، مرکز سطح مقطع را نسبت به محور Z_1 بدست می آوریم (شکل ۸-۸۶)

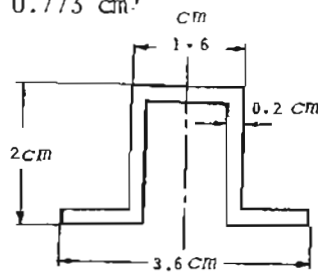
$$c_1 = \frac{(0.2)(1.6)(0.1) + (0.4)(1.8)(1.1) + (0.2)(2)(1.9)}{0.2(1.6) + 0.4(1.8) + 0.2(2)}$$

$$= \frac{1.584}{1.44} = 1.1 \text{ cm}$$

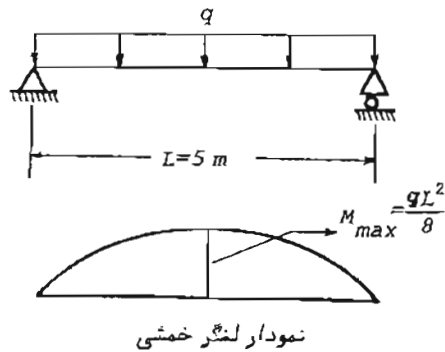
$$c_2 = 2 - 1.1 = 0.9 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{2}{12} (0.2)(1.8)^3 + \frac{1}{12} (2)(0.2)^3 + (2)(0.2)(0.8)^2 +$$

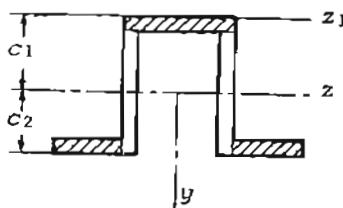
$$\frac{1}{12} (1.6)(0.2)^3 + (1.6)(0.2)(1)^2 = 0.773 \text{ cm}^4$$



شکل ۸-۸۴



شکل ۸-۸۵



شکل ۸-۸۶

۲۱۸

در این رابطه A سطح مقطع اسوانه، I گشتاور لختی مقطع نسبت به محور Z (عمود بر x و y) و e خروج از مرکز وزن W از مرکز O اسوانه می باشد. از رابطه فوق سبب می شود که بیشترین تنش در پای استوانه وجود دارد. بنابراین باید تنشها را در مقطع مزبور کنترل کنیم. حداکثر زاویه نمایل از امتداد قائم وقتی بدست می آید که کش در نقطه A برابر صفر شود. در این صورت

$$y = -\frac{d_2}{2}$$

$$\sigma = W \left(\frac{1}{A} - \frac{ed_2}{2I} \right) = 0 \quad : \quad e = \frac{2I}{Ad_2}$$

از طرفی $\sin \alpha$ و e رابطه زیر وجود دارد:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{e}{h} = \frac{2e}{h}$$

بنابراین

$$\alpha = \frac{4I}{Ad_2h} = \frac{4 \left(\frac{\pi d_2^4}{64} - \frac{\pi d_1^4}{64} \right)}{\left(\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4} \right) d_2 h} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4hd_2}$$

مسئله ۸-۲۳

برای پوشاندن سقف انباری به دهانه 5m از فولاد کنگره ای مطابق شکل ۸-۸۴ استفاده شده است. اگر تنش محار کششی و فشاری فولاد 2500 Kg/cm^2 باشد حداکثر باری را که بر سقف می توان وارد نمود تعیین کنید.

حس: اگر بار وارد در واحد طول و در عرض 3.6 cm از سقف را q بنامیم حداکثر لنگر خمشی در طول دهانه سقف و در عرض 3.6 cm برابر است با (شکل ۸-۸۵)

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$$

اگر ضریب مقطع حداقل مقطع فوق به عرض 3.6 cm را S و تنش مجاز کششی و فشاری را σ_w بنامیم می توانیم بنویسیم

$$\sigma_w = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{qL^2}{8S} \quad : \quad q = \frac{8S\sigma_w}{L^2}$$

۴۲۱

ضریب مقطع لازم مساویست با

$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_w} = \frac{30000}{1000} = 30 \text{ cm}^3$$

ضریب مقطع یک مقطع دایره‌ای به قطر d (با استفاده از پیوست ۱) برابر است با

$$S = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^3 / 64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

بنابراین حداقل قطر محور چرخ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d = \left(\frac{32S}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32 \times 30}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = 6.75 \text{ cm}$$

مسئله ۸-۲۵

تنش عمودی در مقطع AB دندانه چرخ دنده شکل ۸-۸۸ را پیدا کنید.
فشار وارد بر دندانه در بالای آن $P = 4500 \text{ Kg}$ ، ارتفاع دندانه $h = 30 \text{ mm}$ ، طول آن $b = 90 \text{ mm}$ و ضخامت آن $t = 22 \text{ mm}$ می‌باشد.

حل: لنگر خمشی در مقطع AB برابر است با

$$M = Ph = (4500)(30) = 13500 \text{ cmKg}$$

ضریب مقطع در مقطع AB مساوی است با

$$S = \frac{bt^2}{6} = \frac{9 \times 2.2^2}{6} = 7.26 \text{ cm}^3$$

بنابراین تنش عمودی در مقطع AB دندانه مزبور از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{13500}{7.26} = 1860 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۸-۲۶

مقطع عرضی تیر کوچکی که از هفت لایه تخته چند لایه ساخته شده در شکل

۴۲۰

ضریب مقطع حداقل

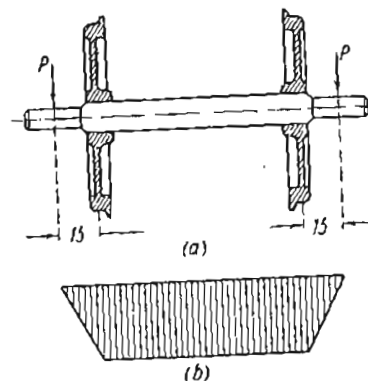
$$S = \frac{I_z}{c_1} = \frac{0.773}{1.1} = 0.703 \text{ cm}^3$$

$$q = \frac{8(0.703)(2500)}{(500)^2} = 0.0562 \text{ Kg/cm} = 5.62 \text{ Kg/m}$$

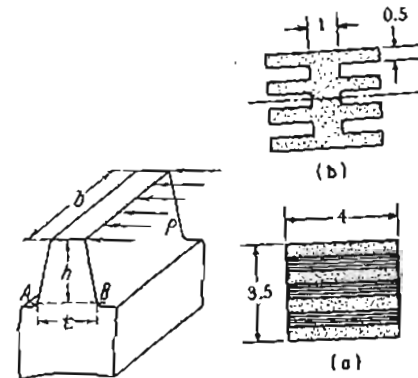
بنابراین حداکثر باری را که بر سقف می‌توان وارد نمود 156 Kg/m^2 (۵.۶۲) $\times \frac{100}{3.6}$ می‌باشد.

مسئله ۸-۲۴

قطر محور چرخ انومیل شکل ۸-۸۷ را بر اساس تنش‌های خمشی تعیین کنید.
هر یک از نیروهای وارد بر دو انتهای محور چرخ $P = 2000 \text{ Kg}$ و فاصله نقاط اثر این نیروها از صفحه میانی چرخ‌ها $a = 15 \text{ cm}$ می‌باشد. تنش مجاز را $\sigma_w = 1000 \text{ Kg/cm}^2$ فرض کنید.



شکل ۸-۸۷



شکل ۸-۸۸

شکل ۸-۸۹

حل: نمودار لنگر خمشی محور چرخ در شکل ۸-۸۷ b رسم شده است. ماکزیمم لنگر خمشی در روی محور چرخ برابر است با

$$M_{\max} = Pa = (2000)(15) = 30000 \text{ cmKg}$$

۴۲۲

$$V = \frac{P}{2} = 8000 \text{ Kg}$$

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} = \frac{(16000)(100)}{4} = 400000 \text{ cmKg}$$

گشتاور لختی مقطع عرضی تیر نسبت به محور حثی برابر است با

$$I = \frac{15 \times 40^3}{12} - \frac{(15-1)(40-2 \times 1.5)^3}{12} = 20900 \text{ cm}^4$$

حال تنش‌های عمودی و برشی در نقاط 1، 2 و 3 را با استفاده از روابط 8-10 و 8-25 پیدا می‌کنیم. برای این کار ابتدا گشتاورهای اول Q_1 (برای تنش برشی τ_1 در نقطه 1)، Q_2 (برای تنش برشی τ_2 در نقطه 2) و Q_3 (برای تنش برشی τ_3 در نقطه 3) را محاسبه می‌کنیم.

$$Q_1 = 0 ; \quad Q_2 = 15 \times 1.5 \left(\frac{40}{2} - \frac{1.5}{2} \right) = 434 \text{ cm}^3$$

$$Q_3 = Q_2 + 1 \left(\frac{40}{2} - 1.5 \right) \left(\frac{40}{2} - 1.5 \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 434 + 171 = 605 \text{ cm}^3$$

σ_1 ، σ_2 و σ_3 در روابط زیر به ترتیب تنش‌های عمودی ناشی از خمش در نقاط 1، 2 و 3 می‌باشد. تمام این مقادیر منفی هستند زیرا تارهای نیمه فوقانی تیر تحت فشار قرار دارند.

$$\sigma_1 = - \frac{400000 \times 20}{20900} = -383 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = - \frac{400000(40/2-1.5)}{20900} = -354 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau_1 = 0 ; \quad \tau_2 = \frac{8000 \times 434}{20900 \times 1} = 166 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{8000 \times 605}{20900 \times 1} = 232 \text{ Kg/cm}^2$$

تنش‌های اصلی با استفاده از رابطه 5-33 بدست می‌آیند.

$$\sigma_{1\max} = 0 ; \quad \sigma_{1\min} = -383 \text{ Kg/cm}^2$$

۴۲۲

a-۸۹ نشان داده شده است. رگه‌های لایه‌ها یک در میان موازی طول تیر است. تیر مزبور به طول 1.2 m و دارای دو تکیه گاه ساده می‌باشد و بار متمرکز P در وسط دهانه آن وارد می‌شود. ضریب ارتجاعی در جهت موازی رگه‌ها برابر $E_1 = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ و در جهت عمود بر رگه‌ها برابر $E_2 = 2.5 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$ است. تنش‌های مجاز مربوطه $\sigma_1 = 84 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_2 = 21 \text{ Kg/cm}^2$ است. مقدار محاز بار P را تعیین کنید.

حل: نسبت ضرایب ارتجاعی $n = E_2/E_1 = 0.25$ می‌باشد و مقطع تبدیل شده که رگه‌های آن در امتداد محور تیر قرار دارد در شکل b-۸۹-۸ رسم شده است. گشتاور لختی این مقطع تبدیل شده برابر است با

$$I = \frac{4(3.5)^3}{12} - 3 \left[\frac{3(0.5)^3}{12} \right] - 2 \left[(3 \times 0.5)(0.5 \times 2)^2 \right] = 11.2 \text{ cm}^4$$

تنش σ_1 در این مسئله تنش تعیین کننده است و لنگر خمشی حداکثری که مقطع مزبور می‌تواند تحمل کند مسابست با

$$M_{\max} = \frac{I}{C} \sigma_1 = \frac{11.2}{1.75} \times 84 = 537 \text{ cmKg}$$

بنابراین مقدار محاز بار P از رابطه زیر بدست می‌آید (طول دهانه تیر = L):

$$P = \frac{4M_{\max}}{L} = \frac{(4)(537)}{120} = 18 \text{ Kg}$$

مسئله ۲۷-۸

تیری به مقطع I و طول $L = 1 \text{ m}$ با تکیه گاه‌های مفصلی بار $P = 16 \text{ t}$ را در وسط دهانه‌اش تحمل می‌کند (شکل ۹۰-۸). تنش‌های اصلی را در نقاط 1، 2 و 3 خطرناک‌ترین مقطع عرضی تیر پیدا کنید.

حل: نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی در شکل b-۹۰-۸ نشان می‌دهند که مقطع عرضی وسط دهانه تیر خطرناک‌ترین مقطع تیر می‌باشد. نیروی برشی V و لنگر خمشی M در این مقطع عبارتند از

۴۲۵

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{S}$$

در این رابطه N وزن قسمت جدا شده دیوار و مطابق شکل ۹۱ - ۸ برابر $Q_1 + Q_2$ می باشد. Q_1 وزن منشور مثلثی و Q_2 وزن منشور مستطیلی است.

$$Q_1 = \frac{1}{2} h (b-a) L \gamma = \frac{1}{2} (4.5) (2-0.8) (1) (1.8) = 4.86 \text{ t}$$

$$Q_2 = h a L \gamma = (4.5) (0.8) (1) (1.8) = 6.48 \text{ t}$$

$$N = Q_1 + Q_2 = 4.86 + 6.48 = 11.34 \text{ t}$$

لنگر خمشی M برابر با مجموع لنگرهای وزن های Q_1 و Q_2 و برآیند فشار خاک حول محور Z است که از مرکز سطح مقطع عرضی در پای دیوار عبور می کند.

$$M = Q_1 \left(a + \frac{b-a}{3} - \frac{b}{2} \right) - Q_2 \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right) + \frac{q_{\max} h}{2} \left(\frac{h}{3} \right)$$

$$= (4.86) (0.2) - (6.48) (0.6) + \frac{1}{6} (1.5) (4.5)^2 = 2.15 \text{ mt}$$

چون $A = bL = 2 \text{ m}^2$ و $S = Lb^2/6 = 0.67 \text{ m}^3$ می باشد داریم

$$\sigma_{1,2} = - \frac{11.34}{2} \pm \frac{2.15}{0.67} = -5.67 \pm 3.21 \text{ t/m}^2$$

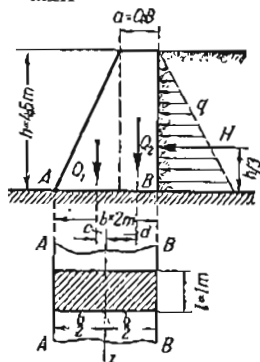
$$\sigma_{\max} = -5.67 - 3.21 = -8.88 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{\min} = -5.67 + 3.21 = -2.46 \text{ t/m}^2$$

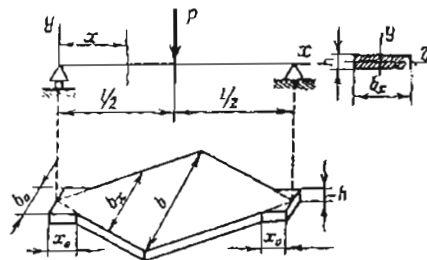
بنابراین

تنش فشاری ماکزیمم

تنش فشاری مینیمم



شکل ۹۱ - ۸



شکل ۹۲ - ۸

۴۲۶

$$\sigma_{2\max} = - \frac{354}{2} + \sqrt{\left(\frac{354}{2}\right)^2 + 166^2} = 66 \text{ Kg/cm}^2$$

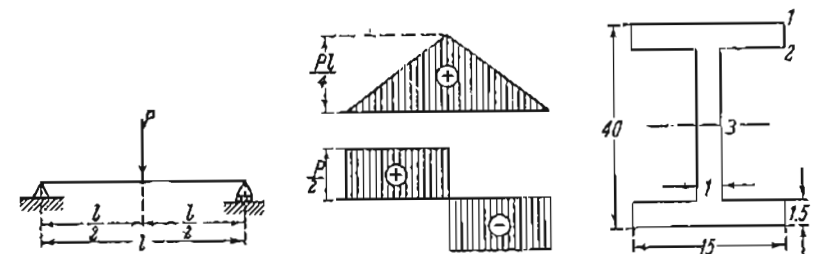
$$\sigma_{2\min} = - \frac{354}{2} - \sqrt{\left(\frac{354}{2}\right)^2 + 166^2} = -420 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{3\max} = 232 \text{ Kg/cm}^2 ; \quad \sigma_{3\min} = -232 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۲۸ - ۸

دیوار حائلی از مصالح بنائی که مقطع عرضی آن در شکل ۹۱ - ۸ رسم شده برای نگهداری خاکریزی ساحه شده است. وزن مخصوص مصالح بنائی $\gamma = 1.8 \text{ t/m}^3$ می باشد. خاک فشار q را بر دیوار وارد می کند که در ارتفاع دیوار به طور خطی تغییر می کند و مقدار حداکثر آن در پای دیوار برابر 1.5 t/m^2 است. تنش های فشاری ماکزیمم و مینیمم را در پای دیوار حساب کنید.

حل: قسمی از دیوار به طول $L = 1 \text{ m}$ را جدا می کنیم. این قسمت را می توان به صورت یک سیر طره ای در نظر گرفت که در انتهای تحتانش گیردار باشد. این سیر طره ای تحت اثر وزن خودش و فشار خاک فشرده می شود. مقطع عرضی در پای دیوار بیشترین تنش را خواهد داشت. تنش های فشاری ماکزیمم و مینیمم در این مقطع از رابطه زیر محاسبه می شود:



شکل ۹۰ - ۸

۴۲۶

تنش فشاری ماکزیمم در نقطه A و تنش فشاری مینیمم در نقطه B می باشد.

مسئله ۸-۲۹

عرض b_x سر غیر مشغولی نکل ۹۲-۸ را پیدا کنید. ارتفاع مقطع نیز ثابت و برابر h ولی عرض آن متغیر است. تنش های مجار عمودی و برشی را به ترتیب σ_w و τ_w فرض کنید.

حل: لنگر خمشی در مقطعی به فاصله x از تکیه گاه چپ برابر است با

$$M_x = \frac{Px}{2}$$

ضریب مقطع در فاصله x از تکیه گاه چپ مساوی است با

$$S_x = \frac{b_x h^2}{6}$$

بنابراین اگر حداکثر تنش عمودی در تمام مقاطع برابر تنش محاز σ_w باشد خواهیم داشت

$$\frac{b_x h^2}{6} = \frac{M_x}{\sigma_w} = \frac{Px}{2\sigma_w} \quad ; \quad b_x = \frac{3Px}{h^2 \sigma_w} \quad (1)$$

از این رابطه b_x در $x=0$ برابر صفر و در $x=L/2$ برابر $\frac{3PL}{2h^2 \sigma_w}$ می باشد.

در روی تکیه گاهها، لنگر خمشی برابر صفر ولی نیروی برشی $V=P/2$ می باشد. از این رو عرض مقطع نیز در روی تکیه گاه نمی تواند برابر صفر باشد. عرض b_0 نیز در روی تکیه گاهها را با توجه به تنش برشی ماکزیمم در نقاط مزبور پیدا می کنیم.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{4} \frac{P}{b_0 h} = \tau_w \quad ; \quad b_0 = \frac{3P}{4h\tau_w} \quad (2)$$

طول x_0 دو انشای تیر که عرض ثابت b_0 دارند از شرط زیر (با مساوی قرار دادن روابط ۱ و ۲) بدست می آید:

$$b_0 = \frac{3P}{4h\tau_w} = \frac{3Px_0}{h^2 \sigma_w} \quad ; \quad x_0 = \frac{h\sigma_w}{4\tau_w}$$

۴۲۷

چون τ_w در حدود $0.5\sigma_w$ تا $0.6\sigma_w$ می باشد داریم

$$x_0 \approx 0.42 - 0.5 h$$

۸-۱۲ مسائل حل شده

مسئله ۸-۱-۱ تا ۸-۱-۲۰ ضریب مقطع حداقل S را نسبت به محور افقی که از مرکز سطح عبور کند برای مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل های ۱-۱-۸ تا ۲۰-۸-۱ پیدا کنید. اندازه هایی که در شکل ۲۰-۱-۸ داده نشده اند همان اندازه های داده شده در شکل ۱۵-۱-۸ می باشند. اندازه های روی مقاطع بر حسب میلیمتر می باشند.

مسئله ۸-۱-۲۱ تا ۸-۱-۲۷ تنش های عمودی در نقاطی از مقطع عرضی تیرهای شکل های ۲۱-۱-۸ تا ۲۷-۱-۸ را که در روی این شکل ها مشخص شده است پیدا کنید. در این شکل ها علامت گذاری های زیر بکار رفته است:

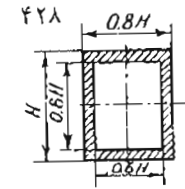
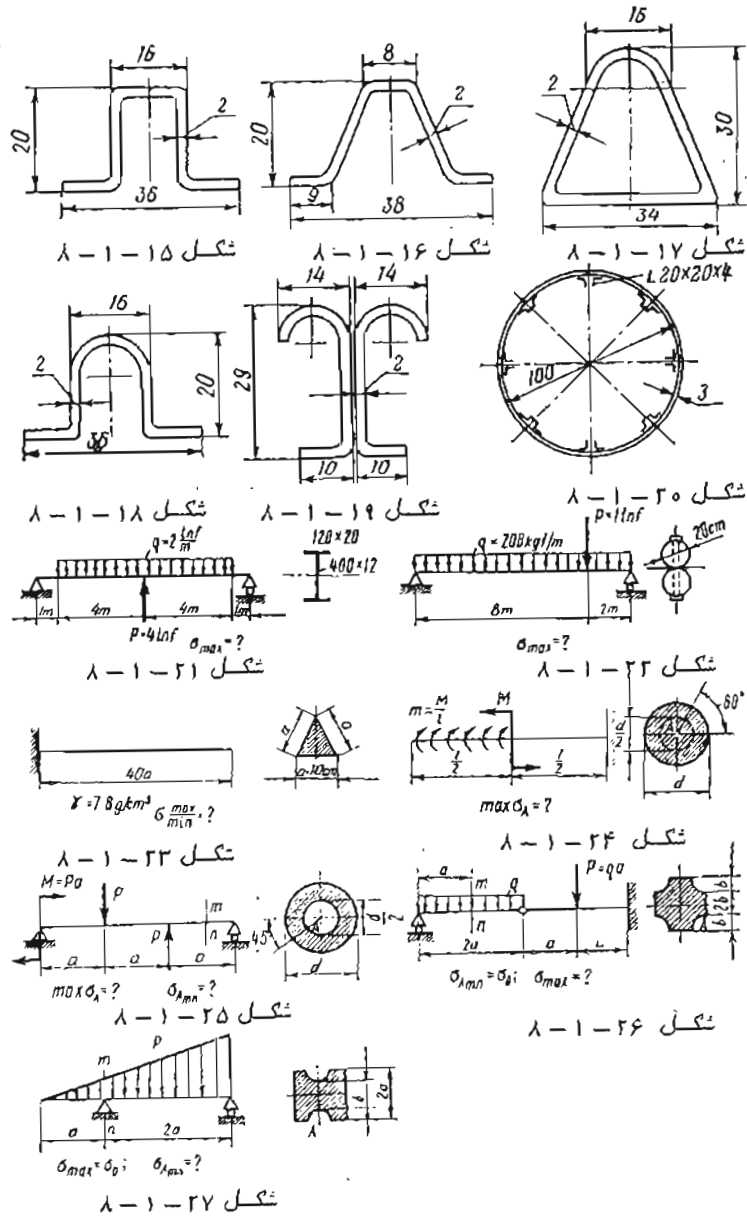
σ_{max} = تنش عمودی ماکزیمم در مقطع خطرناک
 σ_{min} = تنش عمودی مینیمم در مقطع خطرناک
 $\max \sigma_A$ = تنش عمودی در نقطه A مقطع خطرناک
 σ_{Amin} = تنش عمودی در نقطه A مقطع
 γ = وزن واحد حجم مصالح تیر

مسئله ۸-۲-۱ تا ۸-۲-۹ ابعاد لازم برای مقطع عرضی تیرهای شکل های ۱-۲-۸ تا ۹-۲-۸ را تعیین کنید. در مسئله ۶-۲-۸ تعداد تیرهای مستطیلی را تعیین کنید. در روی شکل های مربوطه علامت های زیر بکار رفته است:

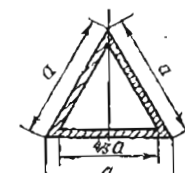
تنش مجاز کششی $[\sigma_c]$
 تنش مجاز فشاری $[\sigma_c]$
 تنش مجاز کششی و فشاری $[\sigma]$

مسئله ۸-۲-۱۰ اندازه b در شکل ۱۰-۲-۸ را چنان تعیین کنید که مقاومت

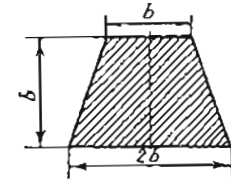
۴۲۹



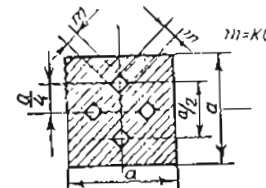
۱-۱-۱ شکل



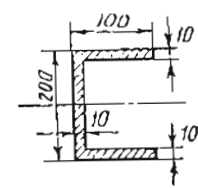
۱-۱-۲ شکل



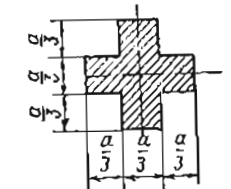
۱-۱-۳ شکل



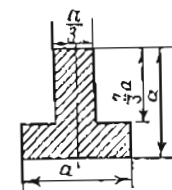
۱-۱-۴ شکل



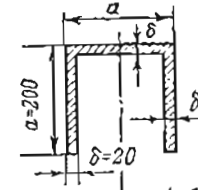
۱-۱-۵ شکل



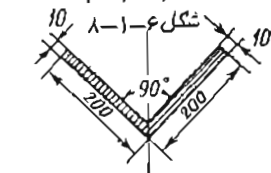
۱-۱-۶ شکل



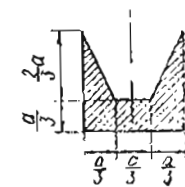
۱-۱-۷ شکل



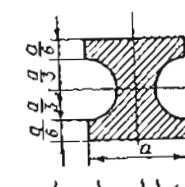
۱-۱-۸ شکل



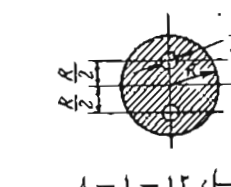
۱-۱-۹ شکل



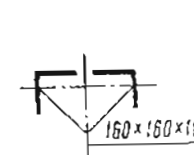
۱-۱-۱۰ شکل



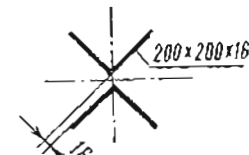
۱-۱-۱۱ شکل



۱-۱-۱۲ شکل

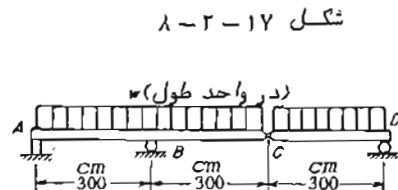
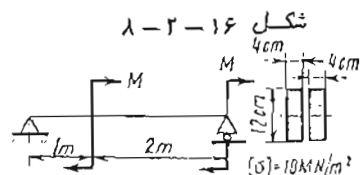
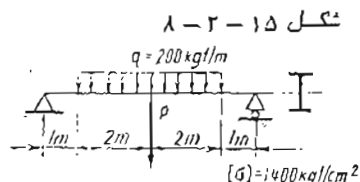
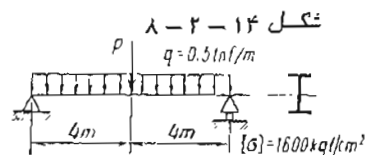
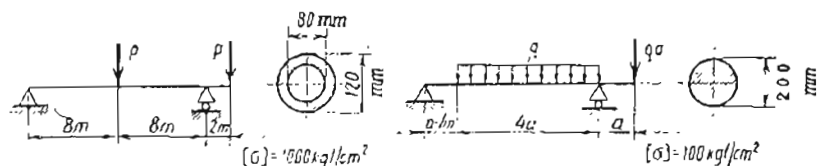


۱-۱-۱۳ شکل

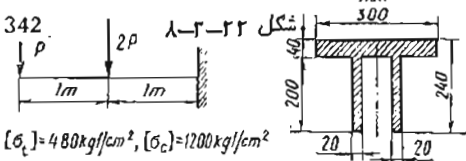
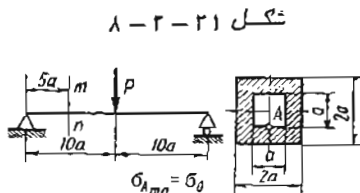
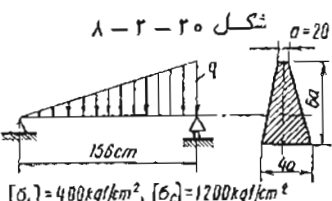
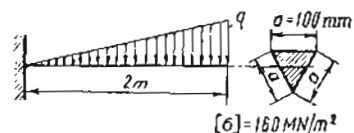
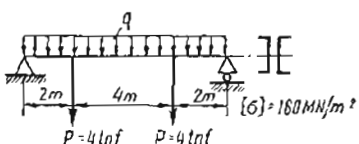


۱-۱-۱۴ شکل

۴۳۱

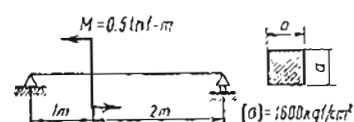


شکل ۴۳۱-۱۸

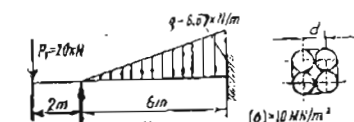


شکل ۴۳۱-۲۴

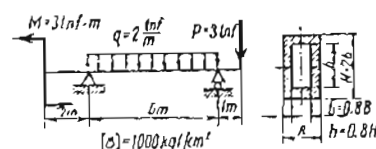
۴۳۰



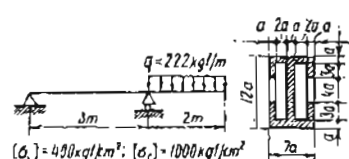
شکل ۴۳۰-۱



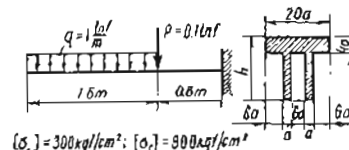
شکل ۴۳۰-۲



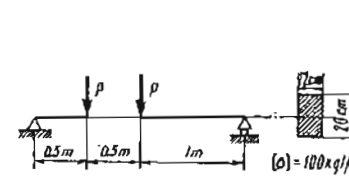
شکل ۴۳۰-۳



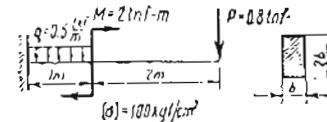
شکل ۴۳۰-۴



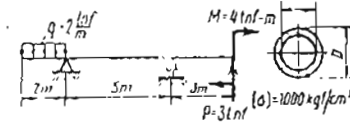
شکل ۴۳۰-۵



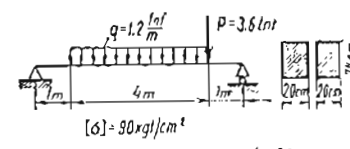
شکل ۴۳۰-۶



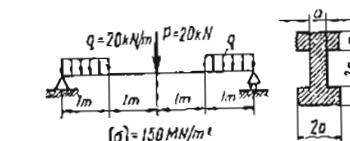
شکل ۴۳۰-۷



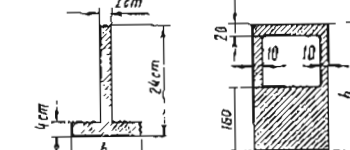
شکل ۴۳۰-۸



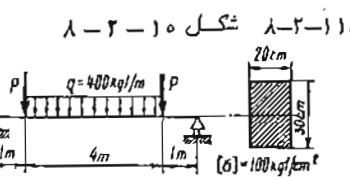
شکل ۴۳۰-۹



شکل ۴۳۰-۱۰



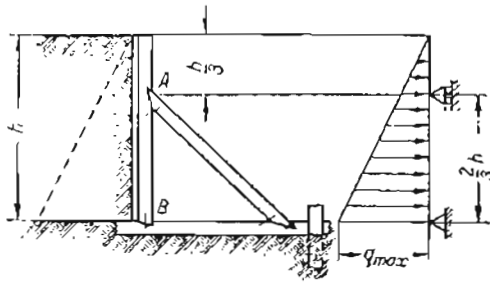
شکل ۴۳۰-۱۱



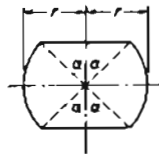
شکل ۴۳۰-۱۲

۴۳۳

در تیرهای قائم صرف نظر کنید. الوارها به عرض $b=20\text{cm}$ را میتوان مفصلی فرض نمود. ارتفاع h خاک ریز برابر 1.5m است. فشار خاک به طور خطی از صفر در بالا تا $q_{\max}=1.3\text{t/m}$ در پایین پهن می‌کند. تنش مجاز در کشش و فشار 100 kg/cm^2 می‌باشد.



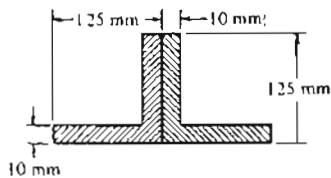
شکل ۸-۲-۲۶



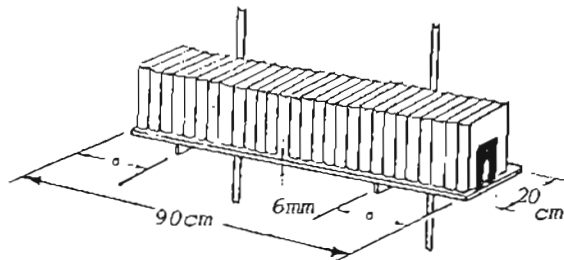
شکل ۸-۲-۲۷

مسئله ۸-۲-۲۷ مقطع شکل ۸-۲-۲۷ با بریدن قسمت‌های فوقانی و تحتانی یک کنده درخت به قطر $d=30\text{cm}$ بدست آمده است. ضریب مقطع را برای حالتی که $\alpha=45^\circ$ باشد محاسبه کنید.

مسئله ۸-۲-۲۸ دو نبشی به ابعاد $125 \times 125 \times 10\text{ mm}$ مطابق شکل ۸-۲-۲۸ به یکدیگر جوش داده شده‌اند و برای تحمل بارها در صفحه قائم یکبار می‌روند به طوریکه خمش حول محور خنثای افقی صورت می‌گیرد. اگر تنش خمشی مجاز در کشش و فشار 150 MPa باشد حداکثر لنگر خمشی را که تیر مزبور می‌تواند تحمل کند محاسبه نمایید.



شکل ۸-۲-۲۸



شکل ۸-۲-۲۹

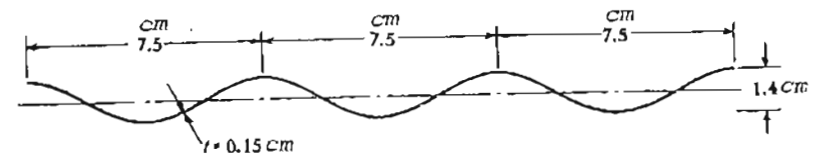
۴۳۴

مقطع در کشش و فشار یکسان باشد. تنش مجاز فشاری مصالح تیر سه برابر تنش مجاز کششی آن می‌باشد. پایین مقطع تحت کشش و بالای آن تحت فشار قرار دارد.

مسئله ۸-۲-۱۱ اندازه h در شکل ۸-۲-۱۱ را چنان تعیین کنید که مقاومت مقطع در کشش و فشار یکسان باشد. پایین مقطع تحت کشش و بالای آن تحت فشار قرار دارد. تنش مجاز فشاری مصالح تیر دو برابر تنش مجاز کششی آن می‌باشد.

مسئله ۸-۲-۱۲ تا ۸-۲-۲۴ بار مجاز را برای تیرهای شکل‌های ۸-۲-۱۲ تا ۸-۲-۲۴ بدست آورید. تنش‌های مجاز مصالح (مانند مسائل ۸-۲-۱ تا ۸-۲-۹) در روی شکل‌ها داده شده‌اند. ضرائب مقطع مقاطع I در شکل‌های ۸-۲-۱۶ و ۸-۲-۱۷ حول محوری افقی که از مرکز سطح آنها عبور کند به ترتیب برابر 518 cm^3 و 289 cm^3 است. تیر شکل ۸-۲-۱۹ نیز دارای مقطع I با ضریب مقطع $S=71.8\text{ cm}^3$ می‌باشد. ضریب مقطع هریک از مقاطع ناودانی در شکل ۸-۲-۲۰ حول محوری افقی که از مرکز سطح عبور کند برابر 484 cm^3 است.

مسئله ۸-۲-۲۵ مقطع عرضی یک ورق کسره‌ای به ضخامت 1.5 mm در شکل ۸-۲-۲۵ رسم شده است. با فرض اینکه مقطع مزبور به صورت یک موج سینوسی باشد ضریب مقطع را در واحد عرض ورق حساب کنید. اندازه 1.4 cm که در روی شکل نشان داده شده است از سطح خارجی تا سطح خارجی می‌باشد.

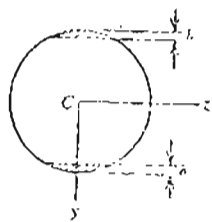


شکل ۸-۲-۲۵

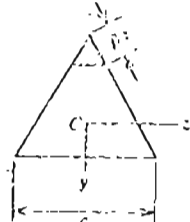
مسئله ۸-۲-۲۶ ابعاد مقطع عرضی تیر قائم و ضخامت لازم برای الوارها را در سازه شکل ۸-۲-۲۶ که به عنوان دیوار حائل ساخته شده است آورید. تیرهای قائم در فواصل 2m از یکدیگر بر روی تیرهای فونداسیون قرار دارند و به وسیله ستون‌های مایل نگهداشته شده‌اند. در نتیجه تیر را می‌توان بصورت مفصلی در نقاط A و B فرض نمود که الوارها فشار خاک را بر آن منتقل می‌کنند. از تأثیر نیروهای طولی

۴۳۵

مسئله ۸-۲-۳۳ تیری با مقطع عرضی دایره و به قطر d حول محور Z خم میشود (شکل ۸-۲-۳۳). برای اینکه صریب مقطع افزایش یابد دو قطعه هاشور خورده به ارتفاع δ از سیر برداشته می شود. مقداری از δ را که باعث می شود بیشترین صریب مقطع بدست آید پیدا کنید.



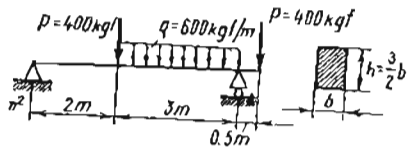
شکل ۸-۲-۳۳



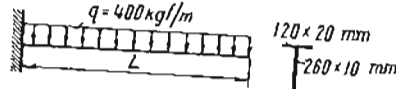
شکل ۸-۲-۳۴

مسئله ۸-۲-۳۴ قسمت هاشور خورده تیر مثلثی شکل ۸-۲-۳۴ با اضلاع مساوی بریده می شود تا بر صریب مقطع تیر افزوده شود. به ازای چه مقداری از δ تیر مزبور بیشترین صریب مقطع را خواهد داشت؟

مسئله ۸-۳-۱ ابتدا بر اساس تنش عمودی مجاز 100 Kg/cm^2 ابعاد تیر مستطیلی شکل ۸-۳-۱ را تعیین نمایید. سپس تنش برشی ماکزیمم را در تیر حساب کنید.



شکل ۸-۳-۱



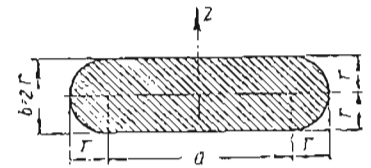
شکل ۸-۴-۱

مسئله ۸-۴-۱ ابتدا بر اساس تنشهای عمودی مجاز (400 Kg/cm^2) برای کشش و فشار (1500 Kg/cm^2) حداکثر مجاز طول L تیر را تعیین کنید. سپس تنش برشی ماکزیمم را در تیر حساب کنید (شکل ۸-۴-۱).

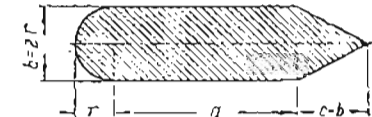
۴۳۴

مسئله ۸-۲-۲۹ فسه کتاب شکل ۸-۲-۲۹ از ورق های شیشه به ضخامت 6 mm ساخته شده است. برای اینکه فسه کتاب تا مدت زیادی قابل استفاده باشد بر ورقه های شیشه معمولی نمی توان بستن از 70 Kg/cm^2 در کشش بار وارد نمود. اگر تکیه گاهها در مواصل سهینه (ایتیم) قرار داده شود وزن متوسط کتاب هادر طول فسه کتاب را تخمین بزنید.

مسئله ۸-۲-۳۰ برای مقطع عرضی پایه پل در شکل ۸-۲-۳۰ گشتاورهای Z و Y را محاسبه کنید.



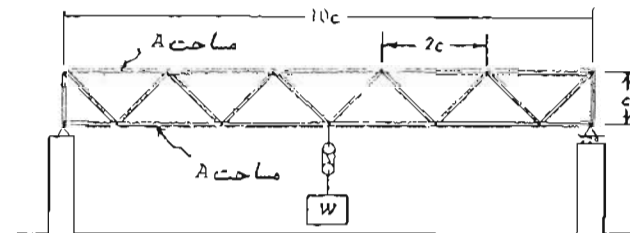
شکل ۸-۲-۳۰



شکل ۸-۲-۳۱

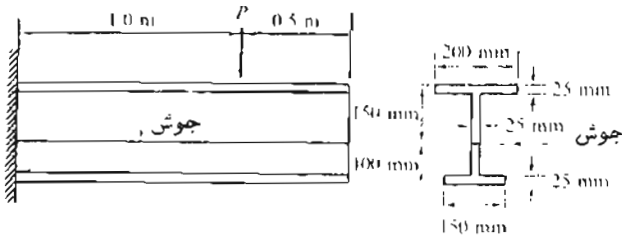
مسئله ۸-۲-۳۱ برای مقطع عرضی پایه پل در شکل ۸-۲-۳۱ گشتاور لختی را نسبت به محوری افقی که از مرکز سطح عبور کند پیدا کنید.

مسئله ۸-۲-۳۲ خرپای سقف شکل ۸-۲-۳۲ را در وسط دهانه ها تنش حمل می کند. نیروهای اعضای افقی در بالا و پایین خرپا را حساب کنید. سپس تنشها را در این اعضا حساب و به صورت تابعی از فاصله در طول دهانه خرپا رسم نمایید. حال خرپا را به صورت تیر پیوسته ای فرض کنید که در آن فقط اعضای فوقانی و تحتانی در خمش مؤثر می باشد. با استفاده از تئوری تیرها، تنشها در بالا و پایین تیر را به صورت تابعی از فاصله در طول دهانه تیر رسم و با منحنی قبلی مقایسه کنید. اگر خرپا را به صورت سیری در نظر بگیریم، نقش اعضای فطری آن چه می باشد؟



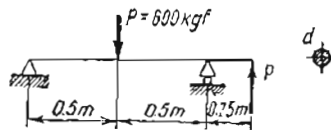
شکل ۸-۲-۳۲

۴۳۷



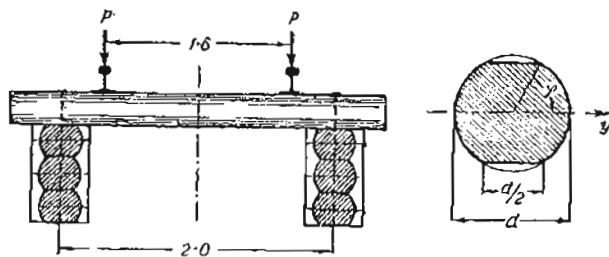
شکل ۸-۴-۶

۸-۵-۱ را تعیین ساعد. سپس تنش برشی ماکزیم را در زیر حساب کنید.



شکل ۸-۵-۱

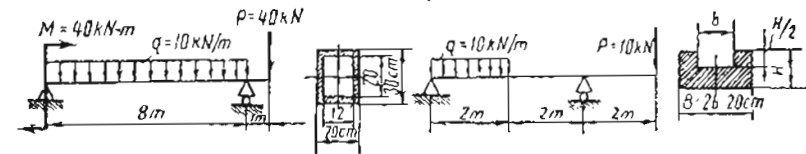
مسئله ۸-۵-۲ سیرهای پل عرضی راه آهن در شکل ۸-۵-۲ از کنده‌های درخت به قطر $d=25\text{cm}$ که بالا و پایین آنها بریده شده ساخته شده‌اند و بارهای $P=6t$ را مطابق شکل حمل می‌کند. اگر تنش مجاز کششی و فشاری 100Kg/cm^2 و تنش مجاز برشی 20Kg/cm^2 باشد، کافی بودن اندازه تیرها را بررسی کنید. راهنمایی: گشاورلختی مقطع عرضی دایره‌ای که دو قطعه آن مطابق شکل بریده شده باشد $I_y = \frac{d^4}{32} (\phi - \frac{\sin \phi}{4})$ و گشاور اول سطح بیعی از مقطع نسبت به محور y برابر $Q_y = \frac{d^3}{12} (1 - \cos^3 \phi)$ می‌باشد.



شکل ۸-۵-۲

۴۳۶

مسئله ۸-۴-۲ حداکثر تنش برشی را در تیر شکل ۸-۴-۲ پیدا کنید.

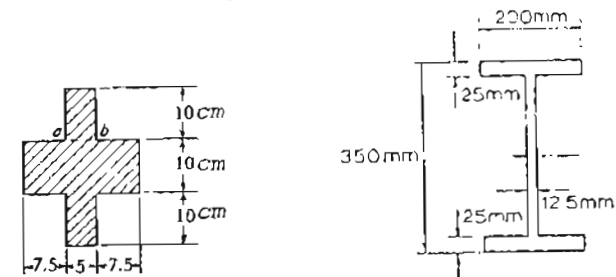


شکل ۸-۴-۲

شکل ۸-۴-۳

مسئله ۸-۴-۳ ابتدا بر اساس تنش عمودی مجاز 160MN/m^2 ارتفاع H مقطع تیر شکل ۸-۴-۳ را تعیین کنید. سپس تنش برشی ماکزیم را در تیر محاسبه کنید.

مسئله ۸-۴-۴ اگر نیروی برشی کل در مقطع عرضی شکل ۸-۴-۴ برابر $V = 22500\text{Kg}$ باشد، تنش برشی در روی خط ab را پیدا کنید.



شکل ۸-۴-۴

شکل ۸-۴-۵

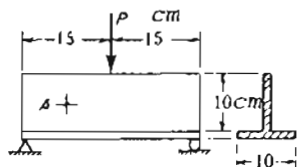
مسئله ۸-۴-۵ برای تیر I شکل ۸-۴-۵ نسبت تنش برشی ماکزیم به تنش برشی متوسط در جان سیر را پیدا کنید.

مسئله ۸-۴-۶ تیر طره‌ای فولادی شکل ۸-۴-۶ از دو نبشی ساخته شده است که به یکدیگر جوش شده‌اند. با صرف نظر نمودن از وزن تیر بار مجاز P را حساب کنید. تنش مجاز فولاد در کشش و فشار برابر 150MN/m^2 و در برش برابر 100MN/m^2 است. مقاومت برشی جوش $q = 2\text{MN/m}$ می‌باشد.

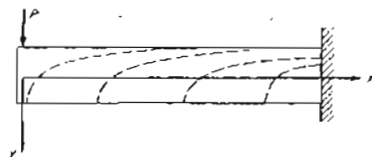
مسئله ۸-۵-۱ ابتدا بر اساس تنش عمودی مجاز 450Kg/cm^2 قطر d تیر شکل

۴۳۹

مسئله ۸-۷-۱ تیر چندی کوتاهی به دهانه 30cm بار $P=2000\text{Kg}$ را در وسط دهانه اش (مطابق شکل ۸-۷-۱) حمل می‌کند. مقطع عرضی تیر به شکل یک T وارونه با ابعاد نشان داده شده در شکل می‌باشد. ضخامت بال و جان تیر برابر 5mm است. تنش کششی ماکزیمم در تیر در کدام نقطه و چقدر است ؟



شکل ۸-۷-۱

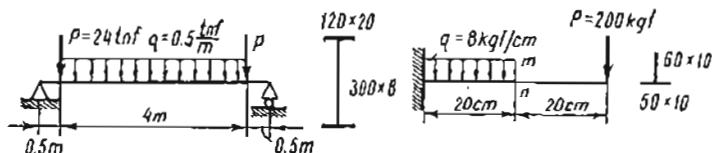


شکل ۸-۷-۳

مسئله ۸-۷-۲ دایره موهر را برای حالت تنش در نقطه A مسئله قبل (شکل ۸-۷-۱) که در فاصله 7.5cm از تکیه گاه چپ و وسط فاصله بین سطوح فوقانی و تحتانی تیر قرار دارد رسم کنید. با استفاده از دایره موهر، مقدار و امتداد تنش کششی اصلی σ_1 را در نقطه مزبور پیدا کنید.

مسئله ۸-۷-۳ معادله دیفرانسیل منحنی‌های مسیر تنش اصلی را برای تیر طره‌ای با مقطع عرضی مستطیل شکل ۸-۷-۳ بنویسید.

مسئله ۸-۷-۴ تنش‌های اصلی را در خطرناک‌ترین مقطع تیر شکل ۸-۷-۴ و در محل برخورد بال و جان تیر پیدا کنید. ابعاد مقطع تیر بر حسب میلی‌متر می‌باشند.



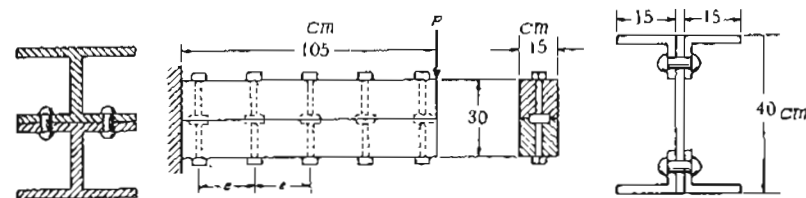
شکل ۸-۷-۴

شکل ۸-۷-۵

مسئله ۸-۷-۵ تا ۸-۷-۷ در شکل‌های ۸-۷-۵ تا ۸-۷-۷ تنش‌های

۴۳۸

مسئله ۸-۶-۱ تیر شکل ۸-۶-۱ از بهیم پیوستن دو تیر I فولادی به کمک برچ‌های به قطر 2 cm ساخته شده است. فاصله مرکز نا مرکز برچ‌ها 10 cm است. هر یک از تیرهای I دارای ارتفاع مقطع 10 cm، عرض بال 7.5 cm، ضخامت جان 0.4 cm و گساور لختی 257.5cm^4 است (ست به محور افقی که از مرکز سطح عبور کند) و مساحت سطح مقطع 14.6cm^2 می‌باشد. دهانه تیر برابر 1.5m و در دو انتها دارای تکیه‌گاههای ساده و تحت بار یکنواختی می‌باشد که در آن تنش عمودی ماکزیمم 1120Kg/cm^2 ایجاد می‌کند. تنش برشی متوسط ایجاد شده در برچ‌های محاور دو انتهای تیر را حساب کنید.



شکل ۸-۶-۱

شکل ۸-۶-۲

شکل ۸-۶-۴

مسئله ۸-۶-۲ تیر طره‌ای شکل ۸-۶-۲ از دو تیر جویی به ابعاد $15 \times 15\text{cm}$ ساخته شده که بوسیله پیچ‌ها و حلقه‌های متصل کننده به یکدیگر متصل شده‌اند. سوراخ‌های پیچ‌ها به قطر 2 cm می‌باشند و هر حلقه متصل کننده می‌تواند نیروی برشی 3000Kg را با اطمینان منتقل کند. اگر بار وارد در انتهای آزاد تیر $P=2500\text{Kg}$ باشد، فاصله لازم (e) بین پیچ‌ها چقدر است ؟

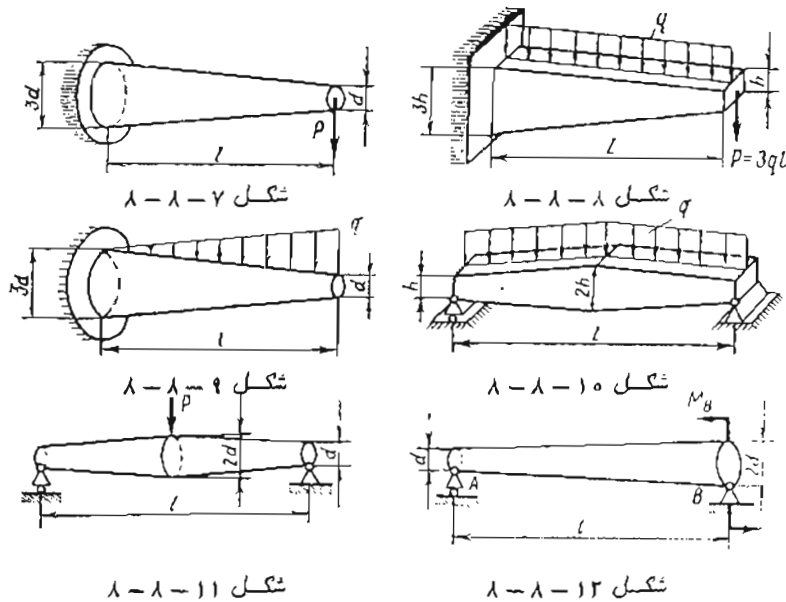
مسئله ۸-۶-۳ در مسئله ۸-۶-۲ با فرض اینکه فاصله اولین پیچ از دیوار برابر 5cm باشد، حداکثر سنی عمودی را در تیر حساب کنید.

مسئله ۸-۶-۴ شاه تیر شکل ۸-۶-۴ از متصل کردن چهار تیر $150 \times 115 \times 12\text{mm}$ به یک ورق $40 \times 2.5\text{cm}$ به کمک برچ‌های به قطر 2.4cm ساخته شده است. شاه تیر مزبور به دهانه 6m و در دو انتها دارای تکیه‌گاههای مفصلی می‌باشد و بار متمرکز P را در وسط دهانه اش حمل می‌کند. فاصله e بین برچ‌ها را چنان تعیین کنید که از حداکثر مقاومت خمشی شاه تیر استفاده شود. تنش مجاز عمودی شاه تیر $\sigma_w = 1120\text{Kg/cm}^2$ و تنش برشی متوسط مجاز در برچ‌ها $\tau_w = 420\text{Kg/cm}^2$ می‌باشد.

۴۴۱

مسئله ۸-۸-۶ سه سازه‌ای به دهانه L و با مقطع عرضی مستطیل که عرض b و ارتفاع h آن معیاری می‌باشد تحت اثر بار متمرکز P قرار دارد. این بار متمرکز ممکن است در هر نقطه از طول سازه واقع شود. ارتفاع h تیر چگونه باید به صورت تابعی از x (که از وسط دهانه تیر اندازه‌گیری می‌شود) تغییر کند تا تنش عمودی ماکزیمم در طول سازه ثابت و برابر تنش مجاز σ_w باشد؟

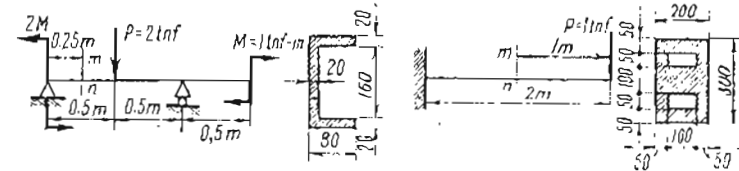
مسائل ۸-۸-۷ تا ۸-۸-۱۲ در شکل‌های ۷-۸-۸ تا ۸-۸-۱۲ فاصله مقطع عرضی را که در آن تنش عمودی ماکزیمم است از انتهای چپ سازه پیدا کنید.



مسئله ۸-۹-۱ یک میله منشوری که مقطع آن به شکل شش ضلعی (شکل ۹-۱) می‌باشد از شش قطعه چوب با مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. قطعات یک در میان از دو نوع چوب مختلف با ضرایب انبساط حرارتی $E_1 = 84000 \text{ Kg/cm}^2$ و $E_2 = 70000 \text{ Kg/cm}^2$ ساخته شده که با چسب به یکدیگر متصل شده‌اند. اندازه طول a در روی شکل برابر 2.5 cm است. اگر میله مزبور در صفحه تقارن طولیش تحت خمشی خالص $M = 1000 \text{ cmKg}$ قرار گیرد، تنش عمودی ماکزیمم ناشی از خمش را در آن حساب کنید.

۴۴۰

اصلی را در مقطع $III-III$ و در جایی که عرض سازه به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند پیدا کنید. ابعاد مقاطع سازه در روی شکل‌ها بر حسب سانتیمتر می‌باشد.



شکل ۸-۷-۶

شکل ۸-۷-۷

مسئله ۸-۸-۱ اگر در سازه‌ای غیر منشوری شکل $b/d_a = 3$ باشد، تنش عمودی ماکزیمم ناشی از خمش را پیدا کنید. این تنش را با تنش ماکزیمم σ_b در تکیه‌گاه مقایسه کنید.

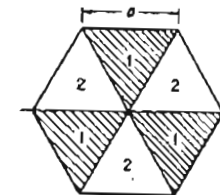
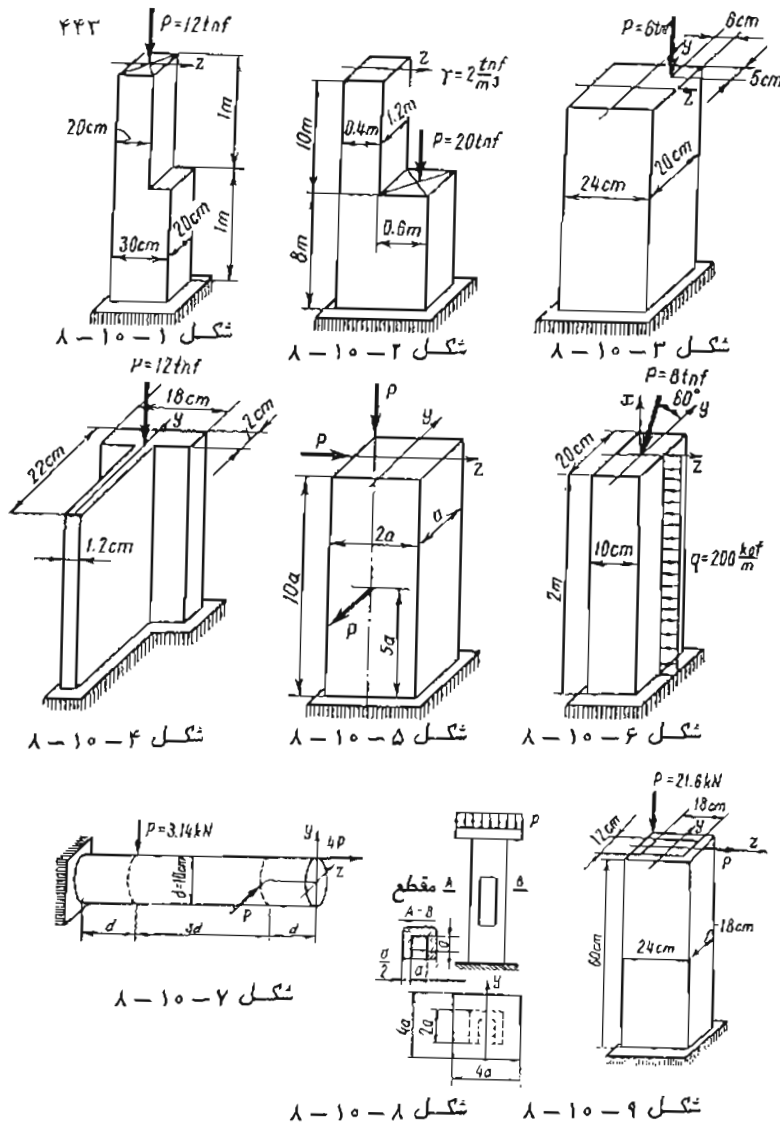
مسئله ۸-۸-۲ برای چه معادری از نسبت d_b/d_a تنش عمودی ماکزیمم در تیر طره‌ای شکل (۸-۲) در محل تکیه‌گاه اتفاق خواهد افتاد؟

مسئله ۸-۸-۳ یک سازه‌ای غیر منشوری با مقطع عرضی مربع بار متمرکز P را در انتهای آزادش تحمل می‌کند. عرض و ارتفاع مقطع عرضی سازه به صورت خطی از h در انتهای آزاد تا $2h$ در انتهای گیردار تغییر می‌کند. تنش عمودی ماکزیمم ناشی از خمش را تعیین کنید.

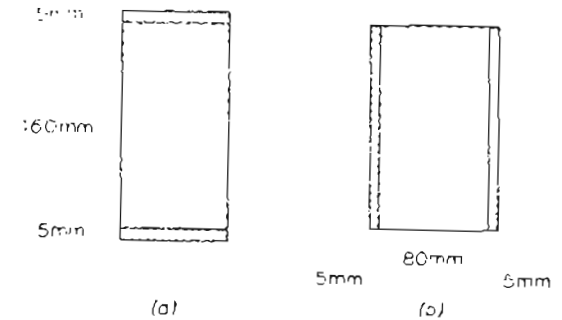
مسئله ۸-۸-۴ یک سازه‌ای با مقطع عرضی مستطیل که ارتفاع ثابت h و عرض متغیر b دارد بار متمرکز P را در انتهای آزادش تحمل می‌کند. عرض b تیر چگونه باید به صورت تابعی از x (که از انتهای آزاد تیر اندازه‌گیری می‌شود) تغییر کند تا تنش عمودی ماکزیمم در طول سازه ثابت و برابر تنش مجاز σ_w باشد؟

مسئله ۸-۸-۵ اگر سازه‌ای شکل ۸-۳۱ به جای بار متمرکز تحت اثر بار گسترده‌ای با شدت یکواخت q باشد شکل آن چگونه باید باشد تا تنش عمودی ماکزیمم در طول سازه ثابت و برابر تنش مجاز σ_w باشد؟

۴۴۲



شکل ۸-۹-۱



شکل ۸-۹-۴

مسئله ۸-۹-۲ هرگاه مبله مسئله قبل به صورت نیر ساده‌ای بکار رود که در وسط دهانه آن بار $P=150\text{Kg}$ وارد شود، تنش برشی در چسب در بین نیمه‌های فوقانی و تحتانی تیر را حساب کنید.

مسئله ۸-۹-۳ یک نیر جوسی با مقطع مستطیل به عرض 20cm و ارتفاع 30cm به وسیله دو ورق فلزی در بالا و پایین آن تقویت شده است (شکل ۸-۳۵). ورق فوقانی به ضخامت 2cm و از چدن با ضریب ارتجاعی $E_c=10^6\text{Kg/cm}^2$ و ورق تحتانی به ضخامت 0.5cm و از فولاد با ضریب ارتجاعی $E_s=2 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ می‌باشد. ضریب ارتجاعی چوب $E_w=10^5\text{Kg/cm}^2$ است. اگر نیر چنان بار گذاری شود که تنش کششی ماکزیم در فولاد برابر 1120Kg/cm^2 باشد، تنش فشاری ماکزیم نظیر آن در چدن چقدر است؟

مسئله ۸-۹-۴ یک تیر چوبی به عرض 80mm و ارتفاع 160mm با دو ورق فولادی به ضخامت 5mm تقویت می‌شود (شکل ۸-۹-۴). نسبت لنگرهای ماکزیمی را که در دو حالت زیر تیر مزبور می‌تواند تحمل کند با فرض اینکه تنش عمودی ماکزیم در چوب در هر دو حالت یکسان باشد حساب کنید:

الف - دو ورق فولادی به عرض 80mm به سطوح فوقانی و تحتانی تیر متصل می‌شوند.
ب - دو ورق فولادی به ارتفاع 160mm به دو سطح قائم تیر متصل می‌شوند.
ضریب ارتجاعی فولاد 20 برابر ضریب ارتجاعی چوب می‌باشد.

مسائل ۸-۱۰-۱ تا ۸-۱۰-۹ در شکل‌های ۸-۱۰-۱ تا ۸-۱۰-۹ تنش‌های عمودی ماکزیم و مینیم و محل محور خنثی را در خطرناک‌ترین مقطع بدست آورید.
کمیت γ در شکل ۸-۱۰-۲ وزن مخصوص مصالح می‌باشد.

۴۴۵

مسائل ۸-۱۰-۱۰ تا ۸-۱۰-۱۲ در شکل‌های ۸-۱۰-۱۰ تا ۸-۱۰-۱۲
تنش عمودی ماکزیمم در محل محور جسی را در خطرناک‌ترین مقطع سر تعیین کنید.
تنش عمودی مینیمم (σ_{min}) در روی شکل‌ها داده شده است.

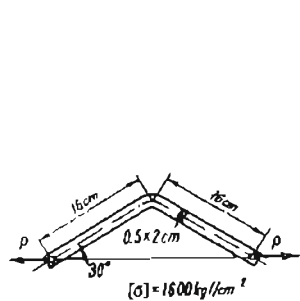
مسائل ۸-۱۰-۱۳ تا ۸-۱۰-۱۸ تنش‌های عمودی ماکزیمم و مینیمم را در
مقاطع خطرناک میل‌ها و در اعضایی که تحت خمش توام با بار محوری هستند محاسبه
کنید (شکل‌های ۸-۱۰-۱۳ تا ۸-۱۰-۱۸).

مسائل ۸-۱۰-۱۹ تا ۸-۱۰-۲۶ بار مجاز P را در شکل‌های ۸-۱۰-۱۹ تا ۸-۱۰-۲۶
تا ۸-۱۰-۲۶ بدست آورید. علامت‌های زیر در روی این شکل‌ها بکار رفته است:

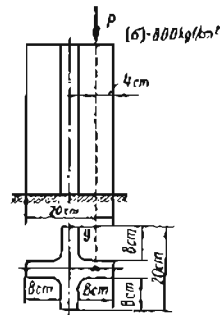
$[\sigma_t]$ = تنش مجاز کششی

$[\sigma_c]$ = تنش مجاز فشاری

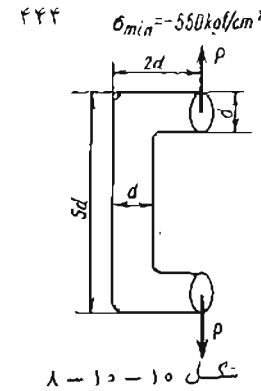
$[\sigma]$ = تنش مجاز کششی و فشاری



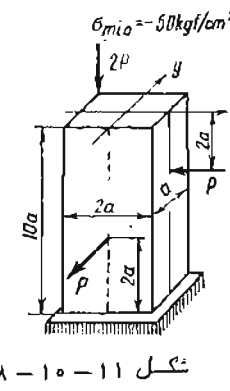
شکل ۸-۱۰-۱۹



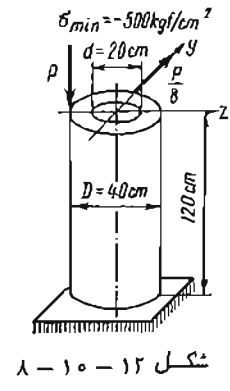
شکل ۸-۱۰-۲۰



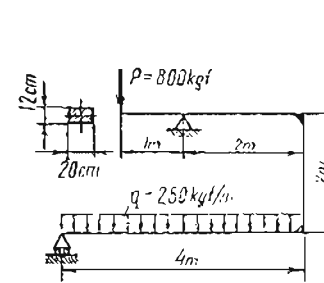
شکل ۸-۱۰-۱۰



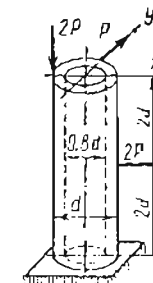
شکل ۸-۱۰-۱۱



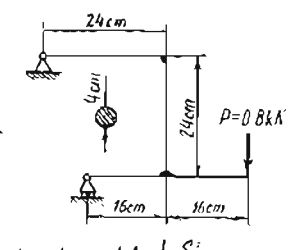
شکل ۸-۱۰-۱۲



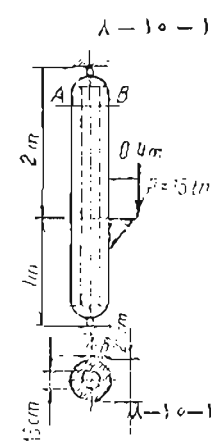
شکل ۸-۱۰-۱۳



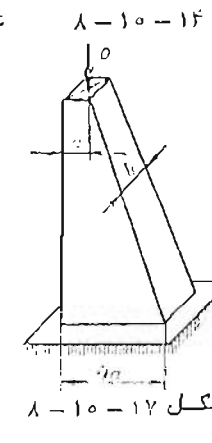
شکل ۸-۱۰-۱۴



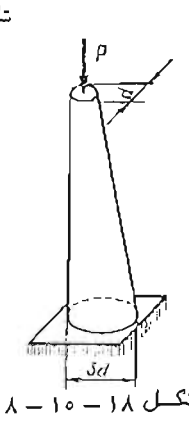
شکل ۸-۱۰-۱۵



شکل ۸-۱۰-۱۶



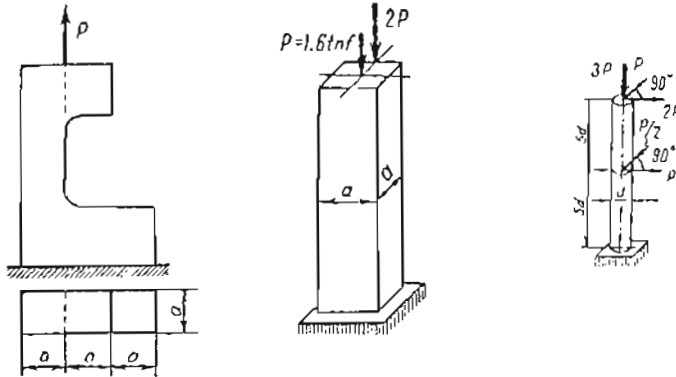
شکل ۸-۱۰-۱۷



شکل ۸-۱۰-۱۸

۴۴۷

مسئله ۱۰-۲۷-۸ هرگاه تنش مجاز کششی و فشاری برای سازه شکل ۱۰-۲۷-۸ برابر σ_w باشد حداقل لازم برای طول a را تعیین کنید.

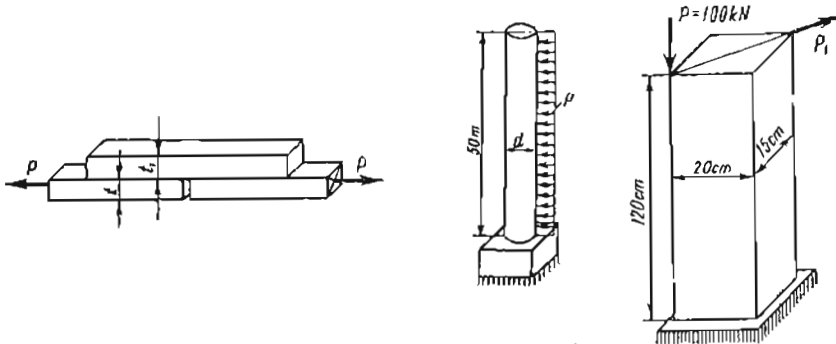


شکل ۱۰-۲۷-۸ شکل ۱۰-۲۸-۸ شکل ۱۰-۲۹-۸

مسئله ۱۰-۲۸-۸ تنشهای مجاز کششی و فشاری برای ستون شکل ۱۰-۲۸-۸ به ترتیب 300 Kg/cm^2 و 1200 Kg/cm^2 می باشد. اندازه a ستون را تعیین کنید.

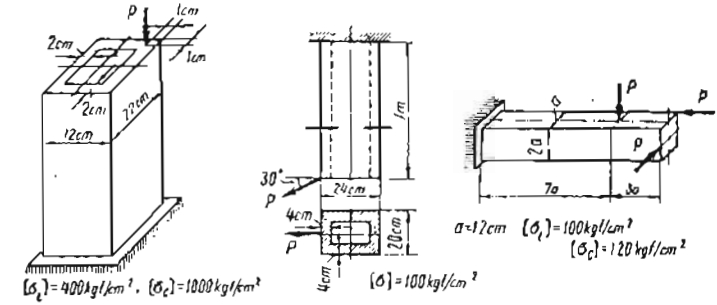
مسئله ۱۰-۲۹-۸ هرگاه تنش مجاز کششی و فشاری ستون شکل ۱۰-۲۹-۸ برابر σ_w باشد قطر لازم ستون دایره ای را محاسبه کنید.

مسئله ۱۰-۳۰-۸ در شکل ۱۰-۳۰-۸ ضخامت ورق t را چنان تعیین کنید که تنش عمودی ماکزیمم در تسمه ها و ورق فوقانی یکسان باشد.

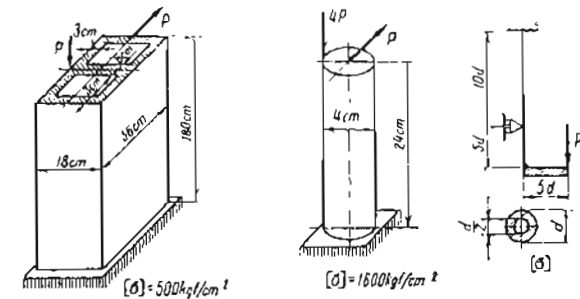


شکل ۱۰-۳۰-۸ شکل ۱۰-۳۱-۸ شکل ۱۰-۳۲-۸

۴۴۶

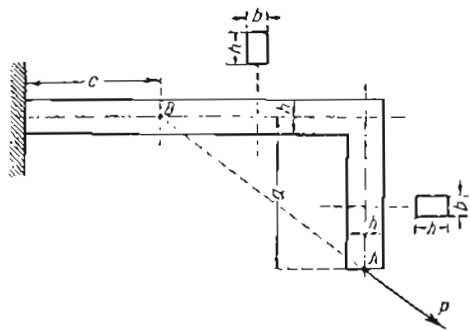


شکل ۱۰-۲۱-۸ شکل ۱۰-۲۲-۸ شکل ۱۰-۲۳-۸



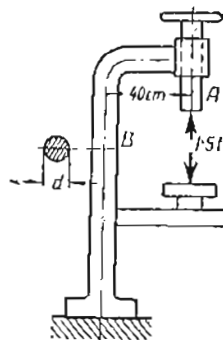
شکل ۱۰-۲۴-۸ شکل ۱۰-۲۵-۸ شکل ۱۰-۲۶-۸

۴۴۹



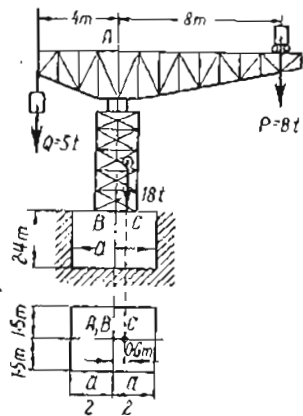
شکل ۸-۱۰-۳۵

می شود (شکل ۸-۱۰-۳۶) . فطر ستون چدنی ماشین منه را تعیین کنید . تنش مجاز کششی چدن 350 Kg/cm^2 می باشد .

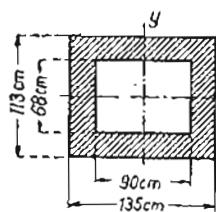


شکل ۸-۱۰-۳۶

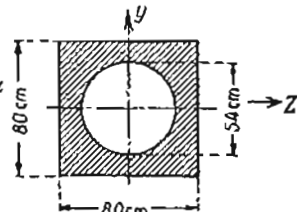
مسئله ۸-۱۰-۳۷ جرنقیل شکل ۸-۱۰-۳۷ که برای بلند کردن و جا بجا کردن بارهای تا 8 t بکار می رود بر روی یک فونداسیون بتنی تکیه دارد . محور AB جرنقیل از مرکز سطح فونداسیون عبور می کند . با فرض اینکه وزن جرنقیل برابر با 18 t (بدون وزن بار P و وزنه تعادل Q) در نقطه C به فاصله 0.6 m از محور AB به فونداسیون وارد شود ، اندازه a صلح فونداسیون را چنان تعیین کنید که در پای فونداسیون تنش کششی ایجاد نشود . وزن واحد حجم بتن 2.2 t/m^3 می باشد . حداکثر فشار زمین را برای مقدار انتخاب شده a تعیین کنید .



شکل ۸-۱۰-۳۷



شکل ۸-۱۰-۳۸



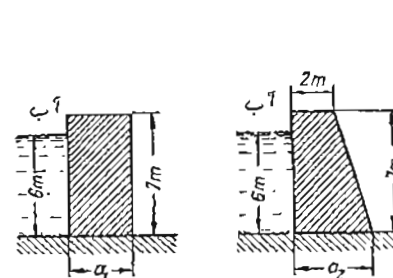
شکل ۸-۱۰-۳۹

۴۴۸

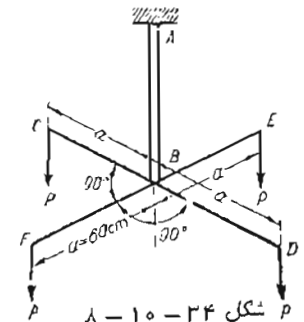
مسئله ۸-۱۰-۳۱ وزن مخصوص مصالح ستون شکل ۸-۱۰-۳۱ $\gamma = 2.5 \text{ t/m}^3$ و فشار جانبی که بر یک مقطع مخروطی آن اثر می کند برابر $p = 90 \text{ Kg/m}^2$ می باشد . قطر d ستون را چنان تعیین کنید که در هیچ یک از مقاطع افقی تنش کششی ایجاد نشود .

مسئله ۸-۱۰-۳۲ بار P_1 در ستون شکل ۸-۱۰-۳۲ را چنان تعیین کنید که در قسمت پایین ستون تنش کششی ایجاد نشود .

مسئله ۸-۱۰-۳۳ دو مقطع عرضی مختلف برای یک سد شنی در شکل ۸-۱۰-۳۳ نشان داده شده است . ارتفاع سد 7 m و وزن مخصوص بتن 2 t/m^3 است . عرض های a_1 و a_2 سد را چنان تعیین کنید که در سمت نحاسی آن تنش کششی ایجاد نشود .



شکل ۸-۱۰-۳۳



شکل ۸-۱۰-۳۴

مسئله ۸-۱۰-۳۴ چهار وزنه $P = 100 \text{ Kg}$ بطور متقارن از قطعه صلبی - شکل CDEF که به صورت صلب به لوله فولادی AB متصل است آویزان می باشد (شکل ۸-۱۰-۳۴) . لوله AB دارای قطر خارجی 60 mm و ضخامت جدار 2 mm می باشد . تنش کششی ماکزیمم در لوله را در اثر چهار بار مزبور حساب کنید . همین کار را برای حالتی که یکی از بارها برداشته شده باشد تکرار کنید .

مسئله ۸-۱۰-۳۵ میله خم شده شکل ۸-۱۰-۳۵ با مقطع عرضی مستطیل تحت اثر نیروی P قرار دارد . ابعاد سیروی P از مرکز سطح های A و B مقطع عرضی عبور می کند . اگر $P = 2 \text{ t}$ ، $a = 90 \text{ cm}$ ، $b = 6 \text{ cm}$ ، $h = 10 \text{ cm}$ ، $c = 80 \text{ cm}$ و طول L قسمت افقی میله برابر 2 m باشد حداکثر تنش عمودی چقدر است ؟

مسئله ۸-۱۰-۳۶ در هنگام مته کاری یک قطعه ، سیروی 1.5 t به ماشین مته منتقل

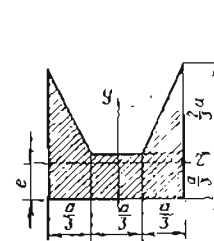
۴۵۱

۸-۱۳ جواب های مسائل حل شده

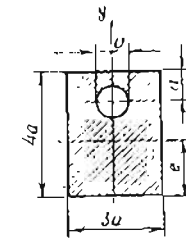
$0.0183 a^3$	: ۸-۱-۲	$0.082 H^3$	: ۸-۱-۱
$\frac{a^3}{6} (1-1.5k^2-4k^4)$	: ۸-۱-۴	$\frac{13}{60} b^3$	: ۸-۱-۳
$0.0597 a^3$	: ۸-۱-۶	229 cm^3	: ۸-۱-۵
359.3 cm^3	: ۸-۱-۸	$0.0706 a^3$	: ۸-۱-۷
$0.0425 a^3$	: ۸-۱-۱۰	79 cm^3	: ۸-۱-۹
$0.74R^3$	: ۸-۱-۱۲	$0.147 a^3$	: ۸-۱-۱۱
737 cm^3	: ۸-۱-۱۴	205 cm^3	: ۸-۱-۱۳
0.470 cm^3	: ۸-۱-۱۶	0.703 cm^3	: ۸-۱-۱۵
0.780 cm^3	: ۸-۱-۱۸	1.865 cm^3	: ۸-۱-۱۷
2770 cm^3	: ۸-۱-۲۰	1.478 cm^3	: ۸-۱-۱۹
91.7 Kg/cm^2	: ۸-۱-۲۲	1196 Kg/cm^2	: ۸-۱-۲۱
$\frac{4\sqrt{3}}{\pi d^3} M$	: ۸-۱-۲۴	$865; -432 \text{ Kg/cm}^2$	: ۸-۱-۲۳
$12 \sigma_0$	: ۸-۱-۲۶	$3.83 \frac{\text{Pa}}{d^3}; 0$	: ۸-۱-۲۵
		$0.0894 \sigma_0$	: ۸-۱-۲۷
$b = 19 \text{ cm}$	: ۸-۲-۲	$a = 5 \text{ cm}$	: ۸-۲-۱
$D = 29.3 \text{ cm}$	: ۸-۲-۴	16 cm	: ۸-۲-۳
چهار عدد	: ۸-۲-۶	$b = 13.4 \text{ cm}$	: ۸-۲-۵
$a = 3.42 \text{ cm}$	: ۸-۲-۸	$a = 1 \text{ cm}$	: ۸-۲-۷
$b = 20 \text{ cm}$	: ۸-۲-۱۰	$a = 1 \text{ cm}$	: ۸-۲-۹
$P = 1067 \text{ Kg}$	: ۸-۲-۱۲	$h_1=177.7; h_2=38.3 \text{ cm}$	: ۸-۲-۱۱
$P = 453 \text{ Kg}$	: ۸-۲-۱۴	$P = 1400 \text{ Kg}$	: ۸-۲-۱۳
$P \approx 2.14 \text{ t}$	: ۸-۲-۱۶	$q = 330 \text{ Kg/m}$	: ۸-۲-۱۵
$M \approx 1920 \text{ mN}$	: ۸-۲-۱۸	$P \approx 2.16 \text{ t}$	: ۸-۲-۱۷
$q = 9.36 \text{ kN/m}$	: ۸-۲-۲۰	$w = 112 \text{ Kg/m}$	: ۸-۲-۱۹
$q = 38.4 \text{ Kg/cm}$	: ۸-۲-۲۲	$q = 3.75 \text{ kN/m}$	: ۸-۲-۲۱

۴۵۰

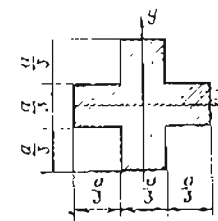
مسائل ۸-۱۰-۳۸ تا ۸-۱۰-۴۵ هسته مقاطع عرضی سان داده شده در هر یک از شکل های ۸-۱۰-۳۸ تا ۸-۱۰-۴۵ را پیدا کنید.



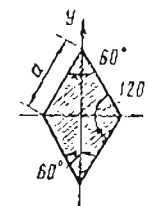
شکل ۸-۱۰-۴۰



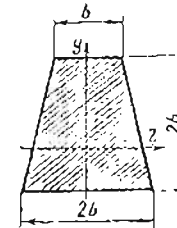
شکل ۸-۱۰-۴۱



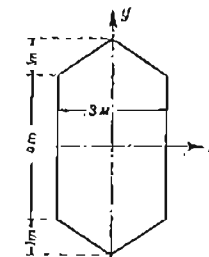
شکل ۸-۱۰-۴۲



شکل ۸-۱۰-۴۳

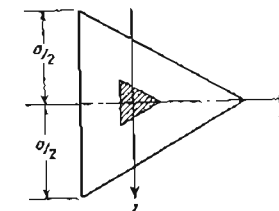


شکل ۸-۱۰-۴۴



شکل ۸-۱۰-۴۵

مسئله ۸-۱۰-۴۶ نشان دهید هسته یک مقطع عرضی به شکل متساوی الاضلاع به اضلاع a (شکل ۸-۱۰-۴۶) یک مثلث متساوی الاضلاع به اضلاع $\frac{a}{4}$ می باشد.



شکل ۸-۱۰-۴۶

۴۵۲

$\frac{2}{5} L$	: $\lambda - \lambda - \lambda$	$\frac{3}{4} L$	: $\lambda - \lambda - \gamma$
$L/4$	: $\lambda - \lambda - 10$	$L/3$	: $\lambda - \lambda - 9$
$L/2$	: $\lambda - \lambda - 12$	$L/4$	: $\lambda - \lambda - 11$
5.52 Kg/cm^2	: $\lambda - 9 - 2$	112 Kg/cm^2	: $\lambda - 9 - 1$
1.425	: $\lambda - 9 - 4$	435 Kg/cm^2	: $\lambda - 9 - 3$
	$0 ; -40 \text{ Kg/cm}^2 ; z_0 = 15 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 1$
-3.51 Kg/cm^2	; $-4.63 \text{ Kg/cm}^2 ; z_0 = -363 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 2$
25 Kg/cm^2	; $-50 \text{ Kg/cm}^2 ; y_0 = -6.67 \text{ cm} ; z_0 = -8 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 3$
65 Kg/cm^2	; $-286 \text{ Kg/cm}^2 ; y_0 = -12.5 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 4$
$26.5P/a^2$	; $-27.5P/a^2 ; y_0 = \frac{a}{54} ; z_0 = -\frac{a}{27}$		: $\lambda - 10 - 5$
1285 Kg/cm^2	; $-1355 \text{ Kg/cm}^2 ; y_0 = 0.29 \text{ cm} ; z_0 = 1.47 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 6$
17.6 MN/m^2	; $-14.4 \text{ MN/m}^2 ; y_0 = -0.834 \text{ cm} ; z_0 = 0.625 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 7$
$-4.88p$	; $-7.37 p ; y_0 = 6.2 a$		: $\lambda - 10 - 8$
9.3 MN/m^2	; $-11.3 \text{ MN/m}^2 ; y_0 = -4.67 \text{ cm} ; z_0 = -1.43 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 9$
	$650 \text{ Kg/cm}^2 ; z_0 = -\frac{d}{24}$		: $\lambda - 10 - 10$
	$44.7 \text{ Kg/cm}^2 ; y_0 = \frac{a}{6} ; z_0 = \frac{a}{15}$		: $\lambda - 10 - 11$
300 Kg/cm^2	; $y_0 = 8.3 \text{ cm} ; z_0 = 7.8 \text{ cm}$		: $\lambda - 10 - 12$
$79.3 \frac{P}{d^2}$	; $-93.5 \frac{P}{d^2} ; \lambda - 10 - 14$	$85.8 ; -80.8 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 10 - 13$
$1122 ; -1034 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 10 - 16$	$58.4 ; -63.6 \text{ MN/m}^2$	: $\lambda - 10 - 15$
$\frac{P}{3ab} (a_x = 3a$	در) ; $-\frac{4P}{3ab} (a_x = \frac{3}{2}a$	در)	: $\lambda - 10 - 17$
$\frac{P}{\pi d^2} (d_x = 2d$	در) ; $-\frac{125P}{27d^2} (d_x = 1.2 d$	در)	: $\lambda - 10 - 18$
2780 Kg	: $\lambda - 10 - 20$	64 Kg	: $\lambda - 10 - 19$
4180 Kg	: $\lambda - 10 - 22$	19550 Kg	: $\lambda - 10 - 21$
6000 Kg	: $\lambda - 10 - 24$	360 Kg	: $\lambda - 10 - 23$

۴۵۲

$P = 1 \text{ t}$	: $\lambda - 2 - 24$	$P = a^2 \sigma_0$	: $\lambda - 2 - 22$
		$S = 0.0433 \text{ cm/cm}$	: $\lambda - 2 - 25$
$x = 6.25 \text{ cm}$	: $\lambda - 2 - 26$	$16 \times 16 \text{ cm}$	: $\lambda - 2 - 27$
12000 mN	: $\lambda - 2 - 28$	$S = 1875 \text{ cm}^3$	: $\lambda - 2 - 29$
		48.4 Kg/m	: $\lambda - 2 - 30$
$I_y = \frac{ab^3}{12} + \frac{\pi b^4}{64}$	; $I_z = \frac{ab}{12}(a^2 + 2b^2) + \frac{\pi b^2}{64}(b^2 + 4a^2)$		: $\lambda - 2 - 31$
	$I = \frac{r^3}{24} (16a + 3\pi r + 8r)$		: $\lambda - 2 - 32$
$\beta = 0.130$	: $\lambda - 2 - 33$	$\delta = 0.011 d$	: $\lambda - 2 - 34$
$h = 24.2 \text{ cm}$	; $\tau_{\max} = 5.6 \text{ Kg/cm}^2$		: $\lambda - 2 - 35$
2.79 MN/m^2	: $\lambda - 4 - 2 L = 3 \text{ m} ; \tau_{\max} = 60.5 \text{ Kg/cm}^2$		: $\lambda - 4 - 36$
$\tau = 180 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 4 - 4 H = 8 \text{ cm} ; \tau_{\max} = 1.82 \text{ MN/m}^2$		: $\lambda - 4 - 37$
144 kN	: $\lambda - 4 - 6$	3.57	: $\lambda - 4 - 38$
	$d = 8 \text{ cm} ; \tau_{\max} = 16 \text{ Kg/cm}^2$		: $\lambda - 5 - 39$
$e = 24 \text{ cm}$	: $\lambda - 6 - 2$	$\tau = 347 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 6 - 40$
$e = 19.55 \text{ cm}$	: $\lambda - 6 - 4$	128 Kg/cm^2	: $\lambda - 6 - 41$
$\sigma_1 = 170 \text{ Kg/cm}^2 ; \phi = -54^\circ 20'$	: $\lambda - 7 - 2$	$\sigma_{\max} = 448 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 7 - 42$
$(\frac{h^2}{4} - y^2)(\frac{dy}{dx})^2 + 2xy \frac{dy}{dx} - (\frac{h^2}{4} - y^2) = 0$			: $\lambda - 7 - 43$
$11.3 ; -120.3 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 7 - 44$	$1745 ; -417 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 7 - 45$
$26 ; -0.4 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 7 - 46$	$370 ; -5 \text{ Kg/cm}^2$	: $\lambda - 7 - 47$
$\frac{d_b}{d_a} \leq 1.5$	: $\lambda - 8 - 2$	$\sigma_{\max} = 2\sigma_b = \frac{64PL}{27\pi d_a^3} (x = \frac{L}{4} \text{ در})$	: $\lambda - 8 - 48$
$b = \frac{6Px}{H^2 \sigma_w}$	: $\lambda - 8 - 4$	$\sigma_{\max} = \frac{8PL}{9h^3} (x = \frac{L}{2} \text{ در})$	: $\lambda - 8 - 49$
$h = [\frac{3PL}{2b\sigma_w} (1 - \frac{4x^2}{L^2})]^{\frac{1}{2}}$	: $\lambda - 8 - 6$	$h = x \sqrt{\frac{3q}{b\sigma_w}}$	: $\lambda - 8 - 50$

۲۵۴

$$\frac{\pi d^2 [\sigma]}{176} : \lambda - 10 - 26 \quad 368 \text{ Kg} : \lambda - 10 - 25$$

$$a = 4 \text{ cm} : \lambda - 10 - 28 \quad a \geq 2 \sqrt{\frac{P}{\sigma_w}} : \lambda - 10 - 27$$

$$t_1 = 4.65 \text{ t} : \lambda - 10 - 30 \quad d \approx 17 \sqrt{\frac{P}{\sigma_w}} : \lambda - 10 - 29$$

$$8.68 \text{ kN} \leq P \leq 12.15 \text{ kN} : \lambda - 10 - 32 \quad d = 3 \text{ m} : \lambda - 10 - 31$$

$$110; 1255 \text{ Kg/cm}^2 : \lambda - 10 - 34 \quad a_1 = 3.93 \text{ m}; a_2 = 3.52 \text{ m} : \lambda - 10 - 33$$

$$122 \text{ mm} : \lambda - 10 - 36 \quad 1407 \text{ Kg/cm}^2 : \lambda - 10 - 35$$

$$3.68 \text{ m}; 16.1 \text{ t/m}^2 : \lambda - 10 - 37$$

$$53.8 \text{ cm} \text{ و } 61.8 \text{ cm (در امتداد محور Z)} : \lambda - 10 - 38$$

(در امتداد محور Y)

$$: \lambda - 10 - 39 \text{ مختصات چهار گوشه هسته عبارتند از (بر حسب سانتیمتر)}$$

$$(0, 18.2); (-18.2, 0); (18.2, 0); (0, -18.2); (0, 18.2)$$

$$: \lambda - 10 - 40 \text{ چهار ضلعی به مختصات زیر}$$

$$(0.160a, 0); (-0.072a, 0); (0, 0.166a); (0, -0.166a)$$

$$: \lambda - 10 - 41 \text{ چهار ضلعی به مختصات زیر}$$

$$(0.697a, 0); (-0.650a, 0); (0, 0.532a); (0, -0.532a)$$

$$: \lambda - 10 - 42 \text{ هشت ضلعی که مختصات گوشه‌های آن عبارتند از}$$

$$(0, \pm 0.107a); (\pm 0.107a, 0); (\pm 0.08a, \pm 0.08a)$$

$$: \lambda - 10 - 43 \text{ مستطیل که مختصات چهار گوشه آن عبارتند از}$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{12} \pm 12a \right); \left(-\frac{a\sqrt{3}}{12} \pm 12a \right)$$

$$: \lambda - 10 - 44 \text{ چهار ضلعی که مختصات گوشه‌های آن عبارتند از}$$

$$\left(\frac{13}{36}b, 0 \right); \left(\frac{13}{45}b, 0 \right); \left(-\frac{13}{126}b \pm \frac{15}{56}b \right)$$

$$: \lambda - 10 - 45 \text{ مختصات گوشه‌های هسته عبارتند از}$$

$$(0, \pm 0.45 \text{ m}); (\pm 0.722 \text{ m}, \pm 0.15 \text{ m})$$

حجت الله عادل

مقاومت مصالح

فصل نهم

پیچش

۹-۱ پیچش یک میله دایره‌ای

میله‌ای با مقطع عرضی دایره را که بوسیله دولنگر پیچشی در دو انتهایش تحت پیچش قرار دارد در نظر می‌گیریم* (شکل ۹-۱ a). این حالت بار گذاری موسوم به پیچش خالص می‌باشد. با توجه به تقارن می‌توان نشان داد که مقاطع عرضی میله دایره‌ای مانند اجسام صلبی حول محور طولی میله دوران می‌کنند بطوریکه شعاع‌ها مستقیم و مقاطع عرضی به صورت دایره‌ای باقی می‌مانند. همچنین اگر زاویه پیچش کل میله کوچک باشد، طول میله و شعاع آن تغییر طول نخواهند داد.

در حین پیچش، یک انتهای میله نسبت به انتهای دیگر آن دورانی حول محور طولی میله خواهد داشت. برای مثال اگر ما انتهای چپ میله را ثابت فرض کنیم، انتهای راست میله نسبت به انتهای چپ آن به اندازه زاویه ϕ دوران خواهد کرد (شکل ۹-۱ b). در همین موقع یک خط طولی مانند mn روی سطح جانبی میله به اندازه زاویه کوچکی دوران نموده به وضعیت جدید $m'n'$ می‌رسد. عنصر مستطیلی کوچکی روی سطح جانبی میله، مانند عنصر شکل ۹-۱ a واقع در بین دو مقطع عرضی به فاصله dx از یکدیگر، در اثر دوران مزبور تغییر شکل داده و به صورت متوازی الاضلاع در می‌آید. این عنصر محدد در شکل ۹-۱ b نشان داده شده که در آن قسمتی از میله به شکل یک صفحه

* لنگرهای پیچشی معمولاً "به صورت برداری با پیکان‌های مضاعف نشان داده می‌شوند."

مقاومت مصالح حجت الله عادل

فصل نهم

پیچش

۹-۱ پیچش یک میله دایره‌ای

میله‌ای با مقطع عرضی دایره را که بوسیله دولنگر پیچشی در دو انتهایش تحت پیچش قرار دارد در نظر می‌گیریم* (شکل ۹-۱). این حالت بار گذاری موسوم به پیچش خالص می‌باشد. با توجه به تقارن می‌توان نشان داد که مقاطع عرضی میله دایره‌ای مانند اجسام صلبی حول محور طولی میله دوران می‌کنند بطوریکه شعاع‌ها مستقیم و مقاطع عرضی به صورت دایره‌ای باقی می‌مانند. همچنین اگر زاویه پیچش کل میله کوچک باشد، طول میله و شعاع آن تغییر طول نخواهند داد.

در حین پیچش، یک انتهای میله نسبت به انتهای دیگر آن دورانی حول محور طولی میله خواهد داشت. برای مثال اگر ما انتهای چپ میله را ثابت فرض کنیم، انتهای راست میله نسبت به انتهای چپ آن به اندازه زاویه ϕ دوران خواهد کرد (شکل ۹-۱). در همین موقع یک خط طولی مانند nn روی سطح جانبی میله به اندازه زاویه کوچکی دوران نموده و وضعیت جدید nm می‌رسد. عنصر مستطیلی کوچکی روی سطح جانبی میله، مانند عنصر شکل ۹-۱ واقع در بین دو مقطع عرضی به فاصله dx از یکدیگر، در اثر دوران مزبور تغییر شکل داده و به صورت متوازی الاضلاع در می‌آید. این عنصر مجدداً در شکل ۹-۱b نشان داده شده که در آن قسمتی از میله به شکل یک صفحه

* لنگرهای پیچشی معمولاً "به صورت برداری با پیکان‌های مضاعف نشان داده می‌شوند."

۴۵۴

- $\frac{\pi d^2 [\sigma]}{176}$: ۸-۱۰-۲۶ 368 Kg
- $a = 4 \text{ cm}$: ۸-۱۰-۲۸ $a \geq 2 \sqrt{\frac{P}{\sigma_w}}$: ۸-۱۰-۲۷
- $t_1 \approx 4.65 \text{ t}$: ۸-۱۰-۳۰ $d \approx 17 \sqrt{\frac{P}{\sigma_w}}$: ۸-۱۰-۲۹
- $8.68 \text{ kN} \leq P \leq 12.15 \text{ kN}$: ۸-۱۰-۳۲ $d = 3 \text{ m}$: ۸-۱۰-۳۱
- $110; 1255 \text{ Kg/cm}^2$: ۸-۱۰-۳۴ $a_1 = 3.93 \text{ m}; a_2 = 3.52 \text{ m}$: ۸-۱۰-۳۳
- 122 mm : ۸-۱۰-۳۶ 1407 Kg/cm^2 : ۸-۱۰-۳۵
- $3.68 \text{ m}; 16.1 \text{ t/m}^2$: ۸-۱۰-۳۷
- 53.8 cm و 61.8 cm (در امتداد محور z) : ۸-۱۰-۳۸
(در امتداد محور y)
- : ۸-۱۰-۳۹ مختصات چهار گوشه هسته عبارتند از (بر حسب سانتیمتر)
 $(-18.2, 0); (18.2, 0); (0, -18.2); (0, 18.2)$
 : ۸-۱۰-۴۰ چهار ضلعی به مختصات زیر:
 $(0.160a, 0); (-0.072a, 0); (0, 0.166a); (0, -0.166a)$
 : ۸-۱۰-۴۱ چهار ضلعی به مختصات زیر:
 $(0.697a, 0); (-0.650a, 0); (0, 0.532a); (0, -0.532a)$
 : ۸-۱۰-۴۲ هشت ضلعی که مختصات گوشه‌های آن عبارتند از:
 $(0, \pm 0.107a); (\pm 0.107a, 0); (\pm 0.08a, \pm 0.08a)$
 : ۸-۱۰-۴۳ مستطیل که مختصات چهار گوشه آن عبارتند از:
 $(\frac{a\sqrt{3}}{12} \pm 12a); (-\frac{a\sqrt{3}}{12} \pm 12a)$
 : ۸-۱۰-۴۴ چهار ضلعی که مختصات گوشه‌های آن عبارتند از:
 $(\frac{13}{36}b, 0); (\frac{13}{45}b, 0); (-\frac{13}{126}b \pm \frac{15}{56}b)$
 : ۸-۱۰-۴۵ مختصات گوشه‌های هسته عبارتند از:
 $(0, \pm 0.45 \text{ m}); (\pm 0.722 \text{ m}, \pm 0.15 \text{ m})$

۴۵۷

پیچش، $\frac{d\phi}{dx}$ در طول میله ثابت است. این مقدار ثابت نمابنده زاویه پیچش در واحد طول است که ما آن را با θ نشان می‌دهیم. در این صورت اگر L طول محور مکانیکی باشد داریم $\theta = \phi/L$ و از معادله 9-2 نتیجه می‌شود

$$\gamma = r\theta = \frac{r\phi}{L} \quad (9-3)$$

جهت‌های تنش‌های برشی τ که روی اضلاع عنصر اثر می‌کند مطابق شکل ۹-۱ می‌باشد. برای ماده‌ای که به طور خطی ارتجاعی است مقدار تنش برشی برابر است با

$$\tau = G\gamma = G\theta r \quad (9-4)$$

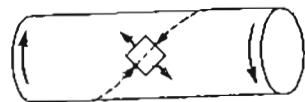
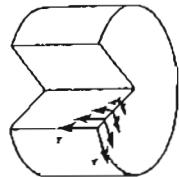
دو معادله 9-3 و 9-4 کرنش و تنش در سطح جایی محور مکانیکی را به زاویه پیچش در واحد طول مربوط می‌کنند.

حالت تنش در داخل میله را نیز می‌توان مشابه روش فوق بدست آورد. چون شعاع‌ها در مقطع عرضی هنگام پیچش مستقیم و بدون تغییر شکل باقی می‌مانند، بحث فوق برای عنصر $abcd$ واقع در روی سطح جایی میله برای عنصر مشابه‌ای که در روی سطح یک استوانه داخلی به شعاع ρ قرار دارد نیز صادق است (شکل ۹-۱). بنابراین چنین عنصر داخلی نیز در برش حالم است و کرنش و تنش برشی مربوطه از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\gamma = \rho\theta \quad (9-5)$$

$$\tau = G\rho\theta \quad (9-6)$$

این معادلات نشان می‌دهند که کرنش برشی و تنش برشی با فاصله شعاعی ρ از مرکز مقطع به صورت خطی تغییر می‌کنند و مقدار ماکزیمم آنها در سطح خارجی میله خواهد بود. توزیع تنش در شکل ۹-۱ به صورت نمودار تنش مثلی نشان داده شده است. تنش‌های برشی که در صفحه مقطع عرضی اثر می‌کنند و مقدار آنها از معادله 9-6 بدست می‌آید با تنش‌های برشی مساوی واقع در روی صفحه‌های طولی میله همراه هستند



شکل ۹-۲ تنش‌های برشی طولی در یک میله دایره‌ای

شکل ۹-۳

۴۵۶

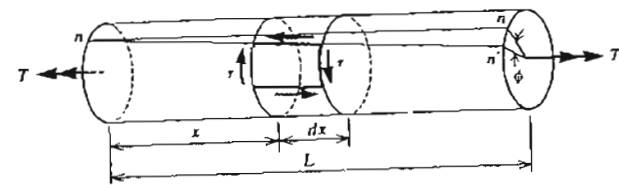
مدور از بقیه میله جدا شده است. شکل اولیه عنصر با $abdc$ مشخص گردیده است. مقطع عرضی سمت راست در حین پیچش نسبت به مقطع مقابل دوران می‌کند و نقاط b و d به ترتیب به b' و d' منتقل می‌شوند. طول‌های اضلاع عنصر در اثر دوران مزبور تغییر نمی‌کنند. ولی زوایای گوشه‌ها دیگر قائمه (90°) نیستند. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که عنصر در حالت برش خالص قرار دارد (بخش ۴-۵) و مقدار کرنش برشی γ برابر با گاهش زاویه $\hat{bac}$ است. این زاویه برابر است با

$$\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (9-1)$$

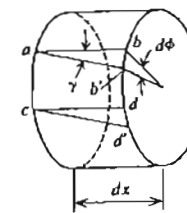
فاصله bb' طول قوس کوچکی به شعاع r و متقابل به زاویه $d\phi$ می‌باشد. $d\phi$ زاویه دوران یک مقطع عرضی نسبت به مقطع عرضی دیگر است. بدین ترتیب داریم $bb' = rd\phi$. فاصله ab نیز برابر dx (طول عنصر) است. اگر این مقادیر را در معادله 9-1 جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$\gamma = \frac{rd\phi}{dx} \quad (9-2)$$

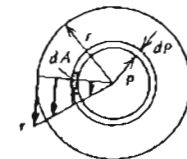
موقعی که یک محور مکانیکی تحت پیچش خالص قرار می‌گیرد، شدت تغییرات زاویه



(a)



(b)



(c)

شکل ۹-۱ میله دایره‌ای در پیچش خالص

۴۵۹

و با کمیت GJ موسوم به ضریب پیچشی میله معکوسا متناسب است. رایج کل پیچش

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (9-11)$$

این معادله برای اثبات تجربی تئوری فوق بکار می‌رود. تجربیات زیادی معادله مزبور را تایید می‌کنند و در نتیجه فرضیاتی که برای بدست آوردن آن صورت گرفته مورد تأیید می‌باشند. باید متذکر شد که آزمایش‌های پیچش معمولاً برای تعیین نمودن ضریب ارتجاعی برشی (G) مصالح مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر زاویه پیچش ایجاد شده در یک محور مکانیکی معین در اثر یک لنگر پیچشی معین اندازه گرفته شود، مقدار G از رابطه 9-11 به سهولت بدست می‌آید.

اگر به جای θ از معادله 9-10 در معادله 9-4 جایگزین کنیم، معادله‌ای برای محاسبه تنش برشی ماکزیم ناشی از پیچش در یک محور مکانیکی دایره‌ای بدست می‌آید.

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \quad (9-12)$$

این معادله نشان می‌دهد که تنش برشی ماکزیم با لنگر پیچشی T مستقیماً و با گشتاور لختی قطبی مقطع عرصی معکوساً متناسب است. تنش برشی در هر نقطه دیگر از مقطع عرضی که به فاصله ρ از مرکز دایره قرار دارد برابر است با

$$\tau = \frac{Tr\rho}{J} \quad (9-13)$$

این معادله به سهولت از معادلات 9-6 و 9-10 نتیجه می‌شود.

تیرهایی که در پیرامون ساختمان (در بین ستون‌های پیرامونی) واقع می‌شوند معمولاً تحت تأثیر پیچش قرار می‌گیرند. شکل ۹-۴ نشان می‌دهد باری که از تیر کف به تیر پیرامونی ساختمان منتقل می‌شود در آن پیچش ایجاد می‌کند.

اعضایی که تحت لنگر پیچشی قرار دارند در بسیاری از جاها به صورت محورهای مکانیکی دوار برای انتقال قدرت بکار می‌روند. یک مثال آشنا در شکل ۵-۹ مشاهده می‌شود. این شکل تصویری از انتقال قدرت را در یک اتومبیل نشان می‌دهد. گاز در استوانه در اثر احتراق فشرده شده به میله پیستون نیروی فشاری وارد می‌کند. میله پیستون میل لنگ را می‌پیچاند و خم می‌کند. پیچش بوسیله میل کاردان به جعبه دنده عقب اتومبیل منتقل شده و جعبه دنده نیز باعث پیچش محور چرخ‌های عقب می‌گردد.

قطر محورهای مکانیکی بعضی از مواقع بر اساس قدرتی که انتقال می‌دهند تعیین

۴۵۸

(شکل ۲-۹). این نتیجه از این واقعیت که در دو صفحه عمود بر هم همواره تنش‌های برشی مساوی وجود دارد بدست می‌آید (بخش ۱-۴). اگر مقاومت برشی ماده‌ای در جهت طول کمتر از مقاومت برشی آن در جهت عرض باشد (مانند چوب)، اولین ترک‌ها در میله پیچیده در روی سطح جانبی و در امتداد طول آن ظاهر خواهد گشت.

حالت تنش برشی حاصل روی سطح جانبی یک میله تحت پیچش (شکل ۲-۹) معادل است با تنش‌های کششی و فشاری مساوی روی عنصری که به اندازه 45° دوران کرده باشد (بخش ۴-۵). بنابراین یک عنصر مستطیلی که اضلاع آن با محور میله زاویه 45° تشکیل می‌دهند تحت اثر تنش‌های نشان داده شده در شکل ۳-۹ قرار دارد. اگر مقاومت کششی ماده‌ای کمتر از مقاومت برشی آن باشد، شکست ماده در امتداد مارپیچی که با محور میله زاویه 45° تشکیل می‌دهد صورت خواهد گرفت. با پیچاندن یک تکه گچ می‌توان این نوع شکست را به سهولت نشان داد.

اکنون رابطه بین لنگر پیچشی T و رایج پیچش ناشی از آن را بدست می‌آوریم. برآیند تنش‌های برشی که در نکل ۱-۹ نشان داده شده باید به طور استاتیکی با لنگر پیچشی کل T معادل باشد. سروی برشی مؤثر بر عنصر کوچکی به مساحت dA (که در شکل سایه زده شده) برابر τdA و لنگر این نیرو حول محور میله برابر $\tau \rho dA$ است. این لنگر با استفاده از رابطه 9-6 برابر $G\theta \rho^2 dA$ می‌باشد. لنگر پیچشی کل T مجموع این لنگرهای جزئی روی تمام سطح مقطع عرضی سیر است.

$$T = \int G\theta \rho^2 dA = G\theta \int \rho^2 dA = G\theta J \quad (9-7)$$

کمیت J در این رابطه گشتاور لختی قطبی مقطع عرضی دایره‌ای می‌باشد که با انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int \rho^2 dA \quad (9-8)$$

گشتاور لختی قطبی برای دایره‌ای به شعاع r و قطر d برابر است با (پیوست ۱ را ببینید)

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (9-9)$$

از رابطه 9-7 داریم

$$\theta = \frac{T}{GJ} \quad (9-10)$$

این رابطه نشان می‌دهد که زاویه پیچش در واحد طول (θ) با لنگر پیچشی T مستقیماً

۴۶۱

(شود) دوران می‌کند، زاویه دوران محور مکانیکی بر حسب رادیان در واحد ثانیه برابر $2\pi f \text{ rad/s}$ است. اگر محور مکانیکی لنگر پیچشی ثابت T (بر حسب mN) را منتقل کند کار انجام شده برابر $2\pi f T \text{ Nm/s}$ خواهد بود. با توجه به اینکه هر قوه اسب 745.7 Nm/s است، بین قوه اسب H و لنگر پیچشی T رابطه زیر برقرار است:

$$H(745.7) = 2\pi f T \quad ; \quad T = \frac{119H}{f} \quad (9-14)$$

اگر قوه اسب H معلوم باشد، لنگر پیچشی T در محور مکانیکی از معادله 9-14 محاسبه می‌شود. با دانستن T ، تنش برشی ماکزیمم در محور مکانیکی از معادله 9-12 و زاویه پیچش از معادله 9-11 بدست می‌آید. اگر T بر حسب cmKg و تواتر محور مکانیکی n دور در دقیقه باشد با توجه به اینکه $1 \text{ hp} = 7500 \text{ cmKg/s}$ معادله 9-14 به صورت زیر در می‌آید:

$$T = \frac{71600 H}{n} \quad (9-15)$$

مثال ۹-۱

یک محور مکانیکی با مقطع عرضی دایره‌ای توپر انتخاب کنید که قادر به انتقال 10 hp در تواتر 30 Hz باشد. تنش برشی ماکزیمم نباید از 55000 kN/m^2 تجاوز کند.

حل: از معادله 9-14 داریم

$$T = \frac{(119)(10)}{30} = 39.7 \text{ mN}$$

با استفاده از معادلات 9-9 و 9-12 می‌توانیم بنویسیم

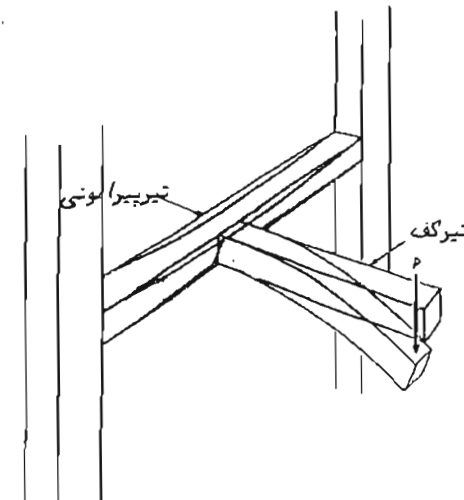
$$\frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{39.7}{55 \times 10^6} = 0.722 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$r^3 = \frac{2(722 \times 10^{-9})}{\pi} = 460 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

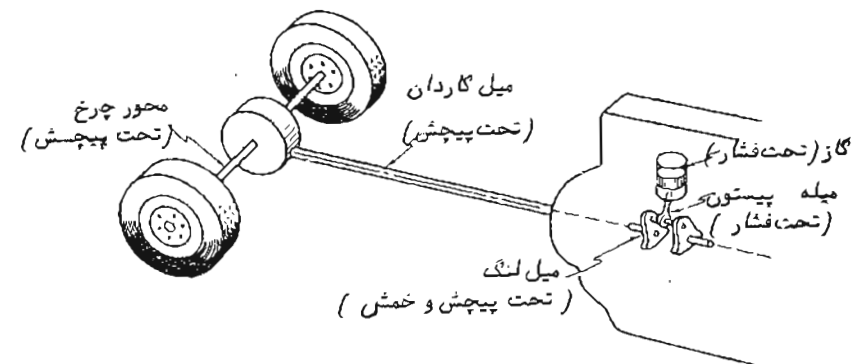
از این رابطه $r = 0.00772 \text{ m}$ و قطر محور مکانیکی $d = 2r = 15.4 \text{ mm}$ بدست می‌آید. انتخاب یک محور مکانیکی به قطر 16 mm در عمل توصیه می‌شود.

۴۶۰

می‌گردد. واحد متداول قدرت یا توان (کار در واحد زمان) در صنعت قوه اسب (hp) می‌باشد که برابر 745.7 Nm/s است. در سیستم اتحاد بین المللی یک Nm/s به وات (W) موسوم می‌باشد. کار انجام شده بوسیله یک لنگر پیچشی T برابر است با لنگر مزبور ضربدر زاویه دوران محور مکانیکی بر حسب رادیان. برای یک محور مکانیکی که با تواتر f دور در ثانیه (هر دور در ثانیه یک هرتس می‌باشد و با Hz نشان داده می‌شود)



شکل ۹-۴ تیر پیچشی ساختمان تحت پیچش



شکل ۹-۵ تصویر ساده‌ای از انتقال قدرت در یک اتومبیل

۴۶۳

$$= \frac{\pi(0.01)(840000)}{32(125) \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{3.75} \right)} = 991 \text{ cmKg}$$

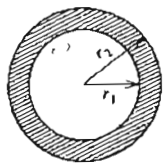
۹-۲ پیچش یک میله دایره‌ای تو خالی

تنش برشی ناشی از پیچش در یک میله دایره‌ای تو پر در سطح خارجی آن ماکزیمم و در مرکز آن صفر است. بنابراین مقدار زیادی از مصالح محور مکانیکی تو پر تحت اثر تنش‌های برشی خیلی کمتر از تنش برشی محاز قرار خواهد داشت. اگر بخواهیم از وزن میله کاسته و در مصالح مصرف شده صرفه جویی کنیم، مصلحت در آن است که از میله تو خالی استفاده نماییم.

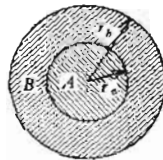
تحلیل پیچش یک میله دایره‌ای تو خالی بر اساس همان فرضیات بکار رفته در مورد میله دایره‌ای تو پر قرار دارد. بدین ترتیب چون خطوط شعاعی در مقطع عرضی مستقیم باقی می‌مانند، معادلاتی که در بحث قبل برای تنش برشی (معادله 9-6) و کرنش برشی (معادله 9-5) بدست آمد در این مورد نیز قابل استفاده می‌باشند. البته فاصله شعاعی ρ که در معادلات مربوط ظاهر می‌شود از r_1 (شعاع داخلی میله) تا r_2 (شعاع خارجی میله) تغییر می‌کند (شکل ۹-۷).

رابطه بین لنگر پیچشی T و زاویه پیچش در واحد طول θ را می‌توان از معادلات 9-7 و 9-8 بدست آورد، البته با این تفاوت که حدود انگرال گیری از r_1 تا r_2 خواهد بود. بنابراین رابطه $T = G\theta J$ در مورد یک میله دایره‌ای تو خالی نیز صادق است، ولی کمیت J در آن گشاور لختی قطبی مساحت مقطع عرضی حلقه - شکل و برابر است با

$$J = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \quad (9-16)$$



شکل ۹-۷ میله دایره‌ای تو خالی

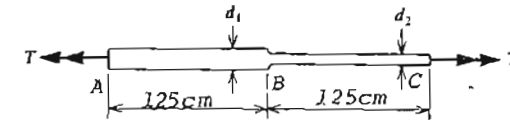


شکل ۹-۸

۴۶۲

مثال ۹-۲

میله‌ای مطابق شکل ۹-۶ تحت پیچش قرار دارد. قطر d_1 آن 5cm و قطر d_2 آن 3.75cm می‌باشد. اگر زاویه پیچش ϕ نباید از 0.01 رادیان تجاوز کند لنگر پیچشی مجاز T_w چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را $G = 840000 \text{ Kg/cm}^2$ اختیار کنید.



شکل ۹-۶

حل: زاویه پیچش کل میله برابر است با زاویه پیچش مقطع B نسبت به مقطع A (ϕ_1) بعلاوه زاویه پیچش مقطع C نسبت به مقطع B (ϕ_2).

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

اگر طول قسمت‌های AB و BC را به ترتیب L_1 و L_2 و گشاور لختی قطبی آنها را به ترتیب J_1 و J_2 بنامیم زاویه پیچش کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi = \frac{TL_1}{GJ_1} + \frac{TL_2}{GJ_2} \Rightarrow T_w = \frac{\phi_{\max} G}{\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2}}$$

$$\text{با توجه به اینکه } L_1 = L_2 = L, J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} \text{ و } J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} \text{ داریم}$$

$$T_w = \frac{\phi_{\max} G}{L \left(\frac{32}{\pi d_1^4} + \frac{32}{\pi d_2^4} \right)} = \frac{\pi \phi_{\max} G}{32L \left(\frac{1}{d_1^4} + \frac{1}{d_2^4} \right)}$$

۴۶۴

معادلات اساسی برای θ ، ϕ و τ که در بخش قبل بدست آمد (معادلات 9-10 تا 9-13) برای یک لوله دایره‌ای نیز صادق است با این شرط که کمیت J در آنها از معادله 9-16 حساب شود.

مثال ۳-۹

یک محور مکانیکی دایره‌ای تو خالی و یک محور مکانیکی دایره‌ای تو پر دارای شعاع خارجی یکسان r می‌باشد. شعاع داخلی محور مکانیکی تو خالی $0.6r$ است. با فرض اینکه هر دو محور مکانیکی تحت تأثیر لنگر پیچشی یکسانی قرار داشته باشند، وزن آنها و تنش برشی ماکزیمم در آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: وزن‌های دو محور مکانیکی با مساحت‌های مقطع عرضی آنها متناسب می‌باشد. از این رو وزن محور مکانیکی تو پر با πr^2 و وزن محور مکانیکی تو خالی با $\pi r^2 - \pi (0.6r)^2 = 0.64\pi r^2$ متناسب است. بنابراین وزن محور مکانیکی تو خالی 64 درصد وزن محور مکانیکی تو پر می‌باشد.

تنش‌های برشی ماکزیمم با $1/J$ متناسب می‌باشند. برای محور مکانیکی تو پر داریم $J = \pi r^4/2$ و برای محور مکانیکی تو خالی داریم $J = \pi r^4/2 - \pi (0.6r)^4/2 = 0.8704\pi r^4/2$. بنابراین نسبت تنش برشی ماکزیمم در محور مکانیکی تو خالی به تنش برشی ماکزیمم در محور مکانیکی تو پر 1.15 می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهند که تنش برشی ماکزیمم در یک محور مکانیکی تو خالی با $r_1/r_2 = 0.6$ در مقایسه با یک محور مکانیکی تو پر 15 درصد افزایش می‌یابد ولی وزن آن به اندازه 36 درصد کاهش پیدا می‌کند.

مثال ۴-۹

یک میله دایره‌ای شامل لوله تو خالی B و هسته تو پر A (شکل ۸-۹) می‌باشد که کاملاً به یکدیگر متصل شده و به صورت یک میله تو پر عمل می‌کنند. ضریب ارتجاعی برشی ماده داخلی G_a و ضریب ارتجاعی برشی ماده خارجی G_b می‌باشد. موقعی که میله مرکب مزبور تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد، تنش‌های برشی ماکزیمم τ_a و τ_b به ترتیب در مصالح داخلی و خارجی را حساب کنید.

۴۶۵

حل: زاویه پیچش در واحد طول θ باید برای لوله و هسته یکسان باشد. در این صورت از معادله 9-6 خواهیم داشت

$$\theta = \frac{\tau_a}{G_a r_a} = \frac{\tau_b}{G_b r_b} \quad (9-17)$$

در این رابطه، τ_a تنش برشی ماکزیمم در ماده داخلی و τ_b تنش برشی ماکزیمم در ماده خارجی می‌باشد. لنگر پیچشی کل T مجموع لنگر پیچشی T_a در هسته و لنگر پیچشی T_b در لوله می‌باشد. در این صورت با استفاده از رابطه 9-7 می‌توانیم بنویسیم

$$T = T_a + T_b = G_a \theta J_a + G_b \theta J_b \quad (9-18)$$

گشتاورهای لختی قطبی J_a و J_b در این معادله عبارتند از

$$J_a = \frac{\pi r_a^4}{2} ; \quad J_b = \frac{\pi (r_b^4 - r_a^4)}{2}$$

معادله 9-18 را برای θ حل می‌کنیم.

$$\theta = \frac{T}{G_a J_a + G_b J_b}$$

تنش‌های τ_a و τ_b با جایگزینی θ در معادله 9-17 بدست می‌آیند.

$$\tau_a = T \frac{G_a r_a}{G_a J_a + G_b J_b} ; \quad \tau_b = T \frac{G_b r_b}{G_a J_a + G_b J_b} \quad (9-19)$$

لنگرهای پیچشی که بوسیله دو قسمت میله خمل می‌شوند عبارتند از

$$T_a = T \frac{G_a J_a}{G_a J_a + G_b J_b} ; \quad T_b = T \frac{G_b J_b}{G_a J_a + G_b J_b} \quad (9-20)$$

توجه کنید مثال فوق یک سیستم هیبر استاتیک می‌باشد.

۳-۹ انرژی تغییر شکل در برش و پیچش

عنصری از یک ماده ارتجاعی را در حالت برش خالص در نظر می‌گیریم (شکل ۹-۹). موقعی که عنصر مزبور تغییر شکل پیدا می‌کند و تنش برشی در آن به تدریج از صفر تا مقدار نهایی τ افزایش می‌یابد، وجه فوقانی cd نسبت به وجه تحتانی ab به اندازه γdy به سمت راست حرکت می‌کند. در این صورت کار انجام شده بوسیله نیروی

۴۶۷

(۹-۱۰)

$$dU = u dV = \frac{\tau_{\max}^2 \rho^2}{2Gr^2} (L)(2\pi\rho) d\rho$$

بنابراین انرژی تغییر شکل کل میله پیچیده از انتگرال زیر بدست می‌آید :

$$U = \int_0^r \frac{\tau_{\max}^2 \rho^2}{2Gr^2} (L)(2\pi\rho) d\rho = \frac{1}{2}(\pi r^2 L) \left(\frac{\tau_{\max}^2}{2G} \right) \quad (9-24)$$

این انرژی نصف مقدار انرژی حالتی است که تمام ماده تحت تنش ماکزیم $\tau_{\max}$ قرار می‌داشت. با استفاده از روابط $\tau_{\max} = Tr/J$ و $J = \pi r^4/2$ در معادله 9-24 خواهیم داشت

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad (9-25)$$

انرژی تغییر شکل برای یک میله تحت پیچش را می‌توان به طریق دیگری نیز بدست آورد. معادله 9-11 نشان می‌دهد که رابطه بین لنگر پیچشی T و زاویه پیچش ϕ در ناحیه ارتجاعی ماده خطی است. این رابطه در شکل ۱۱-۹ بوسیله خط OA نشان داده شده است. کار انجام شده بوسیله لنگر پیچشی برای هر نمو کوچک زاویه پیچش $(d\phi)$ برابر با مساحت نوار هاشور خورده در این شکل می‌باشد. بدین ترتیب همچنانکه لنگر پیچشی به تدریج از صفر تا مقدار نهایی T افزایش می‌یابد، کار کل (برابر با انرژی تغییر شکل ذخیره شده) بوسیله مساحت مثلث OAB داده می‌شود.

$$U = \frac{T\phi}{2} \quad (9-26)$$

اگر به جای ϕ مقدار مساوی T را از رابطه 9-11 در معادله فوق قرار دهیم، انرژی تغییر شکل کل به یکی از دو صورت زیر نوشته می‌شود :

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} = \frac{GJ\phi^2}{2L} \quad (9-27)$$

معادله فوق را برای یک میله دایره‌ای توپر و یا توخالی می‌توان بکار برد به شرط آنکه به جای J مقدار مربوطه برای یک مقطع توپر یا توخالی جایگزین شود.

۴۶۶

برشی $\tau dx dz$ در روی وجه فوقانی برابر $(\frac{1}{2}\tau dx dz)(\gamma dy)$ است (ضریب $\frac{1}{2}$ در این عبارت به علت متناسب بودن τ و γ می‌باشد). چون نیروهای برشی در روی اضلاع ac و bd کار انجام نمی‌دهند، کمیت فوق معرف انرژی تغییر شکل کل در عنصر مزبور می‌باشد و اگر آن را بر $(dx dy dz)$ (حجم عنصر) تقسیم کنیم انرژی تغییر شکل در واحد حجم (u) بدست می‌آید.

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} \quad (9-21)$$

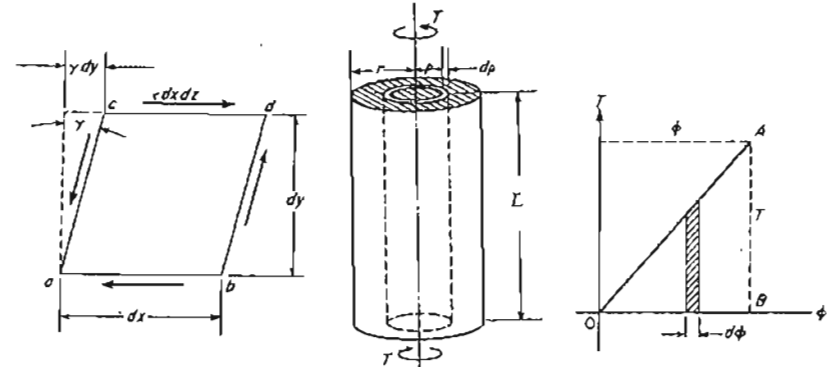
با توجه به اینکه در ناحیه ارتجاعی ماده رابطه $\gamma = \tau/G$ وجود دارد، معادله فوق را به یکی از دو صورت زیر می‌توان نوشت :

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (9-22)$$

با استفاده از این روابط می‌توان انرژی تغییر شکل کل در یک میله دایره‌ای تحت پیچش به شعاع r و طول L را به سهولت بدست آورد. اگر تنش برشی ماکزیم در سطح خارجی میله را $\tau_{\max}$ بنامیم، تنش برشی در نقطه‌ای به فاصله ρ از محور میله برابر $\tau_{\max}(\rho/r)$ خواهد بود. در این صورت انرژی تغییر شکل در واحد حجم در شعاع ρ برابر است با

$$u = \frac{\tau_{\max}^2 \rho^2}{2Gr^2} \quad (9-23)$$

انرژی تغییر شکل لوله نازکی به طول L ، شعاع ρ و ضخامت $d\rho$ مساویست با (شکل



شکل ۹-۹

شکل ۹-۱۰

شکل ۹-۱۱

۴۶۹

بر هم مقدار مساوی دارند (بخش ۱-۴). برآیندهای تنشهای برشی در روی صفحه‌های طولی برابر با F_1 و F_2 (شکل ۱۲c-۹) می‌باشند که از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$F_1 = \tau_1 t_1 dx \quad ; \quad F_2 = \tau_2 t_2 dx$$

در روابط فوق، τ_1 و τ_2 به ترتیب مصرف تنشهای برشی در نقاط b و c و t_1 و t_2 ضخامت لوله در همان نقاط می‌باشد. از تعادل عنصر شکل ۱۲c-۹ نتیجه می‌شود که

$$F_1 = F_2 \quad \text{یا} \quad \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$$

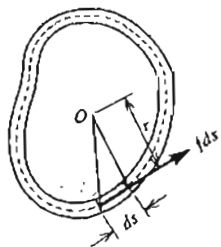
چون محل برشهای طولی ab و cd به طور اختیاری انتخاب شده‌اند از معادله فوق نتیجه می‌شود که حاصل ضرب تنش برشی در ضخامت لوله در تمام نقاط مقطع عرضی ثابت می‌باشد. این حاصل ضرب به نام جریان برش خوانده و با f نشان داده می‌شود.

$$f = \tau t = \text{ثابت} \quad (9-28)$$

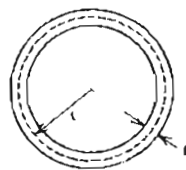
بدین ترتیب بیشترین مقدار تنش برشی در جایی که ضخامت لوله حداقل است رخ می‌دهد و بر عکس. اگر ضخامت لوله یکنواخت باشد واضح است که تنش برشی τ در اطراف مقطع عرضی لوله ثابت خواهد بود.

برای اینکه جریان برش f را به لنگر پیچشی T مؤثر بر لوله مربوط کنیم، عنصری به طول ds را در مقطع عرضی در نظر می‌گیریم (شکل ۱۳-۹). نیروی برشی کل که بر عنصر مزبور اثر می‌کند برابر $f ds$ و لنگر این نیرو حول نقطه‌ای مانند O برابر $dT = r f ds$ است که در آن r فاصله نقطه O از محور خط میانی جدار لوله می‌باشد. لنگر پیچشی کل T با جمع نمودن تمام این لنگرهای پیچشی کوچک در روی تمام طول خط میانی مقطع عرضی (L_m) بدست می‌آید.

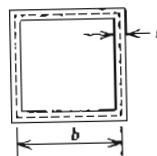
$$T = f \int_0^{L_m} r ds$$



شکل ۹-۱۳
مقطع عرضی لوله



شکل ۹-۱۴
لوله دایره‌ای جدار نازک

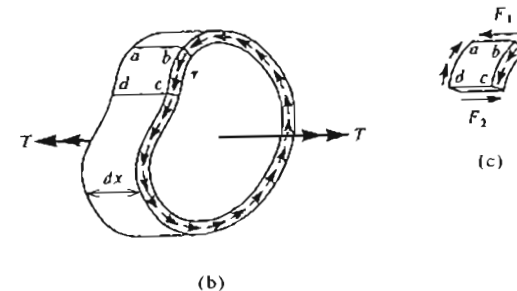
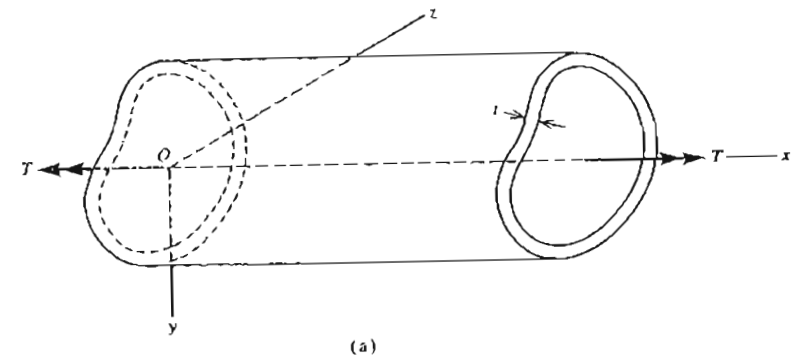


شکل ۹-۱۵
لوله مربعی جدار نازک

۴۶۸

یک لوله جدار نازک با شکل مقطع عرضی در شکل ۱۲a-۹ نشان داده شده است. ضخامت t لوله در اطراف مقطع عرضی ممکن است متغیر باشد ولی در مقایسه با عرض کل مقطع عرضی کوچک فرض می‌شود. لوله به شکل استوانه و تحت اثر لنگر پیچشی T در هر انتهایش می‌باشد. در اثر این لنگرهای پیچشی، تنشهای برشی τ در هر مقطع عرضی لوله ایجاد خواهد شد (شکل ۱۲b-۹). تنشهای برشی در عرض ضخامت کوچک لوله را می‌توان یکنواخت فرض نمود، ولی این تنشها در اطراف مقطع عرضی ممکن است متغیر باشند.

برای اینکه بزرگی تنشهای برشی τ را پیدا کنیم، ابتدا عنصر کوچک $abcd$ به طول dx را که بوسیله دو برش طولی ab و cd بدست آمده در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲b-۹). بزرگی تنشهای برشی در روی لبه‌های طولی این عنصر یا بزرگی تنشهای برشی در روی مقاطع عرضی برابر می‌باشد، زیرا تنشهای برشی در روی دو صفحه عمود



شکل ۹-۱۲ لوله جدار نازک با شکل مقطع عرضی اختیاری

۴۷۱

$$J = \frac{4A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}} \quad (9-32)$$

کمیت J به طور کلی به " ثابت پیچش " مقطع عرضی موسوم می باشد. ثابت پیچش در حالت یک میله با مقطع عرضی دایره برابر با گشتاور لختی قطبی مقطع عرضی می باشد و برای یک لوله جدار نازک از معادله 9-32 بدست می آید. موقعی که ضخامت t لوله ثابت است، معادله 9-32 به صورت زیر ساده می شود:

$$J = \frac{4tA_m^2}{L_m} \quad (9-33)$$

برای یک لوله دایره ای جدار نازک به ضخامت t و شعاع متوسط r (شکل ۹-۱۴)، طول خط میانی برابر $L_m = 2\pi r$ و مساحت محصور بوسیله این خط برابر $A_m = \pi r^2$ است. بنابراین جریان برش و تنش برشی از معادله 9-29 عبارتند از

$$f = \frac{T}{2\pi r^2} ; \quad \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \quad (9-34)$$

زاویه پیچش در واحد طول از معادله 9-31 بدست می آید.

$$\theta = \frac{T}{2\pi G r^3 t} \quad (9-35)$$

ثابت پیچش برابر است با

$$J = 2\pi r^3 t \quad (9-36)$$

تمام این نتایج که برای یک لوله دایره ای جدار نازک بدست آمد از معادلات پیچش یک میله دایره ای تو خالی (بخش ۲-۹) نیز بدست می آیند. برای مثال، ثابت پیچش (در این مورد برابر با گشتاور لختی قطبی) مساوی است با

$$J = \int \rho^2 dA \approx r^2 \int dA = 2\pi r^3 t$$

در این رابطه فرض شده است که شعاع ρ در سراسر ضخامت لوله تقریباً ثابت و برابر r می باشد. تنش برشی ماکزیمم از معادله 9-12 برابر است با

$$\tau = \frac{T r}{J} = \frac{T}{2\pi r^2 t}$$

در این رابطه فرض شده است که تنش برشی τ در سراسر ضخامت لوله ثابت و برابر با

۴۷۰

مقدار انتگرال در عبارت فوق توجیه هندسی ساده ای دارد. کمیت rds معرف دو برابر مساحت مثلث کوچک شکل ۱۳-۹ می باشد. توجه کنید قاعده مثلث مزبور به طول ds و ارتفاع آن برابر r است. بنابراین انتگرال عبارت فوق معرف دو برابر مساحت محصور بوسیله خط میانی جدار لوله می باشد. اگر این مساحت را با A_m نشان دهیم خواهیم داشت

$$T = 2f A_m ; \quad f = \tau t = \frac{T}{2A_m} \quad (9-29)$$

جریان برش و تنش برشی برای هر لوله جدار نازکی از رابطه فوق بدست می آید. زاویه پیچش در واحد طول لوله (θ) با استفاده از انرژی تغییر شکل لوله محاسبه می شود. انرژی تغییر شکل در واحد حجم برابر $\tau^2/(2G)$ (معادله 9-22) و در نتیجه انرژی تغییر شکل در واحد طول لوله برابر است با

$$U = \int_0^{L_m} \frac{\tau^2 t}{2G} ds = \frac{f^2}{2G} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

به جای جریان برش (f) از معادله 9-29 در معادله فوق قرار داده و سپس انرژی تغییر شکل را با کار انجام شده بوسیله لنگر پیچشی T مساوی قرار می دهیم.

$$\frac{T^2}{8GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} = \frac{T\theta}{2}$$

زاویه پیچش در واحد طول از رابطه فوق بدست می آید.

$$\theta = \frac{T}{4GA_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t} \quad (9-30)$$

از معادله 9-30 با معلوم بودن ابعاد مقطع عرضی زاویه پیچش حساب می شود. اگر ضخامت t ثابت باشد، معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$\theta = \frac{TL_m}{4Gt A_m^2} = \frac{\tau L_m}{2GA_m} \quad (9-31)$$

زاویه کل پیچش (ϕ) با ضرب نمودن θ در طول L لوله بدست می آید.

معادله 9-30 برای زاویه پیچش در واحد طول یک لوله جدار نازک همان شکل معادله 9-10 برای یک میله دایره ای تو پیرا دارد، با این شرط که به جای J عبارت زیر بکار رود:

۴۷۲

می‌باشد. بنابراین معادله 40-9 نشان می‌دهد که نتایج حاصله از فرمول تقریبی تنش برشی فقط به مقدار جزئی کمتر از مفادیر حاصله از فرمول دقیق می‌باشد و دقت فرمول تقریبی با زیاد شدن نسبت r/t افزایش می‌یابد.

مثال ۶-۹

یک لوله دایره‌ای (شکل ۱۴-۹) و یک لوله مربعی (شکل ۱۵-۹) از یک نوع ماده ساخته شده‌اند. هر دو لوله طول، ضخامت و مساحت مقطع عرضی یکسان دارند و هر دو تحت تأثیر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. نسبت‌های تنش‌های برشی و زاویه‌های پیچش دو لوله چقدر می‌باشند؟ از اثر تمرکز تنش در گوشه‌های لوله مربعی صرف نظر کنید.

حل: برای لوله دایره‌ای، مساحت محصور بوسیله خط میانی مقطع عرضی $A_{m1} = \pi r^2$ (شعاع خط میانی r) و مساحت مقطع عرضی $A_1 = 2\pi r t$ می‌باشد. مساحت مقطع عرضی لوله مربعی $A_2 = 4bt$ (طول ضلع مربع میانی b) است. چون مساحت‌های مقاطع عرضی دو لوله مساوی می‌باشند خواهیم داشت:

$$2\pi r t = 4bt \quad : \quad b = \frac{\pi r}{2}$$

مساحت محصور بوسیله خط میانی مقطع عرضی $A_{m2} = b^2$ می‌باشد. نسبت تنش برشی در لوله دایره‌ای به تنش برشی در لوله مربعی برابر است با (با استفاده از معادله 29-9)

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{b^2}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

نسبت زاویه‌های پیچش (معادله 31-9) مساویست با

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\tau_1 A_{m2}}{\tau_2 A_{m1}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0.617$$

این نتایج نشان می‌دهد که لوله دایره‌ای نه تنها تنش برشی کمتری نسبت به لوله مربعی دارد، بلکه سختی آن در مقابل دوران نیز بیشتر است.

۹-۵ پیچش میله‌های با مقطع عرضی مستطیل یا جدار نازک

۴۷۲

مقدار تنش برشی در خط میانی مقطع عرضی باشد. اگر لوله تحت پیچش دارای جدارهای خیلی نازک باشد، امکان کمانش جدارها باید به حساب آورده شود. برای مثال وقتی که نسبت r/t (شکل ۱۴-۹ را ببینید) برای یک لوله دایره‌ای طویل که از فولاد نرم ساخته شده در حدود 60 می‌باشد، لوله مربوط تحت تنش‌های مجاز معمولی کمانه خواهد کرد.

مثال ۵-۹

تنش برشی متوسط در یک لوله دایره‌ای جدار نازک (شکل ۱۴-۹) را که از معادله تقریبی 34-9 بدست می‌آید با تنش برشی ماکزیم که از فرمول پیچش (معادله 12-9) محاسبه می‌شود مقایسه کنید.

حل: اگر فرض کنیم $\beta = r/t$ ، فرمول تقریبی تنش برشی (معادله 34-9) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau_1 = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T}{2\pi t^3 \beta^2} \quad (9-37)$$

تنش برشی ماکزیم واقعی در لوله برابر است با

$$\tau_2 = \frac{T(r+t/2)}{J} \quad (9-38)$$

گشتاور لختی قطبی در این رابطه مساویست با

$$J = \frac{\pi}{2} \left[\left(r + \frac{t}{2}\right)^4 - \left(r - \frac{t}{2}\right)^4 \right] = \frac{\pi r t}{2} (4r^2 + t^2)$$

پس از جایگزینی این مقدار J در معادله 38-9 خواهیم داشت

$$\tau_2 = \frac{T(2r+t)}{\pi r t (4r^2 + t^2)} = \frac{T(2\beta+1)}{\pi t^3 \beta (4\beta^2+1)} \quad (9-39)$$

اکنون نسبت τ_1/τ_2 را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4\beta^2+1}{2\beta(2\beta+1)} \quad (9-40)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که نسبت τ_1/τ_2 فقط به کمیت $\beta = r/t$ بستگی دارد. نسبت مزبور برای مقادیر β برابر 5، 10 و 20 به ترتیب برابر 0.92، 0.96 و 0.98

۴۷۵

مقطع رخ می‌دهد از معادله زیر بدست می‌آید :

$$\tau_{max} = \frac{T}{abc^2} \quad (9-41)$$

در این رابطه، T لنگر پیچشی، b ضلع دراز، c ضلع کوتاه و α یک ضریب عددی است که بستگی به نسبت b/c دارد. چند مقدار α در جدول ۱-۹ داده شده است. زاویه پیچش در واحد طول در مورد یک مقطع عرضی مستطیلی از رابطه زیر بدست

$$\theta = \frac{T}{\beta bc^3 G} \quad (9-42)$$

ضریب β نیز بستگی به نسبت b/c دارد که در جدول ۱-۹ داده شده است. برای یک مقطع عرضی مستطیلی خیلی باریک از جدول ۱-۹ مشاهده می‌شود که α و β برابر $1/3$ می‌گردند و معادلات تنش برشی ماکزیمم و زاویه پیچش در واحد طول از روابط زیر بدست می‌آیند :

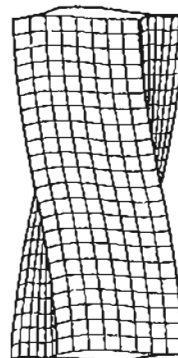
$$\tau_{max} = \frac{3T}{bc^2} \quad (9-43)$$

$$\theta = \frac{3T}{\beta c^3 G} \quad (9-44)$$

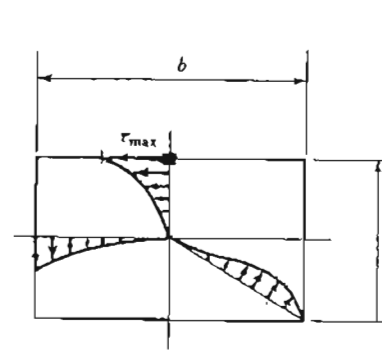
معادلات 9-43 و 9-44 اهمیت کار بردی دارند زیرا آنها نه فقط برای مقاطع مستطیلی باریک بکار می‌روند بلکه به عنوان جواب‌های تقریبی در حالت‌های دیگر که ضخامت مقطع عرضی کوچک است نیز بکار می‌روند. برای مثال، زاویه پیچش برای مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل‌های ۱۹-۹ و ۲۰-۹ با جایگزینی $b=\phi r$ برای مقطع شکل ۱۹-۹ و $b=2a-c$ برای مقطع شکل ۲۰-۹ در معادله 9-44 بدست می‌آید. تنش برشی ماکزیمم در مقطع شکل ۱۹-۹ از معادله 9-43 حاصل می‌شود. تنش برشی ماکزیمم برای مقطع نبشی شکل ۲۰-۹ در گوشه R می‌باشد. تنش ماکزیمم در این نقطه با ضرب نمودن تنش بدست آمده از معادله 9-43 در یک ضریب تمرکز تنش نتیجه می‌شود. این ضریب با نسبت شعاع قوس در محل برخورد دو ضلع (r) به ضخامت نبشی (c) یعنی r/c تغییر می‌کند و چند مقدار آن در جدول ۲-۹ داده شده است.

۴۷۴

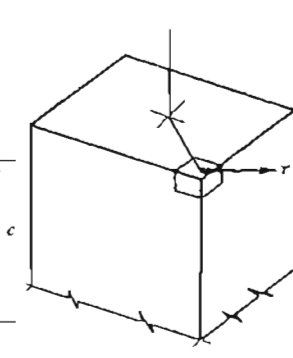
مسئله پیچش یک میله با مقطع عرضی مستطیل به علت تاب خوردگی مقاطع عرضی مسئله پیچیده‌ای است. این تاب خوردگی را می‌توان با یک پاک‌کن لاستیکی مستطیلی که در روی وجه‌های آن یک سری مربع‌های کوچک رسم شده باشد به طور تجربی نشان داد. از شکل ۱۶-۹ مشاهده می‌شود که خطوطی که در ابتدا عمود بر محور میله بودند در حین پیچش به صورت منحنی در می‌آیند. این شکل نشان می‌دهد که پیچیدگی مربع‌های کوچک مذکور در فوق در طول اضلاع مقطع عرضی متغیر می‌باشد، بدین ترتیب که مقدار آن در وسط ماکزیمم و در گوشه‌ها صفر است. بنابراین ما انتظار داریم که تنش برشی مطابق این پیچیدگی تغییر کند، بدین ترتیب که مقدار آن در وسط اضلاع آن ماکزیمم و در گوشه‌های مقطع عرضی صفر می‌باشد (تنش برشی در وسط اضلاع طویل بیشترین مقدار را دارد). شکل ۱۷-۹ توزیع تنش را در امتداد سه خط مقطع عرضی نشان می‌دهد. به اختلاف توزیع تنش در یک مقطع عرضی مستطیلی با یک مقطع دایره‌ای توجه کنید. تنش برشی در یک مقطع دایره‌ای در دورترین نقطه ماکزیمم است ولی تنش برشی در یک مقطع مستطیلی در دورترین نقطه صفر می‌باشد. این نکته را با بررسی یک عنصر گوشه (شکل ۱۸-۹) می‌توان نشان داد. اگر تنش برشی τ در گوشه وجود داشته باشد، آن را می‌توان به دو مؤلفه موازی لبه‌های مقطع عرضی تجزیه نمود. چون در روی صفحه‌های عمود بر تنش‌های مزبور تنش برشی وجود ندارد (در روی سطوح خارجی تنش وجود ندارد)، دو مؤلفه مزبور ناچاراً باید برابر صفر باشند و در نتیجه تنش برشی در گوشه‌ها برابر صفر است. جواب‌های تحلیلی برای پیچش یک عضو با مقطع مستطیل در مرجع 26 بدست آمده است و بحث درباره جزئیات آن خارج از موضوع این کتاب است. اما جواب‌های نهائی را در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم. تنش برشی ماکزیمم که در وسط اضلاع طویل



شکل ۱۶-۹



شکل ۱۷-۹



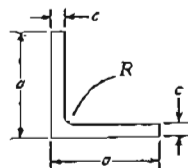
شکل ۱۸-۹

۴۷۷

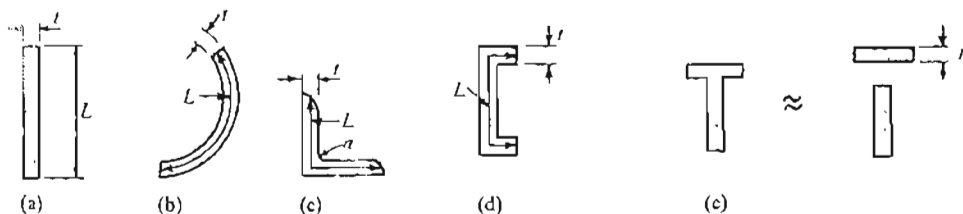
اگر طول خط میانی مقاطع مختلف شکل ۹-۲۱ یکسان باشد، همگی آنها تحت لنگر پیچشی معینی تنش برشی ماکزیمم تقریباً " یکسانی خواهند داشت، البته در نقطه a مقطع نبشی (شکل ۹-۲۱ c) همانطوریکه قبلاً بحث شد تنش‌های موضعی زیادی متمرکز خواهد بود.



شکل ۹-۱۹



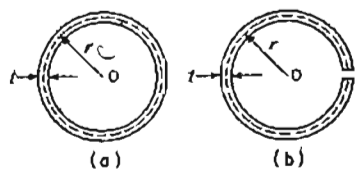
شکل ۹-۲۰



شکل ۹-۲۱

مثال ۹-۲

دو لوله جدار نازک با مقطع عرضی دایره مشابه یکدیگر می‌باشند بجز اینکه یکی از آنها بدون شکاف و دیگری شکافدار مطابق شکل ۹-۲۲ می‌باشد. اگر شعاع خط میانی برابر r و ضخامت جدار لوله‌ها برابر t باشد، نسبت زوایای پیچش در واحد طول دو لوله را وقتی که تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارند حساب کنید.



شکل ۹-۲۲

۴۷۶

جدول ۹-۱

جدول ضرایب پیچش میله با مقطع عرضی مستطیل

b/c	α	β
1.00	0.208	0.141
1.50	0.231	0.196
1.75	0.239	0.214
2.00	0.246	0.229
2.50	0.258	0.249
3.00	0.267	0.263
4.00	0.282	0.281
6.00	0.299	0.299
8.00	0.307	0.307
10.00	0.313	0.313
∞	0.333	0.333

جدول ۹-۲

ضریب تمرکز تنش

r/c	0.125	0.25	0.5	1
ضریب تمرکز تنش	2.5	2.25	2	1.75

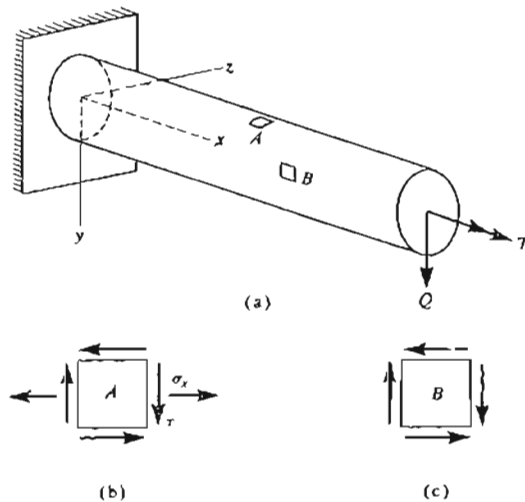
۴۷۹

زاویه پیچش کل با استفاده از رابطه 9-44 مساویست با

$$\phi = \theta L = \frac{3 \times 3000 \times 120}{18.8 \times (1.2)^3 \times 84(10)^4} = 0.0396 \text{ rad}$$

۶-۹ خمش توأم با پیچش

اعضای سازه‌ای بعضی از مواقع لازم است که بارهای خمشی و پیچشی را توأم تحمل کنند. برای مثال، محورهای مکانیکی دایره‌ای که لنگر پیچشی منتقل می‌کند تحت اثر لنگر خمشی نیز قرار می‌گیرند. اگر برآوردهای تنش تحت چنین شرایطی معلوم باشند، تحلیل تنش با استفاده از مطالب فصل پنجم به سهولت صورت می‌گیرد. برآوردهای تنش ممکن است شامل لنگرهای خمشی، لنگرهای پیچشی و نیروهای برشی باشند. تنش‌های ناشی از هر یک از برآوردهای تنش در هر نقطه مقطع عرضی را می‌توان بوسیله فرمول‌های مناسب بدست آورد. سپس با توجه به آنچه که در فصل پنجم گفته شد حالت تنش در هر نقطه را می‌توان به طور کامل بررسی نمود. به خصوص، تنش‌های اصلی و تنش‌های برشی ماکزیمم در هر نقطه را می‌توان حساب کرد.



شکل ۹-۲۳ خمش توأم با پیچش

۴۷۸

حل: زاویه پیچش در واحد طول لوله بدون شکاف از معادله 9-35 به دست می‌آید.

$$\theta_1 = \frac{T}{2\pi G r^3 t}$$

زاویه پیچش در واحد طول لوله شکافدار با جایگزینی $b=2\pi r$ و $c=t$ در معادله 9-44 بدست می‌آید.

$$\theta_2 = \frac{3T}{2\pi r G t^3}$$

بنابراین از تقسیم نمودن θ_1 بر θ_2 خواهیم داشت

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{3} \left(\frac{t}{r} \right)^2$$

اگر نسبت t/r را برای مثال 1/10 فرض کنیم از معادله فوق $\theta_1/\theta_2 = \frac{1}{300}$ به دست می‌آید، این نشان می‌دهد که لوله بدون شکاف 300 بار از لوله شکافدار در مقابل پیچش سفت تر است.

مثال ۸-۹

ابعاد مقطع نبشی سازه‌ای شکل ۹-۲۰ عبارتند از $a=10 \text{ cm}$ و $c=1.2 \text{ cm}$. یک میله فولادی با مقطع عرضی نبشی مزبور به طول 1.2 m تحت اثر لنگرهای پیچشی $T=3000 \text{ cmKg}$ در دو انتهایش قرار دارد. تنش برشی ماکزیمم τ و زاویه پیچش ϕ بین دو انتهای میله را حساب کنید. شعاع قوس اتصال دو قسمت نبشی (در نقطه R) $r=0.6 \text{ cm}$ است.

حل: با جایگزینی $b=2a-c=18.8 \text{ cm}$ در معادله 9-43 خواهیم داشت

$$\tau_{\max} = \frac{3(3000)}{18.8(1.2)^2} = 333 \text{ Kg/cm}^2$$

ضریب تمرکز تنش با توجه به اینکه $r/c = 0.5$ از جدول ۹-۲ برابر 2 می‌باشد، در نتیجه تنش برشی ماکزیمم فوق در گوشه R برابر است با

$$\tau' = 2 \times 333 = 666 \text{ Kg/cm}^2$$

اگر تنش‌های مجاز عمودی (σ_w) و برشی (τ_w) معلوم باشند، آنها را می‌توان به جای σ_1 یا σ_2 و τ_{max} در دو معادله فوق جایگزین کرد و معادلات حاصل را برای d حل نمود تا مقدار لازم برای قطر تیر بدست آید. البته تنش‌های ماکزیمم وقتی بدست می‌آیند که عنصر A در نزدیکی تکیه گاه تیر (در جایی که لنگر خمشی M بیشترین مقدار را دارد) انتخاب شود.

عنصر انتخاب شده در بحث فوق در بالای تیر قرار داشت. برای تحلیل تنش‌ها در پایین تیر روش مشابهی می‌توان بکار برد. تنش‌های ماکزیمم معمولاً در جایی اتفاق می‌افتند که تنش‌های خمشی بیشترین مقدار را دارند. به عبارت دیگر تنش‌های ماکزیمم معمولاً در بالا یا پایین تیر و در مقطع عرضی که در آن لنگر خمشی ماکزیمم است وجود دارند. اما بعضی از مواقع لازم است که نقاط دیگر نیز بررسی شوند. برای مثال، نیروی برشی V (برابر با Q) در محل محور خمشی بیشترین تنش برشی را ایجاد می‌کند. از این جهت عنصری مانند B را سب که در امتداد محور خمشی قرار دارد (شکل ۹-۲۳a) باید بررسی کنیم. این عنصر در حالت برش خالص قرار دارد (شکل ۹-۲۳c) و تنش برشی در روی آن از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول، تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی T که از معادله $\tau = T\rho/J$ بدست می‌آید و قسمت دوم، تنش برشی ناشی از V که از فرمول برش $\tau = VQ/(Ib)$ حاصل می‌شود. تنش‌های اصلی برای چنین عنصری در روی صفحه‌هایی که با محور تیر (محور x) زاویه 45° می‌سازند وجود دارند. برای اینکه بیشترین مقدار تنش‌های عمودی در سراسر تیر برای طرح تیر تعیین شود، تنش‌های اصلی در روی عنصر B باید با مقادیر بدست آمده برای عناصر بالا و پایین تیر مقایسه شود. تنش‌های ماکزیمم در تیر نیز با مقایسه مقادیر بدست آمده برای عناصر A و B تعیین می‌گردند.

اگر تیر دارای چند تکیه گاه باشد، یا اگر مقطع عرضی تیر به شکل دایره نباشد، باید در نقاط مختلف سیر تنش‌ها را تحلیل نمود و نتایج را با یکدیگر مقایسه کرد. برای این کار طبیعی است نقاطی که در آن‌ها تنش عمودی یا تنش برشی ماکزیمم است انتخاب شوند. با مقایسه تنش‌های بدست آمده در تمام نقاطی که ممکن است بیشترین تنش را داشته باشند، تا حدود زیادی می‌توان مطمئن شد که تنش‌های ماکزیمم مطلق تعیین شده‌اند.

مثال ۹-۹

بعنوان یک مثال ساده خمش توأم با پیچش، تیر دایره‌ای شکل ۹-۲۳a را در نظر می‌گیریم. این تیر طره‌ای بوسیله یک لنگر پیچشی T که حول محور طولی تیر عمل می‌کند و نیروی جانبی Q بارگذاری شده است. برآیندهای تنش در هر مقطع عرضی تیر به فاصله x از تکیه گاه با استفاده از معادلات تعادل بدست می‌آیند. این برآیندهای تنش عبارتند از: (الف) - لنگر خمشی M برابر با $Q(L-x)$ (طول تیر $L =$)، (ب) - نیروی برشی V برابر با Q و لنگر پیچشی T . توجه کنید در این مثال فرض شده است که لنگر خمشی مثبت در بالای تیر کنش ایجاد کند.

اگر عنصر A واقع در سطح بالای تیر (شکل ۹-۲۳a) را بررسی کنیم، مشاهده می‌کنیم که عنصر مزبور تحت اثر تنش‌های خمشی σ_x ناشی از M و تنش‌های برشی τ ناشی از T قرار دارد (شکل ۹-۲۳b). این تنش‌ها به ترتیب از معادلات $\sigma_x = My/I$ و $\tau = T\rho/J$ بدست می‌آیند. این معادلات برای یک تیر دایره‌ای به قطر d به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} \quad ; \quad \tau = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (9-45)$$

با دانستن σ_x و τ می‌توانیم تنش‌ها را برای عنصری در نقطه A که به اندازه زاویه دلخواهی دوران کرده تعیین کنیم. تنش‌های اصلی در نقطه A از معادله 5-33 بدست می‌آیند.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (9-46)$$

تنش برشی ماکزیمم نیز از معادله 5-36 محاسبه می‌شود.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (9-47)$$

پس از جایگزینی مقادیر σ_x و τ از معادله 9-45 در معادلات 9-46 و 9-47 خواهیم داشت

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3} (M \pm \sqrt{M^2 + T^2}) \quad (9-48)$$

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2} \quad (9-49)$$

۴۸۲

نشان می‌دهد که لنگر خمشی ماکزیمم در طول محور مکاسیکی در یکی از مقاطع عرضی B یا C رخ می‌دهد. لنگر خمشی در B برابر است با

$$M_B = (P_1 + P_2)a = 2863.5 \times 30 = 85905 \text{ cmKg}$$

مؤلفه لنگر خمشی نقطه C در صفحه قائم مساوی است با

$$M_C = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2} \right) \frac{L}{2} = \frac{2148}{2} \times 60 = 64440 \text{ cmKg}$$

مؤلفه لنگر خمشی نقطه C در صفحه افقی برابر است با

$$M_C' = \left(\frac{P_1 + P_2}{4} \right) \frac{L}{2} = \frac{2863.5}{4} \times 60 = 42953 \text{ cmKg}$$

لنگر خمشی M_C در نقطه C از جمع برداری M_C' و M_C'' بدست می‌آید.

$$M_C = \sqrt{(M_C')^2 + (M_C'')^2} = \sqrt{59.98(10^8)} = 77445 \text{ cmKg}$$

لنگر خمشی برآیند در نقطه C کمی کوچکتر از لنگر خمشی در B است و چون لنگر پیچشی T در هر دو مقطع عرضی یکسان می‌باشد نتیجه می‌گیریم عنصری که در طرف جلوی محور مکانیکی در B قرار دارد عنصر بحرانی می‌باشد. بنابراین قطر لازم محور مکاسیکی از رابطه 9-49 بدست می‌آید.

$$d = \left(\frac{16}{\pi \tau_w} \sqrt{M^2 + T^2} \right)^{1/3} = \left[\frac{16}{420\pi} \sqrt{(85905)^2 + (14320)^2} \right]^{1/3}$$

$$= 10.18 \text{ cm}$$

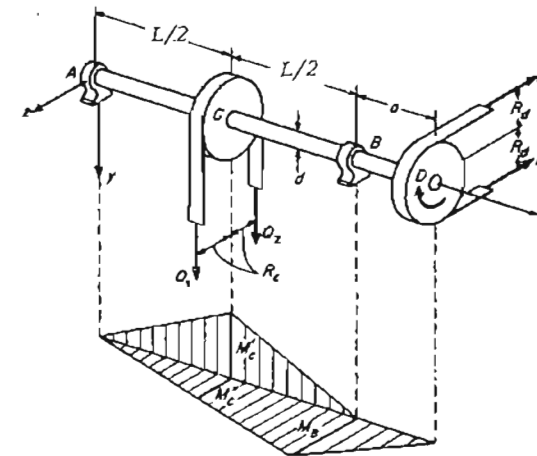
۹-۷ مسائل حل شده

مسئله ۹-۱

میله دایره‌ای توپیری با دو قطر مختلف بوده (شکل ۹-۲۵) و در دو انتها گیردار است. میله مطابق شکل ۹-۲۵ تحت اثر لنگر پیچشی T_0 قرار دارد. لنگرهای پیچشی واکنشی T_A و T_B را در دو انتها و زاویه دوران ϕ_0 مقطعی را که T_0 در آن وارد می‌شود تعیین کنید.

۴۸۲

یک محور مکانیکی فولادی که در نقاط A و B بر روی یا طاقان‌هایی متکی می‌باشد و قرقره‌های C و D را حمل می‌کند باید 100 قوه اسب را با سرعت 500 دور در دقیقه از قرقره D به قرقره C منتقل کند (شکل ۹-۲۴). اگر $Q_1 = 2Q_2$ ، $P_1 = 2P_2$ ، $a = 30 \text{ cm}$ ، $L = 1.2 \text{ m}$ ، $R_C = 20 \text{ cm}$ ، $R_D = 15 \text{ cm}$ ، $\tau_w = 420 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش مجاز برشی $\tau_w = 420 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، قطر لازم (d) محور مکانیکی را محاسبه کنید.



شکل ۹-۲۴

حل: لنگر پیچشی لازم برای انتقال 100hp در 500rpm از معادله 9-15 برابر است با

$$T = \frac{71600 \times 100}{500} = 14320 \text{ cmKg}$$

چون $T = (P_1 - P_2)R_D$ می‌باشد، داریم

$$P_1 = 2P_2 = 1909 \text{ Kg}$$

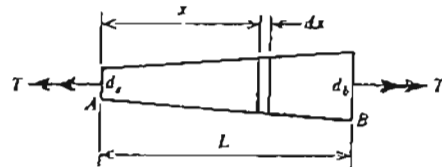
همین طور چون $T = (Q_1 - Q_2)R_C$ ، نتیجه می‌شود

$$Q_1 = 2Q_2 = 1432 \text{ Kg}$$

حال توجه خود را به لنگرهای خمشی ناشی از بارهای جانبی در محور مکانیکی معطوف می‌کنیم. محور مکانیکی در صفحه افقی xz و همچنین صفحه قائم xy تحت خمش قرار دارد. نمودارهای لنگر خمشی مربوطه در شکل ۹-۲۴ رسم شده‌اند. بررسی این نمودارها

۴۸۵

میله غیر منشوری AB به طول L با مقطع عرضی دایره‌ای تویر تحت اثر لنگرهای پیچشی T در دو انتهای آن دارد (شکل ۲۶-۹). زاویه پیچش میله (ϕ) را حساب کنید.



شکل ۲۶-۹

حل: اگر شیب جدارهای میله کوچک باشد، با بکار بردن معادله 9-11 برای عنصری به طول dx (شکل ۲۶-۹) می‌توان زاویه پیچش ϕ را با دقت خوب بدست آورد. زاویه پیچش برای این عنصر برابر است با

$$d\phi = \frac{T dx}{G J_x}$$

J_x در این رابطه معرف گشتاور لختی قطبی مقطع عرضی در فاصله x از انتهای چپ می‌باشد. اگر قطر میله در دو انتهای A و B را به ترتیب با d_a و d_b نشان دهیم، J_x برابر خواهد بود با

$$J_x = \frac{\pi}{32} \left(d_a + \frac{d_b - d_a}{L} x \right)^4 \quad (1)$$

زاویه پیچش کل از انتگرال زیر بدست می‌آید:

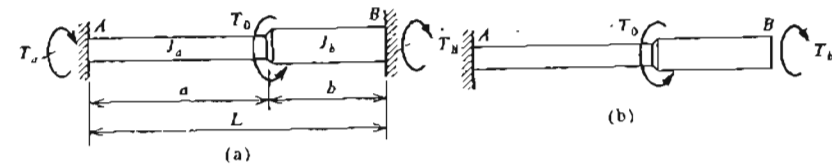
$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{G J_x} \quad (2)$$

پس از جایگزینی J_x از معادله 1 در معادله 2 خواهیم داشت

$$\phi = \frac{32TL}{3\pi G} \left(\frac{1}{d_b - d_a} \right) \left(\frac{1}{d_a^3} - \frac{1}{d_b^3} \right)$$

این مسئله نشان می‌دهد چگونه می‌توان از معادله 9-11 برای پیدا کردن زاویه دوران ناشی از پیچش در حالتی که J تابعی از x می‌باشد استفاده نمود. موقعی که لنگر پیچشی T در طول میله بطور پیوسته تغییر می‌کند نیز می‌توان همین روش را بکار برد.

۴۸۴



شکل ۲۵-۹

حل: میله مزبور همپراستاتیک است زیرا دو لنگر پیچشی مجهول T_a و T_b وجود دارند ولی تعداد معادلات تعادل فقط یکی می‌باشد:

$$T_a + T_b = T_0 \quad (1)$$

اگر لنگر پیچشی واکنشی T_b را بعنوان واکنش اضافی انتخاب کنیم و سپس تکیه گاه B را برداشته و T_b را بر استهای آزاد B وارد کنیم، زاویه دوران کل استهای B (ϕ_b) برابر با مجموع زوایای دوران ناشی از T_0 و T_b خواهد بود.

$$\phi_b = \frac{T_0 a}{G J_a} - \frac{T_b a}{G J_a} - \frac{T_b b}{G J_b}$$

چون زاویه دوران انتهای B باید برابر صفر باشد، معادله سازگاری تغییر مکان‌ها بصورت $\phi_b = 0$ در می‌آید. از این شرط، لنگر پیچشی T_b به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$T_b = \frac{T_0}{1 + \frac{b J_a}{a J_b}}$$

از جایگزینی نتیجه فوق در معادله 1 لنگر پیچشی T_a بدست می‌آید.

$$T_a = \frac{T_0}{1 + \frac{b J_a}{a J_b}} = \frac{b J_a}{a J_b} T_b$$

زاویه دوران ϕ_0 در مقطع عرضی که T_0 در آنجا وارد می‌شود برابر است با

$$\phi_0 = \frac{T_a a}{G J_a} = \frac{T_b b}{G J_b} = \frac{T_0 a b}{G (b J_a + a J_b)}$$

۴۸۷

از حل معادلات ۱ و ۲ واکنش‌های T_B و T_A بدست می‌آیند.

$$T_A = 0.875 T_1 \quad ; \quad T_B = 0.625 T_1$$

لنگر پیچشی در ناحیه وسط میله برابر است با

$$T_A - T_1 = 0.875 T_1 - T_1 = -0.125 T_1$$

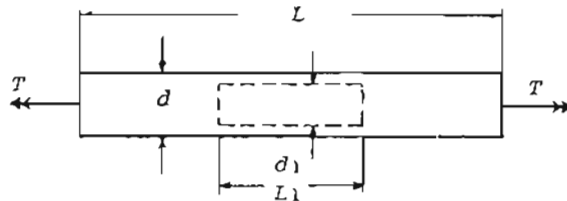
بنابراین جهت انتخاب شده برای لنگر پیچشی در ناحیه وسط در روی نمودار جسم آزاد قسمت CD باید عوض شود (شکل ۹-۳۰).

$$T_1 - T_A \leftarrow \quad \quad \quad T_1 - T_A = 0.125 T_1$$

شکل ۹-۳۰ نمودار جسم آزاد CD

مسئله ۹-۴

یک محور مکانیکی به قطر 50 mm و طول 0.75 m در قسمتی از طولش دارای سوراخی هم مرکز با آن می‌باشد. حداکثر طول و قطر سوراخ را بیابید بطوریکه وقتی محور مزبور تحت لنگر پیچشی 167 mKg قرار می‌گیرد حداکثر تنش برشی از 750 Kg/cm^2 تجاوز نکند و زاویه پیچش کل از 1.5° بیشتر نشود. ضریب ارتجاعی برشی $G = 800000 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد.



شکل ۹-۳۱

حل: لنگر پیچشی $T = 167 \text{ mKg}$ در تمام طول میله ثابت است. تنش برشی حداکثر در طول میله در سطح خارجی قسمت سوراخ دار رخ می‌دهد. اگر گشتاور لختی قطبی مقطع سوراخ دار را J بنامیم مقدار این تنش برابر است با

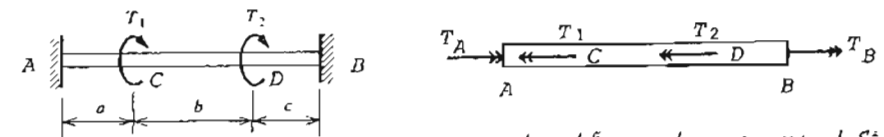
$$\tau_{\max} = \frac{Td}{2J_1} = \frac{16Td}{\pi(d^4 - d_1^4)}$$

اگر در این رابطه به جای $\tau_{\max}$ تنش برشی مجاز 750 Kg/cm^2 را قرار دهیم حداکثر قطر

۴۸۶

مسئله ۹-۲

مقدار لنگر پیچشی در ناحیه وسط میله دایره‌ای شکل ۲۷-۹ که در دو انتها گیردار است چقدر می‌باشد؟ فرض کنید $T_1 = 2T_2$ ، $a = \frac{L}{4}$ و $b = \frac{L}{2}$.

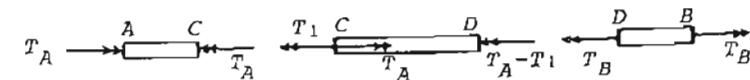


شکل ۹-۲۸ نمودار جسم آزاد میله

شکل ۹-۲۷

حل: از تعادل پیچشی میله AB نتیجه می‌شود (شکل ۹-۲۸)

$$T_A + T_B = T_1 + T_2 = 1.5 T_1 \quad (1)$$



نمودار جسم آزاد DB نمودار جسم آزاد CD نمودار جسم آزاد AC

شکل ۹-۲۹

اگر زاویه پیچش نقطه B را نسبت به نقطه A، $\phi_{B/A}$ ، زاویه پیچش نقطه C را نسبت به نقطه A، $\phi_{C/A}$ ، زاویه پیچش نقطه D را نسبت به نقطه C، $\phi_{D/C}$ ، و زاویه پیچش نقطه B را نسبت به نقطه D، $\phi_{B/D}$ بنامیم شرط سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\phi_{B/A} = \phi_{C/A} + \phi_{D/C} + \phi_{B/D} = 0$$

این معادله با توجه به نمودارهای جسم آزاد شکل ۲۹-۹ به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{T_A a}{GJ} + \frac{(T_A - T_1) b}{GJ} - \frac{T_B a}{GJ} = 0$$

$$T_A a + (T_A - T_1) b - T_B a = 0$$

$$T_A \left(\frac{L}{4} \right) + (T_A - T_1) \frac{L}{2} - T_B \frac{L}{4} = 0$$

$$3T_A - T_B = 2T_1$$

(2)

۴۹۲

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{514.48}{2} + \sqrt{\left(\frac{514.48}{2}\right)^2 + 30.87^2}$$

$$= 516.33 \text{ Kg/cm}^2$$

حداکثر تنش برشی در نقطه A مساوی است با

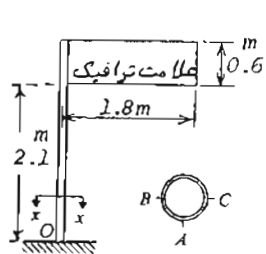
$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{514.48}{2}\right)^2 + 30.87^2} = 259.09 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۹-۹

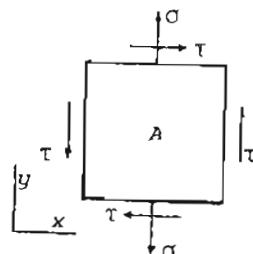
پایه‌ای با مقطع لوله‌ای به قطر خارجی 10cm و قطر داخلی 8.75cm برای نگهداشتن یک علامت ترافیکی در شاهراهی بکار رفته است شکل (۹-۳۹). فشار باد وارد بر تابلوی علامت ترافیکی 100 Kg/m² می‌باشد. ابعاد تابلو 1.8m × 0.6m و ارتفاع لبه پایین آن 2.1m است. تعیین کنید حداکثر تنش برشی ناشی از باد را در نقاط A، B و C که در پای پایه (نقطه O) واقع شده‌اند.

$$d_2 = 10 \text{ cm}$$

$$d_1 = 8.75 \text{ cm}$$



شکل ۹-۳۹

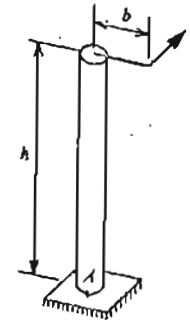


شکل ۹-۴۰

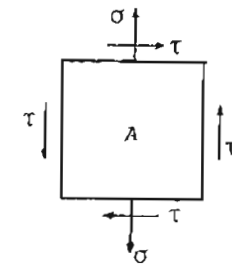
حل: برآیند نیروی فشاری ناشی از باد که بر مرکز سطح تابلوی علامت در فاصله

۴۹۲

تنش عمودی ناشی از خمش تنها حداکثر می‌باشد تعیین کنید.



شکل ۹-۳۷



شکل ۹-۳۸

حل: در نقطه A انگر خمشی M و انگر پیچشی T وارد می‌شود.

$$M = Ph = 112.5 (7.5) = 843.75 \text{ mKg}$$

$$T = Pb = 112.5 (0.9) = 101.25 \text{ mKg}$$

عنصر کوچکی در نقطه A تحت تأثیر تنش‌های sigma و tau مطابق شکل ۹-۳۸ قرار دارد.

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{84375}{164} = 514.48 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{T}{J/r}$$

J/r را می‌توانیم بر حسب S بنویسیم.

$$\frac{J}{r} = \frac{\frac{\pi r^4}{2}}{r} = \frac{2I}{r} = 2S$$

توجه کنید برای یک مقطع دایره‌ای گشتاور لختی قطبی (J) دو برابر گشتاور لختی آن نسبت به محوری که از مرکز دایره عبور می‌کند (I) می‌باشد.

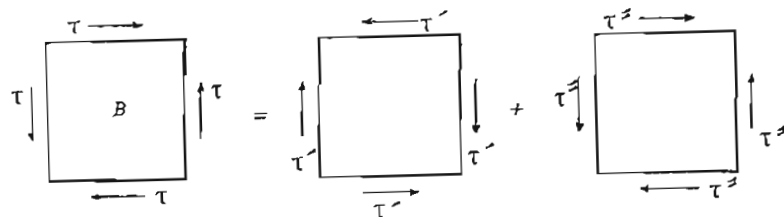
$$\tau = \frac{T}{2S} = \frac{10125}{2(164)} = 30.87 \text{ Kg/cm}^2$$

تنش اصلی کششی در نقطه A برابر است با

۴۹۵

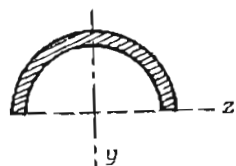
تنش برشی ماکزیمم در نقطه B : اگر عنصر کوچکی را در نقطه B در نظر بگیریم بر آن فقط تنش برشی τ اثر می‌کند (شکل ۹-۴۱) زیرا تنش عمودی ناشی از لنگر خمشی M برابر صفر می‌باشد. در اثر نیروی برشی $V=F=108 \text{ Kg}$ در پای لوله تنش برشی τ' بر عنصر B وارد می‌شود که مقدار آن برابر است با (شکل ۹-۴۱)

$$\tau' = \frac{VQ}{Ib}$$



شکل ۹-۴۱

انتگرال Q که باید در روی سطح هاشور خورده شکل ۹-۴۲ حساب شود با استفاده از پیوست ۱ کتاب بصورت حاصل ضرب مساحت نیم دایره خارجی (به قطر d_2) در فاصله مرکز سطح آن از محور z منهای حاصل ضرب مساحت نیم دایره داخلی (به قطر d_1)



شکل ۹-۴۲

در فاصله مرکز سطح آن از محور z بدست می‌آید.

$$Q = \left(\frac{\pi d_2^2}{8} \right) \left(\frac{2d_2}{3\pi} \right) - \left(\frac{\pi d_1^2}{8} \right) \left(\frac{2d_1}{3\pi} \right) = \frac{d_2^3 - d_1^3}{12}$$

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{(F) \left(\frac{d_2^3 - d_1^3}{12} \right)}{\frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) (d_2 - d_1)} = \frac{16F (d_2^2 + d_1^2 + d_1 d_2)}{3\pi (d_2^4 - d_1^4)} \\ &= \frac{16(108)(10^2 + 8.75^2 + 10 \times 8.75)}{3\pi (10^4 - 8.75^4)} = 11.70 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

۴۹۴

۰.۹m از محور لوله اثر می‌کند برابر است با

$$F = (1.80)(0.6)(100) = 108 \text{ Kg}$$

لنگر پیچشی در نقطه O (پای لوله) مساویست با

$$T = 0.9 F = 0.9 (108) = 97.2 \text{ mKg}$$

لنگر خمشی در نقطه O (پای لوله) برابر است با

$$M = (2.1 + 0.3) F = (2.4)(108) = 259.2 \text{ mKg}$$

فرض می‌کنیم جهت وزش باد چنان باشد که لوله را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دوران در بیاورد.

تنش برشی ماکزیمم در نقطه A : اگر عنصر کوچکی را در نقطه A در نظر بگیریم بر آن تنشهای σ و τ مطابق شکل ۹-۴۰ اثر می‌کنند. تنش کششی σ ناشی از لنگر خمشی M می‌باشد که برابر است با

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Mc}{I} = \frac{M \frac{d_2}{2}}{\frac{\pi d_2^4}{64} - \frac{\pi d_1^4}{64}} = \frac{32Md_2}{\pi (d_2^4 - d_1^4)} \\ &= \frac{32(25920)(10)}{\pi (10^4 - 8.75^4)} = 638.0 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

تنش برشی τ ناشی از لنگر پیچشی T می‌باشد که برابر است با

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Tr}{J} = \frac{T \frac{d_2}{2}}{\frac{\pi d_2^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32}} = \frac{16Td_2}{\pi (d_2^4 - d_1^4)} \\ &= \frac{16(9720)(10)}{\pi (10^4 - 8.75^4)} = 119.63 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه حالت تنش در نقطه A حالت خاصی از تنش مسطح می‌باشد حداکثر تنش برشی در نقطه مزبور برابر است با

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

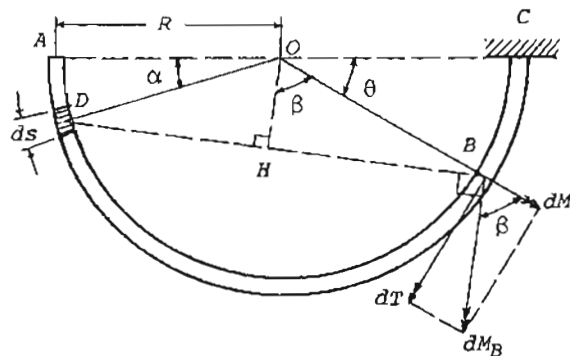
$$\sigma_x = 0 ; \sigma_y = 638 \text{ Kg/cm}^2 ; \tau_{xy} = 119.63 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{638}{2} \right)^2 + (119.63)^2} = 340.69 \text{ Kg/cm}^2$$

۴۹۷

۹-۴۴ و مقدار آن برابر است با

$$dM_B = (qds)(\overline{DB})$$



شکل ۹-۴۴

OH در روی شکل عمود بر DB می باشد و زاویه HOB با β نشان داده شده است. طول $\overline{DB}$ به صورت زیر حساب می شود:

$$\overline{DB} = 2\overline{HB} = 2\sqrt{R^2 - \overline{OH}^2} = 2\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\beta} = 2R\sin\beta$$

زاویه β برابر $\frac{\pi - \alpha - \theta}{2}$ می باشد. بنابراین

$$\overline{DB} = 2R\cos\frac{\alpha + \theta}{2}$$

$$dM_B = (qRd\alpha)(2R\cos\frac{\alpha + \theta}{2}) = 2R^2q\cos\frac{\alpha + \theta}{2}d\alpha$$

لنگر dM_B را به دو مؤلفه تجزیه می کنیم. مؤلفه dT که مماس بر میله در نقطه B است و مؤلفه dM که عمود بر مماس مزبور می باشد. لنگر dT در نقطه B ایجاد پیچش و لنگر dM در نقطه B ایجاد خمش می کند.

$$dT = dM_B\sin\beta = 2R^2q\cos^2\frac{\alpha + \theta}{2}d\alpha = R^2q[\cos(\alpha + \theta) + 1]d\alpha$$

۴۹۶

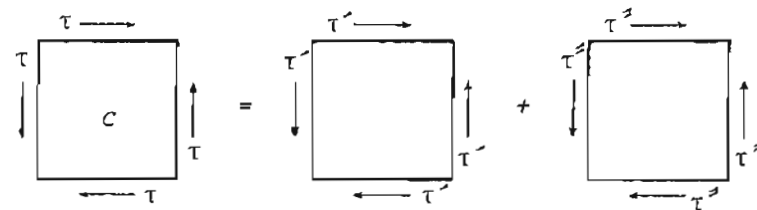
در اثر لنگر پیچشی T در پای لوله تنش برشی τ بر عنصر B وارد می شود که مقدار آن برابر است با (شکل ۹-۴۱)

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16Td_2}{\pi(d_2^4 - d_1^4)} = 119.63 \text{ Kg/cm}^2$$

بنابراین تنش برشی ماکزیمم در نقطه B در پای لوله با توجه به اینکه جهت تنش های τ و τ' مخالف یکدیگر می باشد برابر است با

$$\tau_{\max} = \tau = \tau' - \tau = 119.63 - 11.70 = 107.93 \text{ Kg/cm}^2$$

تنش برشی ماکزیمم در نقطه C: حالت تنش در این نقطه مشابه حالت تنش در نقطه B می باشد با این تفاوت که تنش های τ و τ' هم جهت می باشند (شکل ۹-۴۳).



شکل ۹-۴۳

$$\tau_{\max} = \tau = \tau' + \tau = 11.70 + 119.63 = 131.33 \text{ Kg/cm}^2$$

مسئله ۹-۱۰

میله نیم دایره ای ABC (شکل ۹-۴۴) به شعاع R در یک صفحه افقی قرار دارد و در تکیه گاه C گیردار می باشد. وزن واحد طول میله برابر q است (وزن کل آن πRq است). روابطی برای نیروی برشی V، لنگر خمشی M و لنگر پیچشی T در مقطع B با زاویه θ مشخص شده است پیدا کنید.

حل: عنصری از میله به طول ds را که با زاویه α مشخص شده است مطابق شکل ۹-۴۴ در نظر می گیریم. وزن این عنصر میله در نقطه B لنگر dM_B ایجاد می کند که امتداد آن در صفحه افقی قرار دارد و عمود بر DB می باشد و جهت آن مطابق شکل

۴۹۹

حل: زاویه پیچش مجاز در واحد طول لوله از معادله 9-31 برابر است با

$$\theta_w = \frac{\tau_w L_m}{2GA_m}$$

مساحت محصور بوسیله خط میانی $A_m = \pi ab = 37.5\pi \text{ cm}^2$ می باشد. طول خط میانی مقطع با دقت خوب از فرمول تقریبی زیر بدست می آید:

$$s = \pi \left[\frac{3}{2} (a+b) - \sqrt{ab} \right] = 39.7 \text{ cm}$$

بنابراین زاویه پیچش مجاز برابر می شود با

$$\theta_w = \frac{700 \times 39.7}{2 \times 37.5\pi \times 840000} = 0.00014 \text{ rad/cm}$$

مسئله ۹-۱۲

آونگ پیچشی شکل ۴۶-۹ شامل یک صفحه مدور می باشد که به میله فولادی نازکی با مقطع عرضی دایره آویزان است. وزن صفحه مدور $W=45\text{Kg}$ ، طول میله $L=50\text{cm}$ و قطر میله $d=3\text{mm}$ می باشد. تنش های مجاز کششی و برشی میله به ترتیب $\sigma_w = 1120\text{Kg/cm}^2$ و $\tau_w = 560\text{Kg/cm}^2$ است. حداکثر زاویه پیچش ϕ میله در حین نوسانات پیچشی، بدون اینکه تنشها از مقدار مجاز تجاوز کند، چقدر می باشد؟ (ضریب ارتجاعی برشی $G=840000\text{Kg/cm}^2$ است).

حل: میله آونگ تحت اثر کشش تواءم با پیچش می باشد. تنش محوری کششی بکنواخت برابر است با

$$\sigma_x = \frac{W}{A} = \frac{45}{0.071} = 630\text{Kg/cm}^2$$

تنش برشی ناشی از پیچش مساوی است با (معادله 9-4)

$$\tau_{xy} = G\theta \quad (1)$$

برای بدست آوردن مقدار مجاز θ از دایره موهر (شکل ۴۷-۹) استفاده می کنیم. ابتدا با مقیاس معینی تنشهای عمودی معلوم $\sigma_x = 630\text{Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 0$ را در روی محور σ می بریم که از آنجا محل مرکز C دایره مشخص می شود. سپس تنش کششی ماکزیمم مجاز $\sigma_1 = 1120\text{Kg/cm}^2$ را در روی محور σ می بریم تا نقطه A بدست آید. اگر دایره بخواند

۴۹۸

$$dM = dM_B \cos \beta = 2R^2 q \cos \frac{\alpha+\theta}{2} \sin \frac{\alpha+\theta}{2} d\alpha = R^2 q \sin(\alpha+\theta) d\alpha$$

بنابراین لنگر پیچشی و لنگر خمشی در مقطع B از محاسبه استگرال های زیر به دست می آیند:

$$T = \int_0^{\pi-\theta} R^2 q [\cos(\alpha+\theta)+1] d\alpha = R^2 q [\sin(\alpha+\theta)+\alpha]_0^{\pi-\theta}$$

$$= R^2 q (\pi - \theta - \sin \theta)$$

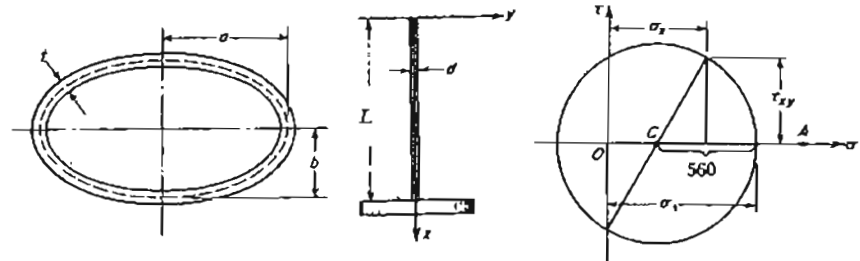
$$M = \int_0^{\pi-\theta} R^2 q \sin(\alpha+\theta) d\alpha = -R^2 q [\cos(\alpha+\theta)]_0^{\pi-\theta} = R^2 q (1+\cos \theta)$$

نیروی برشی در مقطع B برابر با وزن قسمت AB میله می باشد.

$$V = qR (\pi - \theta)$$

مسئله ۹-۱۱

لوله ای از فولاد ضد زنگ با مقطع عرضی بیضی (شکل ۴۵-۹) پیچیده می شود. اگر تنش مجاز برشی $\tau_w = 700\text{Kg/cm}^2$ باشد، زاویه پیچش مجاز در واحد طول چقدر است؟ فرض کنید $a=7.5\text{cm}$ ، $b=5\text{cm}$ ، $t=3\text{mm}$ و ضریب ارتجاعی برشی $G=840000\text{Kg/cm}^2$ باشد.



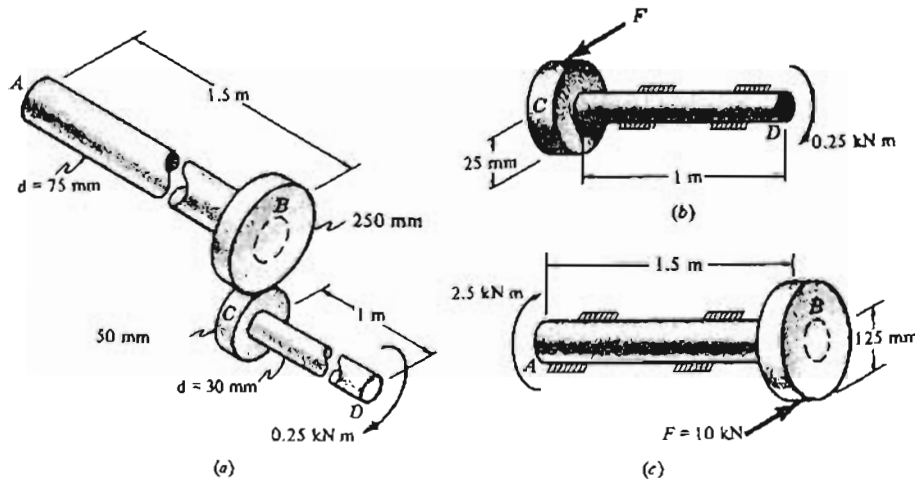
شکل ۴۵-۹

شکل ۴۶-۹

شکل ۴۷-۹

۵۰۱

نمودار جسم آزاد محور مکانیکی AB در شکل c ۴۸-۹ رسم شده است. نیروی F در این شکل برابر ولی در جهت مخالف نیروی F موثر بر چرخ دنده کوچک در شکل b ۴۸-۹ می باشد. این نیرو بر محور مکانیکی AB لنگر پیچشی $10 \times 0.125 = 1.25 \text{ m kN}$ وارد می کند. در اثر این لنگر پیچشی، انتهای B نسبت به انتهای A به اندازه ϕ_2 دوران می کند.



شکل ۴۸-۹

$$\phi_2 = \frac{1.25 \times 10^3 (1.5) (10)^{12}}{(85 \times 10^9) \left(\frac{\pi}{32}\right) (75)^4} = 0.007 \text{ rad}$$

این زاویه دوران ϕ_2 باعث می شود که تمام محور مکانیکی CD به علت وجود چرخ دنده ها مانند جسم صلبی دوران کند. این دوران به نسبت قطرهای دایره های گام چرخ دنده ها، یعنی به نسبت $\frac{5}{1}$ ، صورت خواهد گرفت. بنابراین CD مانند جسم صلبی به اندازه $5(0.007) \text{ rad}$ دوران خواهد نمود. این زاویه دوران را باید با زاویه دوران D نسبت به C (زاویه ϕ_1) جمع نمود تا زاویه پیچش D نسبت به A بدست آید (ϕ).

$$\phi = 5(0.007) + 0.09 = 0.125 \text{ rad}$$

مسئله ۱۴-۹

۵۰۰

از نقطه A عبور کند، شعاع آن که معرف $\tau_{\max}$ است برابر خواهد بود با $1120 - 315 = 805 \text{ Kg/cm}^2$ چون مقدار فوق از تنش برشی مجاز 560 Kg/cm^2 بیشتر می باشد نتیجه می گیریم که تنش برشی مجاز عامل تعیین کننده است. در این صورت دایره موهر دایره ای به مرکز C و شعاع $\tau_{\max} = 560 \text{ Kg/cm}^2$ خواهد بود.

حال τ_{xy} از روی دایره موهر با استفاده از مقیاس به دست می آید:

$$\tau_{xy} = 465 \text{ Kg/cm}^2 \text{ با بکار بردن این مقدار در معادله 1 خواهیم یافت}$$

$$\theta = \frac{\tau_{xy}}{Gr} = \frac{465}{(840000)(0.15)} = 0.00369 \text{ rad/cm}$$

زاویه پیچش مربوطه برابر است با

$$\phi = \theta L = 0.00369 \times 50 = 0.185 \text{ rad} = 10^\circ 34'$$

توجه کنید که تنش کششی ماکزیمم در میله آونگ برابر $\sigma_1 = 875 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

مسئله ۱۳-۹

دو محور مکانیکی دایره ای تو پر بوسیله دو چرخ دنده که قطر دایره های گام آنها 250 mm و 50 mm می باشد مطابق شکل a ۴۸-۹ به یکدیگر متصل شده اند. فرض میشود محورهای مکانیکی در روی یا طاقان ها چنان قرار گرفته اند که تحت هیچ نوع خمشی قرار نداشته باشند. محور مکانیکی AB از فولاد با ضریب ارتجاعی برشی $G = 85 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ و محور CD از برنج با ضریب ارتجاعی برشی $G = 35 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ می باشد. زاویه دوران انتهای D نسبت به انتهای A در اثر لنگر پیچشی 250 mN وارد در نقطه D را حساب کنید.

حل: نمودار جسم آزاد محور مکانیکی CD (شکل b ۴۸-۹) نشان می دهد که نیروی معکوس F باید بر چرخ دنده کوچک اثر کند. از تعادل CD نتیجه می شود:

$F = 10 \text{ kN}$ ، زاویه پیچش محور مکانیکی CD برابر است با

$$\phi_1 = \frac{TL}{GJ} = \frac{250(1)(10)^{12}}{(35 \times 10^9) \left(\frac{\pi}{32}\right) (30)^4} = 0.09 \text{ rad}$$

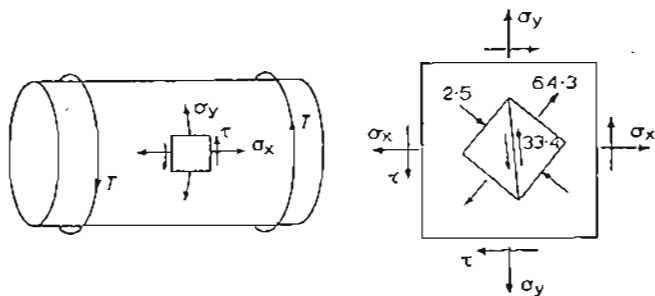
۵۰۳

(شکل ۵۰ - ۹) ، نشان دهید تنشهای برشی در گوشه‌های خارجی A ، B ، C ... صفر می‌باشند .

حل : فرض کنید تنش برشی τ در یکی از گوشه‌های مقطع عرضی وجود داشته باشد (شکل ۵۱ - ۹) . این تنش را می‌توان به دو مؤلفه τ_1 و τ_2 عمود بر اضلاع چند ضلعی تجزیه نمود . چون تنشهای برشی همواره در دو صفحه عمود بر هم وجود دارند ، تنشهای برشی مساوی τ_1 و τ_2 باید بر سطوح جانبی میله اثر کند . ولی سطوح جانبی میله فاقد تنش می‌باشند . در نتیجه $\tau_1 = \tau_2 = 0$ و از آنجا $\tau = 0$.

مسئله ۹ - ۱۶

لوله استوانه‌ای جدار نازکی به قطر داخلی $D = 75 \text{ mm}$ و ضخامت جدار $t = 5 \text{ mm}$ در دو انتها مسدود و تحت فشار داخلی $p = 5.5 \text{ MN/m}^2$ قرار دارد . استوانه در دو انتها تحت اثر لنگرهای پیچشی $T = 1.6 \text{ kNm}$ می‌باشد (شکل ۵۲ - ۹) . تنشهای اصلی ماکزیمم و مینیمم و تنش برشی ماکزیمم در جدار لوله را تعیین کنید .



شکل ۵۲ - ۹

شکل ۵۳ - ۹

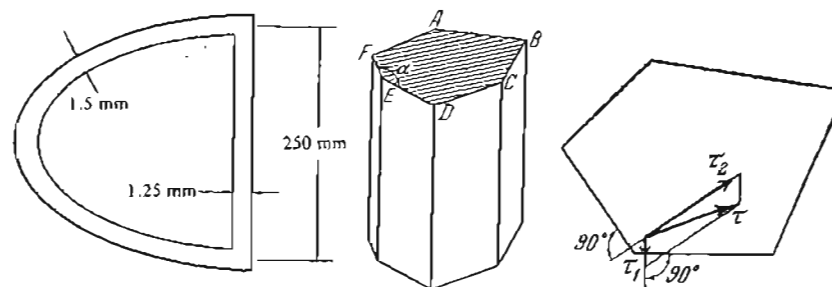
حل : عنصر کوچکی از استوانه تحت اثر تنشهای σ_x ، σ_y و τ مطابق شکل ۵۳ - ۹ قرار دارد .

$$\sigma_x = \frac{pD}{4t} = \frac{5.5 \times 10^6 \times 0.075}{4 \times 0.005} \text{ N/m}^2 = 20.6 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_y = \frac{pD}{2t} = 41.2 \text{ MN/m}^2$$

۵۰۲

مقطع جدار نازک شکل ۴۹ - ۹ در لبه بال هواپیما بکار می‌رود . طول قسمت منحنی 800 mm و مساحت محصور 60000 mm^2 می‌باشد . ماده مصرفی آلایز آلومینیوم می‌باشد که برای آن تنش برشی مجاز 70 MPa و ضریب ارتجاعی برشی $G = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ است . لنگر پیچشی مجاز T و زاویه پیچش در واحد طول مربوط به لنگر پیچشی مزبور را تعیین کنید .



شکل ۴۹ - ۹

شکل ۵۰ - ۹

شکل ۵۱ - ۹

حل : جریان برش (معادله ۲۸ - ۹) $f = \tau t$ می‌باشد . چون ضخامت جدار در قسمت قائم کمتر است ، تنش برشی در این قسمت به تنش مجاز می‌رسد و جریان برش برابر می‌شود با

$$f = 70 \times 10^6 \times 1.25 \times 10^{-3} = 87500 \text{ N/m}$$

تنش برشی τ در قسمت منحنی مقطع از همان معادله $f = \tau t$ بدست می‌آید .

$$\tau = \frac{f}{t} = \frac{87500}{1.5 \times 10^{-3}} = 58.3 \times 10^6 \text{ Pa} = 58.3 \text{ MPa}$$

لنگر پیچشی مجاز از معادله ۲۹ - ۹ برابر است با

$$T = 2f A_m = 2(87500)(6 \times 10^4 \times 10^{-6}) = 10500 \text{ mN}$$

زاویه پیچش در واحد طول نیز از رابطه ۳۰ - ۹ بدست می‌آید .

$$\theta = \frac{T}{4GA_m^2} \int_0^L \frac{ds}{t} = \frac{10500}{4(3 \times 10^{10})(0.06)^2} \left(\frac{800}{1.5} + \frac{250}{1.25} \right) = 0.0178 \text{ rad/m}$$

مسئله ۹ - ۱۵

بوقعی که یک میله منشوری با مقطع عرضی چند ضلعی تحت پیچش قرار می‌گیرد

۵۰۵

حل: بیشترین لنگر پیچشی در قسمت چپ محور مکانیکی وجود دارد که مقدار آن از معادله 9-15 بدست می آید.

$$T = \frac{71600(50)}{525} = 6820 \text{ cmKg}$$

تنش برشی ماکزیمم مربوطه از معادله 9-12 برابر است با

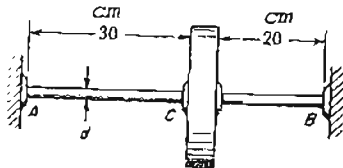
$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 6820}{\pi (4)^3} = 542.5 \text{ Kg/cm}^2$$

همین طور برای قسمت راست محور مکانیکی که 20hp را منتقل می کند،
زاویه پیچش کل مجموع زوایای پیچش ϕ_1 و ϕ_2 در دو قسمت محور مکانیکی است که با استفاده از معادله 9-11 بصورت زیر حساب می شود:

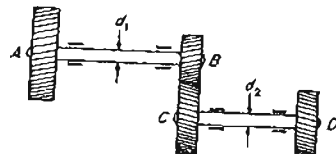
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{6820 \times 300}{10^6 \times 25.14} + \frac{2730 \times 600}{10^6 \times 25.14} = 0.1465 \text{ rad} = 8^\circ 23'$$

۹-۸ مسائل حل نشده

مسئله ۹-۱-۱ یک محور مکانیکی فولادی به قطر $d=12\text{mm}$ در دو انتهای A و B گیردار می باشد (شکل ۹-۱-۱) و در نقطه C یک صفحه مدور را حمل می کند. اگر تنش برشی مجاز محور مکانیکی 700Kg/cm^2 باشد، حداکثر زاویه دورانی که می توان به صفحه مدور داد چقدر است؟ فرض کنید صفحه مدور به محور مکانیکی به طور صلب متصل شده باشد.



شکل ۹-۱-۱



شکل ۹-۱-۲

۵۰۴

چون لوله جدار بازک است، تنش برشی متوسط τ از معادله 9-34 بدست می آید (شعاع متوسط استوانه r).

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{1600}{2\pi (0.04)^2 (0.005)} = 31.8 \text{ MN/m}^2$$

تنش های اصلی از معادله 5-33 محاسبه می شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ &= \frac{20.6 + 41.2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20.6 - 41.2}{2}\right)^2 + 31.8^2} \end{aligned}$$

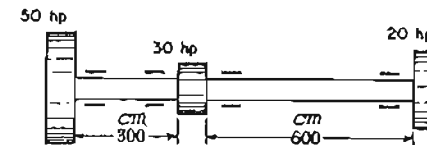
$$\sigma_1 = 64.3 \text{ MN/m}^2 ; \quad \sigma_2 = -2.5 \text{ MN/m}^2$$

تنش برشی ماکزیمم نیز از معادله 5-36 بدست می آید.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{64.3 - (-2.5)}{2} = 33.4 \text{ MN/m}^2$$

مسئله ۹-۱۷

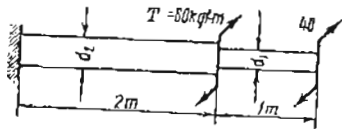
محور مکانیکی شکل ۹-۵۴ با مقطع دایره به قطر 40mm و از فولاد ساخته شده است. محور مکانیکی مزبور با سرعت 525rpm دوران می کند و بر پایه ها چنان تکیه دارد که خمش آن قابل صرف نظر می باشد. 50 قوه اسب بوسیله تسمه گرداننده ای به قرقره چپ منتقل می شود که از آن مقدار 30 قوه اسب به قرقره میانی و 20 قوه اسب به قرقره راست انتقال می یابد. تنش برشی ماکزیمم در محور مکانیکی و زاویه پیچش کل را حساب کنید ($G = 10^6 \text{ Kg/cm}^2$).



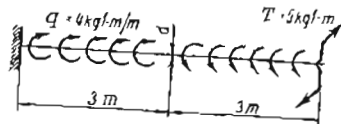
شکل ۹-۵۴

۵۰۷

مسئله ۹-۱-۷ اگر تنش برشی مجاز برای میله شکل ۹-۱-۷ برابر 800 Kg/cm^2 و ضریب ارتجاعی برشی $G=8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، قطرهای d_1 و d_2 میله و همچنین زاویه پیچش کل را حساب کنید.



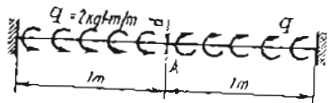
شکل ۹-۱-۷



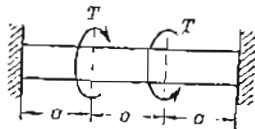
شکل ۹-۱-۸

مسئله ۹-۱-۸ اگر تنش برشی مجاز برای میله شکل ۹-۱-۸ برابر 250 Kg/cm^2 و ضریب ارتجاعی برشی $G=8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، قطر d میله و همچنین زاویه پیچش کل میله را حساب کنید.

مسئله ۹-۱-۹ تنش مجاز برشی میله شکل ۹-۱-۹ برابر 250 Kg/cm^2 و ضریب ارتجاعی $E=2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی برشی $G=8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد. قطر d میله و زاویه دوران مقطع A را محاسبه کنید.



شکل ۹-۱-۹



شکل ۹-۱-۱۰

مسئله ۹-۱-۱۰ دو لنگر پیچشی مساوی $T=1000 \text{ mkg}$ مطابق شکل ۹-۱-۱۰ به میله‌ای با مقطع عرضی دایره که در دو انتها گیردار است وارد شده‌اند. اگر تنش مجاز برشی 600 Kg/cm^2 باشد، قطر میله را پیدا کنید.

مسئله ۹-۲-۱ میله ABC در شکل ۹-۲-۱ در دو انتها گیردار و در مقطع B تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد. میله از A به B دارای مقطع عرضی دایره‌ای به

۵۰۶

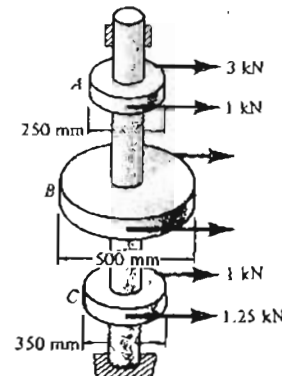
مسئله ۹-۱-۲ در دستگاه شکل ۹-۱-۲، قدرت از چرخ دنده A به چرخ دنده D منتقل می‌شود. اگر عطرهای دایره‌های گام چرخ دنده‌های B و C به نسبت $\frac{1}{2}$ باشد، نسبت مناسب برای قطرهای محوره‌های مکانیکی (d_1/d_2) چقدر می‌باشد تا هر دو محور مکانیکی تنش برشی ماکزیمم یکسانی داشته باشند؟

مسئله ۹-۱-۳ یک محور مکانیکی فولادی به قطر 6mm با سرعت 10000 rpm می‌چرخد. اگر تنش برشی مجاز 350 Kg/cm^2 باشد، بیشترین قدرتی که محور مکانیکی مزبور می‌تواند انتقال دهد چقدر است؟

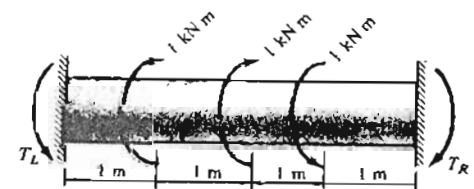
مسئله ۹-۱-۴ قطر لازم یک محور مکانیکی فولادی برای انتقال 200hp در 105rpm را تعیین کنید. تنش برشی مجاز 420 Kg/cm^2 می‌باشد.

مسئله ۹-۱-۵ در شکل ۹-۱-۵ از وزن محور مکانیکی قائم و قرقره‌ها صرف نظر می‌شود. محور مزبور با سرعت زاویه‌ای یکنواختی دوران می‌کند. نیروهای معلوم تسمه‌ها در روی شکل مشخص شده‌اند و قرقره‌ها به صورت صلب به محور مکانیکی متصل گردیده‌اند. اگر تنش برشی مجاز 50MPa باشد، قطر لازم محور مکانیکی را تعیین کنید. از خمش محور مکانیکی صرف نظر نمایید.

مسئله ۹-۱-۶ لنگرهای پیچشی واکنشی را در شکل ۹-۱-۶ تعیین کنید. مقطع عرضی میله به شکل دایره و در سراسر طول آن ثابت است.



شکل ۹-۱-۵



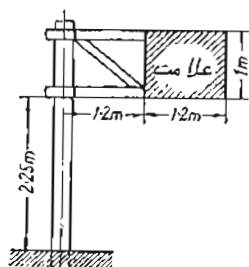
شکل ۹-۱-۶

۵۰۹

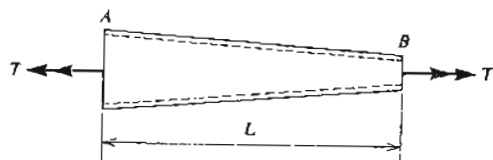
105rpm با سن برشی مجار 420Kg/cm^2 منتقل کند پیدا کنید.

مسئله ۹-۲-۶ یک لوله فولادی تو خالی به قطر خارجی d_2 و قطر داخلی d_1 باید به عنوان یک پیچش سنج کار رود. میله مرمر با 100cmKg لنگر پیچشی به اندازه 1° در 30cm طولش دوران کند و تنش برشی در آن ساند از مقدار مجاز 420Kg/cm^2 تجاوز نکند. مفادیر لازم d_1 و d_2 چقدر می باشد؟

مسئله ۹-۲-۷ یک لوله فولادی باید بعنوان پایه یک علامت ترافیک شاهراه مطابق شکل ۹-۲-۷ بکار رود. حداکثر فشار باد در روی علامت برابر 200Kg/m^2 فرض می شود. زاویه دوران لوله در سرازوار نحتاسی علامت نباید از 6° تجاوز کند. تنش برشی ماکزیم ناشی از پیچش در مقطع عرضی لوله نباید از 350Kg/cm^2 بیشتر باشد. اگر ضخامت جدار لوله 3mm باشد، قطر متوسط آن را پیدا کنید. فرض کنید فشار باد فقط بر قسمت سایه دار شکل وارد شود.



شکل ۹-۲-۷



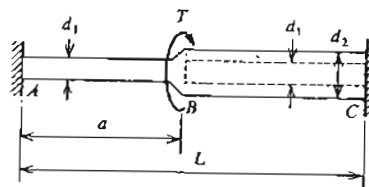
شکل ۹-۴-۱

مسئله ۹-۴-۱ یک لوله جدار نازک طویل با مقطع عرضی دایره ای متعیر (شکل ۹-۴-۱) تحت اثر لنگرهای پیچشی T در دو انتهایش می باشد. ضخامت جدار لوله ثابت و برابر t است. قطر دایره های میانی مقاطع عرضی در دو انتهای A و B بترتیب d_a و d_b می باشد. زاویه پیچش (ϕ) لوله را محاسبه کنید.

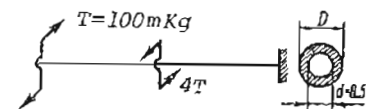
مسئله ۹-۴-۲ یک لوله آلومینیومی با مقطع عرضی مربع که طول اضلاع خارجی آن $a = 2.5\text{cm}$ است باید لنگر پیچشی $T = 695\text{cmKg}$ را با اطمینان حمل کند. اگر تنش برشی مجاز $\tau_w = 420\text{Kg/cm}^2$ باشد، ضخامت لازم جدار لوله را محاسبه کنید.

۵۰۸

قطر d_1 و از B تا C دارای مقطع دایره ای تو خالی به قطر خارجی d_2 و قطر داخلی d_1 می باشد. نسبت a/L چقدر باشد تا لنگرهای پیچشی واکنشی در A و C بطور عددی مساوی باشند؟



شکل ۹-۲-۱



شکل ۹-۲-۲

مسئله ۹-۲-۲ تنش برشی مجاز برای میله شکل ۹-۲-۲ 500Kg/cm^2 می باشد و زاویه پیچش در واحد طول نباید از $2^\circ/\text{m}$ تجاوز کند. ضریب ارتجاعی برشی 800000Kg/cm^2 می باشد. قطر خارجی (D) میله را حساب کنید.

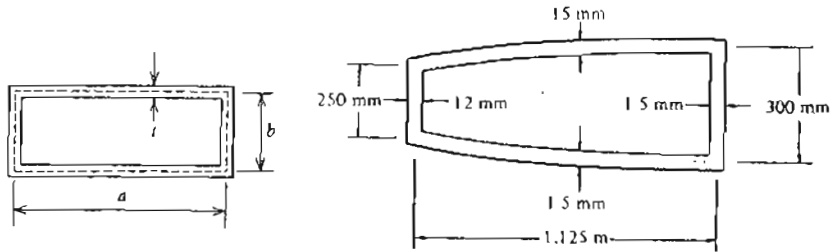
مسئله ۹-۲-۳ یک محور مکانیکی دایره ای تو خالی و یک محور مکانیکی دایره ای تو پر که از یک نوع مصالح ساخته شده اند باید برای انتقال لنگر پیچشی T طرح شوند به طوریکه حداکثر تنش برشی در هر دو محور یکسان باشد. اگر شعاع داخلی محور تو خالی 0.8 شعاع خارجی آن باشد، تعیین کنید: (الف) - نسبت شعاع خارجی محور تو خالی به شعاع محور تو پر، (ب) - نسبت وزن محور تو خالی به وزن محور تو پر.

مسئله ۹-۲-۴ یک میله برنجی به قطر $d = 63\text{mm}$ دارای یک پوشش فولادی به ضخامت جدار 6mm می باشد که کاملاً به آن متصل بوده و آن را تقویت می کند. ضرائب ارتجاعی برشی فولاد و برنج به ترتیب $84(10)^4\text{Kg/cm}^2$ و $35(10)^4\text{Kg/cm}^2$ و تنش های مجاز برشی فولاد و برنج به ترتیب 840Kg/cm^2 و 525Kg/cm^2 می باشد. لنگر پیچشی مجازی که این میله مرکب می تواند تحمل کند چقدر است؟ نسبت این لنگر پیچشی به لنگر پیچشی که میله برنجی به تنهایی می تواند تحمل کند چقدر است؟

مسئله ۹-۲-۵ یک محور مکانیکی فولادی تو خالی به قطر خارجی d و قطر داخلی $d/2$ می باشد. مقدار مناسب d را برای اینکه محور مکانیکی مزبور توان 200hp را در

۵۱۱

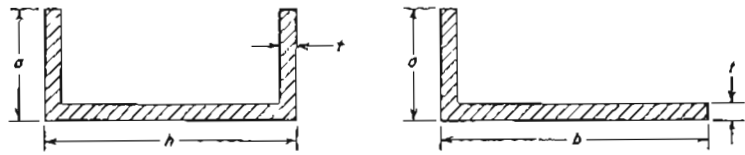
شده اند. ارتفاع متوسط مقطع نیز 1285mm است. با فرض اینکه تنش برشی مجاز 65MPa و ضریب ارتجاعی برشی $G = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ باشد، حداکثر لنگر پیچشی را که مقطع مزبور می تواند منتقل کند و همچنین زاویه پیچش در هر متر طول آن را حساب کنید.



شکل ۹-۴-۸

شکل ۹-۴-۹

مسئله ۹-۵-۱ مقطع ناردانی الومینیومی شکل ۹-۵-۱ دارای ابعاد $a = 2.5 \text{ cm}$ ، $h = 7.5 \text{ cm}$ و $t = 1.5 \text{ mm}$ می باشد. شعاع قوس در دو گوشه مقعر $r = 0.75 \text{ mm}$ است. اگر تنش برشی مجاز 560 Kg/cm^2 باشد، لنگر پیچشی مجاز را برای مقطع ناردانی حساب کنید. زاویه پیچش در واحد طول نظیر لنگر پیچشی مزبور چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را $G = 28(10)^4 \text{ Kg/cm}^2$ فرض کنید.



شکل ۹-۵-۱

شکل ۹-۵-۲

مسئله ۹-۵-۲ مقطع نبشی فولاد سازه ای شکل ۹-۵-۲ دارای ابعاد $a = 10 \text{ cm}$ ، $b = 22 \text{ cm}$ و $t = 12 \text{ mm}$ می باشد. شعاع قوس در گوشه مقعر $r = 12 \text{ mm}$ است. اگر تنش برشی مجاز 840 Kg/cm^2 باشد، لنگر پیچشی مجاز را برای مقطع نبشی حساب کنید. زاویه پیچش در واحد طول نظیر لنگر پیچشی مزبور چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را $G = 84(10)^4 \text{ Kg/cm}^2$ فرض کنید.

مسئله ۹-۵-۳ یک میله منشوری با مقطع مربع به ابعاد $2.5 \times 2.5 \text{ cm}$ تحت اثر

۵۱۰

مسئله ۹-۴-۳ برای لوله الومینیومی مسئله قبل، زاویه پیچش در واحد طول لوله را تحت لنگر پیچشی 695 cmKg حساب کنید. ضریب ارتجاعی برشی الومینیوم $G = 28(10)^4 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

مسئله ۹-۴-۴ یک محور مکانیکی لوله ای با مقطع عرضی دایره قطر متوسط 10 cm و ضخامت جدار 3 mm دارد. بدون اینکه تنش برشی از 420 Kg/cm^2 تجاوز کند، این محور مکانیکی باید 50 hp را انتقال دهد. سرعت دورانی لازم محور مکانیکی بر حسب دور در دقیقه (rpm) چقدر است؟

مسئله ۹-۴-۵ مقطع عرضی یک لوله فولادی جدار نازک به طول 1.8 m به شکل شش ضلعی با طول خط میانی $l_m = 6a = 12 \text{ cm}$ و ضخامت جدار $t = 1.5 \text{ mm}$ می باشد. اگر تنش مجاز برشی $\tau_w = 560 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، لنگر پیچشی مجاز T برای لوله چقدر است؟ زاویه پیچش مربوطه بین دو انتهای لوله چقدر می باشد؟

مسئله ۹-۴-۶ اگر مقطع عرضی لوله شکل ۹-۴-۱ به شکل مربع باشد، رابطه ای برای زاویه پیچش بین دو انتهای لوله پیدا کنید. طول ضلع مربع میانی در انتهای A برابر $2a$ و در انتهای B برابر a می باشد. ضخامت جدار لوله ثابت و برابر t است.

مسئله ۹-۴-۷ مقطع عرضی یک لوله جدار نازک به طول L یک n ضلعی منظم می باشد. طول خط میانی $l_m = na$ و ضخامت جدار لوله t است. زاویه پیچش ناشی از لنگر پیچشی یکنواخت T را پیدا کنید.

مسئله ۹-۴-۸ لوله جدار نازکی با مقطع عرضی مستطیل (شکل ۹-۴-۸) تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد. ضخامت جدار لوله ثابت و برابر t است. با فرض اینکه مساحت مقطع عرضی لوله ثابت باشد، تنش برشی τ در لوله با نسبت $\beta = a/b$ چگونه تغییر می کند؟ ثابت پیچش J چگونه با β تغییر می کند؟

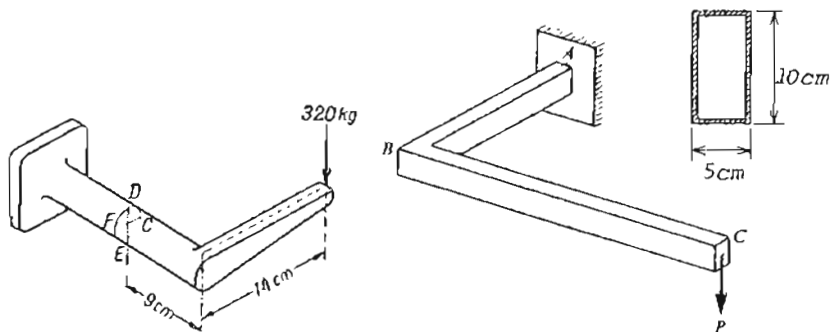
مسئله ۹-۴-۹ مقطع عرضی جدار نازک شکل ۹-۴-۹ قسمتی از بال یک هواپیما می باشد. ضخامت های چهار قسمت مقطع یکنواخت می باشند و در روی شکل مشخص

۵۱۲

مسئله ۹-۶-۱ یک لوله فولادی دایره‌ای مطابق شکل ۹-۶-۱ به عنوان پایه یک علامت شاهراه بکار می‌رود. حداکثر فشار باد در روی علامت 250 Kg/m^2 است. نسبت قطر خارجی به قطر داخلی لوله ۱.۱۲ می‌باشد. تنش برشی مجاز $\tau_w = 600 \text{ Kg/cm}^2$ است. قطر خارجی لازم (d) لوله را حساب کنید. اندازه‌ها در روی شکل بر حسب سانتیمتر می‌باشد.

مسئله ۹-۶-۲ میله‌ای به قطر d به شکل نیم دایره AB به شعاع R خم شده و در تکیه گاه A گیردار و در انتهای آزاد B تحت اثر بار P عمود بر صفحه نیم دایره می‌باشد. بدین ترتیب یک مقطع اختیاری مانند C تحت خمش و پیچش قرار دارد. با فرض اینکه d نسبت به R کوچک باشد بطوریکه بتوان از تئوری خمش میله‌های مستقیم استفاده نمود، زاویه ϕ نقطه‌ای را که در آن تنش اصلی σ_1 ماکزیمم است پیدا کنید.

مسئله ۹-۶-۳ قطر قسمت دایره‌ای میله خمیده شکل ۹-۶-۳ برابر ۱۵۰mm است. تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم را در نقطه D پیدا کنید.



شکل ۹-۶-۳

شکل ۹-۶-۴

مسئله ۹-۶-۴ میله خمیده ABC شکل ۹-۶-۴ که در صفحه افقی قرار دارد بار $P = 162 \text{ Kg}$ را تحمل می‌کند. میله خمیده مرکب دارای مقطع مستطیل به شکل لوله توخالی با ابعاد خارجی $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ می‌باشد. ضخامت حدار لوله ۰.۲cm است. طول بازوی AB برابر ۲۵cm و طول بازوی BC برابر ۵۰cm می‌باشد. تنش‌های اصلی در نقطه A واقع در بالای میله خمیده در محل تکیه گاه را حساب کنید.

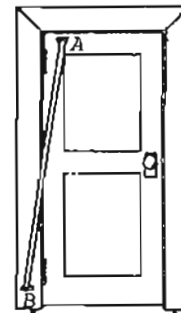
۵۱۲

لنگرهای پیچشی $T = 2500 \text{ cmKg}$ در دو انتهایش قرار دارد. تنش برشی ماکزیمم را در میله حساب کنید. زاویه پیچش در واحد طول میله تحت لنگرهای پیچشی مزبور چقدر است؟ ($G = 840000 \text{ Kg/cm}^2$)

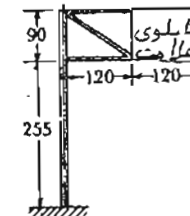
مسئله ۹-۵-۴ مقطع عرضی مستطیلی یک میله منشوری به عرض ۴cm می‌باشد. ارتفاع مقطع عرضی چقدر باید باشد تا تحت یک لنگر پیچشی معین تنش برشی ماکزیمم در آن به اندازه تنش برشی ماکزیمم در یک میله دایره‌ای به قطر ۵cm باشد؟

مسئله ۹-۵-۵ دو میله یکی با مقطع عرضی دایره و دیگری با مقطع عرضی مربع تحت اثر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. (الف) - اگر مساحت‌های مقطع عرضی هر دو میله یکسان باشد، تنش‌های برشی در کدامیک بیشتر است؟ (ب) - اگر تنش برشی ماکزیمم در هر دو میله مساوی باشد، نسبت وزن آنها چقدر است؟

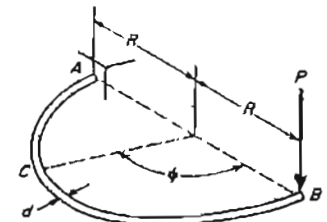
مسئله ۹-۵-۶ فردرپی به شکل میله فولادی با مقطع عرضی مربع در یک انتها به درب متصل است (نقطه A در شکل ۹-۵-۶) و در انتهای دیگر به درگاه متصل می‌باشد (نقطه B). نیروی P را که برای باز کردن درب به اندازه 90° (با کشیدن دستگیره درب) لازم است محاسبه نمایید. همچنین تعیین کنید زاویه α را که باید میله را قبلاً به اندازه آن پیچاند تا تنش برشی ماکزیمم در میله در حین باز کردن درب از 5000 Kg/cm^2 تجاوز نکند. طول میله ۲m و ابعاد مقطع عرضی آن $6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ است. فاصله دستگیره از لولا ۱۱m است.



شکل ۹-۵-۶



شکل ۹-۶-۱



شکل ۹-۶-۲

۵۱۵

جواب‌های مسائل حل نشده

$$\begin{array}{llll} d_1/d_2 = 0.794 & : 9-1-2 & 1^\circ 35' & : 9-1-1 \\ 11.8 \text{ cm} & : 9-1-4 & 2.07 \text{ hp} & : 9-1-3 \\ T_L = 0.285 \text{ kNm}; T_R = 1.285 \text{ kNm} & : 9-1-6 & 29 \text{ mm} & : 9-1-5 \\ d_1 \approx 2.94 \text{ cm}; d_2 = 4 \text{ cm}; \phi \approx 9.2^\circ & & & : 9-1-7 \\ d \approx 2.5 \text{ cm}; \phi \approx 6.7' & & & : 9-1-8 \\ 8.25 \text{ cm} & : 9-1-10 & 12.7 \text{ mm}; 0 & : 9-1-9 \end{array}$$

$$D \approx 6.84 \text{ cm} \quad : 9-2-2 \quad \frac{a}{L} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \quad : 9-2-1$$

$$\begin{array}{llll} T = 493.5 \text{ mKg}; \text{نسبت} = 1.91 & : 9-2-4 & 1.19; 0.51 & : 9-2-3 \\ d_1 = 1.606 \text{ cm}; d_2 = 1.719 \text{ cm} & : 9-2-6 & 12.1 \text{ cm} & : 9-2-5 \end{array}$$

$$\phi = \frac{2TL}{G\pi d_a^3} \frac{d_a}{d_b} \left(\frac{d_a}{d_b} + 1\right) \quad : 9-4-1 \quad 16.2 \text{ cm} \quad : 9-2-7$$

$$\begin{array}{llll} 0.00128 \text{ rad/cm} & : 9-4-3 & t = 0.15 \text{ cm} & : 9-4-2 \\ T = 1747 \text{ cmKg}; \phi = 3^\circ 58' & : 9-4-5 & 181 \text{ rpm} & : 9-4-4 \end{array}$$

$$\phi = \frac{4TL}{nGta^3 \cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad : 9-4-7 \quad \phi = \frac{3TL}{8Gta^3} \quad : 9-4-6$$

$$\beta^2/(\beta+1)^4 \quad \text{با } \beta \text{ بصورت } \beta \text{ و } J \text{ با } \beta \text{ بصورت } \beta^2/(\beta+1)^2 \quad : 9-4-8$$

تغییر می‌کند.

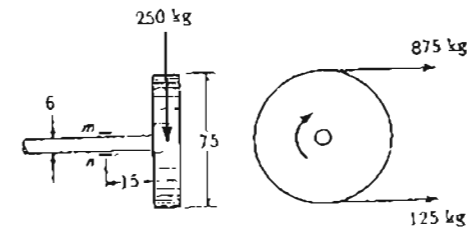
$$\begin{array}{llll} 52 \text{ kNm}; 0.008 \text{ rad/m} & : 9-4-9 \\ T = 25.6 \text{ cmKg}; \theta = 0.00667 \text{ rad/cm} & : 9-5-1 \\ T = 7100 \text{ cmKg}; \theta = 0.000476 \text{ rad/cm} & : 9-5-2 \\ \tau_{\max} = 770 \text{ Kg/cm}^2; \theta = 0.00054 \text{ rad/cm} & : 9-5-3 \\ 6.52 \text{ cm} & : 9-5-4 \end{array}$$

(الف) - تنش‌ها در میله مربعی 1.35 بار بیشتر می‌باشند.
(ب) - وزن میله مربعی 1.23 بار بیشتر می‌باشد.

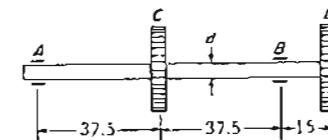
۵۱۴

مسئله ۹-۶-۵ یک محور مکانیکی به قطر 6cm که بر روی یاطاقان‌ها متکی می‌باشد قرقره‌ای به قطر 75cm و وزن 250Kg را در انتهای پیش آمده‌اش حمل می‌کند (شکل ۹-۶-۵). اگر نیروهای کششی افقی تسمه مطابق شکل باشند، تنش کششی اصلی را در مقطع mm حساب کنید. اندازه‌ها در روی شکل بر حسب سانتیمتر می‌باشند.

مسئله ۹-۶-۶ در شکل ۹-۶-۶، قطر لازم محور مکانیکی (d) را برای انتقال 50hp در 300rpm از قرقره C به قرقره D تعیین کنید. قدرت بوسیله یک تسمه افقی در C وارد می‌شود و بوسیله یک تسمه قائم در D خارج می‌گردد. هرقرقره به قطر 75cm می‌باشد و نسبت کشش تسمه در طرف سفت به کشش تسمه در طرف شل $P_1/P_2 = 3$ است. تنش مجاز برشی را $\tau_w = 420 \text{ Kg/cm}^2$ فرض کنید. اندازه‌ها در روی شکل بر حسب سانتی-متر می‌باشند.



شکل ۹-۶-۵



شکل ۹-۶-۶

مقاومت مصالح	حجت الله عادل
--------------	---------------

فصل دهم

تغییر شکل تیرها

۱-۱۰ معادله دیفرانسیل منحنی تیر تغییر شکل یافته

بارهای جانبی که بر روی تیر اثر می‌کنند باعث تغییر شکل آن می‌گردند. به طوریکه محور طولی تیر به صورت منحنی در می‌آید. منحنی محور تیر تغییر شکل یافته اصطلاحاً "به منحنی ارتجاعی تیر موسوم می‌باشد (زیرا این منحنی پس از بار برداری به حالت اولیه خود بر می‌گردد). در کارهای مهندسی غالباً لازم است که تغییر مکان‌ها را در نقاط مختلف محور تیر حساب کنیم. برای مثال، محاسبه تغییر مکان‌ها برای تحلیل تیرهای نامعین که در فصل بعد بحث خواهد شد ضروری می‌باشد. کار برد دیگر آنها در طرح ساختمان‌ها است که معمولاً یک حد بالایی برای مقدار تغییر مکان ماکزیمم در نظر گرفته می‌شود.

بحث تغییر شکل تیرها را با مطالعه تیر ساده AB که در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده شروع می‌کنیم. محور طولی تیر قبل از وارد شدن بار P مستقیم است. محور تیر بعد از خمش به صورت منحنی ACB در می‌آید. همانطوریکه قبلاً در مورد خمش تیرها فرض کردیم، فرض می‌کنیم که صفحه xy صفحه تقارن تیر باشد و تمام بارها در این صفحه وارد شوند. در این صورت منحنی ACB تیر که موسوم به منحنی تغییر مکان تیر یا منحنی ارتجاعی تیر است در این صفحه قرار خواهد داشت.

برای اینکه معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر را پیدا کنیم، از رابطه بین انحنا، (K) و لنگر خمشی (معادله 8-9) استفاده می‌کنیم. ولی باید توجه نمود که

$$\begin{array}{llll}
 516 & & 2.25 \text{ Kg} ; 87^{\circ} & : 9-5-6 \\
 \phi = 120^{\circ} & : 9-6-2 & d = 13 \text{ cm} & : 9-6-1 \\
 \sigma_1 = 335 & ; \sigma_2 = -90 & ; \tau_{\max} = 217 \text{ Kg/cm}^2 & : 9-6-3 \\
 \sigma_1 = 564 \text{ Kg/cm}^2 & ; \sigma_2 = -310 \text{ Kg/cm}^2 & & : 9-6-4 \\
 d = 6 \text{ cm} & : 9-6-6 & \sigma_1 = 1120 \text{ Kg/cm}^2 & : 9-6-5
 \end{array}$$

۵۱۶	2.25 Kg ; 87°	: ۹-۵-۶
$\phi = 120^\circ$	d = 13 cm	: ۹-۶-۱
$\sigma_1 = 335$; $\sigma_2 = -90$; $\tau_{max} = 217 \text{ Kg/cm}^2$		: ۹-۶-۳
$\sigma_1 = 564 \text{ Kg/cm}^2$; $\sigma_2 = -310 \text{ Kg/cm}^2$		: ۹-۶-۴
d = 6 cm	$\sigma_1 = 1120 \text{ Kg/cm}^2$	: ۹-۶-۵

مقاومت مصالح حجت الله عادل

فصل دهم

تغییر شکل تیرها

۱-۱۰ معادله دیفرانسیل منحنی تیر تغییر شکل یافته

بارهای جانبی که بر روی تیر اثر می کنند باعث تغییر شکل آن می گردند به طوریکه محور طولی تیر به صورت منحنی در می آید . منحنی محور تیر تغییر شکل یافته اصطلاحاً " به منحنی ارتجاعی تیر موسوم می باشد (زیرا این منحنی پس از بار برداری به حالت اولیه خود بر می گردد) . در کارهای مهندسی غالباً " لازم است که تغییر مکان ها را در نقاط مختلف محور تیر حساب کنیم . برای مثال ، محاسبه تغییر مکان ها برای تحلیل تیرهای ناممیی که در فصل بعد بحث خواهد شد ضروری می باشد . کار برد دیگر آنها در طرح ساختمان ها است که معمولاً " یک حد بالایی برای مقدار تغییر مکان ماکزیم در نظر گرفته می شود .

بحث تغییر شکل تیرها را با مطالعه تیر ساده AB که در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده شروع می کنیم . محور طولی تیر قبل از وارد شدن بار P مستقیم است . محور تیر بعد از خمش به صورت منحنی ACB در می آید . همانطوریکه قبلاً " در مورد خمش تیرها فرض کردیم ، فرض می کنیم که صفحه xy صفحه تقارن تیر باشد و تمام بارها در این صفحه وارد شوند . در این صورت منحنی ACB تیر که موسوم به منحنی تغییر مکان تیر یا منحنی ارتجاعی تیر است در این صفحه قرار خواهد داشت .

برای اینکه معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر را پیدا کنیم ، از رابطه بین انحاء (K) و لنگر خمشی (معادله 8-9) استفاده می کنیم . ولی باید توجه نمود که

۵۱۹

در استداد منحنی ارتجاعی حرکت می کنیم زاویه θ کاهش می یابد .
تغییر شکل های تیرها در اکثر طرح های عملی خیلی کوچک می باشند . از اینرو منحنی
ارتجاعی یک منحنی تحت خواهد بود و زاویه θ و شیب منحنی ارتجاعی کمیت های کوچک
خواهند بود . بنابراین می توانیم فرض کنیم

$$ds \approx dx \quad ; \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (10-3)$$

در این رابطه ، v تغییر مکان تیر از وضع اولیه اش می باشد (شکل ۱-۱۰) . پس از
جایگزینی این عبارات در معادله 10-2 خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (10-4)$$

با مساوی قرار دادن طرف های راست معادلات 10-1 و 10-4 نتیجه می شود

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \quad (10-5)$$

معادله 10-5 معادله اساسی منحنی ارتجاعی تیر (یا منحنی تغییر مکان تیر)
می باشد . در هر حالت خاصی ، از معادله مزبور باید انتگرال گرفت تا تغییر مکان v
بدست آید .

قرار دادهای علامت مورد استفاده در معادله 10-5 عبارتند از :

(الف) - جهت های مثبت محورهای x و y مطابق شکل ۱-۱۰ به طرف راست و
پائین می باشد .

(ب) - تغییر مکان v در امتداد مثبت محور y مثبت می باشد .

(پ) - لنگر خمشی M وقتی مثبت است که در بالای تیر فشار ایجاد کند .
اگر قرار داد علامت برای v یا M عوض شود (برای مثال اگر v به طرف بالا مثبت
فرض شود) ، علامت منفی در معادله 10-5 باید به علامت مثبت تغییر داده شود .

اگر از معادله 10-5 نسبت به x مشتق بگیریم و از معادلات $q = -dv/dx$ و
 $V = dM/dx$ استفاده کنیم روابط زیر حاصل می شود :

$$\frac{d^3v}{dx^3} = - \frac{V}{EI} \quad (10-6)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = - \frac{q}{EI} \quad (10-7)$$

بسته به اینکه M ، V یا q معلوم باشد و همچنین بسته به سهولت اجرای عملیات

۵۱۸

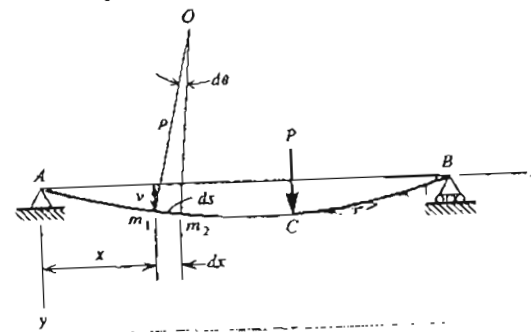
قرار داد علامت برای انحنای تیر بستگی به جهت های انتخاب شده محورهای مختصات
دارد . موقعی که محور x به سمت راست و محور y به طرف پائین مثبت فرض می شود
(مانند شکل ۱-۱۰) ، در این صورت انحنای تیر وقتی مثبت است که تیر بصورت مقعر برف پائین
خم شود و وقتی انحنای تیر منفی است که تیر بصورت مقعر برف بالا خم شود . بنابراین تیر شکل
۱-۱۰ دارای انحنای منفی است . اگر مانند گذشته فرض کنیم که لنگر مثبت در بالای تیر فشار ایجاد
کند ، در این صورت مشاهده میکنیم که لنگر خمشی مثبت انحنای منفی و لنگر خمشی منفی انحنای مثبت
تولید میکند . از این جهت معادله 8-9 را محدوداً " به صورت زیر می نویسیم :

$$K = \frac{1}{\rho} = - \frac{M}{EI} \quad (10-1)$$

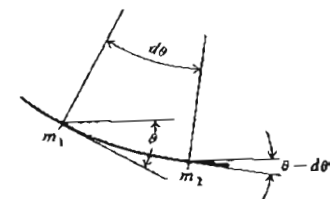
اکنون با در نظر گرفتن دو نقطه m_1 و m_2 به فاصله ds از یکدیگر (شکل ۱-۱۰)
می توان رابطه بین انحنای K و معادله منحنی ارتجاعی تیر را بدست آورد . برای این
کار در هر یک از این نقاط ، عمودی بر مماس بر منحنی ارتجاعی تیر رسم می کنیم . این
عمودها یکدیگر را در مرکز انحنای O قطع می کنند . فرض می کنیم مماس بر منحنی ارتجاعی
تیر در نقطه m_1 با محور x زاویه θ بسازد (شکل ۲-۱۰) . اگر زاویه بین
عمودهای Om_1 و Om_2 باشد ، مماس بر منحنی در نقطه m_2 با محور x زاویه $\theta + d\theta$
می سازد . از شکل ۱-۱۰ همچنین نتیجه می شود که $ds = \rho d\theta$ و $1/\rho = d\theta/ds$.
بنابراین انحنای K برابر شدت تغییرات زاویه θ نسبت به فاصله s (که در طول
منحنی ارتجاعی تیر اندازه گیری می نمود) می باشد .

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (10-2)$$

کمیت $d\theta/ds$ برای انحنای شکل ۲-۱۰ منفی است زیرا همچنانکه ما از چپ به راست



شکل ۱-۱۰



شکل ۲-۱۰

۵۲۱

پس از جایگزینی روابط 10-9 و 10-10 در معادله 10-8 معادله زیر حاصل میشود:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v'''}{[1 + (v'')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (10-11)$$

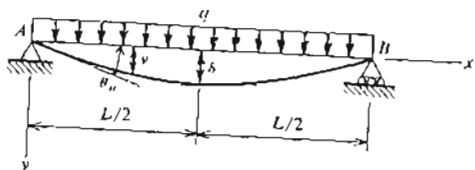
مقایسه معادله 10-4 با معادله 10-11 نشان می‌دهد که فرض منحنی ارتجاعی تخت معادل با صرف نظر نمودن $(v'')^2$ در مقایسه با واحد می‌باشد. در مسائل مربوط به تغییر شکل‌های زیاد نیروها باید از معادله فوق برای محاسبه انحنا استفاده نمود (بخش ۸-۱۰ را ببینید).

۱۰-۲ تیرهای ساده

مثال ۱-۱۰

منحنی ارتجاعی یک تیر ساده تحت اثر بار گسترده یکنواخت q را پیدا کنید

(شکل ۱۰-۲)



شکل ۱۰-۲

حل: لنگر خمشی در فاصله x از تکیه گاه چپ برابر است با

$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

در نتیجه از معادله 10-5 خواهیم داشت

$$EIv'' = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

طرفین معادله فوق را در dx ضرب نموده و سپس انتگرال می‌گیریم.

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

(10-12)

۵۲۰

ریاضی، تغییر مکان v را می‌توان با حل یکی از معادلات 10-5 تا 10-7 پیدا نمود. قرار دادهای علامت برای نیروی برشی V و بار q در شکل ۶a-۷ نشان داده شده‌اند. در بخش‌های بعدی، برای یافتن منحنی ارتجاعی و تغییر مکان‌های نیروها از معادلات فوق استفاده می‌کنیم. روش حل بدین ترتیب است که از معادلات فوق انتگرال گرفته و ثابت‌های انتگرال گیری را از شرایط حدی تیر بدست می‌آوریم. با توجه به نحوه بدست آوردن روابط فوق مشاهده می‌کنیم روابط مزبور وقتی صادق هستند که ماده تیر از قانون هوک پیروی کند و شیب‌های منحنی ارتجاعی تیر خیلی کوچک باشند. همچنین باید توجه داشت که روابط مزبور فقط با استفاده از تغییر شکل‌های ناشی از خمش خالص بدست آمد و از تغییر شکل‌های ناشی از برش در آنها صرف نظر گردیده است. صرف نظر کردن تغییر شکل‌های ناشی از برش در اکثر موارد عملی رضایت بخش است، ولی موارد استثنائی هم وجود دارد که در آنها باید تغییر شکل‌های برشی را در نظر گرفت (بخش ۷-۱۰ را ببینید).

رابطه دقیق برای انحنا

اگر منحنی ارتجاعی تیر شیب‌های زیادی داشته باشد دیگر نمی‌توان از معادله تقریبی 10-3 استفاده نمود. در این صورت باید از رابطه دقیقی که شیب v' را به زاویه دوران θ محور تیر مربوط می‌کند استفاده کنیم:

$$\tan \theta = v' ; \quad \theta = \arctan v'$$

بنابراین انحنای محور تیر از معادله زیر بدست می‌آید:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (10-8)$$

با توجه به رابطه $ds^2 = dx^2 + dv^2$ داریم

$$\frac{ds}{dx} = [1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{\frac{1}{2}} = [1 + (v')^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10-9)$$

در این رابطه dv/dx با v' نشان داده شده است. همچنین اگر d^2v/dx^2 با v'' نشان دهیم خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} (\arctan v') = \frac{v''}{1 + (v')^2} \quad (10-10)$$

۵۲۳

تیر کوچک فرض شده است.

طریقه دیگر حل این مسئله استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم 10-7 می باشد.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q$$

از انتگرال گیری های متوالی این معادله نتیجه می شود

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = qx + C_1$$

$$EI v'' = \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI v' = \frac{qx^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI v = \frac{qx^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

چهار شرط حدی برای محاسبه ثابت های انتگرال گیری لازم است. چون تغییر مکان ها و لنگرهای خمشی در دو انتهای تیر صفر می باشند، چهار شرط حدی عبارتند از

$$v(0) = v(L) = 0 \quad ; \quad v'(0) = v'(L) = 0$$

از معادلات فوق حاصل می شود

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_3 = \frac{qL^3}{24} \quad ; \quad C_4 = 0$$

پس از جایگزینی این مقادیر در معادله منحنی ارتجاعی تیر خواهیم داشت

$$EI v = \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}$$

این نتیجه با معادله 10-15 که با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بدست آمد مطابقت دارد.

مثال ۱۰-۲

معادله منحنی ارتجاعی تیر ساده شکل ۴-۱۰ تحت اثر بار متمرکز P را به دست آورید.

۵۲۲

در این رابطه C_1 ثابت انتگرال گیری می باشد. برای بدست آوردن این مقدار ثابت، با توجه به معارن تیر و بار گذاری روی آن مشاهده می کنیم که شیب منحنی ارتجاعی در وسط دهانه صفر می باشد. بنابراین شرط زیر نتیجه می شود:

$$v' = 0 \quad (x = L/2 \text{ که وقتی})$$

این شرط را می توان به طور خلاصه به صورت زیر بیان نمود:

$$v'(L/2) = 0$$

با بکار بردن این شرط در مورد معادله 10-12 ثابت C_1 بدست می آید.

$$C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

با جایگزینی این مقدار C_1 در معادله 10-12 خواهیم داشت

$$EI v' = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24} \quad (10-13)$$

مجدداً طرفین این معادله را در dx ضرب و سپس انتگرال می گیریم.

$$EI v = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{24} + C_2 \quad (10-14)$$

ثابت انتگرال گیری C_2 از شرط $v = 0$ در $x = 0$ بدست می آید.

$$v(0) = 0$$

اگر این شرط را در معادله 10-14 بکار ببریم حاصل می شود $C_2 = 0$. در نتیجه معادله منحنی ارتجاعی تیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (10-15)$$

تغییر مکان هر نقطه در طول تیر از این رابطه بدست می آید. تغییر مکان ماکزیمم (δ) در وسط دهانه تیر می باشد و با قرار دادن $x = L/2$ در معادله 10-15 بدست می آید.

$$\delta = v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (10-16)$$

شیب ماکزیمم در دو انتهای تیر رخ می دهد. در انتهای چپ ($x = 0$) از معادله 10-13 داریم

$$\theta_a = v'_{\max} = \frac{qL^3}{24EI}$$

در این رابطه، شیب v' با زاویه دوران θ مساوی قرار داده شده است زیرا تغییر شکل های

۵۲۵

از شرط (الف) با استفاده از معادلات 10-17 و 10-18 معادله زیر بدست می‌آید:

$$-Pba^2/2L + C_1 = -Pba^2/2L + C_2 : C_1 = C_2$$

از شرط (ب) با استفاده از معادلات 10-19 و 10-20 خواهیم داشت

$$-Pba^3/6L + C_1a + C_3 = -Pba^3/6L + C_2a + C_4 : C_3 = C_4$$

از شرط (پ) نتیجه می‌شود $C_3 = 0$. سرانجام از شرط (ت) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$-PbL^2/6 + Pb^3/6 + C_2L = 0$$

از حل چهار معادله فوق بین ثابت‌های انتگرال گیری نتیجه می‌شود

$$C_1 = C_2 = Pb(L^2 - b^2)/6L ; C_3 = C_4 = 0$$

از جایگزینی این مقادیر در معادلات 10-19 و 10-20 معادلات منحنی ارتجاعی تیر بدست می‌آید.

$$EIv = \frac{Pbx}{6L} (L^2 - b^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (10-21)$$

$$EIv = \frac{Pbx}{6L} (L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \quad (a \leq x \leq L) \quad (10-22)$$

معادله 10-21 معادله تیر در سمت چپ بار P و معادله 10-22 معادله تیر در سمت راست بار P می‌باشد.

شیب‌های دو قسم تیر با جایگزینی مقادیر C_1 و C_2 در معادلات 10-17 و 10-18 بدست می‌آید.

$$EIv' = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (10-23)$$

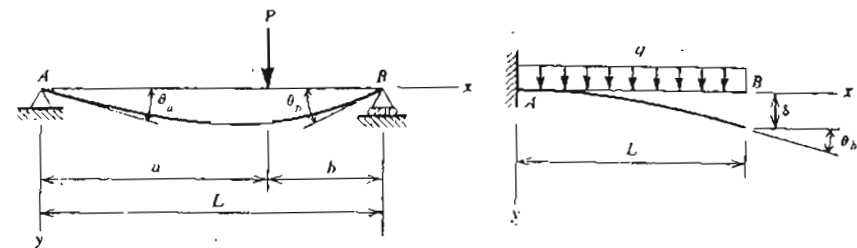
$$EIv' = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \quad (a \leq x \leq L) \quad (10-24)$$

شیب در هر نقطه منحنی ارتجاعی تیر را از معادلات فوق می‌توان محاسبه نمود. روایای دوران در دو انتهای تیر عموماً مطلوب می‌باشند. با جایگزینی $X=0$ در معادله 10-23 زاویه دوران انتهای چپ تیر (θ_a) و با جایگزینی $x=L$ در معادله 10-24 زاویه دوران انتهای راست تیر بدست می‌آید.

$$\theta_a = v'(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad (10-25)$$

$$\theta_b = -v'(L) = \frac{Pab(L+a)}{6LEI} \quad (10-26)$$

۵۲۴



شکل ۴-۱۰

شکل ۵-۱۰

حل: در این مثال برای لنگر خمشی دو عبارت مختلف وجود دارد. یکی برای سمت چپ بار P و دیگری برای سمت راست آن. بنابراین معادله 10-5 برای دو قسمت تیر باید بطور جداگانه نوشته شود.

$$EIv'' = -\frac{Pbx}{L} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv'' = -\frac{Pbx}{L} + P(x-a) \quad (a \leq x \leq L)$$

از انتگرال گیری دو معادله فوق خواهیم داشت

$$EIv' = -\frac{Pbx^2}{2L} + C_1 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (10-17)$$

$$EIv' = -\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \quad (a \leq x \leq L) \quad (10-18)$$

مجدداً از معادلات فوق انتگرال می‌گیریم.

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_3 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (10-19)$$

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + C_4 \quad (a \leq x \leq L) \quad (10-20)$$

چهار ثابت انتگرال گیری در معادلات فوق از شرایط زیر بدست می‌آیند:

(الف) - شیب‌های دو قسمت منحنی تیر در $x=a$ باید مساوی باشد.

(ب) - تغییر مکان‌های دو قسمت تیر در $x=a$ باید مساوی باشد.

(پ) - تغییر مکان تیر در $x=0$ برابر صفر است.

(ت) - تغییر مکان تیر در $x=L$ برابر صفر است.

۵۲۶

تغییر مکان ماکزیم تیر در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که مماس بر منحنی ارتجاعی تیر در آن نقطه افقی می‌باشد. اگر $a > b$ باشد، تغییر مکان ماکزیم در مسافت چپ تیر (بین $x=0$ و $x=a$) رخ می‌دهد و این نقطه را با صفر قرار دادن شیب v' از معادله 10-23 می‌توانیم بدست آوریم. اگر فاصله انتهای A تیر از نقطه تغییر مکان ماکزیم را با x_1 نشان دهیم خواهیم داشت

$$x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (a \geq b) \quad (10-27)$$

از این معادله مشاهده می‌شود که با حرکت نمودن بار P از وسط تیر ($b=L/2$) تا انتهای راست تیر (وقتی که b به صفر نزدیک می‌شود)، فاصله x_1 از $L/2$ تا $L/\sqrt{3} = 0.577L$ تغییر می‌کند. بدین ترتیب تغییر مکان ماکزیم همواره در نزدیکی وسط دهانه تیر رخ می‌دهد. تغییر مکان ماکزیم با جایگزینی x_1 از معادله 10-27 در معادله 10-21 به دست می‌آید.

$$v_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}LEI} \quad (a \geq b) \quad (10-28)$$

تغییر مکان در وسط دهانه تیر با جایگزینی $x=L/2$ در معادله 10-21 حاصل می‌شود.

$$v(L/2) = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (a \geq b) \quad (10-29)$$

چون تغییر مکان ماکزیم همواره در نزدیکی وسط دهانه تیر می‌باشد، معادله 10-29 تغییر مکان ماکزیم را با تقریب خوب می‌دهد. اختلاف بین تغییر مکان ماکزیم و تغییر مکان در وسط تیر در با مساعدترین حالت (وقتی که b به صفر نزدیک می‌شود) کمتر از سه درصد تغییر مکان ماکزیم می‌باشد.

وقتی که بار P در وسط تیر واقع می‌شود ($a=b=L/2$)، نتایج قبلی به صورت ساده‌تری در می‌آیند:

$$\theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI} \quad ; \quad v_{\max} = v(L/2) = \frac{PL^3}{48EI} \quad (10-30)$$

۱۰-۳ تیرهای طرهای

۵۲۷

مثال ۱۰-۳

منحنی ارتجاعی، تغییر مکان ماکزیم و شیب ماکزیم تیر طرهای شکل ۵-۱۰ را تحت بار گسسته یکساخت با شدت q بدست آورید.

حل: در این مثال نیز از یکی از سه معادله 10-5 تا 10-7 می‌توانیم استفاده کنیم. اگر از معادله مرتبه دوم 10-5 استفاده نمائیم خواهیم داشت

$$EIv'' = -M = q(L-x)^2/2 \quad (10-31)$$

از این معادله انتگرال می‌گیریم.

$$EIv' = -q(L-x)^3/6 + C_1$$

ثابت انتگرال گیری C_1 از شرط صفر بودن شیب در محل تکیه گاه، $v'(0) = 0$ ، بدست می‌آید: $C_1 = qL^3/6$ ، بنابراین

$$v' = \frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2) \quad (10-32)$$

از انتگرال گیری این معادله حاصل می‌شود

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) + C_2$$

شرط حدی در محل تکیه گاه $v(0) = 0$ می‌باشد که از آن $C_2 = 0$ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب معادله منحنی تیر به صورت زیر در می‌آید:

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (10-33)$$

تغییر مکان ماکزیم (δ) و شیب ماکزیم در انتهای آزاد تیر می‌باشد که با جایگزینی $x=L$ به ترتیب در معادلات 10-33 و 10-32 بدست می‌آیند.

$$\delta = v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \quad ; \quad \theta_b = v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (10-34)$$

اگر محل این تیر طرهای را با معادله دیفرانسیل 10-6 شروع کنیم، مقدار نیروی برشی در فاصله x از تکیه گاه $v = q(L-x)$ است. بنابراین

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = -qL + qx \quad (10-35)$$

از این معادله انتگرال می‌گیریم.

۵۲۹

باشد، L استفاده از معادله 10-7 می‌توانیم بنویسیم

$$EI \frac{d^4 v_1}{dx^4} = q_1 \quad ; \quad EI \frac{d^4 v_2}{dx^4} = q_2$$

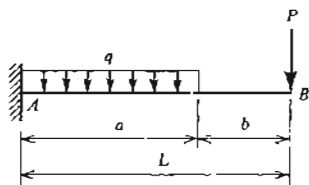
از جمع زدن طرفین معادلات فوق خواهیم داشت

$$EI \frac{d^4 (v_1 + v_2)}{dx^4} = q_1 + q_2$$

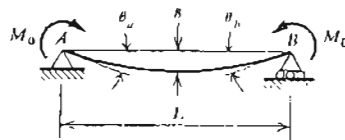
این رابطه نشان می‌دهد تغییر مکان ناشی از بار $q_1 + q_2$ (اثر توأم بارهای q_1 و q_2) برابر $v_1 + v_2$ می‌باشد. بنابراین چون معادلات دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر معادلات دیفرانسیل خطی می‌باشند، برای محاسبه تغییر مکان‌ها می‌توان از اصل اجتماع اثر توأ استفاده نمود. کاربرد روش جمع زدن در محاسبه تغییر مکان‌ها در مثال‌های زیر نشان داده می‌شود. در هنگام استفاده از این روش می‌توان از جداول کتاب‌های راهنمای مهندسی استفاده نمود. نمونه این جداول در پیوست ۳ کتاب داده شده است. این جداول تغییر مکان‌ها و سبب‌ها را برای حالت‌های اصلی بار گذاری در تیرهای ساده و طره‌ای می‌دهد.

مثال ۴-۱۰

تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای شکل ۶-۱۰ را بدست آورید.



شکل ۶-۱۰



شکل ۷-۱۰

حل: اگر بار P به تنهایی بر تیر وارد شود انتهای آزاد تیر بر اساس حالت ۴ پیوست ۲-۳ کتاب به اندازه $PL^3/3EI$ تغییر مکان خواهد کرد. همچنین بر اساس حالت ۲ پیوست ۲-۳ کتاب، انتهای آزاد تیر به اندازه $qa^3(3a+4b)/24EI$ تغییر مکان پیدا خواهد کرد. بنابراین تغییر مکان δ_B انتهای B در اثر توأم بارهای فوق

۵۲۸

$$EI v'''' = -qLx + qx^2/2 + C_1$$

چون لگر خمشی M در $x=L$ صفر می‌باشد شرط حدی $v''(L)=0$ را داریم که از آن $C_1 = qL^2/2$ نتیجه می‌شود و معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$EI v'''' = -qLx + qx^2/2 + qL^2/2$$

این معادله با معادله 10-31 یکسان است. بنابراین بقیه راه حل مطابق فوق می‌باشد. روش دیگر حل این مسئله استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم 10-7 می‌باشد.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q$$

از این معادله انتگرال می‌گیریم.

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = qx + C_1 \quad (10-36)$$

چون نیروی برشی در $x=L$ صفر می‌باشد، شرط حدی به صورت

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = 0$$

بسته می‌شود که از آن $C_1 = -qL$ بدست می‌آید. اگر این مقدار برای C_1 در معادله 10-36 قرار داده شود، این معادله با معادله 10-35 یکسان می‌شود و بقیه راه حل همان می‌باشد که در بالا بحث گردید.

انتخاب یکی از معادلات دیفرانسیل 10-5 تا 10-7 برای پیدا کردن تغییر مکان‌ها و منحنی ارتجاعی تیر معمولاً بستگی به سهولت عملیات ریاضی و سلیقه شخصی دارد.

۴-۱۰ روش جمع زدن

معادلات دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر (معادلات 10-5 تا 10-7) معادلات دیفرانسیل خطی می‌باشند، به عبارت دیگر تمام جملات شامل تغییر مکان v و مشتق‌های آن فقط دارای توان اول می‌باشند. با استفاده از این خاصیت می‌توان جواب‌های معادلات برای حالت‌های مختلف بار گذاری را با یکدیگر جمع نمود تا جواب نهایی بدست آید. برای مثال اگر v_1 معرف تغییر مکان ناشی از بار q_1 و v_2 تغییر مکان ناشی از بار q_2

۵۳۰

برابر است با

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(3a+4b)}{24EI}$$

تغییر مکان و زاویه دوران در هر نقطه تیر را می توان به طریق مشابهی بدست آورد.

مثال ۵-۱۰

تیر ساده‌ای تحت اثر لنگرهای M_0 در دو انتهایش قرار دارد (شکل ۷-۱۰).
زوایای دوران θ_a و θ_b دو انتهای تیر و تغییر مکان δ در وسط تیر را حساب کنید.

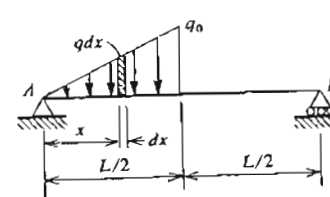
حل: با استفاده از حالت ۷ پیوست ۱-۳ کتاب و اصل اجتماع اثر قوا می توانیم بنویسیم

$$\theta_a = \theta_b = \frac{M_0 L}{3EI} + \frac{M_0 L}{6EI} = \frac{M_0 L}{2EI}$$

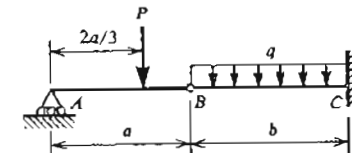
$$\delta = (2) \frac{M_0 L^2}{16EI} = \frac{M_0 L^2}{8EI}$$

مثال ۶-۱۰

برای تیر شکل ۸-۱۰، تغییر مکان وسط تیر و زاویه دوران θ_a انتهای چپ تیر را حساب کنید.



شکل ۸-۱۰



شکل ۹-۱۰

حل: از روش جمع زدن (یا اصل اجتماع اثر قوا) در حالت بار گذاری گسترده

۵۳۱

نیز می توان استفاده نمود. برای این کار عنصری از بار گسترده را به صورت بار متمرکز در نظر گرفته سپس در ناحیه بار گذاری شده انتگرال می گیریم.
تغییر مکان ایجاد شده در وسط تیر در اثر بار متمرکز P واقع در فاصله x از انتهای چپ تیر که از حالت ۵ پیوست ۱-۳ بدست می آید برابر است با

$$\frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$$

عنصری از بار گسترده به طول dx و به فاصله x از A را به صورت بار متمرکز با بزرگی qdx در نظر می گیریم که در آن $q = 2q_0x/L$ می باشد. بنابراین اگر در رابطه فوق بجای P کمیت qdx را قرار دهیم و از نتیجه حاصل بین 0 و $L/2$ انتگرال بگیریم، تغییر مکان وسط تیر بدست می آید.

$$\delta = \int_0^{L/2} \frac{qxdx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) = \frac{q_0}{24LEI} \int_0^{L/2} (3L^2 - 4x^2) x^2 dx$$

$$= \frac{q_0 L^4}{240EI}$$

با همین روش می توانیم زاویه دوران θ_a را حساب کنیم. زاویه دوران ناشی از بار متمرکز P (حالت ۵ پیوست ۱-۳ کتاب) برابر است با

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

در این عبارت باید بجای P کمیت $2q_0x/L$ ، بجای a کمیت x و بجای b کمیت $L-x$ را قرار دهیم. بنابراین

$$\theta = \int_0^{L/2} \frac{q_0 x dx}{3L^2 EI} (x)(L-x)(2L-x) = \frac{41q_0 L^3}{2880EI}$$

مثال ۷-۱۰

تغییر مکان δ_B مفصل B را در سازه شکل ۹-۱۰ بدست آورید.

حل: سازه مزبور از دو قسمت تشکیل یافته است: تیر AB با تکیه گاههای ساده در دو انتهای A و B و تیر BC که در انتهای C گیردار می باشد. دو تیر در نقطه B با اتصال مفصلی به یکدیگر وصل شده اند.

۵۳۲

تعریف شده است. حال اگر مایع در روی دال حوض تشکیل دهد، شدت بار در واحد فاصله در طول تیر برابر خواهد بود با

$$q = \gamma v \quad (10-38)$$

در این رابطه، s فاصله سیرها، γ وزن واحد حجم مایع و v تغییر مکان کل تیر می باشد. تغییر مکان کل v مجموع تغییر مکان اولیه v_1 و تغییر مکان اضافی v_2 ناشی از وزن مایع تشکیل دهنده حوض می باشد (شکل ۱۰-۱۰).

تغییر مکان تیر را با استفاده از معادله مرتبه چهارم 10-7 پیدا می کنیم. این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$EI \frac{d^4 v_2}{dx^4} = q = \gamma v$$

با جایگزینی $v = v_1 + v_2$ در معادله فوق و استفاده از معادله 10-37 خواهیم داشت

$$EI \frac{d^4 v_2}{dx^4} - \gamma v_2 = \gamma v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

طرفین رابطه فوق را بر EI تقسیم و فرض می کنیم

$$a^4 = \frac{\gamma}{EI} \quad (10-39)$$

در این صورت معادله دیفرانسیل به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^4 v_2}{dx^4} - a^4 v_2 = a^4 v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10-40)$$

جواب عمومی این معادله شامل دو قسمت است: جواب معادله همگن و جواب ویژه.

جواب معادله همگن (که با مساوی صفر قرار دادن طرف راست معادله فوق بدست می آید) عبارتست از

$$(v_2)_H = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cosh ax + C_4 \sinh ax \quad (10-41)$$

که دارای چهار ثابت انتگرال گیری می باشد. صحت این جواب را با جایگزینی آن در معادله دیفرانسیل همگن به سهولت می توان تحقیق نمود. جواب ویژه معادله 10-40 برابر است با

$$(v_2)_p = \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10-42)$$

در این رابطه یک پارامتری بعد و مساوی است با

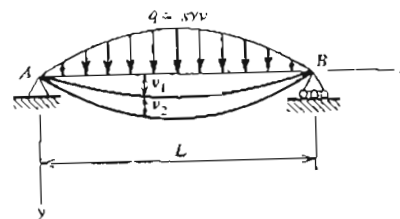
۵۳۲

با مطالعه نمودار جسم آزاد تیر AB نتیجه می شود که واکنش های عمودی در دو انتهای A و B به ترتیب $P/3$ و $2P/3$ می باشد. بنابراین تیر BC شرایط یک تیر طره ای را دارد که تحت اثر بار یکنواخت q و بار متمرکز $2P/3$ در انتهای آزادش قرار دارد. تغییر مکان انتهای آزاد این تیر طره ای که همان تغییر مکان مفصل B می باشد برابر است با (با استفاده از حالت های 1 و 4 پیوست ۲-۳)

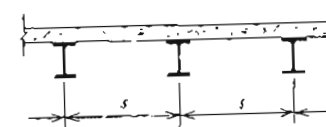
$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

۱۰-۵ بار متناسب با تغییر مکان

در بحث تغییر شکل تیرها تا کنون فرض بر این بود که بارها کمیت های معلومی باشد. اما مواردی وجود دارد که در آنها بارها به تغییر مکان ها بستگی دارند و در نتیجه تعیین بارها به صورت جزئی از تحلیل در می آید. برای مثال تیر حمل سطحی که بر آن مایع جمع می شود یکی از این موارد است. موفقی که تیر حمل می شود یک گودی بوجود می آید که با مایع پر شده تشکیل یک حوض می دهد. وجود حوض موجب افزایش بار می گردد که در اثر آن تغییر شکل بیشتری ایجاد می شود و بنابراین مایع بیشتری جمع می گردد. بدین ترتیب یا تغییر شکل به تدریج اضافه می شود تا اینکه تیر شکست بخورد، یا تیر به یک وضع تعادلی خواهد رسید بطوریکه دیگر تغییر شکل اضافی ایجاد نخواهد شد. متداول ترین مثال این نوع رفتار، جمع شدن آب باران در روی یک بام مسطح است.



شکل ۱۰-۱۰



شکل ۱۰-۱۱

فرض می کنیم تیر ساده AB در شکل ۱۰-۱۰، قسمتی از یک سیستم تیرهای موازی است که دالی را مطابق شکل ۱۰-۱۱ حمل می کند. قبل از اینکه پدیده حوض شدن رخ دهد فرض می کنیم تیر یک تغییر مکان اولیه v_1 داشته باشد که با معادله

$$v_1 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10-37)$$

۵۳۵

به عنوان مثال دیگری از پدیده حوض شدن، تیر ساده‌ای را در نظر بگیرید که در ابتدا مستقیم بوده و تحت بار گسترده یکنواخت با شدت q_0 قرار دارد. بار اضافه $q_1 = s\gamma v$ (تغییر مکان کل تیر v) در اثر پدیده حوض شدن بر تیر وارد می‌شود. بنابراین بار کل $q = q_0 + s\gamma v$ می‌باشد و معادله دیفرانسیل محلی تیر به صورت زیر در می‌آید:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q_0 + s\gamma v$$

یا

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - a^4 v = \frac{q_0}{EI} \quad (10-46)$$

این معادله همان جواب همگن مثال قبل (معادله 10-41) و جواب ویژه زیر را دارد:

$$(v)_p = -\frac{q_0}{s\gamma} \quad (10-47)$$

پس از بکار بردن چهار شرط حدی در جواب عمومی معادله دیفرانسیل، ثابت‌های انتگرال‌گیری بدست می‌آیند:

$$C_1 = C_3 = \frac{q_0}{2s\gamma}; \quad C_2 = \frac{q_0}{2s\gamma} \tan \frac{aL}{2}; \quad C_4 = -\frac{q_0}{2s\gamma} \tanh \frac{aL}{2}$$

جواب کلی تغییر مکان v با معلوم بودن ثابت‌های انتگرال‌گیری به سهولت نوشته می‌شود و با استفاده از این معادله، تغییر مکان هر مقطع خاصی در طول تیر تعیین می‌تود. برای مثال، تغییر مکان در وسط تیر برابر است با

$$v_c = \frac{q_0}{2s\gamma} \left(\sec \frac{aL}{2} + \operatorname{sech} \frac{aL}{2} - 2 \right) \quad (10-48)$$

تغییر مکان در مرکز تیر ناشی از بار گسترده یکواختی با شدت q_0 (بدون پدیده حوض شدن) برابر $5q_0 L^4 / 384EI$ می‌باشد (معادله 10-16). معادله 10-48 را بر حسب ضریبی از تغییر مکان مزبور بیان می‌کنیم:

$$v_c = \frac{5q_0 L^4}{384EI} \psi_1 \quad (10-49)$$

ضریب ψ_1 یک کمیت بی بعد است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

۵۳۶

$$b = \frac{a^4 L^4}{\pi^4 EI} = \frac{s\gamma L^4}{\pi^4 EI}$$

درستی جواب ویژه را نیز با جایگزینی آن در معادله دیفرانسیل 10-40 می‌توان تحقیق نمود.

جواب عمومی معادله 10-40 را با ترکیب نمودن جواب‌های همگن و ویژه می‌توان بدست آورد:

$$v_2 = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \cosh ax + C_4 \sinh ax + \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10-43)$$

چهار ثابت انتگرال‌گیری از چهار شرط حدی زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{array}{|l} x=0 \\ v_2=0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x=0 \\ v_2'=0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x=L \\ v_2=0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x=L \\ v_2'=0 \end{array}$$

از دو معادله اول $C_1 = C_3 = 0$ و از دو معادله آخر $C_2 = C_4 = 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین جواب نهایی تغییر مکان v_2 صرفاً "جواب ویژه" (معادله 10-42) می‌باشد. بنابراین تغییر مکان کل تیر برابر است با

$$v = v_1 + v_2 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{bv_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L}$$

یا

$$v = \frac{v_0}{1-b} \sin \frac{\pi x}{L} = \frac{v_1}{1-b} \quad (10-44)$$

این معادله نشان می‌دهد تغییر مکان اولیه v_1 به علت پدیده حوض شدن بوسیله ضریب تشدید $1/(1-b)$ افزایش می‌یابد. این ضریب وقتی که $b=0$ برابر واحد می‌باشد و وقتی که b به واحد نزدیک می‌شود بدون حد افزایش پیدا می‌کند. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای مقادیر b کوچکتر از واحد، یعنی وقتی که

$$\frac{s\gamma L^4}{\pi^4 EI} < 1 \quad (10-45)$$

تغییر مکان v مقدار معینی دارد و تیر به یک وضع تعادل می‌رسد. اگر $b \geq 1$ ، تیر تحت بار مایع مزبور ناپایدار است و تغییر مکان بطور تئوری بی‌نهایت زیاد می‌گردد. البته باید توجه داشت که معادله دیفرانسیل تیر به رفتار ارتجاعی خطی و تغییر شکل‌های کوچک محدود می‌باشد، از این رو نتایج فوق برای تغییر شکل‌های زیاد صادق نمی‌باشند.

۵۳۶

$$\psi_1 = \frac{192}{5a^4 L^4} \left(\sec \frac{aL}{2} + \operatorname{sech} \frac{aL}{2} - 2 \right) \quad (10-50)$$

ضرب تشدید ψ_1 به ازای $aL = 0$ برابر واحد می باشد و وقتی aL به π نزدیک می شود به سمت بی نهایت میل می کند. بنابراین در این مثال نیز یک مقدار بحرانی وجود دارد که به ازای مقادیر کمتر از آن مقدار بحرانی، تیر پایدار می باشد و به یک وضع تعادل می رسد. این مقدار بحرانی بوسیله معادله $aL = \pi$ یا $b = 1$ داده می شود و شرط پایداری همان معادله 10-45 است. این شرط پایداری بطور کلی برای یک تیر ساده بدون توجه به نوع باری که تغییر شکل اولیه را ایجاد می کند صادق می باشد.

با افزایش صلبیت خمشی (EI) تیر یا با ایجاد نمودن یک تغییر شکل اولیه رو به بالا می توان از شکست ناشی از حوض شدن جلوگیری کرد.

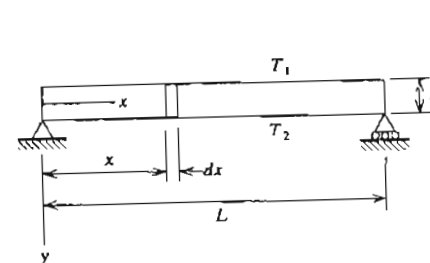
۱۰-۶ اثر گرمایی

افزایش یکنواخت درجه حرارت باعث می شود که یک میله یا تیر آزاد به اندازه

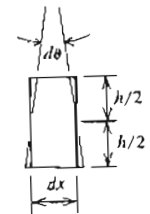
$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad (10-51)$$

افزایش طول پیدا کند. در این رابطه، ΔL معرف اضافه طول، α ضریب انبساط حرارتی، L طول اولیه و ΔT افزایش درجه حرارت می باشد. اگر تکیه گاههای تیر چنان باشد که انبساط طولی تیر به آزادی رخ دهد (مانند تمام تیرهایی که در این فصل مورد بررسی قرار گرفتند)، تغییر یکنواخت درجه حرارت در تیر تنش ایجاد نخواهد کرد. تیر تغییر شکل جانبی نیز نخواهد داشت زیرا هیچ نوع تمایلی برای خمش ندارد.

اگر درجه حرارت در ارتفاع تیر ثابت نباشد، رفتار تیر کاملاً متفاوت خواهد بود.



شکل ۱۰-۱۲



شکل ۱۰-۱۳

۵۳۷

برای مثال فرض کنید تیر ساده ای که در ابتدا مستقیم بوده و تحت درجه حرارت یکنواخت T_0 قرار دارد، تحت اثر گرمایی غیر یکنواختی قرار گیرد بطوریکه درجه حرارت در سطح فوقانی آن T_1 و در سطح تحاسی آن T_2 باشد (شکل ۱۰-۱۲). اگر تغییرات درجه حرارت بین بالا و پایین تیر را خطی فرض کنیم، در این صورت درجه حرارت متوسط تیر $T_g = (T_1 + T_2)/2$ می باشد که در وسط ارتفاع تیر رخ می دهد. هر اختلافی بین درجه حرارت متوسط و درجه حرارت اولیه T_0 منجر به تغییر طول تیر می گردد. اختلاف درجه حرارت $\Delta T = T_2 - T_1$ بین پائین و بالای تیر منجر به انحنای محور تیر می شود و این به معنی بوجود آمدن تغییر شکل جاسی است.

برای اینکه تغییر شکل جاسی تیر را بررسی کنیم، تغییر شکل عنصری از تیر به طول dx را در نظر می گیریم (شکل ۱۰-۱۳). تغییر طول عنصر در سطوح تحتانی و فوقانی آن به ترتیب $\alpha(T_2 - T_0)dx$ و $\alpha(T_1 - T_0)dx$ می باشد. اگر T_2 از T_1 بیشتر باشد، اضلاع عنصر نسبت به یکدیگر به اندازه زاویه $d\theta$ مطابق شکل ۱۰-۱۳ دور می کنند. با استفاده از هندسه شکل، زاویه $d\theta$ به تغییر طولها با معادله زیر ارتباط دارد:

$$h d\theta = \alpha(T_2 - T_0)dx - \alpha(T_1 - T_0)dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (10-52)$$

h در این رابطه ارتفاع تیر می باشد. میلا "مشاهده کردیم که کسب $d\theta/dx$ معرف انحنای منحنی ارتجاعی تیر می باشد (معادله 10-4). بنابراین معادله دیفرانسیل تیر برای منحنی تیر تغییر شکل یافته بدست می آید:

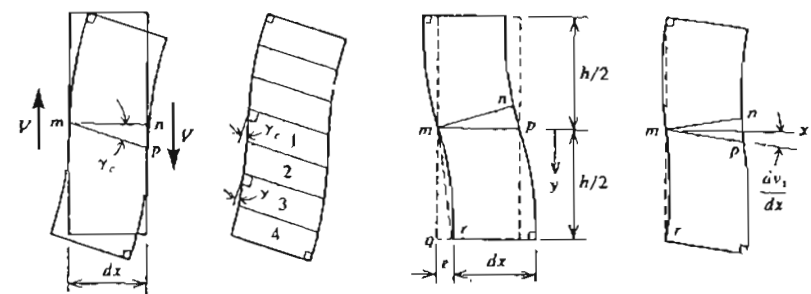
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h} \quad (10-53)$$

علامت منفی در این رابطه لازم است تا قرار دادهای علامت قبلی پا بر جا باشند. توجه کنید موقعی که T_2 از T_1 بیشتر است، انحنا منفی خواهد بود. کمیت $\alpha(T_2 - T_1)/h$ معادل کمیت M/EI می باشد که قبلاً در معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر (معادله 10-5) ظاهر گشت.

اکنون که معادله 10-53 بعنوان معادله دیفرانسیل اساسی برای تیری تحت اثر تغییر درجه حرارت بین بالا و پائین تیر بدست آمده است، آن را می توانیم با همان روشهای تشریح شده در فوق برای حالت بارهای خارجی حل کنیم. با انتگرال گیری از این معادله $d^2 v/dx^2$ و سپس با استفاده از شرایط حدی ثابتهای انتگرال گیری

۱۰-۷ اثر تغییر شکل‌های برشی

در بخش‌های قبلی این فصل فقط تغییر شکل‌های ناشی از خمش در محاسبه تغییر مکان‌ها در نظر گرفته شدند. در اثر تغییر شکل‌های برشی تغییر مکان اضافی ایجاد می‌گردد که در تیری با مقطع عرضی مستطیل باعث می‌شود عنصری از تیر به طول dx مطابق شکل ۱۰-۱۴ تغییر شکل دهد. چون تنش‌های برشی در ارتفاع تیر تغییر می‌کنند، مقاطع عرضی به صورت سطوح منحنی در می‌آیند. شکل مزبور فقط تغییر شکل‌های ناشی از برش را نشان می‌دهد، از این رو تغییر شکل‌های خمشی و لنگر خمشی مؤثر بر عنصر از روی شکل حذف گردیده است. خط mn معروف محور اولیه تیر می‌باشد که افقی فرض می‌شود و خط mp وضع این خط را پس از بوجود آمدن تغییر شکل‌های برشی نشان می‌دهد. اگر فرض شود که اضلاع عنصر در نقاط m و n قائم باقی بمانند، در این صورت لبه‌های فوقانی و تحتانی تیر موازی خط mp خواهد بود که با امتداد افقی زاویه γ_c تشکیل می‌دهد (γ_c کرنش برشی در محل محور خمشی است). اگر عنصر مزبور را به لایه‌هایی تقسیم کنیم و هر یک از این لایه‌ها را در برش خالص فرض نماییم (شکل ۱۰-۱۵) تغییر شکل عنصر را به سهولت می‌توان تجسم نمود. کرنش برشی در لایه ۱ برابر γ_c ولی در لایه‌های ۲ و ۳ کمتر از γ_c می‌باشد. کرنش برشی در لایه ۴ که در دورترین نقطه از محور تیر قرار دارد باید برابر صفر باشد و از این روابط این لایه بر یکدیگر عمود می‌باشند.



شکل ۱۰-۱۴

شکل ۱۰-۱۵

شکل ۱۰-۱۶

شکل ۱۰-۱۷

شیب منحنی تیر فقط ناشی از برش تقریباً برابر کرنش برشی در محل محور خمشی می‌باشد (شکل ۱۰-۱۴). بدین ترتیب اگر تغییر شکل ناشی از برش را با v_s نشان دهیم، معادله ریر برای شیب بدست می‌آید:

$$\frac{dv_s}{dx} = \gamma_c = \frac{\alpha_s V}{GA} \quad (10-54)$$

در این رابطه، V/A تنش برشی متوسط می‌باشد که از تقسیم نمودن نیروی برشی بر مساحت مقطع عرصی بدست می‌آید، G ضریب ارتجاعی در برش و α_s یک ضریب عددی موسوم به ضریب برش می‌باشد که تنش برشی متوسط را باید در آن ضرب نمود تا تنش برشی در مرکز سطح مقطع عرصی بدست آید. برای یک مقطع عرضی مستطیلی $\alpha_s = 3/2$ (معادله ۸-۲۸)، برای یک مقطع عرصی دایره‌ای $\alpha_s = 4/3$ (معادله ۸-۳۳) و برای یک تیر I کمیت α_s تقریباً برابر A/A_w می‌باشد که در آن A_w مساحت جان تیر است. کمیت GA/α_s موسوم به ضریب برشی تیر می‌باشد.

موقعی که بار گسترده پیوسته‌ای با شدت q در روی تیر اثر می‌کند، نیروی برشی V تابع پیوسته‌ای می‌باشد که از آن نسبت به x می‌توان مشتق گرفت. در این صورت انحنا ایجاد شده فقط بوسیله برش برابر است با

$$\frac{d^2 v_s}{dx^2} = \frac{\alpha_s}{GA} \frac{dV}{dx} = - \frac{\alpha_s q}{GA} \quad (10-55)$$

تغییر مکان کل v تیر مجموع تغییر مکان خمشی v_b (که محاسبه آن در بخش‌های قبلی این فصل مورد بحث قرار گرفت) و تغییر مکان برشی v_s می‌باشد. بنابراین $v = v_b + v_s$ و انحنا کل مساویست با

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v_b}{dx^2} + \frac{d^2 v_s}{dx^2} = - \frac{M}{EI} - \frac{\alpha_s q}{GA} \quad (10-56)$$

با انتگرال گیری از این معادله می‌توان آن را برای محاسبه تغییر مکان تیرها در موافقی که اثر برش باید به حساب آورده شود بکار برد.

برای محاسبه ثابت‌های انتگرال گیری از شرایط انتهایی تیر استفاده می‌شود. برای مثال در یک تکیه گاه ساده تغییر مکان صفر می‌باشد ($v = v_b = v_s = 0$). تغییر مکان در یک تکیه گاه گیردار نیز صفر می‌باشد، ولی شرط انتهایی در مورد شیب بستگی به نحوه گیرداری انتهایی تیر دارد. اگر اضلاع عنصر در محل محور خمشی قائم باقی بمانند (مطابق شکل ۱۰-۱۴)، در این صورت شرایط انتهایی برای شیب عبارتند از

۵۴۱

در سراسر ارتفاع جان تقریباً یکنواخت است. در این صورت داریم

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{\tau_w G} \int_0^{h/2} \tau \tau_w dy \approx \frac{V}{2\tau_w G} \quad (10-63)$$

در این حالت شرایط 10-60 به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_w} \quad (10-64)$$

در این رابطه $A_w \approx h t_w$ مساحت جان تیر می باشد.

مثال ۸-۱۰

اثر تغییر شکل برشی در روی تغییر شکل کل یک تیر ساده تحت بار گسترده باشد
یکنواخت را بررسی کنید (شکل ۲-۱۰).

حل: معادله انحنای این تیر با استفاده از معادله 10-56 به صورت زیر در

می آید:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{q}{2EI} (xL - x^2) - \frac{\alpha_s q}{GA}$$

تغییر مکان v پس از دو بار انتگرال گیری پیاپی از این معادله بدست می آید.

$$v = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2x^3L) - \frac{\alpha_s q}{2GA} x^2 + c_1 x + c_2$$

تغییر مکان در دو انتهای تیر ($x=L$ و $x=0$) صفر است. ثابت های c_1 و c_2 از این دو شرط محاسبه می شوند.

$$c_1 = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{\alpha_s qL}{2GA} \quad ; \quad c_2 = 0$$

بنابراین معادله منحنی تغییر مکان تیر عبارتست از

$$v = \frac{qL^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} \right) \left(\frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + 1 \right) + \frac{\alpha_s qL^2}{2GA} \left(\frac{x}{L} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (10-65)$$

این معادله در سمت راستش دو جمله دارد. جمله اول ناشی از خمشی می باشد (با معادله 10-15 مقایسه کنید). جمله دوم تغییر مکان اضافی ناشی از تغییر شکل های برشی را

۵۴۰

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dv_s}{dx} = \gamma_c \quad (10-57)$$

زیرا در این حالت شیب محور تیر در اثر تغییر شکل های خمشی برابر صفر ولی در اثر تغییر شکل های برشی برابر γ_c است. اگر گیرداری تیر چنان است که شیب محلی تغییر مکان کل در انتهای تیر صفر می باشد، در این صورت شرایط انتهایی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad (10-58)$$

و انتهای تیر مطابق شکل ۱۶-۱۰ تغییر شکل می دهد بطوریکه خط mp افقی می باشد. امکان دیگر این است که بالا و پایین تیر در یک خط قائم نگهداشته شوند (شکل ۱۷-۱۰). در این حالت، هیچیک از خطوط mn و mp افقی باقی نمی مانند. در عوض، شیب dv_s/dx با دوران دادن عنصر شکل ۱۶-۱۰ در جهت عقربه های ساعت بطوریکه خط mr قائم می توان بدست آورد. زاویه دوران راویه $q\hat{m}r$ برابر با e تقسیم بر $h/2$ می باشد. فاصله e مساویست با

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy \quad (10-59)$$

در این رابطه، γ کرنش برشی (شکل ۱۵-۱۰) در فاصله y (شکل ۱۶-۱۰) از محور خمشی می باشد. حال شرایط حدی برای این حالت را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h} \quad (10-60)$$

کمیت e را که بوسیله معادله 10-59 داده شده برای هر شکل مقطع عرضی خاصی می توان حساب نمود. برای تیری با مقطع عرضی مستطیل به عرض b داریم

$$e = \int_0^{h/2} \gamma dy = \frac{1}{G} \int_0^{h/2} \tau dy = \frac{1}{bG} \int_0^{h/2} \tau b dy = \frac{V}{2bG} \quad (10-61)$$

در این حالت شرایط 10-60 به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{dv_b}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA} \quad (10-62)$$

در این رابطه $A = bh$ مساحت مقطع عرضی می باشد.

برای یک تیر I جان تیر تقریباً تمام نیروی برشی را حمل می کند و تنش برشی

۵۴۲

می دهد .

تغییر مکان وسط تیر ($x=L/2$) برابر است با

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{\alpha_s qL^2}{8GA} = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48\alpha_s EI}{5GA L^2} \right) \quad (10-66)$$

به اهمیت سسی تغییر شکل ناشی از برش با بررسی جمله آخر معادله فوق می توان پی برد . صرف نظر نمودن تغییر شکل های برشی مانند این است که تیر در برش بی نهایت صلب فرض شود ($GA/\alpha_s = \infty$). در این صورت جمله آخر معادله فوق صفر می شود و فقط تغییر مکان خمشی باقی می ماند . وقتی که اثر برش در نظر گرفته و جمله آخر در معادله نگاه داشته می شود ، مشاهده می کنیم که تغییر مکان افزایش می یابد . مقدار جمله آخر برای تیرهای توپر و سخت از فیل تیرهای با مقطع عرضی مستطیل در مقایسه با واحد کوچک می باشد ولی در تیرهای دیگر همچون تیرهای ماندویچی ممکن است کاملاً زیاد باشد . برای بدست آوردن نتایج عددی ، تیری با مقطع عرضی مستطیل به ارتفاع h (که برای آن $\alpha_s = 1.5$ و $I/A = h^2/12$ است) و $E/G = 2.5$ را در نظرمی گیریم . تغییر مکان وسط تیر در این حالت مساوی است با

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + 3 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (10-67)$$

از این معادله مشاهده می شود که برای $L/h = 10$ تغییر شکل های برشی تغییر مکان وسط تیر را 3 درصد افزایش می دهد . تاثير تغییر شکل های برشی برای نسبت های کوچکتر L/h ، یعنی برای تیرهای کوتاه و با ارتفاع زیاد ، افزایش پیدا می کند . این اثر برای تیرهای I مشابه تیرهای مستطیلی می باشد ، با این تفاوت که بزرگی نسبی تغییر مکان ناشی از برش معمولاً دو یا سه برابر بیشتر است . اضافه شدن تغییر مکان ناشی از برش برای تیرهای ماندویچی ممکن است تا 50 درصد برسد .

معادله دیفرانسیل مورد استفاده در بالا برای حل تغییر مکان برشی بر اساس این فرض بدست آمد که هر مقطع عرضی تیر مطابق شکل ۱۴ - ۱۵ بتواند به آزادی تاب بخورد . تیر ساده با بارگذاری یکساخت حالتی است که این فرض در آن تقریباً قانع شدماست . به علت تقارن ، تاب خوردگی مقطع عرضی در وسط تیر نمی تواند وجود داشته باشد ، چون نیروی برشی در وسط صفر است ($V=0$) ، در مقطع عرضی وسط تمایلی برای تاب خوردگی وجود ندارد . تاب خوردگی و نیروی برشی به تدریج از وسط تیر به سوی انتهای تیر افزایش می یابند . بدین ترتیب مانع اضافی در مقابل تغییر مکان که بوسیله تاب خوردگی ایجاد می شود تاثير ناچیزی در روی تغییر مکان کل دارد . اما می توان نشان داد که اثر

۵۴۳

مزبور باعث کاهش تغییر مکان محاسبه شده در فوق می گردد .

منحنی تغییر مکان تیر ساده ای با مقطع عرضی مستطیل تحت بار یکساخت بوسیله روش های انرژی ارتجاعی محاسبه شده است (مرجع 26) . برای ضریب پواسون $\nu=0.25$ تغییر مکان وسط تیر با استفاده از تئوری ارتجاعی برابر است با

$$v_c = \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + 2.2 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (10-68)$$

تغییر مکانی که از این معادله بدست می آید کمی کمتر از تغییر مکان معادله 10-67 می باشد . جمله دوم در معادله فوق نه فقط اثر برش را به حساب می آورد بلکه اثر تنش های σ_y در جهت قائم (ناشی از بار یکساخت q که در بالای تیر اثر می کند) را نیز در نظر می گیرد .

مثال ۹ - ۱۰

اثر تغییر شکل برشی در روی تغییر شکل کل یک تیر ساده تحت بار متمرکز P در وسط دهانه اش را بررسی کنید .

حل : در نیمه چپ تیر عبارات لگر خمشی ، نیروی برشی و شدت بار به ترتیب $M=Px/2$ ، $V=P/2$ و $q=0$ می باشد . بنابراین معادلات انحنا ناشی از خمش و برش به صورت زیر در می آیند :

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = - \frac{Px}{2EI} ; \quad \frac{dv_s}{dx} = 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

بر خلاف مثال قبل این دو معادله باید بطور جداگانه انتگرال گرفته شود زیرا شرایط حدی شیب ها در وسط تیر برای تغییر مکان های خمشی و برشی متفاوت می باشد . در بار انتگرال گیری متوالی معادله دیفرانسیل v_b با استفاده از شرایط حدی $dv_b/dx=0$ در $x=L/2$ و $v_b=0$ در $x=0$ تغییر مکان ناشی از خمش را می دهد .

$$v_b = \frac{PL^3}{48EI} \left(\frac{x}{L} \right) \left(3 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

از انتگرال گیری معادله دیفرانسیل v_s حاصل می شود

$$\frac{dv_s}{dx} = C_1$$

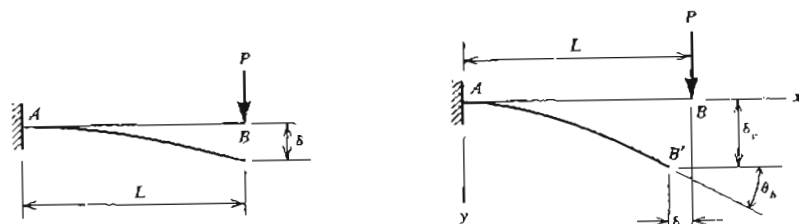
۵۴۵

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + 2.78 \frac{h^2}{L^2} - 0.84 \frac{h^3}{L^3} \right) \quad (10-72)$$

این معادله نسبت به معادله 10-71 تغییر مکان کمتری می‌دهد زیرا تنش‌های موضعی در مجاورت وسط تیر در جایی که بار وارد شده در آن به حساب آورده شده است.

مثال ۱۰-۱۰

اثر تغییر شکل برشی در روی تغییر مکان کل یک تیر طره‌ای تحت بار متمرکز P در انتهای آزادش را بررسی کنید (شکل ۱۸-۱۰).



شکل ۱۸-۱۰

حل: تغییر مکان خمشی v_b مطابق روش‌های مورد بحث در بخش‌های ۳-۱۰ و ۴-۱۰ به سهولت محاسبه می‌گردد (مسئله ۳-۱۰ را ببینید). در اینجا فقط تغییر مکان برشی v_s را مورد بحث قرار می‌دهیم. چون نیروی برشی در طول تیر ثابت است، شیب dv_s/dx تیر ناشی از برش نیز ثابت می‌باشد. بزرگی این شیب بستگی به شرایط تکیه‌گاه انتهای چپ تیر دارد. اگر اضلاع عنصر در محل محور خمشی قائم باقی بمانند، انتهای تیر به آزادی تاب می‌خورد (شکل ۱۴-۱۰ را ببینید). در این صورت شیب برابر است با

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{\alpha_s P}{GA}$$

و تغییر شکل برشی مساوی است با

$$v_s = \frac{\alpha_s P}{GA} x \quad (10-73)$$

اگر منحنی تغییر مکان در تکیه‌گاه افقی باقی بماند و مقطع عرضی انتهای مطابق شکل

۵۴۴

این معادله نشان می‌دهد شیب ناشی از برش در سراسر نیمه چپ تیر ثابت می‌باشد. این شیب بوسیله معادله 10-54 داده شده و برابر $\alpha_s V/GA$ است. با انتگرال گیری مجدد از رابطه فوق و با استفاده از شرط حدی $v_s=0$ در $x=0$ معادله تغییر مکان ناشی از برش بدست می‌آید.

$$v_s = \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

بنابراین تغییر مکان کل برابر است با

$$v = v_b + v_s = \frac{PL^3}{48EI} \left(\frac{x}{L} \right) \left(3 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{\alpha_s Px}{2GA} \quad (10-69)$$

در وسط تیر داریم

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{12\alpha_s EI}{GAL^2} \right) \quad (10-70)$$

در این مثال نیز اهمیت نسبی تغییر شکل‌های برشی را در هر حالت خاصی با ارزیابی عددی حمله دوم داخل پرانتز در معادله فوق می‌توان تعیین نمود.

معادله 10-69 که از حل معادله دیفراسیل بدست آمد مقدار تغییر مکان‌ها را بیش از اندازه زیاد می‌دهد زیرا اثر تاب خوردگی (همانطوریکه در مثال قبل بحث شد) در آن صرف نظر شده است. مقطع عرضی وسط تیر به علت تقارن باید مسطح باقی بماند و تاب خوردگی در آنجا می‌تواند رخ دهد. ولی مقاطع مجاور در چپ و راست وسط تیر به ترتیب نیروهای برشی $P/2$ و $-P/2$ را تحمل می‌کنند و این مقاطع باید تاب خوردگی پیدا کنند. چون این تاب خوردگی‌ها در دو جهت مخالف می‌باشد ولی در مقابل آنها مانع وجود دارد تنش‌های اضافی باید ایجاد گردد. ممانعت از تاب خوردگی مقاطع باعث کاهش تغییر شکل‌های برشی می‌گردد و در نتیجه مقدار واقعی تغییر مکان برشی کمتر از آن است که معادله 10-70 می‌دهد.

برای یک تیر با مقطع مربع مستطیل و $E/G = 2.5$ تغییر مکان وسط تیر (معادله 10-70) به صورت زیر در می‌آید:

$$v_c = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + 3.75 \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (10-71)$$

این معادله را می‌توان با نتایج دقیق‌تر که از تئوری ارتجاعی بدست می‌آید مقایسه نمود. نتایج تئوری ارتجاعی برای حالت $v = 0.25$ و $E/G = 2.5$ به صورت زیر می‌باشد (مرجع 26):

۵۴۷

در بسیاری از مواقع به علت کمبود اطلاعات دقیق نمی‌توان صلبیت‌های خمشی و برشی را بوسیله محاسبه تعیین نمود. در چنین مواردی صلبیت‌ها را برای مصالح ویژه چند ماده‌ای باید بطور تجربی بدست آورد.

۸-۱۰ تغییر مکان‌های زیاد تیرها

تغییر مکان‌های تیرها که در بخش‌های قبلی این فصل تعیین شدند بوسیله حل معادله دیفرانسیل تفریبی $EIV'' = -M$ بدست آمدند که برای شب‌های کوچک تیرها رضایت بخش می‌باشند. وقتی که شیب‌ها و در نتیجه تغییر مکان‌ها زیاد می‌باشند باید از معادله دیفرانسیل دقیق منحنی تغییر مکان (منحنی ارتجاعی) استفاده نمود. این معادله با فرض اینکه ماده تیر به طور خطی ارتجاعی باشد به صورت زیر نوشته می‌شود (معادلات 10-1 و 10-2 را ببینید) :

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -M \quad (10-75)$$

کمیت $d\theta/ds$ معروف انحنای تیر یا شدت تغییر θ (زاویه دوران منحنی تغییر مکان تیر) نسبت به s (فاصله‌ای که در طول منحنی تغییر مکان تیر اندازه گرفته می‌شود) می‌باشد. وقتی که دوران‌ها خیلی کوچک می‌باشند، فاصله s با فاصله x یکسان می‌گردد و زاویه دوران θ همان شیب dv/dx می‌شود، در نتیجه $d\theta/ds$ بطور تفریبی برابر d^2v/dx^2 می‌باشد. اما این ساده کردن‌ها برای تغییر مکان‌های زیاد صادق نمی‌باشد و معادله 10-75 باید حل گردد.

منحنی‌های تغییر مکان تیرها برای حالت تغییر مکان‌های زیاد برای انواع مختلف تیرها و شرایط بارگذاری با روش‌های ریاضی بدست آمده است. چون این روش‌های حل طولانی می‌باشند در این جا مورد بحث قرار نمی‌گیرند. اما جواب‌های نهایی برای یک مثال با کار سرد عملی در این بخش داده خواهد شد.

تیر طره‌ای AB شکل ۱۹-۱۰ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم بار P تغییر مکان‌های زیاد در تیر ایجاد کند بطوریکه انتهای آزاد تیر از B به B' منتقل گردد. زاویه دوران انتهای آزاد تیر را با θ_B و تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه مزبور را ترتیب با δ_v و δ_h نشان می‌دهیم. طول AB' منحنی تغییر مکان با طول اولیه L برابر است زیرا از تغییر طول ناشی از تنش مستقیم صرف نظر می‌شود. چون تیر ایزو استاتیک است

۵۴۶

۱۶-۱۰ تغییر شکل دهد. در این صورت $dv_s/dx=0$ و تغییر مکان برشی v_s وجود ندارد. بالاخره اگر لبه‌های فوقانی و تحتانی تیر در محل تکیه گاه در یک امتداد قائم باقی بمانند و تیر مطابق شکل ۱۷-۱۰ تاب بخورد، در این صورت شیب ناشی از برش برابر است با

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{2e}{h}$$

و تغییر شکل برشی مساوی است با

$$v_s = \frac{2e}{h}x \quad (10-74)$$

تغییر مکان کل انتهای آزاد تیر با جایگزینی $x=L$ در معادلات فوق برای v_s و جمع نمودن نتیجه حاصل با $PL^3/3EI$ که تغییر شکل ناشی از خمش در انتهای آزاد تیر (حالت 4 پیوست ۲-۳ کتاب) است بدست می‌آید.

تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای با استفاده از روش‌های تئوری ارتجاعی از معادله 10-72 (برای یک تیر ساده با بار متمرکز در وسط دهانه آن) با جایگزینی $2P$ بجای P و $2L$ بجای L محاسبه می‌شود. تغییر مکانی که به این ترتیب بدست می‌آید برای یک تیر طره‌ای که از تاب خوردگی انتهای گیردار آن جلوگیری می‌شود (به عبارت دیگر فرض می‌شود که مقطع عرضی انتهایی مسطح باقی بماند) صادق است.

تغییر شکل‌های برشی در تیرهای ساندویچی

در محاسبه تغییر مکان‌ها برای تیرهای ساندویچی (بخش ۳-۹-۸ را ببینید) معمولاً لازم است اثر تغییر شکل‌های برشی به حساب آورده شود زیرا ضریب ارتجاعی برشی ماده هسته (G_c) معمولاً کوچک و در نتیجه صلبیت برشی کوچک می‌باشد. روش‌های مورد بحث در بالا را برای محاسبه تغییر مکان‌های این نوع تیرها می‌توان بکار برد. در معادلات فوق بجای صلبیت خمشی EI باید کمیت $E_f I_f$ جایگزین گردد که در آن E_f ضریب ارتجاعی رویه‌ها و I_f گشتاور لختی آنها می‌باشد. صلبیت برشی G_A/α_s نیز به G_c تبدیل می‌شود زیرا می‌توانیم فرض کنیم که تنش برشی در روی سطح هسته (A_c) بطور یکنواخت توزیع شده است و در نتیجه ضریب برش α_s برابر واحد می‌گردد. در کار برده‌های عملی چون انواع مختلفی از مصالح در تیرهای ساندویچی بکار می‌رود،

۵۴۹

می باشد که در آن

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \, dt \quad (10-81)$$

انتهای بیضوی کامل نوع دوم =

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \, dt \quad (10-82)$$

انتهای بیضوی نوع دوم =

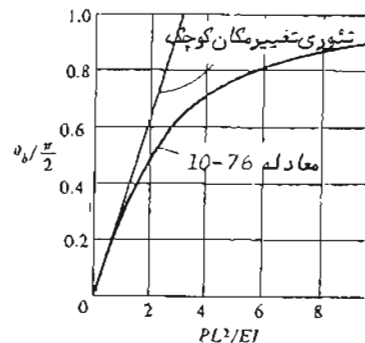
روشی حل معادله 10-80 نیز مشابه روش حل معادله 10-76 می باشد که در فوق ذکر شد. نتایج به صورت یک منحنی در شکل ۲۱ - ۱۰ رسم شده است. در این مورد نیز تغییر مکان قائم انتهای آزاد تیر برای مقادیر کوچک بار P از تئوری تغییر مکان های کوچک یا دقت بدست می آید.

بالاخره تغییر مکان افقی انتهای آزاد تیر از معادله زیر محاسبه می گردد:

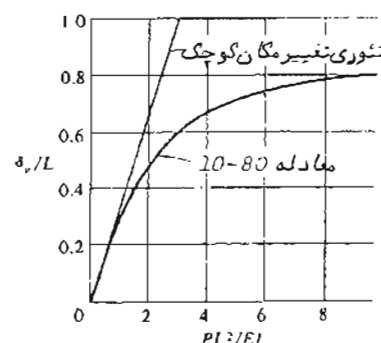
$$\frac{\delta_h}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI \sin \theta_b}{PL^2}} \quad (10-83)$$

نتایج این حالت تیر در شکل ۲۲ - ۱۰ رسم شده است.

برای محاسبه تغییر مکان های زیاد تیرها در حالت های دیگر به مراجع 31 تا 33 رجوع شود.



شکل ۲۰ - ۱۰



شکل ۲۱ - ۱۰

۵۴۸

عبارت لنگر خمشی M را می توان به سهولت بدست آورد و در معادله 10-75 جایگزین نمود. سپس بعد از مقدار قابل ملاحظه ای عملیات ریاضی و همچنین بکار بردن شرایط حدی مناسب، جواب معادله حاصل بر حسب توابع بیضوی بدست می آید (برای جزئیات روش حل به مراجع 31 تا 33 رجوع کنید).

معادله ای که زاویه θ_b را می دهد یک معادله فرازنده به صورت

$$F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (10-76)$$

می باشد که جملات آن با تعاریف زیر مشخص می شوند:

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin \theta_b}{2}}; \quad \phi = \arcsin \frac{1}{k\sqrt{2}} \quad (10-77)$$

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \quad (10-78)$$

انتهای بیضوی کامل نوع اول =

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \quad (10-79)$$

انتهای بیضوی نوع اول =

چون معادله 10-76 یک معادله فرازنده است برای بدست آوردن θ_b آن را باید با روش آزمون و خطا حل نمود. روش حل به صورت زیر می باشد:

- ۱- برای θ_b مقداری بین 0° و 90° فرض کنید.
- ۲- k و سپس ϕ را از معادلات 10-77 محاسبه کنید.
- ۳- مقادیر $F(k, \phi)$ و $F(k)$ را از جداول توابع بیضوی پیدا کنید.
- ۴- بار P را از معادله 10-76 محاسبه نمایید.

بدین ترتیب بار P نظیر یک مقدار فرض شده θ_b بدست می آید. این عمل را می توان تکرار و نتیجه را به صورت یک منحنی (شکل ۲۰ - ۱۰) رسم نمود. منحنی نظیر تغییر مکان های کوچک نیز در روی شکل ۲۰ - ۱۰ رسم شده است. در این شکل مشاهده می شود که زاویه دوران برای مقادیر کوچک بار P با دقت از معادله $\theta_b = PL^2/2EI$ بدست می آید.

معادله تغییر مکان قائم انتهای آزاد تیر بصورت

$$\frac{\delta_v}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} [E(k) - E(k, \phi)] \quad (10-80)$$

۵۵۱

طریقه اول با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$EIv'' = -M$$

$$M(x) = \frac{q_0 L}{6} x - \frac{1}{2} (x) \left(\frac{x}{L} \right) (q_0) \left(\frac{x}{3} \right) = \frac{q_0 L}{6} x - \frac{q_0}{6L} x^3$$

$$EIv'' = -\frac{q_0 L}{6} x + \frac{q_0}{6L} x^3$$

از این معادله دو بار انتگرال می‌گیریم .

$$EIv' = -\frac{q_0 L}{12} x^2 + \frac{q_0}{24L} x^4 + C_1$$

$$EIv = -\frac{q_0 L}{36} x^3 + \frac{q_0}{120L} x^5 + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v(L) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{q_0 L^4}{36} + \frac{q_0 L^4}{120} + C_1 L = 0 \quad ; \quad C_1 = \frac{7}{360} q_0 L^3$$

$$v = \frac{q_0 x}{360 EIL} (3x^4 - 10L^2 x^2 + 7L^4)$$

طریقه دوم با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q = \frac{q_0}{L} x$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{q_0}{2L} x^2 + C_1 \quad \text{از این معادله چهار بار انتگرال می‌گیریم .}$$

$$EIv'' = \frac{q_0}{6L} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EIv' = \frac{q_0}{24L} x^4 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

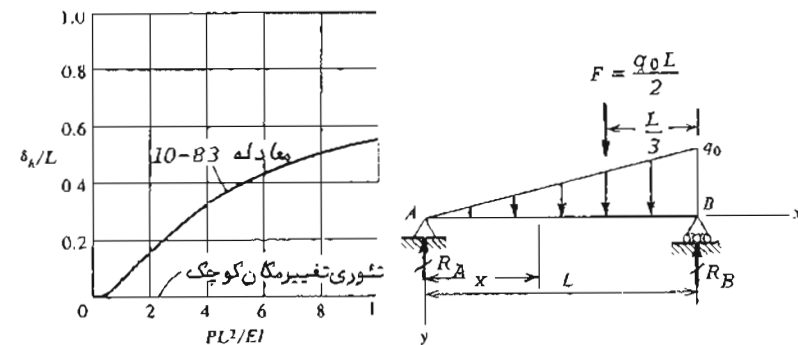
$$EIv = \frac{q_0}{120L} x^5 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

۵۵۰

۹-۱۰ . مسائل حل شده

مسئله ۱-۱۰

معادله منحنی تغییر مکان تیر ساده‌ای را که بار مثلی با شدت حداکثر q_0 را مطابق شکل ۲۳-۱۰ تحمل می‌کند تعیین کنید . از انتگرال گیری معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر استفاده نمایید .



شکل ۲۲-۱۰

شکل ۲۳-۱۰

حل : ابتدا واکنش‌های R_B و R_A را تعیین می‌کنیم . برآیند بار مثلی نیرویی است معادل $F = \frac{q_0 L}{2}$ که به فاصله $L/3$ از تکیه گاه B وارد می‌شود . با نوشتن معادل تعادل لنگری حول نقطه B نتیجه می‌شود :

$$LR_A = \frac{q_0 L}{2} \left(\frac{L}{3} \right) \quad ; \quad R_A = \frac{q_0 L}{6}$$

$$R_B = \frac{q_0 L}{2} - \frac{q_0 L}{6} = \frac{q_0 L}{3} \quad \text{تعادل در امتداد قائم :}$$

۵۵۲

$$M = \begin{cases} \frac{M_0}{L} x & 0 \leq x < a \\ \frac{M_0}{L} x - M_0 = M_0 \left(\frac{x}{L} - 1 \right) & a < x \leq L \end{cases}$$

معادله منحنی تغییر مکان را در قسمت های AC و CB به ترتیب v_1 و v_2 می نامیم.

$$\begin{cases} EIV_1' = -\frac{M_0}{L} x & 0 \leq x < a \\ EIV_2' = \frac{M_0}{L} (L - x) & a < x \leq L \end{cases}$$

از معادلات فوق دو بار انتگرال می گیریم.

$$\begin{cases} EIV_1' = -\frac{M_0}{2L} x^2 + c_1 & 0 \leq x \leq a \\ EIV_2' = \frac{M_0}{L} \left(Lx - \frac{1}{2} x^2 \right) + c_2 & a \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIV_1 = -\frac{M_0}{6L} x^3 + c_1 x + c_3 & 0 \leq x \leq a \\ EIV_2 = \frac{M_0}{L} \left(\frac{1}{2} Lx^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) + c_2 x + c_4 & a \leq x \leq L \end{cases}$$

شرایط حدی :

$$v_1(0) = 0 \quad (1) ; \quad v_2(L) = 0 \quad (2)$$

$$v_1(a) = v_2(a) \quad (3) ; \quad v_1'(a) = v_2'(a) \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow c_3 = 0$$

$$(4) \Rightarrow -\frac{M_0}{2L} a^2 + c_1 = \frac{M_0}{L} \left(La - \frac{1}{2} a^2 \right) + c_2$$

$$c_1 = c_2 + M_0 a \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{M_0}{L} \left(\frac{1}{2} L^3 - \frac{1}{6} L^3 \right) + c_2 L + c_4 = 0$$

$$c_4 = -c_2 L - \frac{1}{3} M_0 L^2 \quad (6)$$

۵۵۲

شرایط حدی :

$$v(0) = 0 \quad (3) ; \quad v(L) = 0 \quad (4)$$

$$v''(0) = 0 \quad (5) ; \quad v''(L) = 0 \quad (6)$$

$$(3) \Rightarrow c_4 = 0$$

$$(5) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(6) \Rightarrow \frac{q_0 L^2}{6} + c_1 L = 0 ; \quad c_1 = -\frac{q_0 L}{6}$$

$$(4) \Rightarrow \frac{q_0 L^4}{120} - \frac{q_0 L^4}{36} + c_3 L = 0 ; \quad c_3 = \frac{7}{360} q_0 L^3$$

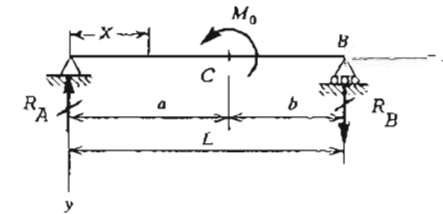
با جایگزینی مقادیر ثابت در معادله منحنی تغییر مکان خواهیم داشت

$$v = \frac{q_0 x}{360 EIL} (3x^4 - 10L^2 x^2 + 7L^4)$$

مسئله ۱۰-۲

معادله منحنی تغییر مکان تیر ساده ای را که تحت اثر یک لنگر متمرکز M_0 می باشد

(شکل ۱۰-۲۴) تعیین کنید.



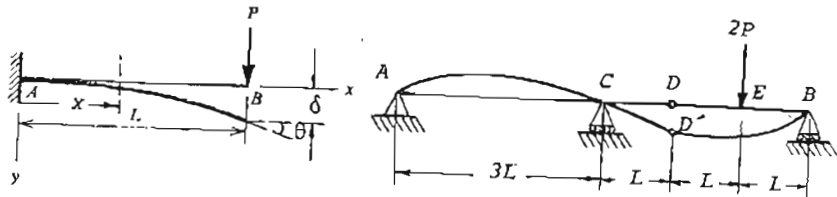
شکل ۱۰-۲۴

حل : از معادله مرتبه دوم استفاده می کنیم . قبلاً باید واکنش ها را تعیین کنیم .

$$R_A = R_B = \frac{M_0}{L}$$

۵۵۵

کنید (شکل ۲۷-۱۰)



شکل ۲۷-۱۰

شکل ۲۸-۱۰

حل : از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای تعیین منحنی تغییر مکان استفاده

می‌کنیم .

$$EIv'' = -M$$

$$M = -P(L-x)$$

$$EIv'' = P(L-x)$$

$$EIv' = P(Lx - \frac{1}{2}x^2) + C_1$$

$$EIv = P(\frac{L}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad (2)$$

شرایط حدی :

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x)$$

$$\delta = v(L) = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta = v'(L) = \frac{P}{EI} (L^2 - \frac{1}{2}L^2) = \frac{PL^2}{2EI}$$

۵۵۲

$$(3) \Rightarrow -\frac{M_0}{6L}a^3 + C_1a = \frac{M_0}{L}(\frac{1}{2}La^2 - \frac{1}{6}a^3) + C_2a + C_4$$

$$C_1a = \frac{1}{2}M_0a^2 + C_2a + C_4 \quad (7)$$

از حل روابط ۵ تا ۷ نتیجه می‌شود

$$C_1 = -\frac{M_0}{6L}(3a^2 + 2L^2 - 6La)$$

$$C_2 = -\frac{M_0}{6L}(3a^2 + 2L^2)$$

$$C_4 = \frac{M_0a^2}{2}$$

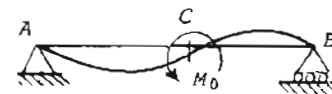
$$EIv_1 = \frac{M_0x}{6L}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EIv_2 = \frac{M_0}{L}[\frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3a^2 + 2L^2}{6}x + \frac{a^2L}{2}] \quad a \leq x \leq L$$

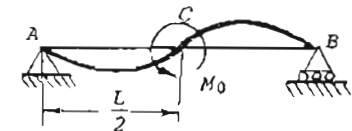
منحنی تغییر مکان نیز در شکل ۲۵-۱۰ رسم شده است . در حالت کلی تغییر مکان نقطه C (زیر لنگر M_0) مخالف صفر می‌باشد . وقتی که لنگر M_0 درست در وسط دهانه تیر واقع می‌شود ($a = \frac{L}{2}$) تغییر مکان خواهد داشت (شکل ۲۶-۱۰) .

مسئله ۱۰-۳

معادله منحنی تغییر مکان یک تیر طره‌ای را که در انتهای آزادش تحت بار P می‌باشد بدست آورید . تغییر مکان δ و زاویه دوران θ انتهای آزاد آن را نیز محاسبه



شکل ۲۵-۱۰



شکل ۲۶-۱۰

۵۵۷

انتخاب می‌کنیم (شکل ۲۹-۱۰) .

$$EIv_2'' = -M = P(L-x)$$

$$EIv_2' = P(Lx - \frac{1}{2}x^2) + c_3$$

$$EIv_2 = P(\frac{L}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) + c_3x + c_4$$

$$v_2(0) = 0 \quad (3) \quad ; \quad v_2'(0) = \theta_C = \frac{PL^2}{EI} \quad (4) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$(3) \Rightarrow c_4 = 0$$

$$(4) \Rightarrow \frac{c_3}{EI} = \frac{PL^2}{EI} : c_3 = PL^2$$

$$v_2 = \frac{Px(6L^2 + 3Lx - x^2)}{6EI}$$

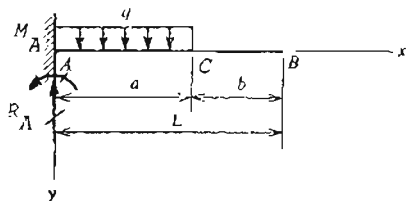
$$\delta_D = DD' = v_2(L) = \frac{PL(6L^2 + 3L^2 - L^2)}{6EI} = \frac{4PL^3}{3EI}$$

مسئله ۵-۱۰

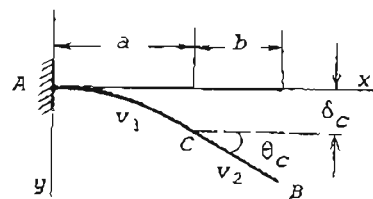
معادلات منحنی تغییر مکان تیر طره‌ای با بار گذاری شکله ۳۰-۱۰ را بدست آورید .

حل : ابتدا واکنش‌های R_A و M_A را حساب می‌کنیم .

$$R_A = qa \quad ; \quad M_A = \frac{1}{2}qa^2$$



(a)



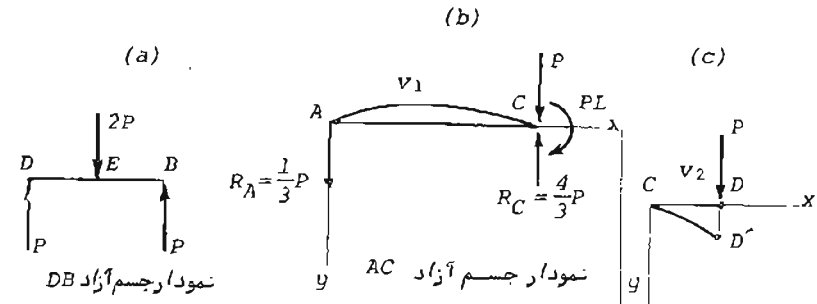
(b)

شکل ۳۰-۱۰

۵۵۶

مسئله ۴-۱۰

تغییر مکان قائم مفصل D را در شکل ۲۸-۱۰ تعیین کنید .



شکل ۲۹-۱۰

حل : تغییر مکان قسمت AC تیر را v_1 می‌نامیم (شکل ۲۹b-۱۰) .

$$EIv_1'' = -M = -(\frac{P}{3}x) = \frac{P}{3}x$$

$$EIv_1' = \frac{P}{6}x^2 + c_1$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x^3 + c_1x + c_2$$

$$v_1(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v_1(3L) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$(1) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{P}{18}(3L)^3 + c_1(3L) = 0 : c_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

$$v_1 = \frac{Px(x^2 - 9L^2)}{18EI}$$

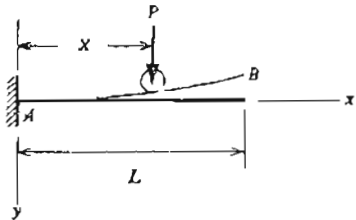
زاویه دوران در نقطه C :

$$\theta_C = v_1'(3L) = \frac{PL^2}{EI}$$

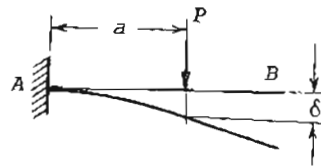
تغییر مکان قسمت CD تیر را v_2 می‌نامیم . مبدأ محورها را مختصات را برای v_2 نقطه C

۵۵۹

بار P در امتداد آن حرکت کند همیشه در یک سطح باقی بماند.



شکل ۱۰-۳۱



شکل ۱۰-۳۲

حل: ابتدا میله مستقیمی را تحت اثر یک بار متمرکز P در فاصله a از آن در نظر می‌گیریم و تغییر مکان δ در زیر بار P را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۰-۳۲).

$$EIv'' = -M = P(a-x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EIv' = P(ax - \frac{1}{2}x^2) + c_1$$

$$EIv = P(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) + c_1x + c_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی:}$$

$$(1) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$EIv = \frac{Px^2(3a-x)}{6}$$

$$\delta = v(x=a) = \frac{Pa^2(3a-a)}{6EI} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

با مقایسه این حالت با حالتی که میله دارای انحنای اولیه می‌باشد نتیجه می‌گیریم برای اینکه بار متحرک P همیشه در یک سطح باقی بماند معادله محور آن باید به صورت زیر باشد:

۵۵۸

از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای تعیین معادله تغییر مکان قسمت AC استفاده می‌کنیم.

$$EIv_1'' = -M = -(-M_A + R_Ax - \frac{1}{2}qx^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EIv_1' = M_A - R_Ax + \frac{1}{2}qx^2 = \frac{1}{2}qa^2 - qax + \frac{1}{2}qx^2 \quad 0 \leq x \leq a$$

از این معادله دو بار انتگرال می‌گیریم.

$$EIv_1 = \frac{1}{2}qa^2x - \frac{1}{2}qax^2 + \frac{1}{6}qx^3 + c_1 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EIv_1 = \frac{1}{4}qa^2x^2 - \frac{1}{6}qax^3 + \frac{1}{24}qx^4 + c_1x + c_2 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v_1(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v_1'(0) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی:}$$

$$(1) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v_1 = \frac{qx^2}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

چون بر قسمت CB از تیر باری وارد نمی‌شود این قسمت تغییر شکل نمی‌دهد و مستقیم باقی می‌ماند بطوریکه CB در نقطه C بر AB مماس باشد. معادله CB با توجه به شکل ۱۰-۳b به صورت زیر می‌باشد:

$$v_2 = \tan\theta_C (x-a) + \delta_C \quad a \leq x \leq L$$

$$\tan\theta_C = v_1'(a) = \frac{1}{EI} (\frac{1}{2}qa^3 - \frac{1}{2}qa^3 + \frac{1}{6}qa^3) = \frac{qa^3}{6EI}$$

$$\delta_C = v_1(a) = \frac{qa^4}{EI} (\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = \frac{qa^4}{8EI}$$

$$v_2 = \frac{qa^3}{24EI} (4x - a) \quad a \leq x \leq L$$

مسئله ۱۰-۶

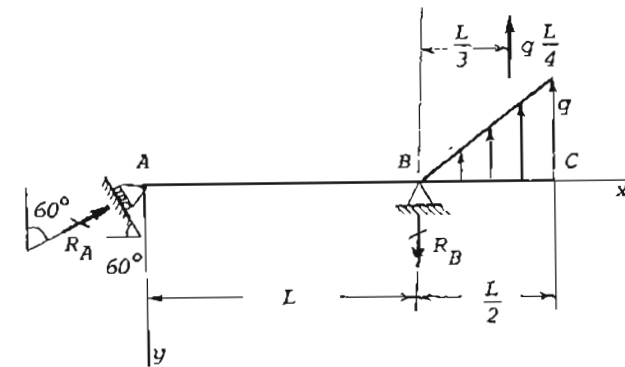
تعیین کنید معادله محور یک میله منحنی را (مطابق شکل ۱۰-۳۱) بطوریکه اگر

۵۶۰

$$y = -\frac{Px^3}{3EI}$$

مسئله ۱۰-۷

منحنی تغییر مکان قسمت AB تیر ABC را که در نقطه A روی تکیه گاه غلطکی مایل قرار دارد و در قسمت BC تحت بارگذاری مثلثی می باشد (شکل ۱۰-۳۳) با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر مکان تیر تعیین کنید . ماکزیمم تغییر مکان در دهانه AB در کجا و مقدارش چقدر است ؟



شکل ۱۰-۳۳

حل : ابتدا واکنش های R_A و R_B را تعیین می کنیم .

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow LR_B = \frac{qL}{4} \left(L + \frac{L}{3} \right) : R_B = \frac{qL}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A \cos 60^\circ - R_B + \frac{qL}{4} = 0 : R_A = \frac{qL}{6}$$

$$EIv'' = -M = -R_A \cos 60^\circ x = -\frac{qL}{12}x \quad 0 \leq x \leq L$$

$$EIv' = -\frac{qL}{24}x^2 + C_1$$

۵۶۱

$$EIv = -\frac{qL}{72}x^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) ; \quad v(L) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{qL^4}{72} + C_1L = 0 : C_1 = \frac{qL^3}{72}$$

$$EIv = \frac{qLx}{72}(L^2 - x^2) \quad (3)$$

برای تعیین محل تغییر مکان ماکزیمم مشتق v را مساوی صفر قرار می دهیم .

$$v' = \frac{qL}{72EI}(L^2 - 3x^2) = 0 : x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

با جایگزینی $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ در معادله ۳ تغییر مکان ماکزیمم بدست می آید .

$$v_{\max} = \frac{qL^4}{108\sqrt{3}EI}$$

طریقه دیگر حل این مسئله استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم می باشد .

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -q = 0$$

از معادله فوق چهار بار انتگرال می گیریم .

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = C_1$$

$$EIv'' = C_1x + C_2$$

$$EIv' = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIv = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

$$v(0) = v(L) = 0 \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$v'(0) = 0$$

$$EIv'(L) = -M_B = -\left(\frac{qL}{4}\right)\left(\frac{L}{3}\right)$$

۵۶۲

با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب داریم :

$$\delta_1 = \frac{PL^3}{3EI} \downarrow ; \quad \delta_2 = \frac{PaL^2}{2EI} \uparrow$$

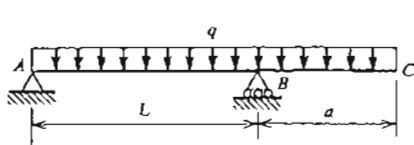
بنابراین

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{PaL^2}{2EI}$$

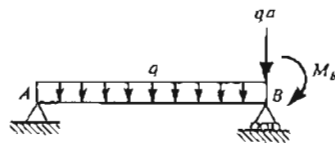
از مساوی صفر قرار دادن δ (تغییر مکان قائم نقطه B) نتیجه می شود : $\frac{a}{L} = \frac{2}{3}$

مسئله ۹-۱۰

تیر ABC شکل ۱۰-۳۸ دارای پیش آمدگی BC می باشد. تغییر مکان δ_C انتهای آزاد پیش آمدگی را تعیین کنید.



شکل ۱۰-۳۸



شکل ۱۰-۳۹

حل : تغییر مکان نقطه C شامل دو قسمت می باشد : تغییر مکان δ_1 ناشی از دوران محور تیر در تکیه گاه B و تغییر مکان δ_2 ناشی از خم شدن قسمت BC که به صورت طرهای عمل کند. برای بدست آوردن δ_1 مشاهده می کنیم که قسمت AB تیر شرایط یک تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت q و لنگر خمشی M_B (برابر با $qa^2/2$) و نیروی قائم qa مؤثر در انتهای راست تیر را دارد (شکل ۱۰-۳۹) . زاویه دوران θ_B با استفاده از پیوست ۳ کتاب برابر است با

$$\theta_B = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_B L}{3EI} = \frac{qL(L^2 - 4a^2)}{24EI}$$

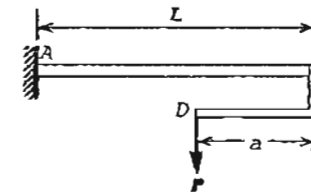
تغییر مکان δ_1 نقطه C ناشی از دوران در B برابر $a\theta_B$ یا

۵۶۲

با استفاده از چهار شرط حدی فوق چهار ثابت انتگرال گیری و از آنجا معادله منحنی تغییر مکان (معادله ۳) بدست می آید :

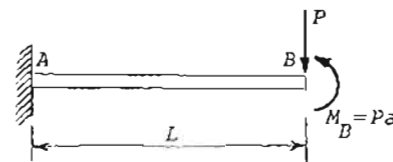
مسئله ۸-۱۰

برای سازه ABCD تحت بارگذاری نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۴ نسبت $\frac{a}{L}$ را طوری بیابید که تغییر مکان قائم نقطه B برابر صفر شود.

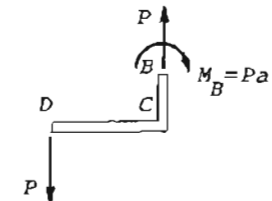


شکل ۱۰-۳۴

حل : در حل این مسئله از اصل اجتماع اثرقوا و جداول پیوست ۳ کتاب استفاده می کنیم.



شکل ۱۰-۳۵



شکل ۱۰-۳۶

تیر AB تحت بارگذاری مزبور را به حالت های ساده تجزیه می کنیم (شکل ۱۰-۳۷) .



شکل ۱۰-۳۷

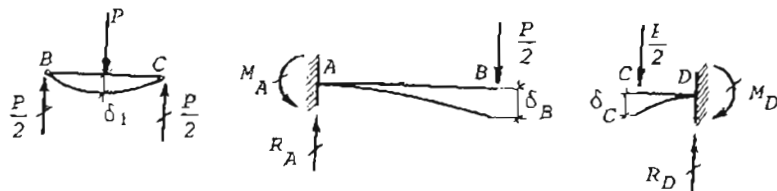
۵۶۵

مسئله ۱۰-۱۰

تیر شکل ۴۱-۱۰ دارای تکیه گاههای گیردار در A و D است و از سه عضو تشکیل شده که در B و C به یکدیگر موصول شده اند. تغییر مکان در زیر بار P را حساب کنید. از اصل اجتماع اثر قوا و جداول پیوست ۳ کتاب استفاده نمایید.

حل: اگر تغییر مکان نقاط B و C را به ترتیب δ_B و δ_C بنامیم و δ_1 تغییر مکان نشان داده شده در روی شکل ۴۱-۱۰ باشد تغییر مکان در زیر بار P برابر خواهد بود با

$$\delta = \delta_1 + \frac{\delta_B + \delta_C}{2}$$



نمودار جسم آزاد CD نمودار جسم آزاد AB نمودار جسم آزاد BC

تغییر مکان های δ_B ، δ_C و δ_1 با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب محاسبه می شوند.

$$\delta_B = \frac{P(3L)^3}{2(3EI)} = \frac{9PL^3}{2EI}$$

$$\delta_C = \frac{PL^3}{6EI}$$

$$\delta_1 = \frac{P(2L)^3}{48EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

بنابراین تغییر مکان در زیر بار P برابر است با

$$\delta = \delta_1 + \frac{\delta_B + \delta_C}{2} = \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{4} + \frac{1}{12} \right) = 2.5 \frac{PL^3}{EI}$$

مسئله ۱۰-۱۱

۵۶۴

$$\delta_1 = \frac{qaL(L^2 - 4a^2)}{24EI}$$

می باشد. این تغییر مکان وقتی مثبت است که به طرف بالا باشد زیرا θ_D در جهت خلاف عقربه های ساعت مثبت فرض شده است.

خمش قسمت پیش آمده در نقطه C تغییر مکان δ_2 را به طرف پایین ایجاد میکند. این تغییر مکان همان تغییر مکان یک تیر طره ای به طول a تحت بار یکساخت q می باشد که با استفاده از پیوست ۳ کتاب مساوی است با

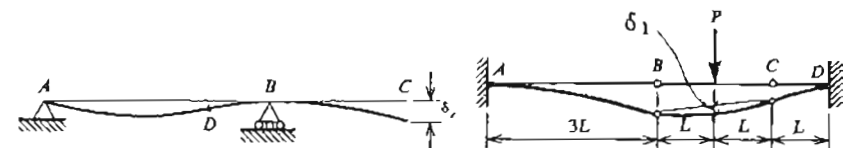
$$\delta_2 = \frac{qa^4}{8EI}$$

تغییر مکان کل نقطه C با فرض اینکه به طرف پایین مثبت باشد برابر است با

$$\delta_C = \delta_2 - \delta_1 = \frac{qa}{24EI} (3a^3 + 4a^2L - L^3)$$

از این معادله مشاهده می شود موقعی که a نسبت به L کوچک است تغییر مکان δ_C منفی می شود و نقطه C به طرف بالا تغییر مکان می یابد.

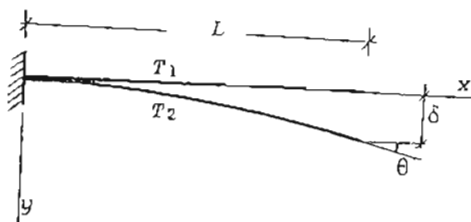
منحنی تغییر مکان تیر ABC برای حالتی که a به اندازه کافی بزرگ بوده (تقریباً $a > 0.43L$) تا تغییر مکان نقطه C به طرف پایین باشد و همچنین به اندازه کافی کوچک بوده تا واکنش تکیه گاه A به طرف بالا باشد ($a < L$) در شکل ۴۰-۱۰ رسم شده است. تحت چنین شرایطی لنگر خمشی از نقطه A تا نقطه ای مانند D مثبت و در نتیجه منحنی تغییر مکان به طرف پایین محدب می باشد. از D تا C لنگر خمشی منفی است و منحنی تغییر مکان به طرف بالا محدب می باشد. نقطه D که انحنای محور تیر در آنجا صفر است (چون لنگر خمشی در آنجا صفر است) به نقطه تغییر انحنای یا نقطه عطف موسوم می باشد. انحنای منحنی تغییر مکان در مجاورت نقطه عطف تغییر علامت می دهد.



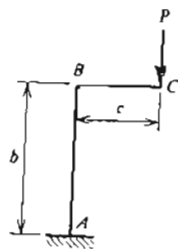
شکل ۴۰-۱۰

شکل ۴۱-۱۰

۵۶۷



شکل ۱۰-۴۲



شکل ۱۰-۴۳

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}x + c_1$$

$$v = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x^2 + c_1x + c_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$v = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x^2$$

$$\delta = v(L) = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h}$$

$$\theta = v'(L) = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L}{h}$$

هرگاه $T_1 > T_2$ باشد، δ و θ مثبت و در غیر این صورت منفی خواهند بود.

مسئله ۱۰-۱۳

۵۶۶

تیر ساده‌ای به طول و ارتفاع مقطع h (شکل ۱۰-۱۲) دارای درجه حرارت T_1 در سطح بالا و درجه حرارت T_2 در سطح پایین آن می‌باشد. معادله منحنی تغییر مکان تیر مزبور را بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر عبارتست از (معادله 10-53)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}$$

با توجه به اینکه T_1 و T_2 ثابت می‌باشند از این رابطه دو بار انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}x + c_1$$

$$v = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x^2 + c_1x + c_2 \quad (1)$$

شرایط حدی: $v(0) = 0 \quad (2) \quad ; \quad v(L) = 0 \quad (3)$

$$(2) \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(3) \Rightarrow -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}L^2 + c_1L = 0 \quad ; \quad c_1 = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{2h}$$

پس از جایگزینی مقادیر ثابت c_1 و c_2 در معادله 1 حاصل می‌شود

$$v = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x(L - x)$$

مسئله ۱۰-۱۲

تیر طره‌ای به طول L و ارتفاع مقطع h دارای درجه حرارت T_1 در سطح بالا و درجه حرارت T_2 در سطح پایین آن می‌باشد (شکل ۱۰-۴۲). تغییر مکان δ و زاویه دوران θ در انتهای آزاد تیر را در اثر این اختلاف درجه حرارت پیدا کنید.

حل: معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر عبارتست از (معادله 10-53)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}$$

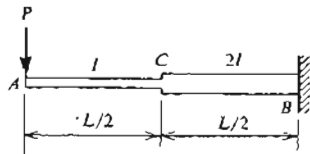
با توجه به اینکه T_1 و T_2 ثابت می‌باشند از رابطه فوق دو بار انتگرال می‌گیریم.

۵۶۹

$$\delta_v = \frac{Pc^2(c+3b)}{3EI}$$

مسئله ۱۴-۱۰

تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای غیر مشوری شکل ۱۰-۴۵ را بدست آورید.
گشتاور لختی قسمت AC برابر I و گشتاور لختی قسمت CB برابر 2I است.



شکل ۱۰-۴۵



شکل ۱۰-۴۶

حل: اگر فرض کنیم نقطه میانی C تیر بطور صلب نگهداشته شده به طوریکه تغییر مکان ندهد و دوران نکند، در این صورت تغییر مکان δ_1 انتهای آزاد تیر همان تغییر مکان انتهای آزاد یک تیر طره‌ای به طول L/2 و گشتاور لختی I خواهد بود.

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{24EI}$$

۱. قسمت CB تیر نیز مانند یک تیر طره‌ای عمل می‌کند (شکل ۱۰-۴۶) و در تغییر مکان نقطه A سهمی دارد. تغییر مکان δ_c و زاویه دوران θ_c انتهای آزاد این تیر طره‌ای عبارتند از

$$\delta_c = \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2EI)} = \frac{5PL^3}{96EI}$$

$$\theta_c = \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2EI} = \frac{3PL^2}{16EI}$$

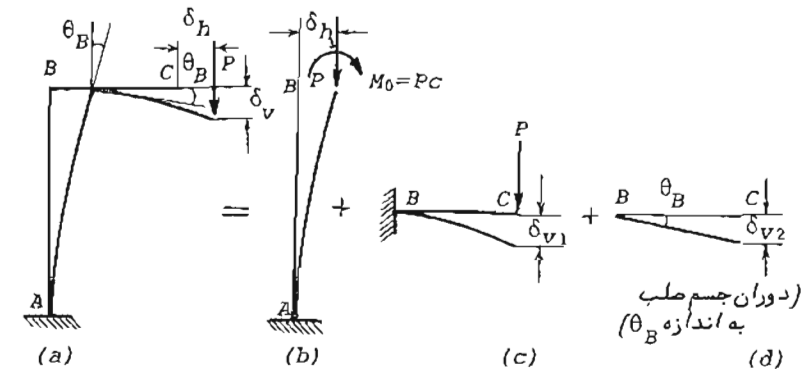
تغییر مکان δ_c و زاویه دوران θ_c بر تغییر مکان انتهای آزاد تیر به اندازه δ_2 می‌افزاید.

$$\delta_2 = \delta_c + \theta_c \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7PL^3}{48EI}$$

۵۶۸

مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان انتهای C قاب ABC شکل ۱۰-۴۳ را با فرض اینکه صلبیت خمشی (EI) آن در سراسر طول ABC یکسان باشد تعیین کنید. از اثر تغییر شکل‌های محوری صرف نظر کنید و فقط تغییر شکل ناشی از خمش را در نظر بگیرید.

حل: قاب مزبور را به حالت‌های ساده‌تر تجزیه و از اصل اجتماع اثر قوا استفاده می‌کنیم (شکل ۱۰-۴۴). با توجه به شکل ۱۰-۴۴ و استفاده از جداول



شکل ۱۰-۴۴

پیوست ۳ کتاب δ_h مؤلفه افقی تغییر مکان انتهای C و δ_v مؤلفه قائم تغییر مکان انتهای C به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\delta_h = \delta_{h1} = \frac{Pcb^2}{2EI} \quad \text{از شکل b ۱۰-۴۴}$$

$$\delta_{v1} = \frac{Pc^3}{3EI} \quad \text{از شکل c ۱۰-۴۴}$$

$$\theta_B = \frac{Pcb}{EI} \quad \text{از شکل b ۱۰-۴۴}$$

$$\delta_{v2} = c\theta_B = \frac{Pc^2b}{EI} \quad \text{از شکل d ۱۰-۴۴}$$

۵۷۱

از شرط حدی $dv/dx = 0$ در $x=L$ ثابت انتگرال گیری C_1 محاسبه می شود:
 $C_1 = 12PL^2/Ebh^3$. پس از جایگزینی این مقدار C_1 در معادله فوق و انتگرال گیری مجدد خواهیم داشت:

$$v = -\frac{12PL}{2Eb h^3}x^2 + \frac{12PL^2}{Eb h^3}x + C_2$$

از شرط حدی $v = 0$ در $x=L$ نتیجه می شود: $C_2 = -6PL^3/Ebh^3$. بنابراین معادله منحنی تغییر مکان تیر به صورت زیر نوشته می شود:

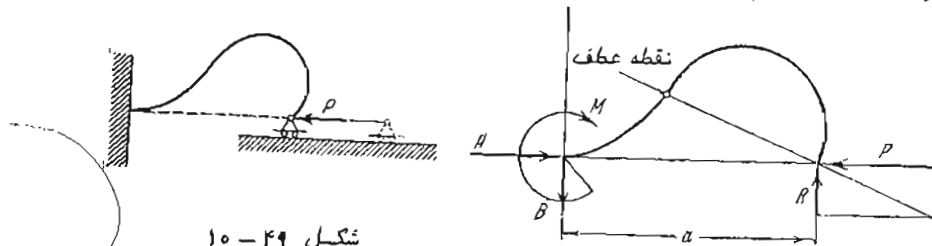
$$v = -\frac{6PL}{Eb h^3}x^2 + \frac{12PL^2}{Eb h^3}x - \frac{6PL^3}{Eb h^3}$$

تغییر مکان انتهای آزاد تیر برابر است با

$$\delta = v(x=0) = -\frac{6PL^3}{Eb h^3}$$

مسئله ۱۵-۱۶

شکل منحنی ارتجاعی یک میله باریک که به شدت خم شده است (شکل ۱۵-۴۹) و همچنین بزرگی نیروی P با تجربه تعیین شده اند. ساده ترین راه برای پیدا کردن واکنش های تیر کدام است؟



شکل ۱۵-۴۹

شکل ۱۵-۵۰

حل: برآیند نیروی P و واکنش تکیه گاه راست باید از نقطه عطف منحنی ارتجاعی عبور کند (شکل ۱۵-۵۰). با معلوم بودن P و واکنش R از شرط مزبور سه دست می آید. واکنش های دیگر از معادلات تعادل بدست می آیند.

$$A = P ; \quad B = R ; \quad M = Ra$$

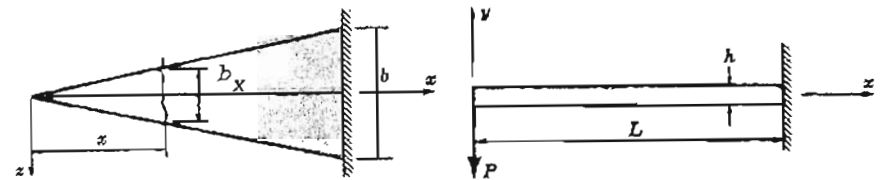
۵۷۰

بنابراین تغییر مکان کل انتهای آزاد A برابر است با

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{3PL^3}{16EI}$$

مسئله ۱۵-۱۵

یک تیر طره ای موقعی که از بالا به آن نگاه می شود مطابق شکل ۱۵-۴۷ به شکل مثلث می باشد. ضخامت تیر مطابق تصویر قائم آن که در شکل ۱۵-۴۸ رسم شده است ثابت و برابر h می باشد. تغییر مکان انتهای آزاد تیر را در اثر بار متمرکز P در انتهای آن محاسبه کنید.



شکل ۱۵-۴۷

شکل ۱۵-۴۸

حل: از مثلث های متشابه داریم $b_x = bx/L$. بنابراین گشتاور لختی مقطع عرضی در فاصله x از انتهای آزاد تیر برابر است با

$$I = \frac{1}{12}b_x h^3 = \frac{bx h^3}{12L}$$

با جایگزینی این مقدار گشتاور لختی در معادله 10-5 خواهیم داشت

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{12PL}{Eb h^3}$$

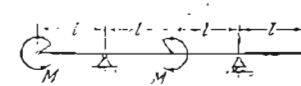
توجه کنید چون جهت مثبت محور y به طرف بالا فرض شده است علامت منفی در معادله 10-5 به مثبت تبدیل شده است. معادله فوق پس از انتگرال گیری به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{12PL}{Eb h^3}x + C_1$$

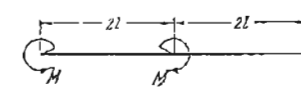
۵۷۲

مسائل ۱۷-۱۰ تا ۲۲-۱۰

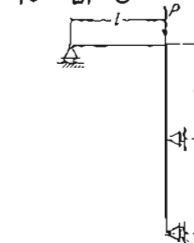
منحنی‌های ارتجاعی سازه‌های شکل‌های ۱۰-۵۱ تا ۱۰-۵۶ را به طور تقریبی رسم کنید.



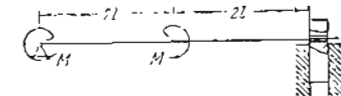
شکل ۱۰-۵۱



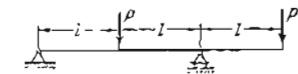
شکل ۱۰-۵۳



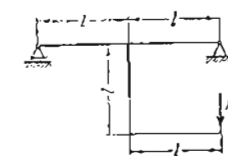
شکل ۱۰-۵۵



شکل ۱۰-۵۲



شکل ۱۰-۵۴



شکل ۱۰-۵۶

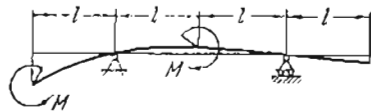
حل: منحنی‌های ارتجاعی سازه‌های مزبور به ترتیب در شکل‌های ۱۰-۵۷ تا ۱۰-۶۲ رسم شده‌اند.

۱۰-۱۰ مسائل حل نشده

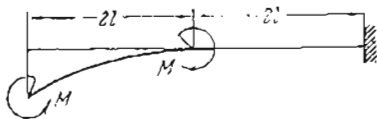
مسائل ۱-۱۰ تا ۱۵-۱۰ درستی جواب‌های داده شده در پیوست ۳ کتاب را با حل نمودن معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر تحقیق کنید

۵۷۳

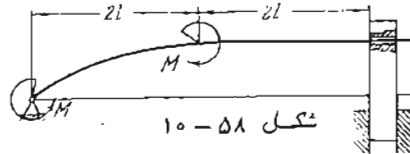
مسئله ۱۶-۱۰-۳ معادله منحنی تغییر مکان تیر شکل ۱۶-۱۰-۳ را به دست آورید.



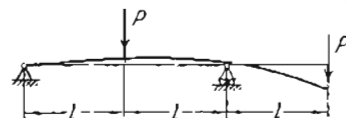
شکل ۱۰-۵۷



شکل ۱۰-۵۹



شکل ۱۰-۵۸

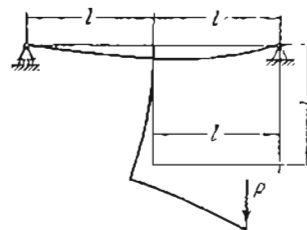


شکل ۱۰-۶۰

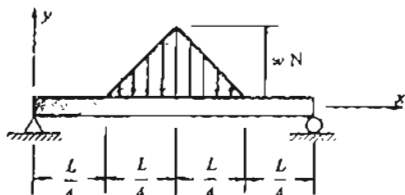
مسئله ۱۷-۱۰-۳ شکل ۱۷-۱۰-۳ یک تیر طره‌ای به شکل مخروط را نشان می‌دهد که طول آن نسبت به قطر قاعده D بزرگ می‌باشد. اگر تنها نیروی وارد بر



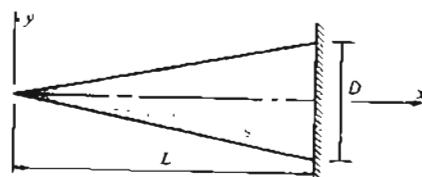
شکل ۱۰-۶۱



شکل ۱۰-۶۲



شکل ۱۰-۱۶

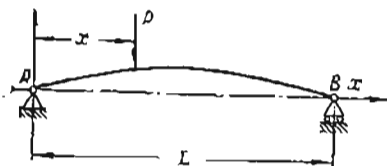


شکل ۱۰-۱۷

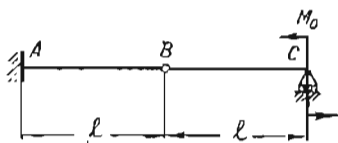
۵۷۵

مقطع D را در تیرهای شکل‌های ۱۰-۳-۲۵ تا ۱۰-۳-۲۵ بدست آورید. صلبیت خمشی هر یک از تیرها EI می‌باشد.

مسئله ۱۰-۳-۲۶ معادله تیر ساده منحنی AB را تعیین کنید به طوریکه وقتی بار P در طول تیر حرکت می‌کند نقطه اثر آن همواره در تراز تکیه گاههای A و B باقی بماند (شکل ۱۰-۳-۲۶).



شکل ۱۰-۳-۲۶



شکل ۱۰-۴-۱

مسئله ۱۰-۴-۱ تغییر مکان نقطه B تیر شکل ۱۰-۴-۱ را پیدا کنید.

مسائل ۱۰-۴-۲ تا ۱۰-۴-۲۵ تغییر مکان δ_C مقطع C و زاویه دوران θ_D مقطع D را در تیرهای شکل‌های ۱۰-۴-۲ تا ۱۰-۴-۲۵ بدست آورید. صلبیت خمشی تیرها را EI فرض کنید.

مسائل ۱۰-۴-۲۶ تا ۱۰-۴-۲۹ تغییر مکان δ_C مقطع C و زاویه دوران θ_{D1} و θ_{D2} مقاطع چپ و راست مفصل D را در تیرهای شکل‌های ۱۰-۴-۲۶ تا ۱۰-۴-۲۹ محاسبه نمایید. صلبیت خمشی تیرها را EI فرض کنید.

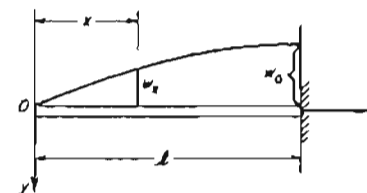
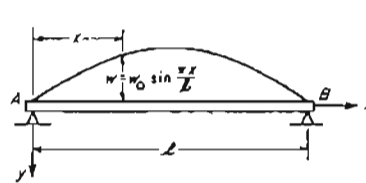
مسائل ۱۰-۴-۳۰ تا ۱۰-۴-۳۷ تغییر مکان ماکزیمم δ_{max} و زاویه دوران ماکزیمم θ_{max} (بطور مطلق) را برای تیرهای شکل‌های ۱۰-۴-۳۰ تا ۱۰-۴-۳۷ تعیین کنید. منحنی ارتجاعی تیرها را نیز به طور تقریبی رسم نمایید. صلبیت خمشی تیرها EI می‌باشد.

مسائل ۱۰-۴-۳۸ تا ۱۰-۴-۴۷ تغییر مکان‌های δ_1 و δ_2 در مقاطع C_1 ، C_2 و C تیرهای شکل‌های ۱۰-۴-۳۸ تا ۱۰-۴-۴۷ را بدست آورید. صلبیت خمشی هر یک از تیرها EI می‌باشد.

۵۷۴

تیر وزن خودش با وزن واحد حجم γ باشد، معادله منحنی تغییر مکان را پیدا کنید.

مسئله ۱۰-۳-۱۸ تیر ساده‌ای بار گسترده‌ای با شدت $w = w_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ را مطابق شکل ۱۰-۳-۱۸ حمل می‌کند (w_0 شدت بار در وسط دهانه می‌باشد). تغییر مکان ماکزیمم δ در وسط دهانه تیر را حساب کنید.

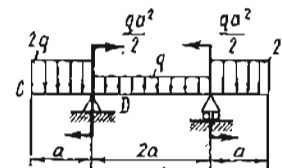


شکل ۱۰-۳-۱۸

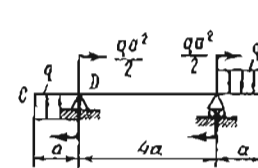
شکل ۱۰-۳-۱۹

مسئله ۱۰-۳-۱۹ تیر طره‌ای شکل ۱۰-۳-۱۹ بار سینوسی $w_x = w_0 \sin \frac{\pi x}{2L}$ را حمل می‌کند (w_0 شدت بار در انتهای گیردار تیر است). تغییر مکان آزاد تیر را حساب کنید.

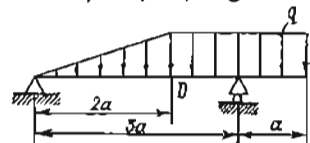
مسائل ۱۰-۳-۲۰ تا ۱۰-۳-۲۵ تغییر مکان δ_C مقطع C و زاویه دوران θ_D



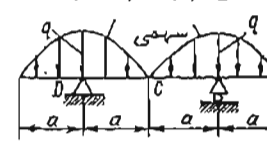
شکل ۱۰-۳-۳۰



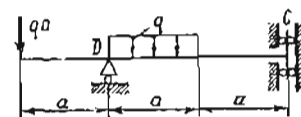
شکل ۱۰-۳-۳۱



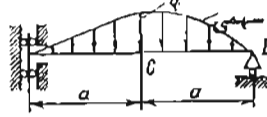
شکل ۱۰-۳-۳۲



شکل ۱۰-۳-۳۳

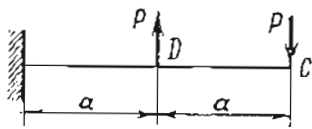


شکل ۱۰-۳-۳۴

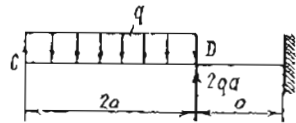


شکل ۱۰-۳-۳۵

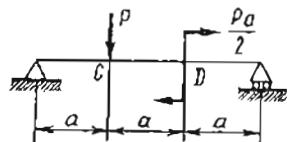
۵۷۷



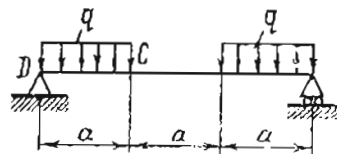
شکل ۱۰-۴-۱۴



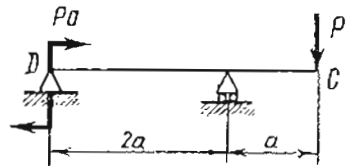
شکل ۱۰-۴-۱۶



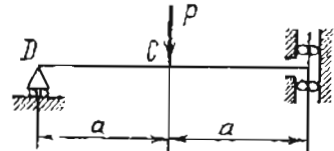
شکل ۱۰-۴-۱۸



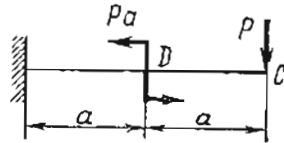
شکل ۱۰-۴-۲۰



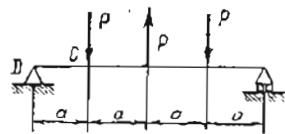
شکل ۱۰-۴-۲۲



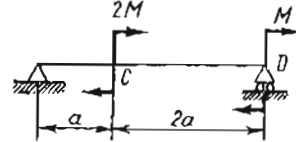
شکل ۱۰-۴-۲۴



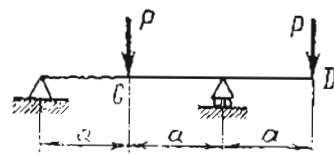
شکل ۱۰-۴-۱۵



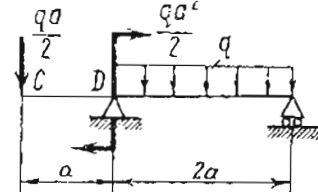
شکل ۱۰-۴-۱۷



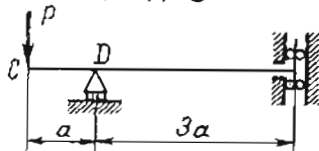
شکل ۱۰-۴-۱۹



شکل ۱۰-۴-۲۱

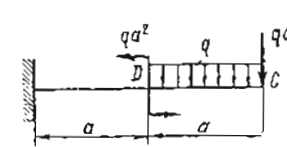


شکل ۱۰-۴-۲۳

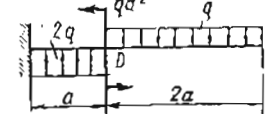


شکل ۱۰-۴-۲۵

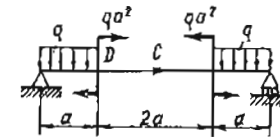
۵۷۶



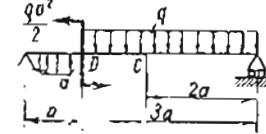
شکل ۱۰-۴-۲



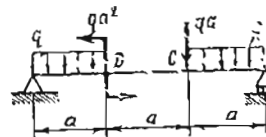
شکل ۱۰-۴-۴



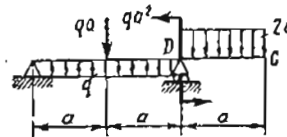
شکل ۱۰-۴-۶



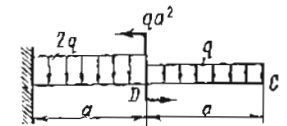
شکل ۱۰-۴-۸



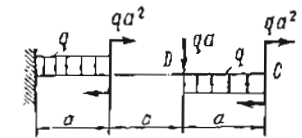
شکل ۱۰-۴-۱۰



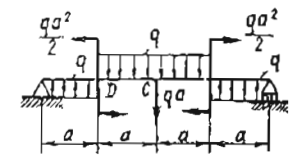
شکل ۱۰-۴-۱۲



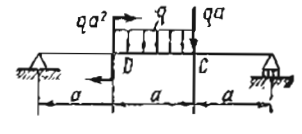
شکل ۱۰-۴-۳



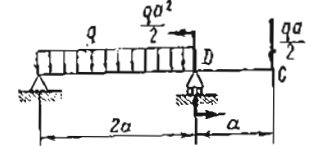
شکل ۱۰-۴-۵



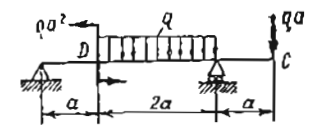
شکل ۱۰-۴-۷



شکل ۱۰-۴-۹

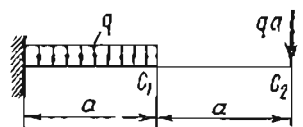


شکل ۱۰-۴-۱۱

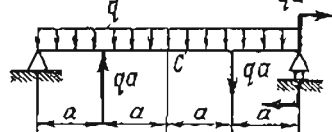


شکل ۱۰-۴-۱۳

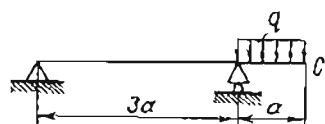
۵۷۹



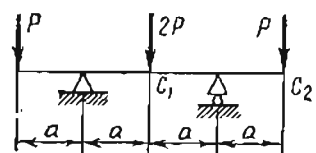
شکل ۱۰-۴-۳۸



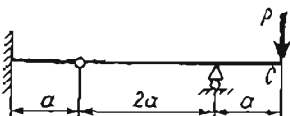
شکل ۱۰-۴-۴۰



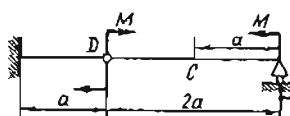
شکل ۱۰-۴-۴۲



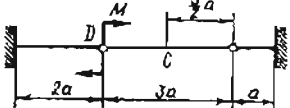
شکل ۱۰-۴-۴۴



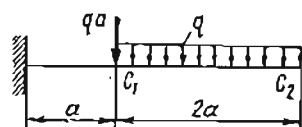
شکل ۱۰-۴-۴۶



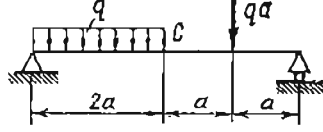
شکل ۱۰-۴-۴۸



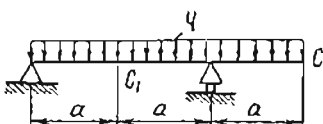
شکل ۱۰-۴-۵۰



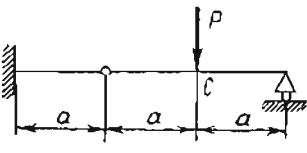
شکل ۱۰-۴-۳۹



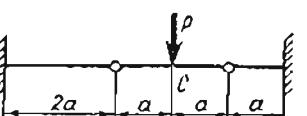
شکل ۱۰-۴-۴۱



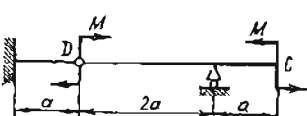
شکل ۱۰-۴-۴۳



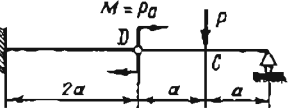
شکل ۱۰-۴-۴۵



شکل ۱۰-۴-۴۷

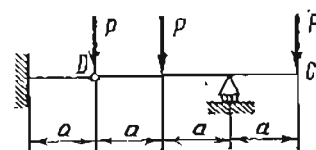


شکل ۱۰-۴-۴۹

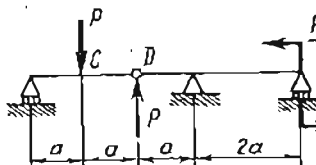


شکل ۱۰-۴-۵۱

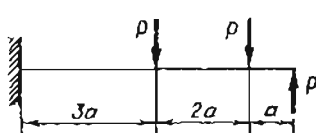
۵۷۸



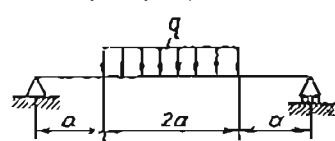
شکل ۱۰-۴-۲۶



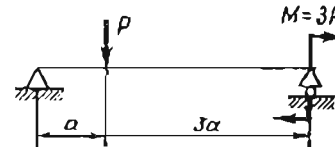
شکل ۱۰-۴-۲۸



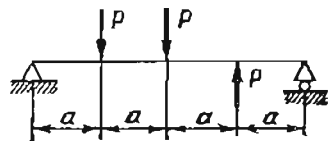
شکل ۱۰-۴-۳۰



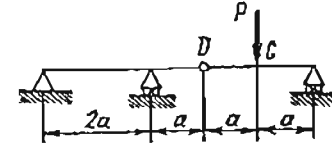
شکل ۱۰-۴-۳۲



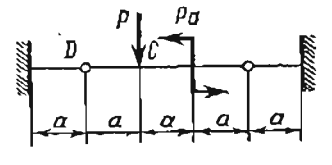
شکل ۱۰-۴-۳۴



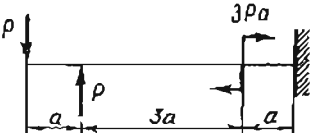
شکل ۱۰-۴-۳۶



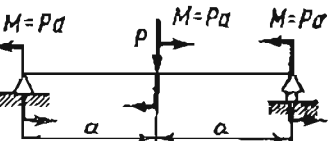
شکل ۱۰-۴-۲۷



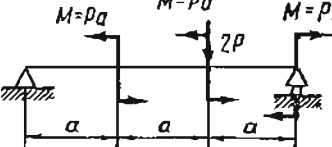
شکل ۱۰-۴-۲۹



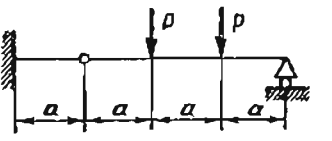
شکل ۱۰-۴-۳۱



شکل ۱۰-۴-۳۳



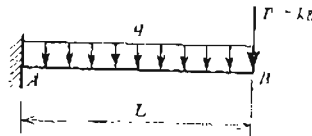
شکل ۱۰-۴-۳۵



شکل ۱۰-۴-۳۷

۵۸۱

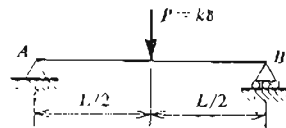
دارد پیدا کند. تحت چه شرایطی تیر پایدار می باشد ؟



شکل ۱-۵-۱۰

مسئله ۱-۵-۲ تغییر مکان کل δ در وسط تیر ساده AB که بار متمرکز $P = k\delta$ را در وسط دهانه اش حمل می کند دست آورید. فرض کنید در وسط تیر تغییر مکان اولیه δ_0 وجود داشته باشد. تیر تحت چه شرایطی پایدار می باشد ؟ (شکل ۲-۵-۱۰)

مسئله ۱-۶-۱ تیر ساده ای به طول L و ارتفاع مقطع h دارای درجه حرارت T_1 در سطح بالا و درجه حرارت T_2 در سطح پائین آن می باشد. درجه حرارت های T_1 و T_2 نواح x هستند بطوریکه $T_2 - T_1 = T_0 x$ (T_0 مقدار ثابتی است) . حداکثر تغییر مکان تیر را حساب کنید.

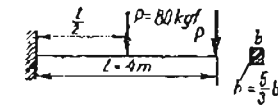
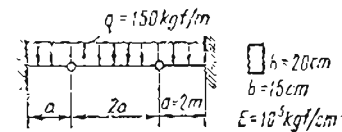


شکل ۲-۵-۱۰

۵۸۰

مسائل ۱۰-۴-۴۸ تا ۱۰-۴-۵۱ نسبت تغییر مکان های مقاطع C تیرهای شکل های ۱۰-۴-۴۸ تا ۱۰-۴-۵۱ را بسته به اینکه نقطه اثر لکر M سمت چپ مفصل و یا سمت راست آن باشد حساب کنید.

مسئله ۱۰-۴-۵۲ تغییر مکان ماکزیمم (بطور مطلق) تیر شکل ۱۰-۴-۵۲ را به دست آورید.

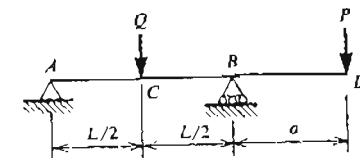
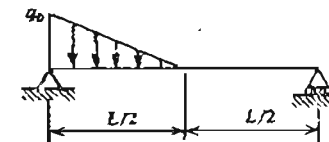


شکل ۵۲-۴-۱۰

شکل ۵۳-۴-۱۰

مسئله ۱۰-۴-۵۳ ابعاد تیر طره ای مستطیلی شکل ۱۰-۴-۵۳ را طوری تعیین کنید که تنش عمودی در تیر از تنش مجاز 120 Kg/cm^2 تجاوز نکند و تغییر مکان ماکزیمم تیر از $\frac{1}{200}$ طول تیر بیشتر نشود. ضریب ارتجاعی ماده تیر 10^5 Kg/cm^2 می باشد.

مسئله ۱۰-۴-۵۴ تغییر مکان δ در وسط تیر شکل ۱۰-۴-۵۴ را محاسبه کنید.



شکل ۵۴-۴-۱۰

شکل ۵۵-۴-۱۰

مسئله ۱۰-۴-۵۵ در تیر شکل ۱۰-۴-۵۵ نسبت P/Q چقدر باید باشد تا نقطه D تغییر مکانی نداشته باشد ؟

مسئله ۱۰-۵-۱ تغییر مکان δ_B انتهای آزاد B تیر طره ای شکل ۱-۵-۱۰ را که تحت اثر بار یکنواخت ثابت q و بار متمرکز $P = k\delta_B$ (ثابت تناسب است) قرار

Δ۸۳

$-\frac{85}{72}$	;	$-\frac{65}{72}$	:	$10-4-9$	-2	;	$-\frac{17}{6}$	:	$10-4-8$		
$\frac{1}{6}$	;	$\frac{1}{3}$	:	$10-4-11$	$-\frac{5}{8}$	;	$-\frac{7}{36}$	:	$10-4-10$		
$-\frac{7}{9}$	;	$\frac{2}{9}$	:	$10-4-13$	$-\frac{1}{3}$	;	$-\frac{1}{12}$	:	$10-4-12$		
$-\frac{7}{6}$	;	$-\frac{1}{2}$	:	$10-4-15$	$-\frac{11}{6}$	;	-1	:	$10-4-14$		
$-\frac{5}{12}$	;	$-\frac{1}{2}$	:	$10-4-17$	-7	;	2	:	$10-4-16$		
0	;	$-\frac{1}{3}$	:	$10-4-19$	$-\frac{11}{36}$	;	$\frac{1}{9}$	:	$10-4-18$		
$\frac{1}{12}$	;	$-\frac{11}{12}$	:	$10-4-21$	$-\frac{11}{24}$	;	$-\frac{7}{12}$	:	$10-4-20$		
$\frac{1}{6}$	;	$-\frac{1}{3}$	:	$10-4-23$	$-\frac{2}{3}$	;	$\frac{1}{3}$	:	$10-4-22$		
$-\frac{10}{3}$	;	3	:	$10-4-25$	$-\frac{4}{3}$	;	$-\frac{3}{2}$	:	$10-4-24$		
$-\frac{5}{12}$	;	$-\frac{7}{12}$	;	0	$10-4-27$	$-\frac{7}{12}$	;	$-\frac{1}{2}$	;	$\frac{1}{4}$	$10-4-26$
$-\frac{17}{18}$	;	$-\frac{1}{2}$	;	$-\frac{7}{9}$	$10-4-29$	$\frac{1}{6}$	;	$\frac{7}{12}$	;	$-\frac{3}{4}$	$10-4-28$
3	;	2	:	$10-4-31$	$\frac{45}{8}$	;	2	:	$10-4-30$		
$\frac{2}{9}$	;	$\frac{2}{3}$	:	$10-4-33$	$\frac{19}{8}$	;	$\frac{11}{6}$	:	$10-4-32$		
$\frac{65}{162}$	;	$\frac{5}{9}$	:	$10-4-35$	$\frac{9}{4}$	;	$\frac{27}{8}$	:	$10-4-34$		
$\frac{733}{648}$	;	$\frac{10}{9}$	:	$10-4-37$	$\frac{131}{90}$	;	$\frac{5}{4}$	:	$10-4-36$		

Δ۸۲

۱۰-۱۱ جواب‌های مسائل حل نشده

$$EIv = \frac{23wL^3x}{1536} - \frac{wLx^3}{48} \quad (0 < x < \frac{L}{4}) \quad : 10-2-16$$

$$EIv = \frac{w}{30L} (x - \frac{L}{4})^5 - \frac{wLx^3}{48} + \frac{23wL^3x}{1536} \quad (\frac{L}{4} < x < \frac{L}{2})$$

$$v = -\frac{2\gamma L^2}{45ED^2} (x^3 + 2L^3 - 3L^2x) \quad : 10-2-17$$

$$\delta = \frac{2w_0L^4}{\pi EI} (\frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^3}) : 10-2-19 \quad \delta = \frac{w_0L^4}{\pi^4 EI} : 10-2-18$$

$$\frac{19qa^4}{24EI} ; -\frac{2qa^3}{3EI} : 10-2-21 \quad -\frac{5qa^4}{12EI} ; \frac{qa^3}{6EI} : 10-2-20$$

$$\frac{qa^4}{72EI} ; \frac{qa^3}{15EI} : 10-2-23 \quad \frac{19qa^4}{90EI} ; \frac{101qa^3}{360EI} : 10-2-22$$

$$-\frac{62qa^4}{45EI} ; \frac{187qa^3}{120EI} : 10-2-25 \quad \frac{25qa^4}{24EI} ; \frac{7qa^3}{6EI} : 10-2-24$$

$$v = \frac{Px^2}{3EIL} (x^2 - 2Lx + L^2) \quad : 10-2-26$$

$$\delta_B = -\frac{M_0L^2}{3EI} \quad : 10-4-1$$

در جواب‌های مسائل ۲-۱۰-۴ تا ۵۱-۱۰-۴ از نوشتن کمیت‌های $\frac{Ma^2}{Pa^2EI}$ یا $\frac{Pa^3}{EI}$ برای تغییر مکان‌ها و از نوشتن کمیت‌های $\frac{Ma}{EI}$ یا $\frac{qa^4}{EI}$ برای زوایای دوران خودداری شده است.

$$-\frac{19}{24} ; -\frac{1}{3} : 10-4-3 \quad -\frac{23}{8} ; -\frac{3}{2} : 10-4-2$$

$$-\frac{16}{3} ; -\frac{5}{3} : 10-4-5 \quad -\frac{25}{4} ; -\frac{5}{3} : 10-4-4$$

$$-2 ; -\frac{13}{12} : 10-4-7 \quad -\frac{59}{24} ; -\frac{3}{2} : 10-4-6$$

مقاومت مصالح	حجت الله عادل
--------------	---------------

فصل یازدهم

نیبرهای هیپر استاتیک

۱۱-۱ مقدمه

در این فصل ما تحلیل تیرهایی را مطالعه خواهیم نمود که در آنها تعداد واکنش‌های مجهول از تعداد معادلات تعادل موجود بیشتر می‌باشد. این تیرها بدتیرهای هیپر استاتیک موسوم می‌باشند و در تحلیل آنها به بررسی تغییر شکل‌ها نیاز می‌باشد. تیرهایی که در آنها بتوان واکنش‌ها و نیروهای داخلی را فقط به کمک معادلات تعادل بدست آورد تیرهای ابرواستاتیک خوانده می‌شوند. واکنش‌ها و نیروهای داخلی تیرهای هیپر استاتیک را بدون بررسی تغییر شکل‌ها نمی‌توان محاسبه نمود. برای حل تیرهای هیپر استاتیک علاوه بر معادلات تعادل از معادلات سازگاری تغییر مکان‌ها (مانند آنچه که در فصل دوم بحث شد) نیز باید استفاده نمود.

چند نوع تیر هیپر استاتیک در شکل‌های ۱۱-۱ تا ۱۱-۶ مشاهده می‌شوند. تیر شکل ۱۱-۱ دارای یک گاه گیردار A و یک گاه مفصلی غلطکی با به اختصار نکیه گاه غلطکی B می‌باشد. واکنش‌های این تیر عبارتند از نیروی افقی H_A ، نیروی قائم R_A و لنگر خمشی M_A در A و نیروی قائم R_B در B. چون فقط سه معادله تعادل مستقل برای تیر وجود دارد نمی‌توان هر چهار واکنش مجهول را بدست آورد. تعداد واکنش‌های اضافه بر تعداد معادلات تعادل موجود درجه نامعینی استاتیک (یا به اختصار درجه نامعینی) تیر نامیده می‌شود. بدین ترتیب تیر شکل ۱۱-۱ یک درجه نامعین است. واکنش‌های اضافه بر آنچه که برای نگهداشتن تیر به صورت ابرواستاتیک لازم است به

۵۸۴					
-2	;	-11	:	۱۰-۴-۳۹	- $\frac{25}{24}$; - $\frac{71}{24}$: ۱۰-۴-۳۸
- $\frac{31}{12}$			:	۱۰-۴-۴۱	- $\frac{7}{3}$: ۱۰-۴-۴۰
- $\frac{1}{12}$; - $\frac{1}{8}$			:	۱۰-۴-۴۳	- $\frac{5}{8}$: ۱۰-۴-۴۲
- $\frac{1}{4}$			:	۱۰-۴-۴۵	$\frac{1}{6}$; - $\frac{5}{6}$: ۱۰-۴-۴۴
- $\frac{11}{12}$			:	۱۰-۴-۴۷	- $\frac{13}{12}$: ۱۰-۴-۴۶
$\frac{19}{18}$			:	۱۰-۴-۴۹	$\frac{4}{3}$: ۱۰-۴-۴۸
4.4			:	۱۰-۴-۵۱	$\frac{144}{7}$: ۱۰-۴-۵۰
12 cm × 20 cm			:	۱۰-۴-۵۳	1.6 cm : ۱۰-۴-۵۲
$\frac{P}{Q} = \frac{3L^2}{16a(L+a)}$			:	۱۰-۴-۵۵	$\frac{3q_0L^4}{1280EI}$: ۱۰-۴-۵۴
$\beta < 1$			:	$\beta = \frac{kL^3}{3EI}$	$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \left(\frac{1}{1-\beta} \right)$ که در آن می‌باشد. : ۱۰-۵-۱
$\gamma < 1$			:	$\gamma = \frac{kL^3}{48EI}$	$\delta = \frac{\delta_0}{1-\gamma}$ که در آن می‌باشد. : ۱۰-۵-۲
$v_{max} = \frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$			:		: ۱۰-۶-۱

حجت الله عادل

مقاومت مصالح

فصل یازدهم

تیرهای هیبر استاتیک

۱-۱ مقدمه

در این فصل ما تحلیل نیروهای را مطالعه خواهیم نمود که در آنها تعداد واکنش‌های مجهول از تعداد معادلات تعادل موجود بیشتر می‌باشد. این تیرها به تیرهای هیبر استاتیک موسوم می‌باشند و در تحلیل آنها به بررسی تغییر شکل‌ها نیاز می‌باشد. تیرهایی که در آنها بتوان واکنش‌ها و نیروهای داخلی را فقط به کمک معادلات تعادل بدست آورد تیرهای ایزواستاتیک خوانده می‌شوند. واکنش‌ها و نیروهای داخلی تیرهای هیبر استاتیک را بدون بررسی تغییر شکل‌ها نمی‌توان محاسبه نمود. برای حل تیرهای هیبر استاتیک علاوه بر معادلات تعادل از معادلات سازگاری تغییر مکان‌ها (مانند آنچه که در فصل دوم بحث شد) نیز باید استفاده نمود.

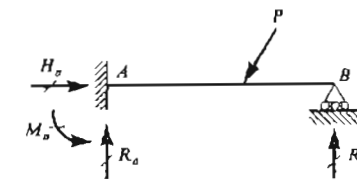
چند نوع تیر هیبر استاتیک در شکل‌های ۱-۱ تا ۱-۶ مشاهده می‌شوند. سیر شکل ۱-۱ دارای تکیه گاه گیردار A و تکیه گاه مفصلی غلطکی یا به اختصار تکیه گاه غلطکی B می‌باشد. واکنش‌های این تیر عبارتند از نیروی افقی H_A ، نیروی قائم R_A و لنگر خمشی M_A در A و نیروی قائم R_B در B. چون فقط سه معادله تعادل مستقل برای سیر وجود دارد نمی‌توان هر چهار واکنش مجهول را بدست آورد. تعداد واکنش‌های اضافه بر تعداد معادلات تعادل موجود درجه نامعینی استاتیکی (یا به اختصار درجه نامعینی) تیر نامیده می‌شود. بدین ترتیب سیر شکل ۱-۱ یک درجه نامعین است. واکنش‌های اضافه بر آنچه که برای نگهداشتن تیر به صورت ایزواستاتیک لازم است به

۵۸۴				
-2	;	-11	:	۱۰-۴-۳۹
			- $\frac{23}{24}$	;
			- $\frac{71}{24}$	:
			۱۰-۴-۳۸	
- $\frac{31}{12}$			:	۱۰-۴-۴۱
			- $\frac{7}{3}$	:
			۱۰-۴-۴۰	
- $\frac{1}{12}$	;	- $\frac{1}{8}$	:	۱۰-۴-۴۳
			- $\frac{5}{8}$	:
			۱۰-۴-۴۲	
- $\frac{1}{4}$			:	۱۰-۴-۴۵
			$\frac{1}{6}$	;
			- $\frac{5}{6}$	:
			۱۰-۴-۴۴	
- $\frac{11}{12}$			:	۱۰-۴-۴۷
			- $\frac{13}{12}$	:
			۱۰-۴-۴۶	
$\frac{19}{18}$			:	۱۰-۴-۴۹
			$\frac{4}{3}$	:
			۱۰-۴-۴۸	
4.4			:	۱۰-۴-۵۱
			$\frac{144}{7}$	:
			۱۰-۴-۵۰	
12 cm x 20 cm			:	۱۰-۴-۵۳
			1.6 cm	:
			۱۰-۴-۵۲	
$\frac{P}{Q} = \frac{3L^2}{16a(L+a)}$			:	۱۰-۴-۵۵
			$\frac{3q_0L^4}{1280EI}$	:
			۱۰-۴-۵۴	
$\beta < 1$				
شرط پایداری $\beta = \frac{kL^3}{3EI}$			$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \left(\frac{1}{1-\beta} \right)$	:
			که در آن δ_b	:
			۱۰-۵-۱	
			می باشد.	
$\gamma < 1$				
شرط پایداری $\gamma = \frac{kL^3}{48EI}$			$\delta = \frac{\delta_0}{1-\gamma}$	:
			که در آن δ	:
			۱۰-۵-۲	
			می باشد.	
$v_{max} = \frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$				:
			۱۰-۶-۱	

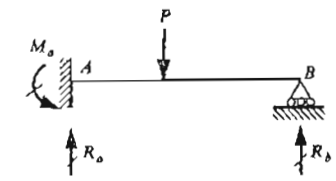
۵۸۶

واکنش‌های اضافی موسوم می‌باشند و تعداد این واکنش‌های اضافی برابر با تعداد نامعینی تیر است. برای مثال، واکنش R_B تیر شکل ۱-۱۱ را می‌توان بصورت واکنش اضافی در نظر گرفت. توجه کنید اگر واکنش اضافی از روی تیر برداشته شود تیر به صورت طره‌ای و ایزو استاتیک در می‌آید. سازه ایزو استاتیک که پس از برداشتن واکنش‌های اضافی باقی می‌ماند به سازه مبنا موسوم می‌باشد. در شکل ۱-۱۱ لنگر واکنشی M_A را نیز می‌توان به عنوان واکنش زائد در نظر گرفت. در این صورت سازه مبنا به صورت یک تیر ساده در می‌آید.

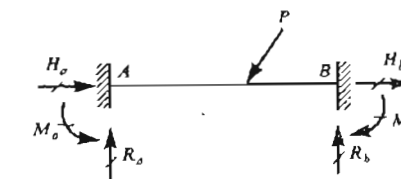
اگر تمام بارهای وارد بر تیر قائم باشند (شکل ۲-۱۱) حالت خاصی ایجاد می‌شود زیرا در آن واکنش افقی H_A صفر می‌گردد. اما تیر هنوز یک درجه هیپر استاتیک است زیرا سه واکنش مجهول و فقط دو معادله تعادل مستقل (یک معادله تعادل در امتداد قائم و یک معادله تعادل لنگری) وجود دارد.



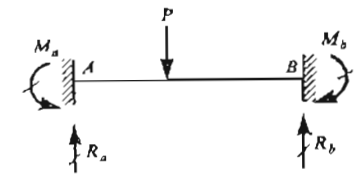
شکل ۱-۱۱



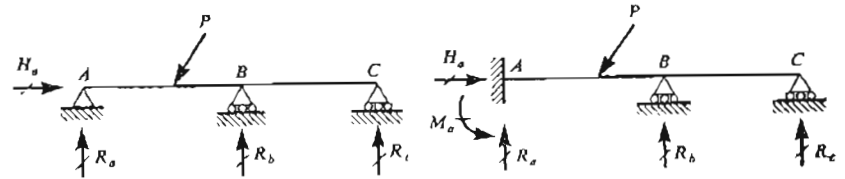
شکل ۱-۱۲



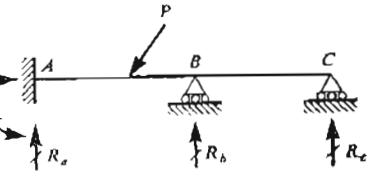
شکل ۱-۱۳



شکل ۱-۱۴



شکل ۱-۱۵



شکل ۱-۱۶

۵۸۷

تیر شکل ۳-۱۱ یک تیر دو سر گیردار می‌باشد. سه واکنش مجهول در هر تکیه گاه وجود دارد، در نتیجه تعداد واکنش‌های مجهول کل تیر برابر شش است. چون سه معادله تعادل برای تیر موجود است، درجه نامعینی استاتیکی تیر برابر سه می‌باشد. اگر واکنش‌ها در یک انتهای تیر را به عنوان واکنش‌های اضافی در نظر بگیریم و آنها را از روی سازه برداریم، یک تیر طره‌ای به صورت سازه مبنا باقی می‌ماند. اگر دولنگر انتهایی و یک واکنش افقی را برداریم، سازه مبنا یک تیر ساده خواهد بود. اگر برای این تیر نیز حالت خاص بارهای قائم را در نظر بگیریم (شکل ۴-۱۱)، در خواهیم یافت که فقط چهار واکنش مجهول را باید تعیین کنیم. تعداد معادلات تعادل موجود برابر دو می‌باشد، بنابراین تیر دو درجه نامعین است (اگر بخواهیم این مسئله را بطور دقیق بررسی کنیم در اثر تغییر شکل خمشی در A و B واکنش‌های افقی ایجاد می‌شود ولی اگر مقدار تغییر شکل‌ها کوچک باشد تا تیر این واکنش‌های افقی در روی خمش تیر نیز ناچیز است، بخش ۵-۱۱ را ببینید).

تیرهای شکل‌های ۵-۱۱ و ۶-۱۱ مثال‌هایی از تیرهای پیوسته یا سراسری می‌باشند (علت نام گذاری مزبور این است که این نوع تیرها بیش از یک دهانه دارند و تیر در روی تکیه گاه‌ها پیوسته می‌باشد). تیر شکل ۵-۱۱ یک درجه نامعین است زیرا چهار نیروی واکنشی و فقط سه معادله تعادل وجود دارد. اگر R_B بعنوان واکنش اضافی انتخاب شده و از روی تیر برداشته شود در این صورت تیر ساده ایزو استاتیک AC باقی می‌ماند. اگر R_C به عنوان واکنش اضافی انتخاب شود، سازه مبنا تیر ABC با قسمت پیش آمده BC خواهد بود. تیر شکل ۶-۱۱ دو درجه نامعین است. واکنش‌های R_B و R_C را ممکن است به عنوان واکنش‌های اضافی انتخاب نمود که در این صورت سازه میناتیک تیر طره‌ای خواهد بود.

در بحث‌های زیر دو روش برای تحلیل تیرهای هیپر استاتیک مورد بحث قرار می‌گیرد یک روش دیگر نیز در فصل بعد تشریح خواهد شد. روش‌های متعددی برای تحلیل تیرهای هیپر استاتیک (یا به طور کلی سازه‌های هیپر استاتیک) وجود دارد که در کتاب دیگری تحت عنوان " تحلیل سازه‌ها " درباره آنها به تفصیل بحث خواهد شد.

روش کلی حل تیرهای هیپر استاتیک پیدا کردن واکنش‌های اضافی می‌باشد زیرا پس از پیدا کردن آنها نیروهای باقی مانده به سهولت از معادلات تعادل بدست می‌آیند. با معلوم بودن نیروها، تنش‌ها و تغییر مکان‌ها در هر نقطه از طول تیر را می‌توان تعیین نمود.

۵۸۹.

را به عنوان واکنش اضافی انتخاب کنیم، در این صورت واکنش‌ها در A با استفاده از معادلات تعادل عبارت خواهد بود از

$$R_a = qL - R_b \quad ; \quad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_b L \quad (11-1)$$

اکنون می‌توانیم برای لنکر خمشی یک عبارت کلی بر حسب R_b بنویسیم.

$$M = R_a x - M_a - \frac{qx^2}{2} = qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_b L - \frac{qx^2}{2}$$

در این صورت معادله دیفرانسیل خمشی تغییر مکان نیرو به صورت زیر در می‌آید:

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_b L + \frac{qx^2}{2}$$

از این معادله دو بار متوالی انتگرال می‌گیریم.

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_b Lx + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} - \frac{R_b Lx^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

به کمیت مجهول (C_1 و C_2 و R_b) در این معادله و - دارد. تعداد شرایط حدی نیز سه می‌باشد که عبارتند از

$$v(0) = 0 \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad ; \quad v(L) = 0$$

از بکار بردن شرایط حدی نتیجه می‌شود: $C_2 = 0$ ، $C_1 = 0$ و

$$R_b = \frac{3qL}{8} \quad (11-2)$$

با داشتن واکنش R_b واکنش‌های دیگر از معادلات 11-1 بدست می‌آیند.

$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad ; \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (11-3)$$

با جایگزینی واکنش R_b در معادلات تغییر مکان (v) و شیب (v') و لنکر خمشی (M) می‌توان تمام اطلاعات لازم برای تحلیل کامل تیر را بدست آورد.

روش دیگری برای تحلیل تیر شکل ۱۱-۷ وجود دارد و آن این است که لنکر واکنشی M_a عنوان واکنش زائد انتخاب شود. در این صورت باید لنکر خمشی M را بر حسب M_a نوشت، در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم جایگزین نمود و سپس معادله مزبور را مطابق بالا حل کرد. روش دیگری نیز برای حل این مسئله وجود دارد و آن استفاده

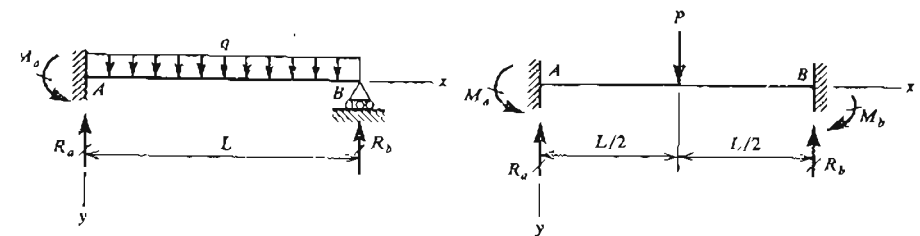
۵۸۸

۱۱-۲ روش حل معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی (منحنی تغییر مکان) تیر

تحلیل تیرهای همپراسایک بوسیله حل معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر امکان پذیر است. روش حل اساساً همان روشی است که برای تیرهای ایرواستاتیک بکار رفت (بحث‌های ۱-۱۰ تا ۳-۱۰ را ببینید). بدین ترتیب که ابتدا معادله دیفرانسیل منحنی تغییر شکل تیر نوشته می‌شود، پس از آن جواب کلی معادله به دست می‌آید و سپس با بکار بردن شرایط حدی ثابت‌های انتگرال گیری محاسبه می‌شوند. هر یک از سه معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر (معادله درجه دوم بر حسب لنکر خمشی، معادله درجه سوم بر حسب نیروی برشی و معادله درجه چهارم بر حسب شدت بار جانشی که به ترتیب در معادلات ۱۰-۵، ۱۰-۶ و ۱۰-۷ داده شده‌اند) را می‌توان بکار برد. شرایط حدی کافی نه فقط برای پیدا کردن ثابت‌های انتگرال‌گیری بلکه برای یافتن واکنش‌های اضافی همواره موجود خواهد بود. موقعی که تعداد ثابت‌های انتگرال‌گیری زیاد می‌شاند مقدار محاسبات زیاد می‌گردد. از این جهت این روش فقط برای حالت‌های بارگذاری نسبتاً ساده و برای تیرهای یک دهانه قابل استفاده می‌باشد. این روش را با ذکر دو مثال شرح می‌کنیم.

مثال ۱۱-۱

واکنش‌های تیر شکل ۱۱-۷ را پیدا کنید.



شکل ۱۱-۷

شکل ۱۱-۸

حل: اگر بخواهیم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را حل کنیم لازم است که لنکر خمشی M را در هر مقطع عرضی بدانیم. برای این کار یکی از واکنش‌ها را به عنوان واکنش اضافی انتخاب و بقیه واکنش‌ها را بر حسب آن بیان می‌کنیم. بیایم واکنش R_b

۵۹۰

از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم می باشد. این روش در مثال زیر مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۱۱-۲

واکشها و معادله منحنی تغییر مکان نیرو شکل ۸-۱۱ را با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم بدست آورید.

حل: به علت تقارن تیر و بار گذاری روی آن نتیجه می شود که $M_B = M_A$ و $R_A = R_B$. بدین ترتیب کافی است واکنش اضافی M_A را تعیین کنیم. در ناحیه بین $x = 0$ و $x = L/2$ باری بر تیر وجود ندارد، در نتیجه معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر به صورت زیر در می آید:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

از این معادله چهار بار متوالی انتگرال می گیریم.

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = C_1 \quad (11-4)$$

$$EI v''' = C_1 x + C_2 \quad (11-5)$$

$$EI v'' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (11-6)$$

$$EI v' = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (11-7)$$

برای پیدا کردن ثابت های انتگرال گیری و M_A از شرایط حدی استفاده می کنیم. نیروی برشی در سراسر سیمه چپ برابر R_A است، از این رو در معادله 11-4 نتیجه می شود $C_1 = -P/2$. لنگر خمشی در $x = 0$ برابر $-M_A$ است، بنابراین از معادله 11-5 به دست می آید $C_2 = M_A$. دو شرط حدی تیر برای شیبها (معادله 11-6) وجود دارد: در $x = 0$ و $x = L/2$ شیب $v' = 0$ است. از این دو شرط حاصل می شود $C_3 = 0$ و

$$M_A = \frac{PL}{8} \quad (11-8)$$

بالاخره از شرط حدی $v = 0$ در $x = 0$ نتیجه می شود $C_4 = 0$. با جایگزینی ثابت های انتگرال گیری در معادله 11-7 معادله منحنی تغییر مکان سیمه چپ تیر بدست می آید.

۵۹۱

$$v = \frac{Px^2}{48EI} (3L - 4x) \quad 0 \leq x \leq L/2 \quad (11-9)$$

چنانکه در این مثال مشاهده کردیم همواره تعداد کافی شرایط حدی برای تعیین نمودن ثابت های انتگرال گیری و همچنین واکنش های اضافی وجود خواهد داشت. بعضی از مواقع لازم است معادله دیفرانسیل را برای دو یا چند ناحیه تیر بنویسیم و سپس از شرایط پیوستگی نواحی مختلف استفاده نمائیم (همانطور که قبلا در مورد تیرهای ایزواستاتیک عمل کردیم).

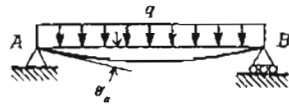
به علت تقارن هرگاه در معادله 11-9 بجای x کمیت $L-x$ را قرار دهیم معادله منحنی تغییر مکان نیمه راست تیر بدست می آید.

۱۱-۳ روش جمع زدن

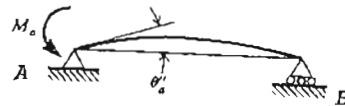
این روش را می توان به عنوان اساسی ترین روش تحلیل سازه های هیبراستاتیک تلفی نمود. این روش نه فقط برای تیرها بلکه برای انواع مختلف سازه ها از قبیل خرپاها و قاب ها قابل استفاده می باشد. فلذا ما از این روش برای تحلیل سازه های کشتی و فناری هیبراستاتیک استفاده نمودیم (فصل دوم).

روش جمع زدن بر استفاده از اصل اجتماع اثر موا استوار است. اولین قدم در این روش مشخص نمودن واکنش های اضافی (همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد) می باشد. سپس با برداشتن واکنش های اضافی سازه مینا تشکیل می شود. تغییر مکان ها و شیب های هر نقطه منحنی تغییر مکان تیر مسا با روش های مورد بحث در فصل دهم بدست می آید. بخصوص تغییر مکان ها و دوران های نظیر واکنش های اضافی را که در اثر بارها ایجاد شده حساب می کنیم. قدم بعدی در نظر گرفتن واکنش های اضافی بصورت بارهای خارجی در روی سازه مینا و محاسبه تغییر مکان ها و دوران های نظیر واکنش ها می باشد. از اصل اجتماع اثر قوا می دانیم که تغییر مکان ها و دوران های نهایی ناشی از اثر هم زمان بارهای واقعی و واکنش ها باید برابر با مجموع تغییر مکان های بطور جداگانه محاسبه شده باشد. تغییر مکان های نظیر واکنش ها یا صفر می باشد و یا مقادیر معلومی دارند. در نتیجه با استفاده از این واقعیت می توان معادلات سازگاری تغییر مکان ها را نوشت. سرانجام با حل این معادلات مقادیر واکنش های اضافی بدست می آید. سپس بقیه واکنش ها از معادلات تعادل محاسبه می شوند. استفاده از این روش را در مثال های زیر نشان می دهیم.

۵۹۲



شکل ۱۱-۱۲



شکل ۱۱-۱۳

حل : اگر M_a را به عنوان واکنش اضافی انتخاب کنیم سازه مینا به صورت تیر ساده شکل ۱۱-۱۲ در می آید. زاویه دوران θ_a'' در نقطه A سازه مینا در اثر بار یکساخت q با استفاده از پیوست ۳ کتاب برابر است با

$$\theta_a' = \frac{qL^3}{24EI}$$

زاویه دوران θ_a'' در نقطه A سازه مینا در اثر لنگر M_a (شکل ۱۱-۱۳) با استفاده از پیوست ۳ کتاب مساوی است با

$$\theta_a'' = \frac{M_a L}{3EI}$$

زاویه دوران در نقطه A سازه اصلی (شکل ۱۱-۹) صفر می باشد. بنابراین

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_a L}{3EI} = 0$$

ارایی معادله $M_a = qL^2/8$ نتیجه می شود که با نتیجه قبلی مطابقت دارد.

پس از پیدا کردن واکنش های یک تیر هیبر استاتیک محاسبه برآیند های تنش (سیروهای محوری، سیروهای برشی و لنگرهای خمشی) در هر نقطه از طول تیر سهولت احاط خواهد گرفت. از این جهت در مثال ها و مسائل این فصل توجه خود را به محاسبه واکنش ها معطوف می کنیم.

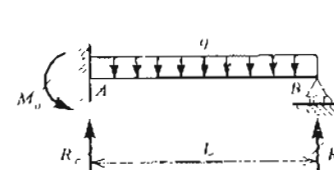
روش تحلیل مورد استفاده در این بخش اغلب به روش نیرو موسوم می باشد (چون در این روش نیروها به عنوان مجهولات اضافی اولیه انتخاب می شوند). روش عمومی دیگری برای تحلیل سازه های هیبر استاتیک وجود دارد که به روش تغییر مکان موسوم است. درباره این روش در کتاب "تحلیل سازه ها" بحث خواهد شد.

مثال ۱۱-۵

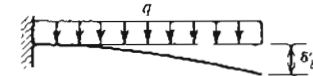
۵۹۲

مثال ۱۱-۳

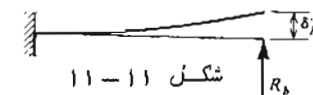
واکنش های تیر شکل ۱۱-۹ را با استفاده از روش جمع ردن پیدا کنید.



شکل ۱۱-۹



شکل ۱۱-۱۰



شکل ۱۱-۱۱

حل : واکنش R_b را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم. در این صورت سازه مینا به صورت تیر طره ای شکل ۱۱-۱۰ در می آید. تغییر مکان نقطه B (نقطه نظیر واکنش R_b) در اثر بار q را δ_b' و در اثر واکنش R_b (شکل ۱۱-۱۱) را δ_b'' نشان می دهیم. تغییر مکان کل نقطه B در سازه اولیه (شکل ۱۱-۹) که مجموع جبری دو تغییر مکان مزبور است باید برابر صفر باشد.

$$\delta_b = \delta_b' - \delta_b'' = 0 \quad (11-10)$$

علامت منفی در معادله فوق به این علت ظاهر شده که تغییر مکان δ_b'' به طرف پائین ولی تغییر مکان δ_b' به طرف بالا می باشد. تغییر مکان های δ_b' (در اثر بار یکساخت q) و δ_b'' (در اثر واکنش R_b) به سهولت از جداول پیوست ۳ کتاب بدست می آیند. از جایگزینی این مقادیر در معادله 11-10 نتیجه می شود

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} - \frac{R_b L^3}{3EI} = 0 \quad ; \quad R_b = \frac{3qL}{8} \quad (11-11)$$

واکنش های R_a و M_a با نوشتن معادلات تعادل تیر محاسبه می شود. نتایج حاصل عبارتند از

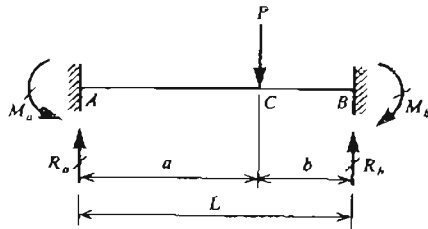
$$R_a = \frac{5qL}{8} \quad ; \quad M_a = \frac{qL^2}{8} \quad (11-12)$$

مثال ۱۱-۴

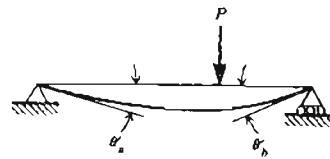
مثال قبل را مجدداً حل کنید ولی این بار واکنش M_a را به عنوان واکنش اضافی انتخاب کنید.

۵۹۵

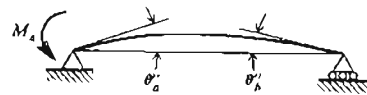
تیر دو سر گیردار شکل ۱۷-۱۱ تحت اثر بار متمرکز P قرار دارد. نیروها و لنگرهای واکنشی را در دو انتهای تیر حساب کنید. تغییر مکان نقطه C را نیز تعیین نمایید.



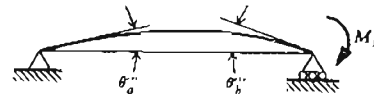
شکل ۱۷-۱۱



شکل ۱۸-۱۱



شکل ۱۹-۱۱



شکل ۲۰-۱۱

حل: تیر مربوطه دو مرتبه نامعین است. لنگرهای واکنشی M_a و M_b را به عنوان واکنش‌های زائد انتخاب می‌کنیم، در این صورت سازه مینا سیر ساده شکل ۱۸-۱۱ خواهد بود. زوایای دوران دو انتهای تیر در اثر بار متمرکز P با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب عبارتند از

$$\theta_a^- = \frac{Pab(L+b)}{6EI} \quad ; \quad \theta_b^- = \frac{Pab(L+a)}{6EI}$$

حال لنگرهای M_a و M_b را به صورت بارهای خارجی بر سازه مینا وارد می‌کنیم و زوایای دوران دو انتهای تیر را از جداول آخر کتاب بدست می‌آوریم. زوایای دوران دو انتها ناشی از لنگر M_a برابرند با (شکل ۱۹-۱۱)

$$\theta_a^+ = \frac{M_a L}{3EI} \quad ; \quad \theta_b^+ = \frac{M_a L}{6EI}$$

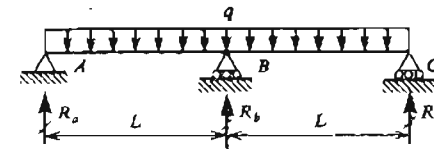
زوایای دوران دو انتها ناشی از لنگر M_b نیز از روابط زیر بدست می‌آیند (شکل ۲۰-۱۱):

$$\theta_a^+ = \frac{M_b L}{6EI} \quad ; \quad \theta_b^+ = \frac{M_b L}{3EI}$$

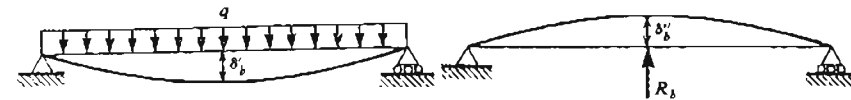
چون زوایای دوران دو انتهای تیر اصلی صفر می‌باشند، معادلات سازگاری تغییر مکان‌ها

۵۹۴

واکنش‌های تیر سراسری شکل ۱۴-۱۱ با بارگذاری یکنواخت را بدست آورید.



شکل ۱۴-۱۱



شکل ۱۵-۱۱

شکل ۱۶-۱۱

حل: واکنش میانی R_b را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می‌کنیم، در این صورت سازه مینا تیر ساده شکل ۱۵-۱۱ خواهد بود. تغییر مکان نقطه B در سازه مینا در اثر بار یکنواخت q با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب برابر است با

$$\delta_b^- = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

L در این رابطه طول هر دهانه می‌باشد. تغییر مکان رو به بالا در اثر واکنش R_b با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب مساویست با (شکل ۱۶-۱۱)

$$\delta_b^+ = \frac{R_b(2L)^3}{48EI} = \frac{R_b L^3}{6EI}$$

تغییر مکان نقطه B در تیر اصلی برابر صفر است. بنابراین شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در این نقطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta_b = \delta_b^- - \delta_b^+ = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_b L^3}{6EI} = 0 \quad : \quad R_b = \frac{5qL}{4} \quad (11-13)$$

دو واکنش دیگر از معادله تعادل نیروها در امتداد قائم بدست می‌آیند.

$$R_a = R_c = \frac{3qL}{8}$$

۵۹۷

در حالت خاصی که بار P بر وسط دهانه تیر وارد می شود تغییر مکان زیر بار P برابر خواهد بود با (در این صورت $a = b = L/2$)

$$\delta_c = \frac{PL^3}{192EI} \quad (11-17)$$

واکنش ها نیز در این حالت به صورت زیر در می آیند :

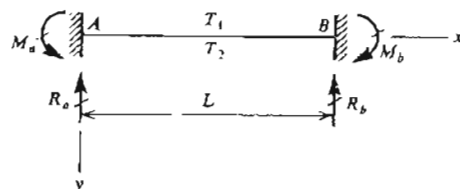
$$M_a = M_b = \frac{PL}{8} ; \quad R_a = R_b = \frac{P}{2} \quad (11-18)$$

۴-۱۱ آثار گرمایی

تغییرات درجه حرارت در یک تیر هیبر استاتیک تش و تغییر شکل ایجاد خواهد کرد. این کمیت ها را با روش هایی مشابه آنچه که قبلاً در مورد بارهای روی تیر تشریح شد می توان تعیین نمود. احتمالاً مفیدترین روش در این مورد همان روش جمع زدن (با استفاده از اصل اجتماع اثر قوا) می باشد که در مثال زیر از آن استفاده خواهد شد.

مثال ۷-۱۱

تیر دو سر گیردار شکل ۲۱-۱۱ در سطح فوقانی درجه حرارت T_1 و در سطح تحتانی درجه حرارت T_2 دارد. واکنش های تیر را در این اختلاف درجه حرارت حساب کنید.



شکل ۲۱-۱۱

حل : برای اینکه از روش جمع زدن استفاده کنیم واکنش های R_b و M_b را بعنوان واکنش های اضافی انتخاب می کنیم تا سازه مینا که یک تیر طره ای می باشد بدست آید .

۵۹۶

به صورت زیر نوشته می شوند :

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' - \theta_a''' = 0 ; \quad \theta_b = \theta_b' - \theta_b'' - \theta_b''' = 0$$

اگر عبارات مختلف زوایای دوران را در روابط فوق جایگزین کنیم دو معادله هم زمان زیر شامل M_a و M_b بدست می آید :

$$\frac{M_a L}{3EI} + \frac{M_b L}{6EI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{M_a L}{6EI} + \frac{M_b L}{3EI} = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

از حل دو معادله فوق خواهیم داشت

$$M_a = \frac{Pab^2}{L^2} ; \quad M_b = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad (11-14)$$

با داشتن لنگرهای واکنشی و استفاده از معادلات تعادل، واکنش های قائم به سهولت محاسبه می شود.

$$R_a = \frac{Pb^2}{L^3} (L+2a) ; \quad R_b = \frac{Pa^2}{L^3} (L+2b) \quad (11-15)$$

اکنون با استفاده از اصل اجتماع اثر قوا و جداول پیوست ۳ کاب تغییر مکان نقطه C (زیر بار P) را محاسبه می کنیم. تغییر مکان نقطه C در سازه مینا برابر است با

$$\delta_c' = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

تغییر مکان همی نقطه سازه مینا در اثر لنگرهای M_a و M_b نیز از روابط زیر بدست می آید (به ترتیب شکل های ۱۹-۱۱ و ۲۰-۱۱) :

$$\delta_c'' = \frac{M_a ab}{6LEI} (L+b) ; \quad \delta_c''' = \frac{M_b ab}{6LEI} (L+a)$$

پس از جایگزینی مقادیر M_b و M_a از معادلات ۱۱-۱۴ در معادلات فوق خواهیم داشت

$$\delta_c'' = \frac{Pa^2b^3}{6L^3EI} (L+b) ; \quad \delta_c''' = \frac{Pa^3b^2}{6L^3EI} (L+a)$$

بنابراین تغییر مکان کل نقطه C برابر است با

$$\delta_c = \delta_c' - \delta_c'' - \delta_c''' = \frac{Pa^3b^3}{3L^3EI} \quad (11-16)$$

۵۹۹

حل: اگر بخواهیم اثر لنگرهای خمشی (معادله 5-10) و اختلاف درجه حرارت (معادله 53-10) را با هم در نظر بگیریم، معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر به صورت زیر در می آید:

$$EIv'' = -M - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (11-20)$$

عبارت لنگر خمشی به صورت

$$M = R_a x - M_a$$

می باشد. اما همانطوریکه در مثال بالا ذکر شد به علت تقارن تیر $R_a = 0$ و در نتیجه معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می شود:

$$EIv'' = M_a - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

پس از یک بار انتگرال گیری نتیجه می شود

$$EIv' = M_a x - \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} x + C_1$$

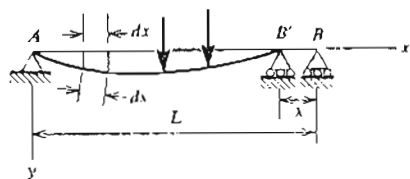
از دو شرط حدی ($v'=0$ در $x=0$ و $x=L$) حاصل می شود

$$C_1 = 0 ; M_a = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

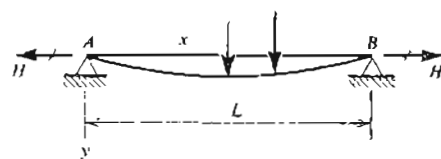
که با معادله 11-19 مثال قبل مطابقت دارد.

۵-۱۱ تغییر مکان افقی دو انتهای یک تیر

تیر AB را که در تکیه گاه A مفصلی و در تکیه گاه B مفصلی عطفکی می باشد در نظر بگیرید (شکل ۲۲-۱۱). موقعی که تیر تحت اثر بار خم می شود، انتهای B به



شکل ۲۲-۱۱



شکل ۲۳-۱۱

۵۹۸

تغییر مکان و زاویه دوران انتهای B این تیر طره ای در اثر اختلاف درجه حرارت مزبور از روابط زیر بدست می آیند (مسئله ۱۲-۱۰ را ببینید).

$$\delta_b^- = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h} ; \theta_b^- = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L}{h}$$

در این روابط، α ضریب انبساط حرارتی و h ارتفاع تیر می باشد. اگر T_2 از T_1 بزرگتر باشد، تغییر مکان δ_b^- رو به بالا و زاویه دوران θ_b^- خلاف جهت عقربه های ساعت خواهد بود.

تغییر مکان و دوران نقطه B در سازه مینا در اثر عبارتند از

$$\delta_b^s = \frac{R_b L^3}{3EI} ; \theta_b^s = \frac{R_b L^2}{2EI}$$

و در اثر M_b برابر با

$$\delta_b^s = -\frac{M_b L^2}{2EI} ; \theta_b^s = -\frac{M_b L}{EI}$$

در روابط فوق تغییر مکان رو به بالا و دوران خلاف جهت عقربه های ساعت مثبت فرض شده اند. اکنون می توانیم معادلات سازگاری تغییر مکان ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\delta_b^- + \delta_b^s + \delta_b^s = 0 \quad \theta_b^- + \theta_b^s + \theta_b^s = 0$$

پس از جایگزینی عبارات تغییر مکان ها و دوران ها در معادلات فوق و حل آنها برای R_b و M_b خواهیم داشت

$$R_b = 0 ; M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

صفر بودن R_b با توجه به تقارن تیر از ابتدا قابل پیش بینی بود. همچنین به علت تقارن، M_a برابر با M_b می باشد. بنابراین جواب های نهائی برای تیر شکل ۲۱-۱۱ به صورت زیر می باشند:

$$R_a = R_b = 0 ; M_a = M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \quad (11-19)$$

مثال ۸-۱۱

مثال قبل را با استفاده از معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیر حل کنید.

۶۰۰

اندازه فاصله کوچک λ از B به B^* مستقل می شود. تغییر مکان λ برابر با اختلاف بین طول اولیه L تیر و طول وتر AB^* تیر خم شده می باشد. برای اینکه این فاصله را پیدا کنیم، عنصری از تیر به طول ds را در طول محور منحنی تیر در نظر می گیریم. طول تصویر این عنصر بر محور x برابر dx است. اختلاف بین طول ds و تصویر افقی آن برابر است با

$$ds - dx = \sqrt{dx^2 + dv^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - dx \quad (11-21)$$

در این رابطه تغییر مکان محور تیر می باشد.

اگر t کمیتی کوچکتر از واحد (بطور عددی) باشد فضا دو جمله ای سینوس را به صورت زیر می توانیم بنویسیم

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \dots$$

حال اگر t در مقایسه با واحد خیلی کوچک باشد می توانیم از حلات شامل t^2 ، t^3 ، و غیره در مقایسه با دو جمله اول صرف نظر کنیم.

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} \quad (11-22)$$

جمله $(dv/dx)^2$ در معادله 11-21 همواره خیلی کوچک است (چون تغییر شکل تیرها کوچک فرض می شود)، از این رو با استفاده از رابطه 11-22 معادله 11-21 را مجدداً به صورت زیر می نویسیم:

$$ds - dx = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

اگر از عبارات فوق در طول تیر انتگرال گرفته شود، اختلاف λ بین طول کل تیر و وتر AB^* بدست می آید.

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (11-23)$$

بدین ترتیب هرگاه معادله منحنی تغییر مکان تیر معلوم باشد، با استفاده از معادله 11-23 می توانیم تغییر مکان افقی λ را که معمولاً "کمیت خیلی کوچکی است" حساب کنیم.

اگر از تغییر مکان افقی دو انتهای تیر مانند شکل ۲۳-۱۱ جلوگیری شود، در این صورت در هر انتهای تیر واکنش افقی H ایجاد خواهد شد. این نیرو باعث خواهد شد

۶۰۱

محور تیر در هنگام خمش اضافه طول پیدا کند. علاوه، نیروی H خودش بر لنگرهای خمشی تیر و در نتیجه بر منحنی تغییر مکان تیر نیز اثر خواهد گذاشت. نیروهای بار - گذاری جانبی و محوری در کتاب "تحلیل سازه ها" مورد بحث قرار خواهند گرفت. در اینجا بجای تحلیل دقیق این مسئله پیچیده سعی می کنیم یک عبارت تقریبی برای H بدست آوریم تا بتوانیم اهمیت آن را ارزیابی کنیم. یک تعریف مناسب برای شکل منحنی تغییر مکان تیر یک سهمی با معادله

$$v = \frac{4\delta x(L-x)}{L^2} \quad (11-24)$$

می باشد که در آن δ تغییر مکان وسط تیر است. فاصله λ نظیر این منحنی فرض شده تغییر شکل را می توان با جایگزینی معادله 11-24 در معادله 11-23 بدست آورد. نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda = \frac{8\delta^2}{3L}$$

نیروی H لازم برای طویل کردن تیر به اندازه فوق برابر است با

$$H = \frac{EA\lambda}{L} = \frac{8EA\delta^2}{3L^2}$$

و تنش کششی مربوطه مساویست با

$$\sigma = \frac{H}{A} = \frac{8E\delta^2}{3L^2} \quad (11-25)$$

تغییر مکان δ در وسط تیر در مقایسه با طول آن معمولاً خیلی کوچک است، برای مثال این نسبت ممکن است $1/500$ باشد. اگر ما این عدد را بکار بریم و همچنین فرض کنیم که ماده تیر فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، از معادله 11-25 برای تنش σ معط 22.4 Kg/cm^2 بدست می آید. بنابراین تنش محوری ناشی از H در مقایسه با تنش منحنی محاز خیلی کوچک است. علاوه دو انتهای تیر را در عمل نمی توان کاملاً "صلب نگاهداشت" و همواره مقداری تغییر مکان افقی رخ خواهد داد که در اثر آن نیروی محوری محاسبه شده در فوق کاهش می یابد. بنابراین نتیجه می گیریم که روش مداول صرف نظر نمودن از آثار گرداری افقی و فرض اینکه یک اسبای تیر بر غلطک قرار دارد قابل قبول می باشد. برای تحلیل دقیق تر نیروهای با تکه گاههای بدون حرکت به مرجع 34 رجوع کنید.

۶۰۳

$$EIv = \frac{1}{6} R_B x^3 - \frac{1}{2} (M_0 + LR_B) x^2 + C_1 x + C_2$$

شرایط حدی: $v(0) = 0$ (1) ; $v'(0) = 0$ (2) ; $v(L) = 0$ (3)

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{6} R_B L^3 - \frac{1}{2} (M_0 + LR_B) L^2 = 0 : R_B = -1.5 \frac{M_0}{L}$$

$$R_A = -R_B = 1.5 \frac{M_0}{L}$$

$$M_A = -M_0 - L \left(-1.5 \frac{M_0}{L} \right) = 0.5 M_0$$

$$EIv = -\frac{1}{4} \frac{M_0}{L} x^3 - \frac{1}{2} \left(M_0 - \frac{3}{2} M_0 \right) x^2$$

$$v = \frac{M_0 x^2 (L-x)}{4LEI}$$

مسئله ۱۱-۲

واکنشها و معادله محلی تغییر مکان تیر دو سر گیردار شکل ۱۱-۲۵ را با بار ... گذاری نشان داده شده بیابید.

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} q_0 L \right) = \frac{q_0 L}{4}$$

$$M_B = M_A$$

حل: به علت تقارن: واکنش M_A را به عنوان واکنش اضافی درجه نامعینی استاتیکی تیر مزبور واحد می باشد. واکنش M_A را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم و از معادله دیفرانسیل درجه دوم استفاده می نمایم.

$$EIv'' = -M$$

$$M(x) = -M_A + R_A x - \frac{1}{2} (x) \left(q_0 \frac{x}{L} \right) \left(\frac{x}{3} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

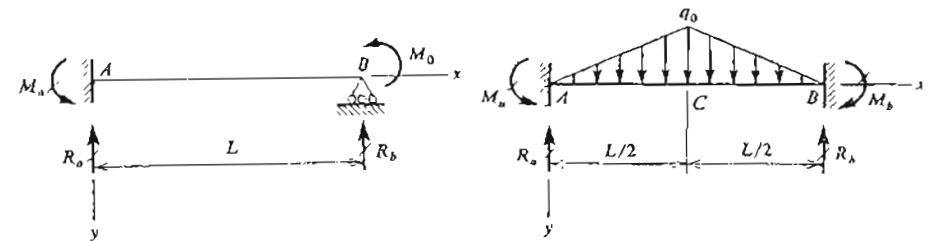
۶۰۲

۱۱-۶ مسائل حل شده

در حل مسائل ۱۱-۱ تا ۱۱-۳ از معادله دیفرانسیل محلی تغییر مکان تیر استفاده می کنیم.

مسئله ۱۱-۱

واکنشها و معادله تغییر مکان تیر شکل ۱۱-۲۴ را پیدا کنید. بار وارد بر تیر لنگر M_0 در نقطه B می باشد.



شکل ۱۱-۲۴

شکل ۱۱-۲۵

حل: واکنش R_B را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم و واکنشهای دیگر را بر حسب آن پیدا می کنیم. توجه کنید که تیر مزبور از لحاظ استاتیکی یک درجه نامعینی می باشد. از تعادل نیروها در اعداد قائم بسجه می شود

$$R_A = -R_B$$

از معادل لنگری حول نقطه A حاصل می شود

$$M_A + M_0 + LR_B = 0 : M_A = -M_0 - LR_B$$

برای حل این مسئله از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم استفاده می کنیم.

$$EIv'' = -M = -(-M_A + R_A x) = -M_0 - LR_B + R_B x$$

از این معادله دو بار انتگرال می گیریم.

$$EIv' = \frac{1}{2} R_B x^2 - (M_0 + LR_B) x + C_1$$

۶۰۵

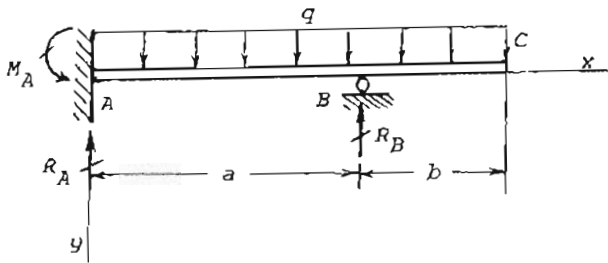
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = q(a+b) \quad ; \quad R_A = q(a+b) - R_B$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{1}{2} q (a+b)^2 - aR_B$$

$$EI v'''' = -M$$

$$M = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI v'''' = \frac{1}{2} qx^2 - [q(a+b) - R_B]x + \frac{1}{2} q (a+b)^2 - aR_B$$



شکل ۱۱-۲۶ a

از این معادله دیفرانسیل دو بار انتگرال می‌گیریم.

$$EI v' = \frac{1}{6} qx^3 - \frac{1}{2} [q(a+b) - R_B]x^2 + \left[\frac{1}{2} q(a+b)^2 - aR_B \right]x + C_1 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI v = \frac{1}{24} qx^4 - \frac{1}{6} [q(a+b) - R_B]x^3 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} q(a+b)^2 - aR_B \right]x^2 + C_1 x + C_2 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad (2) \quad ; \quad v(a) = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{24} qa^4 - \frac{1}{6} [q(a+b) - R_B]a^3 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} q(a+b)^2 - aR_B \right]a^2 = 0$$

از حل این معادله نتیجه می‌شود

$$R_B = \frac{3}{8} qa + qb + \frac{3qb^2}{4a}$$

۶۰۳

معادله تغییر مکان تیر را در نیمه چپ تیر (قسمت AC) با v_1 و در نیمه راست تیر (قسمت CB) با v_2 نشان می‌دهیم.

$$EI v_1'''' = M_A - \frac{q_0 L}{4} x + \frac{q_0}{3L} x^3 \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

از این معادله دو بار انتگرال می‌گیریم.

$$EI v_1' = M_A x - \frac{q_0 L}{8} x^2 + \frac{q_0}{12L} x^4 + C_1$$

$$EI v_1 = \frac{1}{2} M_A x^2 - \frac{q_0 L}{24} x^3 + \frac{q_0}{60L} x^5 + C_1 x + C_2$$

$$v_1(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v_1'(0) = 0 \quad (2)$$

$$v_1'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (3) \quad ; \quad \text{همچنین به علت تقارن تیر و بارگذاری روی آن}$$

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$(3) \Rightarrow M_A \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{q_0 L}{8} \left(\frac{L^2}{4}\right) + \frac{q_0}{12L} \left(\frac{L^5}{16}\right) = 0$$

$$M_A = \frac{5q_0 L^2}{96}$$

$$v_1 = \frac{q_0 x^2}{960LEI} (25L^3 - 40L^2 x + 16x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

برای بدست آوردن منحنی تغییر مکان در ناحیه CB ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$) با توجه به تقارن تیر و بارگذاری روی آن کافی است در معادله فوق به جای x مقدار $L - x$ را قرار دهیم.

$$v_2 = \frac{q_0 (L-x)^2}{960LEI} [25L^3 - 40L^2 (L-x) + 16(L-x)^3] \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

مسئله ۱۱-۳

در تیر شکل ۱۱-۲۶ a واکنش R_B را بدست آورید.

حل: درجه نامعینی استاتیکی تیر مزبور واحد می‌باشد. واکنش‌های R_A و M_A را بر حسب R_B نعیمی می‌کنیم.

۶۰۷

واکنش‌های قائم سیر به‌طور مشابه‌ای از روابط 11-15 محاسبه می‌نوند.

$$R_a = \frac{q}{L^3} \int_0^a (L-x)^2 (L+2x) dx = \frac{qa}{2L^3} (2L^3 - 2a^2L + a^3)$$

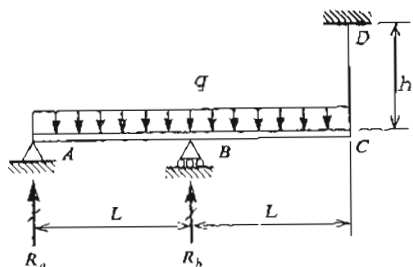
$$R_b = \frac{q}{L^3} \int_0^a x^2 (3L-2x) dx = \frac{qa^3}{2L^3} (2L-a)$$

واکنش‌ها برای نیروی دو سرگیریاری تحت بار یکنواخت q در تمام طولش (شکل ۱۱-۲۷) با جایگزینی $a=L$ در معادلات فوق بدست می‌آید. نتایج به صورت زیر می‌باشند:

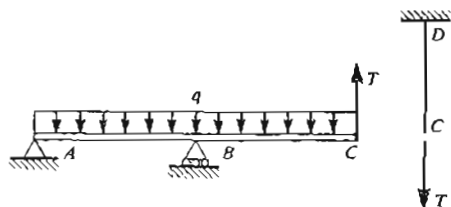
$$M_a = M_b = \frac{qL^2}{12} ; R_a = R_b = \frac{qL}{2}$$

مسئله ۱۱-۵

تیر ABC شکل ۱۱-۲۸ دارای تکیه گاههای ساده در نقاط A و B می باشد و بوسیله کابل CD در نقطه C آویزان شده است. قبل از اینکه بار یکنواخت q بر تیر وارد شود، نیرویی در کابل وجود ندارد و کابل شل می‌باشد. موقعی که بار q وارد می‌شود، تیر در نقطه C به طرف پائین تغییر شکل می‌دهد و در کابل نیروی کششی T بوجود می‌آید. بررگی این نیرو را پیدا کنید.



شکل ۱۱-۲۸



شکل ۱۱-۲۹

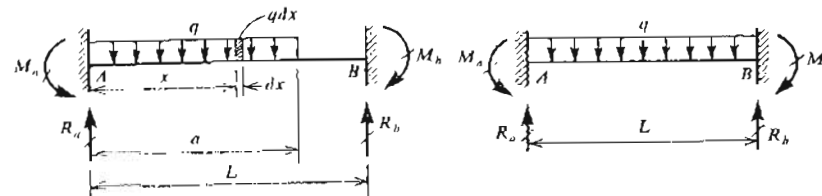
حل: نیروی مجهول T در کابل را واکنس مجهول انتخاب می‌کیم و سازه را

۶۰۶

در حل مسائل ۱۱-۴ تا ۱۱-۱۸ از اصل اجتماع اثر قوا و جداول پوست ۳ کتاب استفاده می‌کنیم.

مسئله ۱۱-۴

واکنش‌های نیروی دو سرگیردار شکل ۱۱-۲۶b را حسب بار گذاری نشان داده شده پیدا کنید.



شکل ۱۱-۲۷

شکل ۱۱-۲۶b

حل: عنصر کوچکی از بار گسترده به طول dx را می‌توانیم به صورت سار متمرکزی با مقدار qdx در نظر بگیریم (شکل ۱۱-۲۶b). در این صورت می‌توانیم از روابط بدست آمده در مثال ۱۱-۶ استفاده کنیم. اگر در روابط 11-14 به جای بار P کمیت qdx ، به جای a کمیت x و به جای b کمیت $L-x$ را قرار دهیم لنگرهای انتهایی ناشی از بار جزئی مزبور بدست می‌آید.

$$dM_a = \frac{qx(L-x)^2 dx}{L^2} ; dM_b = \frac{qx^2(L-x) dx}{L^2}$$

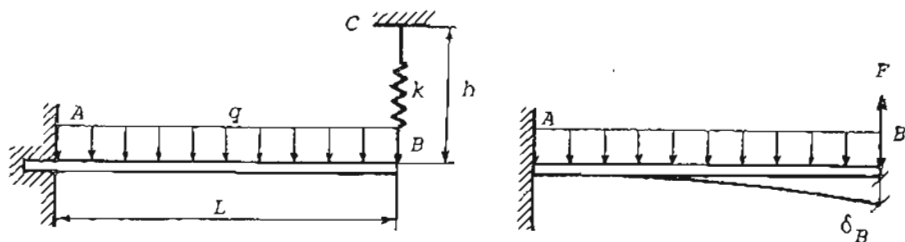
اگر از روابط فوق در طول قسمت بار شده تیر انتگرال بگیریم لنگرهای انتهایی M_a و M_b بدست می‌آید.

$$M_a = \int_0^a dM_a = \frac{q}{L^2} \int_0^a x(L-x)^2 dx = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2)$$

$$M_b = \int_0^a dM_b = \frac{q}{L^2} \int_0^a x^2(L-x) dx = \frac{qa^3}{12L^2} (4L - 3a)$$

۶۰۹

تیر شکل ۱۱-۳۰ در انتهای B به فنری با ثابت فنری k متصل است و تحت اثر بار یکنواخت q قرار دارد. قبل از اینکه بار q وارد شود نیروی داخلی منفرجه است. نیروی داخلی F منفرجه را پس از اینکه بار q وارد شود حساب کنید.



شکل ۱۱-۳۰

حل: روش حل این مسئله مشابه راه حل مسئله قبل است. سازه مزبور را در نقطه B می بریم (شکل ۱۱-۳۱). تغییر مکان روبرو به پائین نقطه B تیر در اثر بار یکنواخت q برابر است با

$$\delta_B' = \frac{qL^4}{8EI}$$

تغییر مکان روبرو به بالای نقطه B تیر در اثر نیروی F مساوی است با

$$\delta_B'' = \frac{FL^3}{3EI}$$

بنابراین تغییر مکان نقطه B تیر به طرف پائین برابر است با

$$\delta_B = \delta_B' - \delta_B'' = \frac{(3qL - 8F)L^3}{24EI}$$

این تغییر مکان باید برابر با اضافه طول منفرجه F/k باشد. بنابراین

$$\frac{L^3(3qL - 8F)}{24EI} = \frac{F}{k} \quad : \quad F = \frac{3qL^4k}{24EI + 8L^3k}$$

مسئله ۱۱-۷

دو تیر طره‌ای AB و CD مطابق شکل ۱۱-۳۲ تحت اثر بار P می‌باشند و بین

۶۰۸

مطابق شکل ۱۱-۲۹ به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. سازه مبنا در این صورت شامل دو تیر مستقل ABC (سیر) و CD (کابل) خواهد بود. نیروی T بر تیر ABC به طرف بالا و بر کابل CD به طرف پائین اثر می‌کند. تغییر مکان نقطه C تیر شامل دو قسمت می‌باشد: تغییر مکان روبرو به پائین δ_C' ناشی از بار یکنواخت و تغییر مکان روبرو به بالای δ_C'' ناشی از نیروی T. در همین حال، انتهای کابل (نقطه C) به اندازه δ_C'' برابر با ازدیاد طول کابل به طرف پائین تغییر مکان خواهد داد. معادله سازگاری به این صورت بیان می‌شود: تغییر مکان روبرو به پائین انتهای تیر با تغییر مکان انتهای کابل مساوی می‌باشد.

$$\delta_C' - \delta_C'' = \delta_C''$$

حال به تغییر مکان مزبور را حساب می‌کنیم. تغییر مکان δ_C' با جایگزینی $a = L$

در جواب مسئله ۹-۱۰ بدست می‌آید.

$$\delta_C' = \frac{qL^4}{4EI}$$

در این رابطه، EI صلبیت خمشی سیر است. تغییر مکان نقطه C تیر ناشی از نیروی T نیز با روشی مشابه مسئله ۹-۱۰ بدست می‌آید

$$\delta_C'' = \frac{2TL^3}{3EI}$$

اضافه طول کابل نیز مساوی است با

$$\delta_C''' = \frac{Th}{EA}$$

در این رابطه، h طول کابل و EA صلبیت محوری آن است. پس از جایگزینی روابط تغییر مکان فوق در معادله سازگاری تغییر مکان‌ها و حل معادله حاصل برای T خواهیم داشت

$$T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 12hEI}$$

توجه کنید در این مسئله یک کمیت نیروی داخلی به جای واکنش خارجی به عنوان نیروی اضافی انتخاب گردید. انتخاب نیروی اضافی معمولاً بر اساس سهولت روش حل صورت می‌گیرد.

مسئله ۱۱-۶

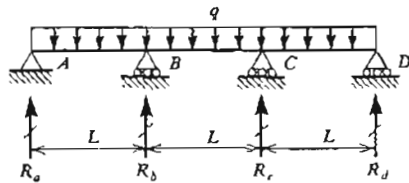
۶۱۱

از مساوی قرار دادن δ_D و δ_D' نیروی F بدست می‌آید.

$$F = \frac{5PI_2}{2(I_1 + I_2)}$$

مسئله ۸-۱۱

واکنش‌های تیر سراسری سه دهانه شکل ۱۱-۳۴ را تعیین کنید.

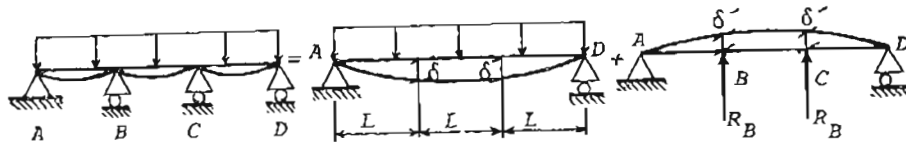


شکل ۱۱-۳۴

حل: به علت تقارن داریم $R_A = R_D$ و $R_B = R_C$ از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$R_A + R_B = \frac{3}{2}qL \quad (1)$$

واکنش‌های R_B و R_C را بعنوان واکنش اضافی انتخاب می‌کنیم.



شکل ۱۱-۳۵

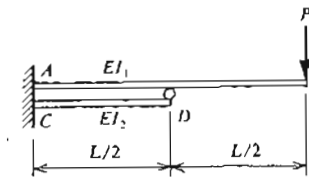
شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در تکیه گاه‌های B و C (شکل ۱۱-۳۵): $\delta = \delta'$ با استفاده از جداول آخر کتاب δ و δ' بدست می‌آیند.

$$\delta = \frac{qL}{24EI} (27L^3 - 6L^3 + L^3) = \frac{11}{12} \frac{qL^4}{EI}$$

$$\delta' = \frac{R_B L}{6EI} [(3L)(3L) - 3L^2 - L^2] = \frac{5R_B L^3}{6EI}$$

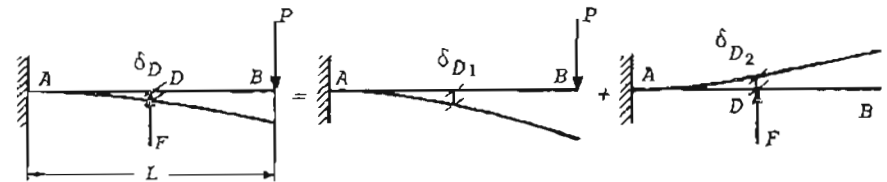
۶۱۰

آنها در نقطه D غلطکی قرار دارد. صلبیت خمشی تیر بالایی EI_1 و صلبیت خمشی تیر

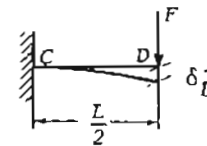


شکل ۱۱-۳۳

پایینی EI_2 است. نیروی F را که در نقطه D بین دو تیر منتقل می‌شود پیدا کنید.



شکل ۱۱-۳۳



حل:

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در نقطه D (شکل ۱۱-۳۳): $\delta_D = \delta_{D1} - \delta_{D2} = \delta_D'$

مقادیر δ_{D1} ، δ_{D2} و δ_D' با استفاده از جداول آخر کتاب بدست می‌آیند.

$$\delta_D = \delta_{D1} - \delta_{D2} = \frac{P(\frac{L}{2})^2}{6EI_1} (3L - \frac{L}{2}) - \frac{F(\frac{L}{2})^3}{3EI_2} = \frac{L^3(5P-2F)}{48EI_1}$$

$$\delta_D' = \frac{F(\frac{L}{2})^3}{3EI_2} = \frac{FL^3}{24EI_2}$$

۶۱۳

$$\delta_B^{\uparrow} = \frac{R_B (2L)^3}{48EI} = \frac{R_B L^3}{6EI}$$

$$\Delta = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_B L^3}{6EI} \quad (1)$$

$$2R_A + R_B = 2qL \quad (2)$$

معادله معادل در امتداد قائم:

با فرض اینکه $R_A = R_B = R_C$ از معادله ۲ نتیجه می شود

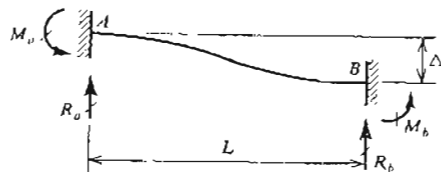
$$R_A = R_B = R_C = \frac{2}{3}qL$$

با قرار دادن $R_B = \frac{2}{3}qL$ در معادله ۱ مقدار Δ بدست می آید.

$$\Delta = \frac{7}{72} \frac{qL^4}{EI}$$

مسئله ۱۰-۱۱

انتهای B تیر دو سر گیردار AB (شکل ۱۱-۳۸) به اندازه Δ شست کرده



شکل ۱۱-۳۸

است. واکنش های سیر را در اثر این تغییر مکان بیابید.

حس: درجه نامعینی استاتیکی تیر مربوط ۲ می باشد. واکنش های R_B و M_B را به عنوان واکنش های اضافی انتخاب می کنیم (شکل ۱۱-۳۹). معادلات سازگاری عبارتند از

$$\delta_B^{\uparrow} + \delta_B^{\downarrow} = -\Delta \quad (1)$$

$$\theta_B^{\uparrow} + \theta_B^{\downarrow} = 0 \quad (2)$$

مقادیر $\delta_B^{\uparrow}$ ، $\delta_B^{\downarrow}$ ، $\theta_B^{\uparrow}$ و $\theta_B^{\downarrow}$ با استفاده از حداقل آخر کتاب بدست می آیند.

$$\delta_B^{\uparrow} = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad ; \quad \theta_B^{\uparrow} = \frac{R_B L^2}{2EI}$$

$$\delta_B^{\downarrow} = \frac{M_B L^2}{2EI} \quad ; \quad \theta_B^{\downarrow} = \frac{M_B L}{EI}$$

۶۱۲

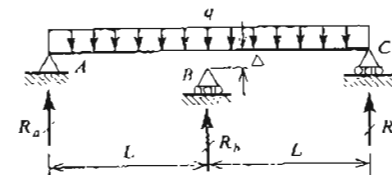
از تساوی $\delta = \delta$ نتیجه می شود

$$R_B = R_C = \frac{11}{10}qL$$

$$(1) \Rightarrow R_A = R_D = \frac{2}{5}qL$$

مسئله ۹-۱۱

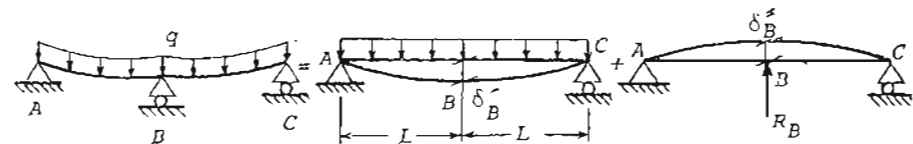
تیر دو دهانه ای مثل از اسکه باری بر آن وارد شود بر تکیه گاههای A و C تکیه دارد (شکل ۱۱-۳۶). در این حالت بین تیر و تکیه گاه B فاصله Δ وجود دارد.



شکل ۱۱-۳۶

موقعی که بار یکنواخت q بر تیر وارد می شود فاصله مربوط از بین می رود و در هر سه تکیه گاه واکنش هایی ایجاد می شود. فاصله Δ باید چقدر باشد تا هر سه واکنش مساوی باشند؟

حل: به علت تقارن $R_A = R_C$ می باشد.



شکل ۱۱-۳۷

شرط سازگاری تغییر مکان ها در تکیه گاه B:

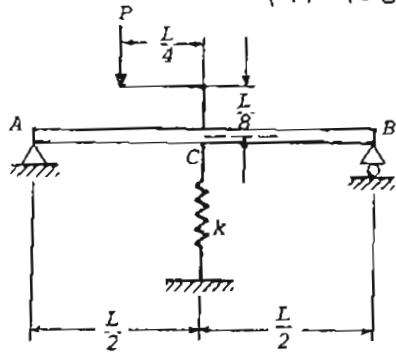
$$\Delta = \delta_B^{\downarrow} - \delta_B^{\uparrow}$$

$\delta_B^{\uparrow}$ و $\delta_B^{\downarrow}$ از حداقل آخر کتاب بدست می آیند.

$$\delta_B^{\downarrow} = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

۶۱۵

نیروی F ایجاد شده در منبر را حساب کنید (شکل ۴۰ - ۱۱) .



شکل ۴۰ - ۱۱

حل : شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در نقطه C (شکل ۴۱ - ۱۱) .

$$\delta = \frac{F}{k} = \delta' + \delta'' \quad (1)$$

δ'' تغییر مکان نقطه C در اثر لنگر $M_0 = \frac{PL}{4}$ می‌باشد که برابر است با صفر، مقدار δ' با استفاده از جداول آخر کتاب برابر است با

$$\delta' = \frac{(P-F)L^3}{48EI} \quad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$\frac{F}{k} = \frac{(P-F)L^3}{48EI}$$

از حل این رابطه F بدست می‌آید.

$$F = \frac{kPL^3}{48EI + kL^3}$$

مسئله ۱۱-۱۲

قاب ABC شکل ۴۲ - ۱۱ در یک گاه A گیردار و در تکیه گاه C روی غلظک قرار دارد و در نقطه B دارای اتصال مصلب می‌باشد. واکنش‌های قاب را تعیین کنید. از تغییر شکل‌های محوری صرف نظر کنید و فقط تغییر شکل ناشی از خمش را در نظر بگیرید. عضوهای AB و BC دارای صلبیت خمشی یکسان EI می‌باشند.

۶۱۴

از جایگزینی این مقادیر در معادلات ۱ و ۲ حاصل می‌شود

$$\frac{1}{2}R_B L + M_B = 0$$

$$\frac{L^2}{6EI} (2R_B L + 3M_B) = -\Delta$$

از حل این دو معادله R_B و M_B بدست می‌آید.

$$R_B = -\frac{12EI\Delta}{L^3} ; \quad M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

از معادله معادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$R_A + R_B = 0 ; \quad R_A = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

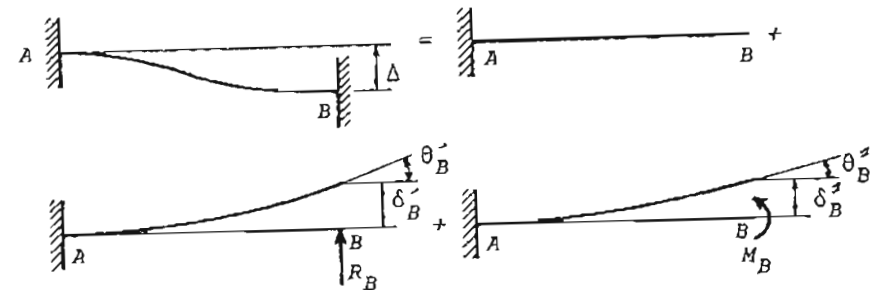
لنگر M_A از معادله تعادل لنگری حول نقطه A بدست می‌آید.

$$M_A + M_B + R_B L = 0 ; \quad M_A = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

جهت واکنش‌ها در روی شکل بجز R_B درست فرض شده است. جهت واکنش R_B در روی شکل باید عوض شود.

مسئله ۱۱-۱۱

تیر AB با صلبیت خمشی EI در نقطه C روی فنری با ثابت فنری k قرار دارد.



شکل ۴۲ - ۱۱

۶۱۷

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در نکته گاه C : (1)
 $\delta_C = \delta_C' = \delta_C'' + \delta_C'''$
 حال مقادیر تغییر مکان‌ها را با استفاده از جداول آخر کتاب پیدا می‌کنیم.

$$\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$\delta_C = L\theta_B = \frac{qL^4}{6EI} \quad (2)$$

$$\delta_C'' = \frac{V_C L^3}{3EI} \quad (3)$$

$$\theta_B' = \frac{M_0 L}{EI} = \frac{V_C L^2}{EI}$$

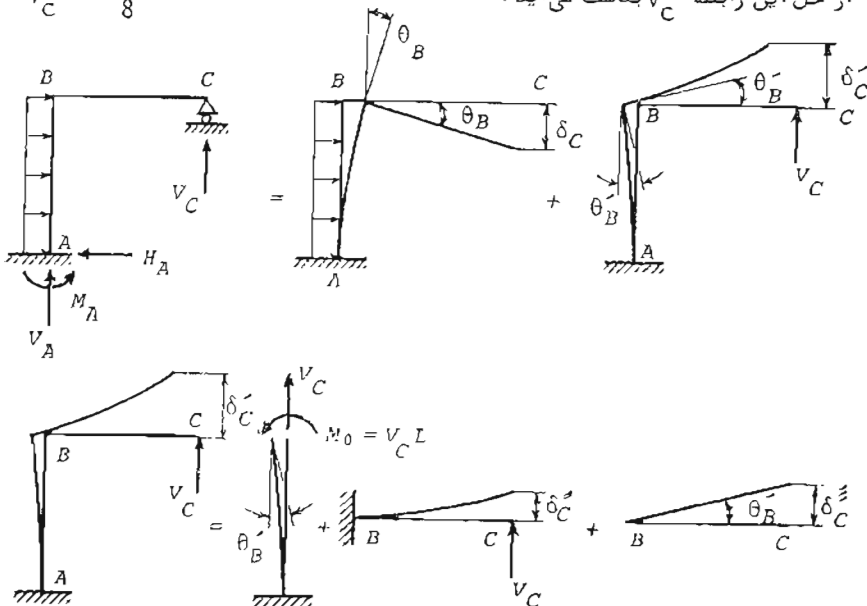
$$\delta_C''' = L\theta_B' = \frac{V_C L^3}{EI} \quad (4)$$

از جایگزینی روابط 2 تا 4 در رابطه 1 خواهیم داشت

$$\frac{qL^4}{6EI} = \frac{V_C L^3}{3EI} + \frac{V_C L^3}{EI}$$

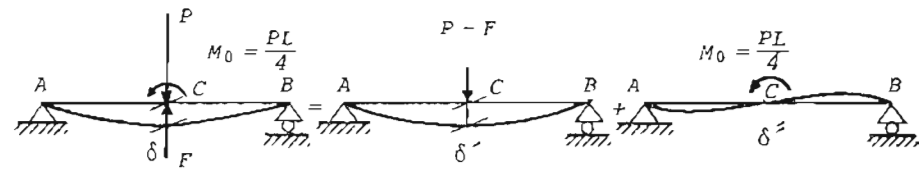
$$V_C = \frac{qL}{8}$$

از حل این رابطه V_C بدست می‌آید.



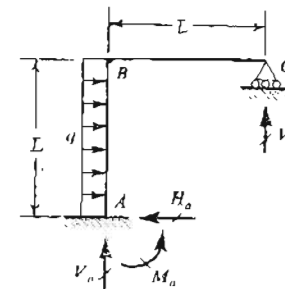
شکل ۴۳-۱۱

۶۱۶



شکل ۴۱-۱۱

حل : تعادل در امتداد افق :
 $H_A = qL$
 درجه نامعینی استاتیکی قاب مربوط واحد می‌باشد. واکنش V_C را به عنوان واکنش اضافی انتخاب می‌کنیم. قاب ABC را به حالت‌های ساده‌تر تجزیه می‌کنیم (شکل ۴۲-۱۱).



شکل ۴۲-۱۱

۶۱۹

مقدار θ_A'' از جداول آخر کتاب بدست می آید (شکل ۴۶-۱۱) .

$$\theta_A'' = \frac{M_A L}{3EI}$$

شرط سازگاری تغییر مکان ها در تکیه گاه A : $\theta_A = \theta_A' - \theta_A'' = 0$
با جایگزینی θ_A' و θ_A'' در معادله سازگاری واکنش M_A بدست می آید .

$$\frac{\alpha L (T_2 - T_1)}{2h} - \frac{M_A L}{3EI} = 0 \quad ; \quad M_A = \frac{3\alpha EI (T_2 - T_1)}{2h}$$

از معادله تعادل لنگری حول نقطه B واکنش R_A نتیجه می شود .

$$R_A = \frac{M_A}{L} = \frac{3\alpha EI (T_2 - T_1)}{2hL}$$

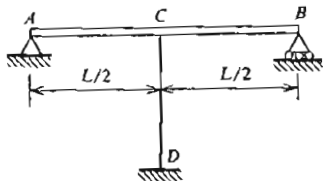
از معادله تعادل در امتداد قائم واکنش R_B بدست می آید .

$$R_B = -R_A = -\frac{3\alpha EI (T_2 - T_1)}{2hL}$$

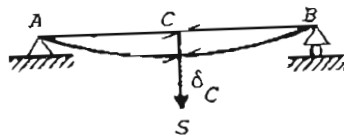
بنابراین جهت واکنش R_B در روی شکل باید عوض شود .

مسئله ۱۴-۱۱

تیر ساده AB (شکل ۴۷-۱۱) در نقطه C به کابل CD متصل می باشد که سمت ولی بدون تنش اولیه است . طول کابل H و مساحت مقطعش A می باشد . موقعی که درجه حرارت به اندازه T درجه تنزل می کند نیروی کششی S در کابل چقدر خواهد بود ؟ فرض کنید تیر و کابل هر دو از یک ماده تشکیل شده باشند .



شکل ۴۷-۱۱



شکل ۴۸-۱۱

۶۱۸

از معادله تعادل در امتداد قائم V_A محاسبه می شود .
 $V_A = -V_C = -\frac{qL}{8}$

از معادله تعادل لنگری حول نقطه A لنگر M_A بدست می آید .

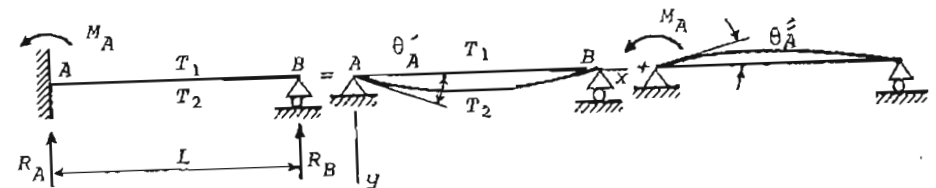
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + LV_C - \frac{qL^2}{2} = 0 \quad ; \quad M_A = \frac{3qL^2}{8}$$

جهت واکنش های V_C ، H_A و M_A درست فرض شده است ولی جهت واکنش V_A باید عوض شود .

مسئله ۱۳-۱۱

تیر AB در تکیه گاه A گیردار می باشد و در تکیه گاه B بر روی غلطک قرار دارد (شکل ۴۴-۱۱) . درجه حرارت در سطح فوقانی آن T_1 و در سطح تحتانی آن T_2 می باشد . واکنش های تیر را پیدا کنید .

حل : تیر مزبور یک درجه نامعین می باشد . واکنش M_A را بعنوان واکنش اضافی انتخاب می کنیم . معادله تغییر مکان بار گذاری شکل ۴۵-۱۱ را قبلاً در مسئله



شکل ۴۴-۱۱

شکل ۴۵-۱۱

شکل ۴۶-۱۱

۱۱-۱۰ بدست آوردیم :

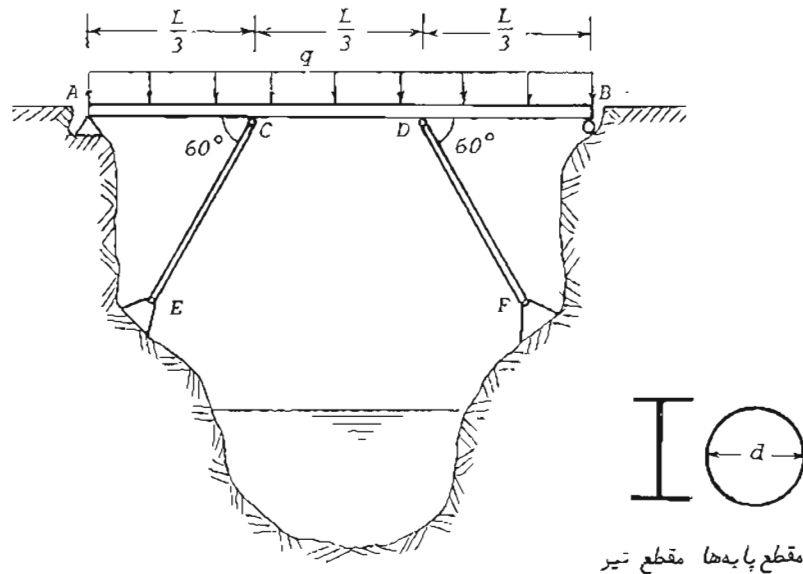
$$v_1 = \frac{\alpha (T_2 - T_1)}{2h} x (L - x)$$

در این رابطه ارتفاع مقطع تیر می باشد . با استفاده از معادله فوق θ_A' محاسبه می شود .

$$\theta_A' = \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\alpha (T_2 - T_1)}{2h} (L - 2x) \Big|_{x=0} = \frac{\alpha L (T_2 - T_1)}{2h}$$

۶۲۱

آنها محوری خواهد بود. به عبارت دیگر در آنها نیروهای فشاری F ایجاد می شود. نیروهای F وارد بر سر AB را (شکل ۵۰-۱۱) می توان به دو مؤلفه تجزیه نمود



شکل ۴۹-۱۱

یکی در امتداد محور تیر و دیگری عمود بر امتداد محور تیر. مؤلفه موازی با امتداد تیر در تیر نیروی محوری ایجاد می کند که از تغییر شکل آن صرف نظر می شود. مؤلفه عمود بر امتداد تیر مانند تکیه گاهی قائم برای عمل می کند. تیر مزبور از لحاظ استاتیکی یک درجه نامعین می باشد. برای تعیین مقدار نیروی نامعینی F از اصل اجتماع اثر قوا استفاده می کنیم (شکل ۵۱-۱۱). تغییر مکان های δ و δ' با استفاده از جداول آخر کتاب بدست می آیند.

$$\delta = \frac{q(\frac{L}{3})}{24EI} (L^3 - \frac{2L^3}{9} + \frac{L^3}{27}) = \frac{22qL^4}{1944EI}$$

$$\delta' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}F(\frac{L}{3})}{6EI} (L^2 - \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{9}) = \frac{5\sqrt{3}FL^3}{324EI}$$

۶۲۰

حاصل: اگر کابل در نقطه C به تیر متصل نبود و می توانست به آزادی تغییر شکل دهد کاهش طول آن به اندازه $\delta = \alpha TH$ می بود (α ضریب انبساط حرارتی ماده مصرفی می باشد). ولی چون کابل به تیر متصل است در آن نیروی کششی S ایجاد می شود و در نتیجه طول آن به اندازه δ_C زیاد می شود. از طرف دیگر نیروی کششی S باعث می شود که نقطه C تیر به اندازه δ_C به طرف پائین انتقال یابد (شکل ۴۸-۱۱). بنابراین شرط سازگاری تغییر مکان ها در نقطه C به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta = \delta_C + \delta'_C \quad (1)$$

تغییر مکان δ_C با استفاده از جداول آخر کتاب برابر است با

$$\delta_C = \frac{SL^3}{48EI}$$

از زیاد طول کابل در اثر نیروی کششی S مساوست با

$$\delta'_C = \frac{SH}{EA}$$

بنابراین با جایگزینی δ_C و δ'_C در معادله ۱ نتیجه می شود

$$\alpha TH = \frac{SL^3}{48EI} + \frac{SH}{EA}$$

از حل این معادله نیروی کششی S بدست می آید.

$$S = \frac{48\alpha THEIA}{L^3 + 48IH}$$

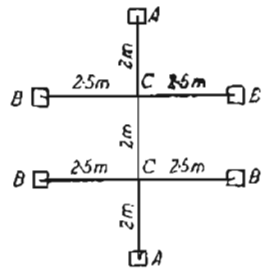
مسئله ۱۵-۱۱

پلی به دهانه L مطابق شکل ۴۹-۱۱ تشکیل شده است از تیر سراسری AB که در مواضع $\frac{L}{3}$ از دو انتهای آن بر روی پایه های مایل CE و DF قرار دارد. مقطع تیر به شکل I و مقطع پایه ها به صورت استوانه توپر می باشد. بار وارد در واحد طول تیر سراسر q است. تیر از فولاد با ضریب ارتجاعی E و پایه ها از بتن با تنش مجاز σ_w می باشد. الف - با صرف نظر نمودن از تغییر شکل محوری تیر و پایه ها مساحت مقطع A لازم برای هر یک از پایه ها را تعیین کنید. ب - اگر $q = 1500 \text{ Kg/m}$ ، $L = 75 \text{ m}$ و $\sigma_w = 300 \text{ Kg/cm}^2$ باشد حداقل قطر پایه ها را تعیین کنید.

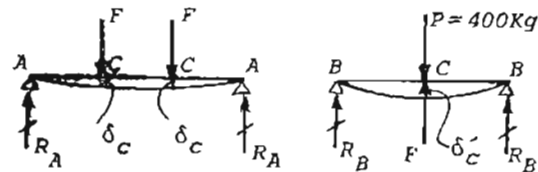
حاصل: چون پایه های CE و DF در دو انتهای تیر متصلی می باشند بار وارد بر

۶۲۲

اثر می‌کنند. هر سه تیر دارای سطح مقطع یکسان می‌باشند. واکنش‌ها را در تکیه گاههای A و B تعیین کنید.



شکل ۵۲-۱۱



شکل ۵۳-۱۱ نمودار جسم آزاد تیر AA

شکل ۵۴-۱۱ نمودار جسم آزاد تیر BB

حل: فرض می‌کنیم بارهای $P = 400 \text{ Kg}$ بر روی تیرهای BB وارد شوند و واکنش بین تیرهای AA و BB را F می‌نامیم. چون تیرها بر روی یکدیگر قرار دارند و از یکدیگر جدا نمی‌شوند شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در نقطه C عبارتست از (نکته‌های ۵۳-۱۱ و ۵۴-۱۱).

$$\delta_C = \delta'_C$$

δ_C و δ'_C را با استفاده از جداول آخر کتاب پیدا می‌کنیم.

$$\delta_C = \frac{F(2)}{6EI} [3(6)(2) - 3(2)^2 - (2)^2] = \frac{20F}{3EI}$$

$$\delta'_C = \frac{(P-F)(5)^3}{48EI} = \frac{125(P-F)}{48EI}$$

$$\frac{20F}{3EI} = \frac{125(P-F)}{48EI}$$

$$F = \frac{25P}{89} = \frac{25(400)}{89} = 112.4 \text{ Kg}$$

با داشتن F واکنش‌های R_B و R_A از نمودارهای جسم آزاد تیرهای AA و BB به دست می‌آیند.

۶۲۲

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در تکیه گاههای C و D : $\delta = \delta'$

$$\frac{22qL^4}{1944EI} = \frac{5\sqrt{3}FL^3}{324EI} : F = \frac{11}{15\sqrt{3}} qL = 0.423qL$$

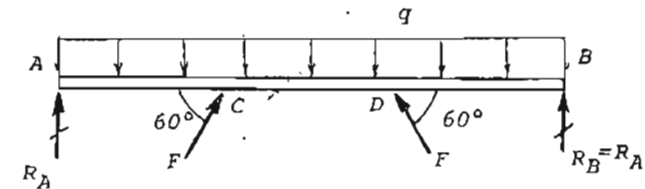
سطح مقطع لازم برای هر یک از پایه‌ها برابر است با

$$A = \frac{F}{\sigma_w} = 0.423 \frac{qL}{\sigma_w}$$

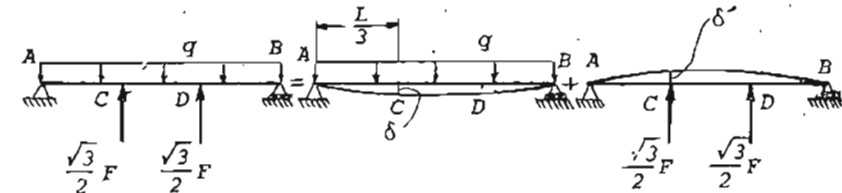
بنابراین حداقل قطر پایه‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\frac{\pi d^2}{4} = 0.423 \frac{qL}{\sigma_w}$$

$$d = \sqrt{0.539 \frac{qL}{\sigma_w}} = \sqrt{0.539 \frac{(15)(7500)}{300}} = 14.2 \text{ cm}$$



شکل ۵۵-۱۱ نمودار جسم آزاد تیر AB



شکل ۵۱-۱۱

مسئله ۱۶-۱۱

در شکل ۵۲-۱۱ سیر ساده‌ای را در تصویر افقی نشان می‌دهد که بر روی آن دو تیر ساده BB تکیه دارند. در محل تقاطع تیرها (در نقاط C) دو بار ۴۰۰ کیلو

۶۲۵

(شکل ۵۷-۱۱)

$$\delta_{Bh} = \alpha L \Delta T - \frac{R_{Bx} L}{AE}$$

$$\delta_{Bv} = \frac{R_{By} L^3}{3EI}$$

(با استفاده از جداول آخر کتاب)

چون سطح مایل با افق زاویه 45° می دارد مؤلفه های افقی و قائم معبر مکان نقطه B را یکدیگر برابری می دهند.

$$\delta_{Bh} = \delta_{Bv} \Rightarrow \alpha L \Delta T - \frac{R_{Bx} L}{AE} = \frac{R_{By} L^3}{3EI}$$

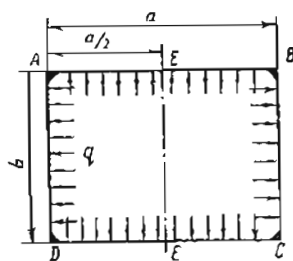
$$R_{Bx} = R_{By} = \frac{\alpha L \Delta T}{\frac{L}{AE} + \frac{L^3}{3EI}}$$

حداکثر لنگر خمشی در نقطه A می باشد که برابر است با

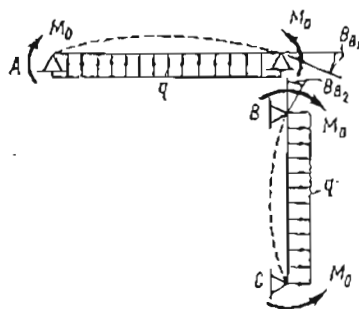
$$M_{max} = M_A = R_{By} L = \frac{\alpha L \Delta T}{\frac{1}{AE} + \frac{L^2}{3EI}}$$

مسئله ۱۸-۱۱

قاب صلب (قابی که اتصالات آن صلب است) شکل ۵۸-۱۱ به اضلاع a و b و صلبیت خمشی EI تحت اثر بار گسترده یکنواخت داخلی q قرار دارد. امیرایش



شکل ۵۸-۱۱



شکل ۵۹-۱۱

۶۲۴

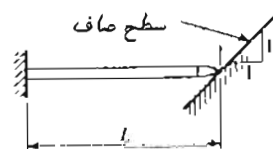
$$R_A = F = 112.4 \text{ Kg}$$

$$R_B = \frac{P-F}{2} = \frac{400-112.4}{2} = 143.8 \text{ Kg}$$

توجه کنید اگر بارهای $P=400 \text{ Kg}$ بر تیر AA وارد شوند، به شرط اینکه تیر AA به تیرهای BB متصل باشد، در جواب مسئله تغییری حاصل نمی شود.

مسئله ۱۷-۱۱

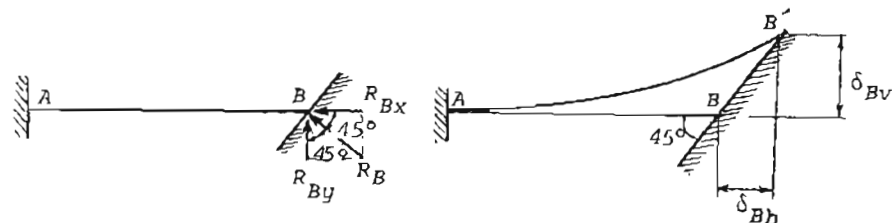
در حرارت معینی سیر طره ای شکل ۵۵-۱۱ بر روی سطح بدون اصطکاکی تکیه دارد



شکل ۵۵-۱۱

بدون اینکه بر آن نیروی وارد کند. اگر درجه حرارت به اندازه ΔT افزایش پیدا کند حداکثر لنگر خمشی در طول سیر جقدر خواهد بود؟ از وزن تیر و همچنین تأثیر نیروی محوری در روی تغییر شکل خمشی صرف نظر کنید. سطح مقطع سیر A، صریب ارجاعی آن E، گشتاور لختی مقطع آن I و صریب انبساط حرارتی ماده تیر α معلوم میباشند.

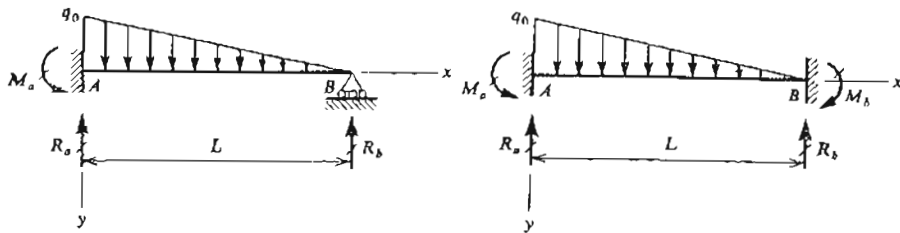
حل: چون سطح مایل بدون اصطکاک می باشد واکنش R_B که در اثر ازدیاد درجه حرارت ایجاد می شود عمود بر سطح می باشد. R_B را به دو مؤلفه قائم و افقی تجزیه می کنیم (شکل ۵۶-۱۱). چون سطح مایل با افق زاویه 45° می سازد دو مؤلفه فوق با یکدیگر مساوی می شوند که آنها را R_{Bx} و R_{By} می نامیم. اگر مؤلفه های قائم و افقی معبر مکان نقطه B را به ترتیب δ_{Bh} و δ_{Bv} می توانیم بنویسیم



شکل ۵۶-۱۱

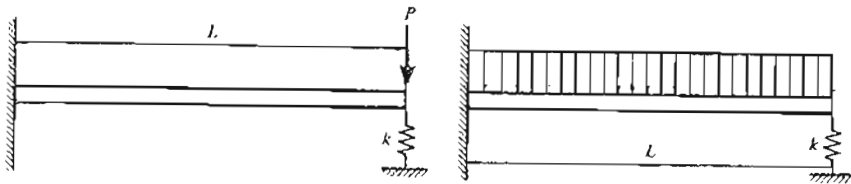
شکل ۵۷-۱۱

۶۲۷



شکل ۱۱-۲-۱

فتری k قرار دارد و تحت اثر بار منمرکز P مطابق شکل می باشد. واکنشی را که از طرف فتر بر تیر وارد می شود حساب کنید.



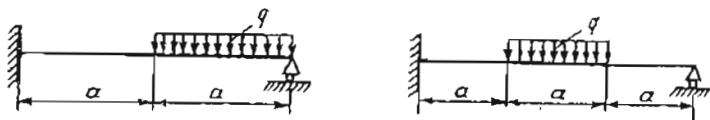
شکل ۱۱-۲-۲

شکل ۱۱-۲-۳

مسئله ۱۱-۲-۴ تیر طره ای شکل ۱۱-۲-۴ در یک انتها بر روی فتری با ثابت فتری k قرار دارد و تحت اثر بار گسترده یکنواختی با شدت q در واحد طول می باشد. واکنشی را که از طرف فتر بر تیر وارد می شود حساب کنید.

شکل ۱۱-۲-۴

مسائل ۱۱-۲-۵ و ۱۱-۲-۶ حداکثر لنگر خمشی و نیروی برشی در طول تیرهای شکل های ۱۱-۲-۵ و ۱۱-۲-۶ را بدست آورید.



شکل ۱۱-۲-۵

شکل ۱۱-۲-۶

مسئله ۱۱-۲-۷ زاویه دوران مقطع عرضی تیر درست در بالای تکیه گاه مفصلی را در شکل ۱۱-۲-۷ حساب کنید.

۶۲۶

فاصله δ بین مقاطع مبای E-E را تعیین کند.

حل: ابتدا فاب را در محل اتصالات بریده مطابق شکل ۵۹-۱۱ به نیرهایی تقسیم می کنیم. چون فاب و بار روی آن متقارن می باشد کافی است فقط دو نیر مثلا AB و BC را در نظر بگیریم. اگر ارا صافه طول تیرها صرف نظر کسم، هر نیر را می توان به صورت تیر ساده ای در نظر گرفت که تحت بار یکنواخت q و دو لنگر مجهول M_0 در دو انتهایش (بر تکیه گاهها) قرار دارد. این لنگرها معرف صلیت اتصالات فاب می باشند. چون اتصالات فاب صلب می باشد زوایای گونه های فاب بعد از تغییر شکل نیز باید به صورت فائمه باقی بمانند. در این صورت شرط سازگاری تغییر مکان ها با توجه به شکل ۵۹-۱۱ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\theta_{B1} = \theta_{B2} \quad (1)$$

زوایای θ_{B1} و θ_{B2} با استفاده از جداول پیوست ۳ کتاب حساب می شوند.

$$\theta_{B1} = \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_0a}{2EI} \quad ; \quad \theta_{B2} = \frac{M_0b}{2EI} - \frac{qb^3}{24EI}$$

پس از جایگزینی مقادیر فوق در معادله ۱ و حل معادله حاصل برای M_0 خواهیم داشت

$$M_0 = \frac{q}{12} (a^2 - ab + b^2)$$

امزایش فاصله δ بین وسط های اضلاع AB و CD نیز با استفاده از جداول آخر کتاب محاسبه می شود.

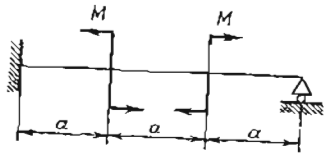
$$\delta = \frac{2}{EI} \left(\frac{5}{384} qa^4 - \frac{M_0 a^2}{8} \right) = \frac{qa^2}{192EI} (a^2 + 4ab - 4b^2)$$

۱۱-۷ مسائل حل نشده

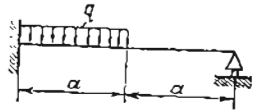
مسائل ۱۱-۲-۱ و ۱۱-۲-۲ معادله منحنی تغییر مکان و واکنش های تیرهای شکل های ۱۱-۲-۱ و ۱۱-۲-۲ را بدست آورید.

مسئله ۱۱-۲-۳ تیر طره ای شکل ۱۱-۲-۳ در یک انتها بر روی فتری با ثابت

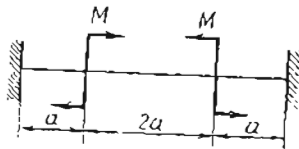
۶۲۹



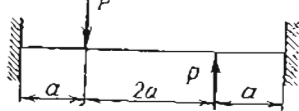
شکل ۱۱-۳-۱



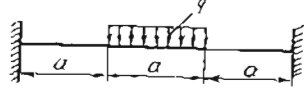
شکل ۱۱-۳-۲



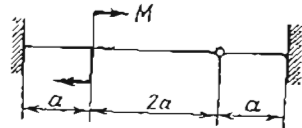
شکل ۱۱-۳-۳



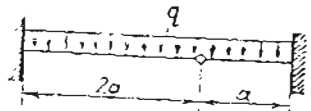
شکل ۱۱-۳-۴



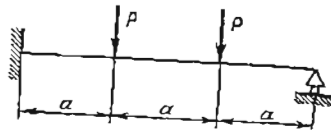
شکل ۱۱-۳-۵



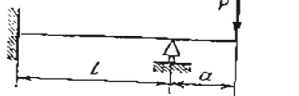
شکل ۱۱-۳-۶



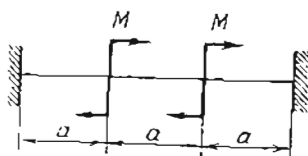
شکل ۱۱-۳-۷



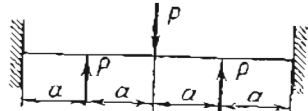
شکل ۱۱-۳-۸



شکل ۱۱-۳-۹



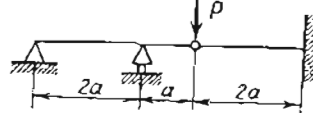
شکل ۱۱-۳-۱۰



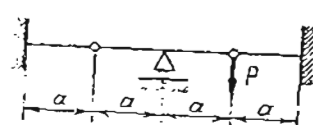
شکل ۱۱-۳-۱۱



شکل ۱۱-۳-۱۲



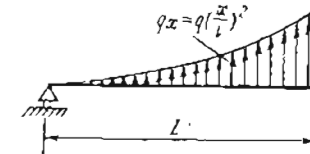
شکل ۱۱-۳-۱۳



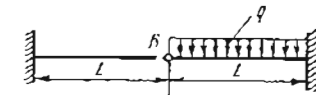
شکل ۱۱-۳-۱۴

۶۲۸

مسئله ۱۱-۲-۸ تغییر مکان مفصل B تیر شکل ۱۱-۲-۸ را محاسبه کنید.



شکل ۱۱-۲-۷



شکل ۱۱-۲-۸

مسائل ۱۱-۳-۱ تا ۱۱-۳-۴ نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی را برای تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۱ تا ۱۱-۳-۴ رسم کنید و از روی آنها لنگر خمشی و نیروی برشی ماکزیمم را (بطور عددی) در طول تیر بدست آورید. در مسئله ۱۱-۳-۴ فرض کنید $L = 2a$.

مسائل ۱۱-۳-۵ تا ۱۱-۳-۱۰ در شکل‌های ۱۱-۳-۵ تا ۱۱-۳-۱۰ با فرض اینکه طول تیر برابر 3m و تنش محاز 1600 Kg/cm^2 باشد، بار محاز تیر را حساب کنید. تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۵ و ۱۱-۳-۶ دارای مقطع عرضی دایره به قطر 10cm می‌باشند. تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۷ و ۱۱-۳-۸ دارای مقطع عرضی دایره‌ای تو خالی به قطر خارجی 12cm و قطر داخلی 8cm می‌باشند. مقطع عرضی تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۹ و ۱۱-۳-۱۰ مربع به ابعاد $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ می‌باشد.

مسائل ۱۱-۳-۱۱ تا ۱۱-۳-۱۴ لنگر خمشی ماکزیمم تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۱۱ تا ۱۱-۳-۱۴ را بدست آورید.

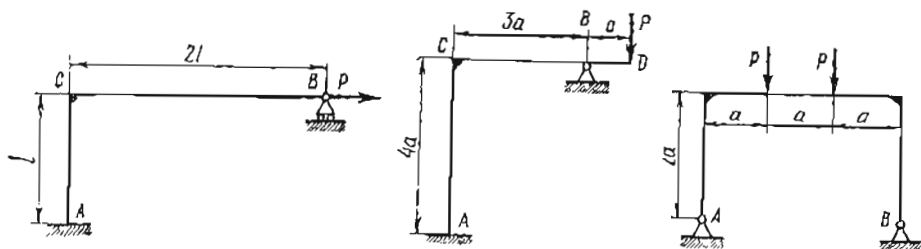
مسائل ۱۱-۳-۱۵ تا ۱۱-۳-۱۸ تغییر مکان اتصال مفصلی را در تیرهای شکل‌های ۱۱-۳-۱۵ تا ۱۱-۳-۱۸ بدست آورید.

مسائل ۱۱-۳-۱۹ و ۱۱-۳-۲۰ تغییر مکان قائم بلوک لغزنده را در شکل‌های ۱۱-۳-۱۹ و ۱۱-۳-۲۰ محاسبه کنید.

۶۳!

مسائل ۱۱-۳-۲۱ تا ۱۱-۳-۲۴ نیروی محوری N را در میله‌های کشی سازه‌های شکل‌های ۱۱-۳-۲۱ تا ۱۱-۳-۲۴ بدست آورید.

مسائل ۱۱-۳-۲۵ تا ۱۱-۳-۲۷ واکنش قاب‌های شکل‌های ۱۱-۳-۲۵ تا ۱۱-۳-۲۸ را در تکیه‌گاه B محاسبه کنید.

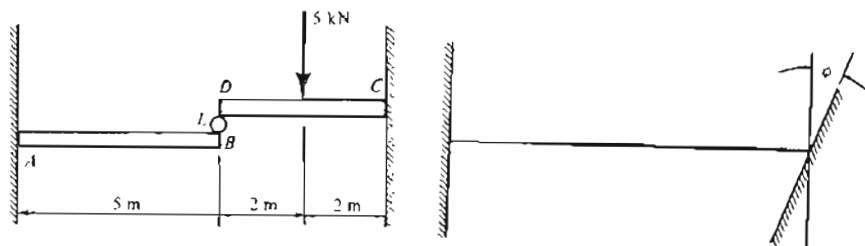


شکل ۱۱-۳-۲۵

شکل ۱۱-۳-۲۶

شکل ۱۱-۳-۲۷

مسئله ۱۱-۳-۲۸ در شکل‌های ۱۱-۳-۲۸ و CD و AB تیرهای طره‌ای هستند که بین آنها‌های آزاد آنها غلطک E وجود دارد. هر دو تیر از فولاد با ضریب ارتجاعی $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ می‌باشد. گشتاور لختی تیر AB برابر 2000 cm^4 و گشتاور لختی تیر CD برابر 3000 cm^2 می‌باشد. واکنش را در نقطه E پیدا کنید.

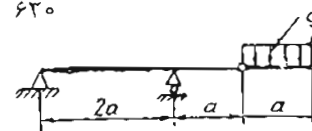


شکل ۱۱-۳-۲۸

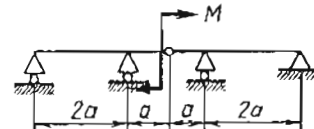
شکل ۱۱-۳-۲۹

مسئله ۱۱-۳-۲۹ نیروی دو سرگیردار شکل ۱۱-۳-۲۹ دارای صلبیت خمشی EI و طول L می‌باشد. انتهای راست به اندازه زاویه ϕ مطابق شکل دوران داده میشود.

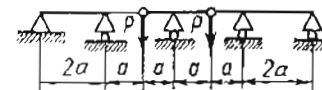
۶۳۰



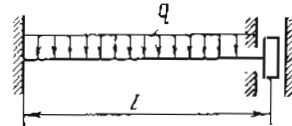
شکل ۱۱-۳-۱۵



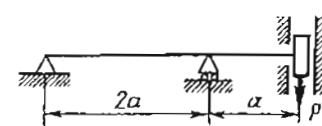
شکل ۱۱-۳-۱۶



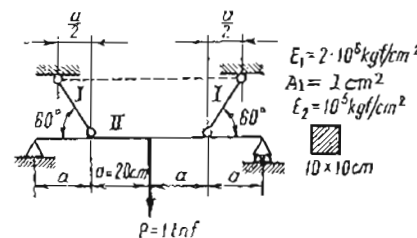
شکل ۱۱-۳-۱۷



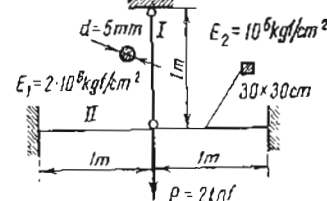
شکل ۱۱-۳-۱۸



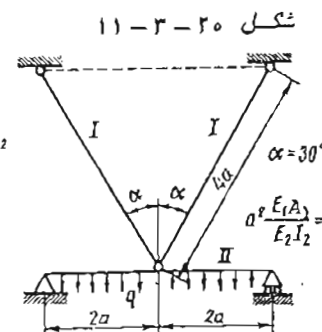
شکل ۱۱-۳-۱۹



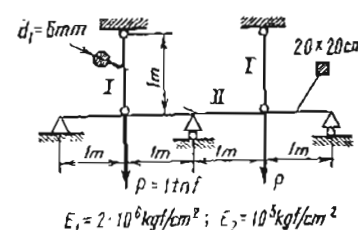
شکل ۱۱-۳-۲۰



شکل ۱۱-۳-۲۱



شکل ۱۱-۳-۲۲

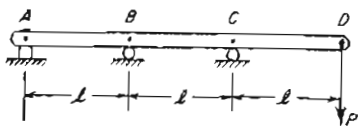


شکل ۱۱-۳-۲۳

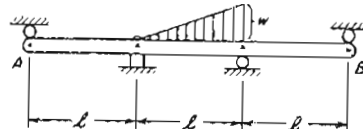
۶۳۳

دست آورید. نیز در نقطه C پیوسته است و صلیب خمشی آن در سراسر طولش ثابت می باشد.

مسئله ۱۱-۳-۳۴ واکنش R_A در تیر سراسری شکل ۱۱-۳-۳۴ را محاسبه کنید.



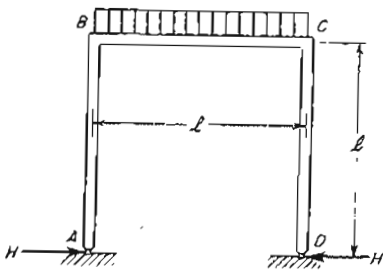
شکل ۱۱-۳-۳۴



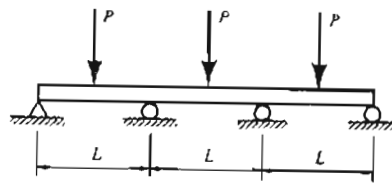
شکل ۱۱-۳-۳۵

مسئله ۱۱-۳-۳۵ واکنش های R_B و R_A تیر شکل ۱۱-۳-۳۵ را محاسبه کنید.

مسئله ۱۱-۳-۳۶ صلیب خمشی قاب ABCD (شکل ۱۱-۳-۳۶) در سراسر طول آن ثابت و برابر EI است. نیروی افقی H در محل هر تکیه گاه را حساب کنید. شدت بار گسرنده یکنواخت در قسم BC برابر q می باشد.



شکل ۱۱-۳-۳۶



شکل ۱۱-۳-۳۷

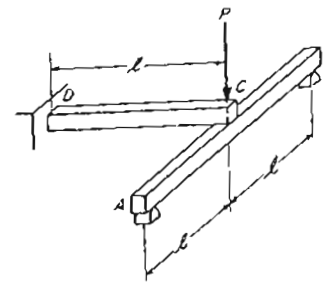
مسئله ۱۱-۳-۳۷ واکنش های تیر سراسری شکل ۱۱-۳-۳۷ و لنگر خمشی ماکزیمم در آن را حساب کنید.

مسئله ۱۱-۴-۱ درجه حرارت سطوح فوقانی و تحتانی تیر سراسری ABC (شکل

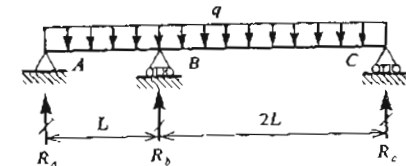
۶۳۲

واکنش های لنگری ایجاد شده در دو اتسهای سیر در اثر دوران میزور را پیدا کنید.

مسئله ۱۱-۳-۳۰ دو سیر چوبی از یک نوع چوب بریده شده و مطابق شکل ۱۱-۳-۳۰ قرار داده شده اند. اتسهای آزاد تر طره ای DC بر وسط تر ساده AB منکی می باشد. هر دو تیر افقی و عمود بر یکدیگر می باشد. بنسیر مکان قائم δ در نقطه نمانی دو سیر را در اثر بار P وارد بر اتسهای سیر طره ای حساب کنید.



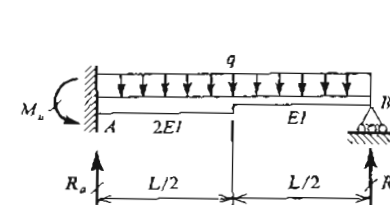
شکل ۱۱-۳-۳۰



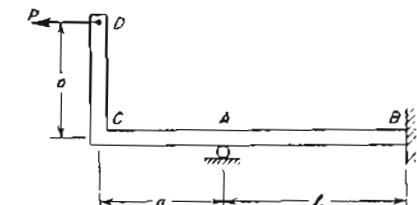
شکل ۱۱-۳-۳۱

مسئله ۱۱-۳-۳۱ واکنش های سیر سراسری شکل ۱۱-۳-۳۱ را تحت بار گذاری گسرنده یکنواخت بدست آورید.

مسئله ۱۱-۳-۳۲ در شکل ۱۱-۳-۳۲ یک تیر غیر منشوری AB تحت بار گسرنده یکنواخت q مشاهده می شود. واکنش های تیر را پیدا کنید.



شکل ۱۱-۳-۳۲



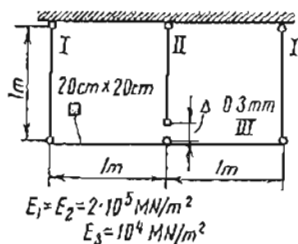
شکل ۱۱-۳-۳۳

مسئله ۱۱-۳-۳۳ واکنش اضافی R_A در تکیه گاه A را در شکل ۱۱-۳-۳۳ به

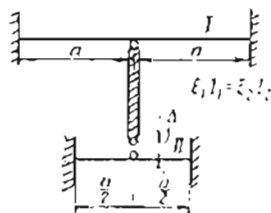
۶۳۵

مسئله ۱۱-۴-۴ اگر درجه حرارت میله‌های قائم (شکل ۱۱-۴-۴) به اندازه 50°C کاهش یابد چه مقدار تنش در آنها ایجاد می‌شود؟ فرض کنید قبل از امتداد درجه حرارت، سازه فاقد تنش باشد. ضریب انبساط حرارتی میله‌های قائم $12.5 \times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ، ضریب ارتجاعی آنها $2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ و مساحت مقطع عرضی هر یک از آنها 2cm^2 می‌باشد. ضریب ارتجاعی نیرو افقی 10^5Kg/cm^2 و مقطع عرضی آن در روی شکل مشخص شده است.

مسئله ۱۱-۴-۵ در شکل ۱۱-۴-۵ تنش‌های ناشی از انداره نبودن عضو میانی را در میله‌های قائم حساب کنید. مساحت مقطع عرضی هر یک از میله‌های قائم 1cm^2 می‌باشد.



شکل ۱۱-۴-۵



شکل ۱۱-۴-۶

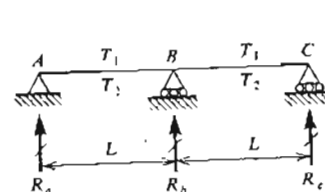
مسئله ۱۱-۴-۶ دو نیرو دو سر گیردار باید بوسیله میله صلبی به یکدیگر متصل شوند (شکل ۱۱-۴-۶). طول میله صلب قائم به اندازه Δ کوتاه‌تر از اندازه لازم است. نیروی ایجاد شده در میله صلب قائم را پس از سوار کردن سازه حساب کنید.

مسئله ۱۱-۵-۱ تغییر مکان افقی λ استهای آزاد تیر ساده‌ای تحت بار گسترده یکواخت q را حساب کنید.

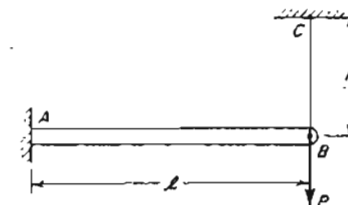
مسئله ۱۱-۵-۲ فرض کنید منحنی تغییر مکان تیری با تکیه گاههای غیر قابل حرکت (شکل ۱۱-۲۳) بوسیله معادله $v = \delta \sin \frac{\pi x}{L}$ داده شده باشد. نیروی افقی H در دو انتهای تیر حساب کنید.

۶۳۴

مسئله ۱۱-۴-۱ به ترتیب T_1 و T_2 می‌باشد. واکنش‌های ایجاد شده در اثر این اختلاف درجه حرارت را حساب کنید.



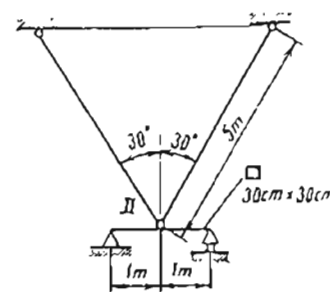
شکل ۱۱-۴-۱



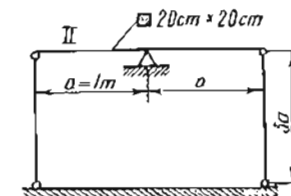
شکل ۱۱-۴-۲

مسئله ۱۱-۴-۲ سازه شکل ۱۱-۴-۲ در درجه حرارت $T = 21^{\circ}\text{C}$ بدون تنش می‌باشد. اگر درجه حرارت به 18°C کاهش یابد نیروی کششی در میله قائم CB را حساب کنید. مقطع عرضی تیر به شکل مستطیل به عرض 7.5cm و ارتفاع 2.5cm و مقطع عرضی میله قائم به شکل دایره و به قطر 0.5cm می‌باشد. ضریب انبساط حرارتی میله برابر $12.5 \times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ و ضریب ارتجاعی میله و تیر $E = 2 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ می‌باشد. طول میله و تیر را یکسان و برابر 25cm فرض کنید.

مسئله ۱۱-۴-۳ سازه شکل ۱۱-۴-۳ بدون تنش می‌باشد. اگر درجه حرارت میله‌های مایل به اندازه 50°C کاهش یابد چه مقدار تنش در آنها ایجاد می‌شود؟ ضریب انبساط حرارتی میله‌های مایل $12.5 \times 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ، ضریب ارتجاعی آنها $2 \times 10^5 \text{MN/m}^2$ و مساحت مقطع عرضی هر یک از آنها برابر 1cm^2 است. ضریب ارتجاعی تیر 10^4MN/m^2 و مقطع عرضی آن در روی شکل نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۴-۳



شکل ۱۱-۴-۴

۶۳۷

$\frac{8}{11} Pa$	: ۱۱-۲-۱۲	$\frac{15}{28} M$	: ۱۱-۲-۱۱
$\frac{3}{4} Pa$	: ۱۱-۲-۱۴	$\frac{9}{8} qa^2$	: ۱۱-۲-۱۳
$\frac{qa^4}{20EI}$	: ۱۱-۲-۱۶	$\frac{3qa^4}{32EI}$	: ۱۱-۲-۱۵
$\frac{Pa^3}{4EI}$	: ۱۱-۲-۱۸	$\frac{7Ma^2}{12EI}$	: ۱۱-۲-۱۷
$\frac{Pa^3}{12EI}$	: ۱۱-۲-۲۰	$\frac{qL^4}{24EI}$	: ۱۱-۲-۱۹
$\frac{5\sqrt{3}}{12} qa$	: ۱۱-۲-۲۲	720 Kg	: ۱۱-۲-۲۱
172 Kg	: ۱۱-۲-۲۴	47 Kg	: ۱۱-۲-۲۳
$R_{Bx} = \frac{3}{16} P$; $R_{By} = \frac{17}{12} P$	: ۱۱-۲-۲۶	$R_B = \frac{3}{20} P$	: ۱۱-۲-۲۵
398 N	: ۱۱-۲-۲۸	$R_{Bx} = \frac{3}{13} P$	: ۱۱-۲-۲۷
$\frac{4\phi EI}{L}$	در استهای راست تیر	$\frac{2\phi EI}{L}$	در استهای چپ تیر : ۱۱-۲-۲۹
		$\frac{PL^3}{9EI}$	: ۱۱-۲-۳۰
$R_a = \frac{qL}{8}$; $R_b = \frac{33qL}{16}$; $R_c = \frac{13qL}{16}$			: ۱۱-۲-۳۱
$R_a = \frac{31qL}{48}$; $R_b = \frac{17qL}{48}$; $M_a = \frac{7qL^2}{48}$			: ۱۱-۲-۳۲
$\frac{P}{4}$ به طرف بالا	: ۱۱-۲-۳۴	$R_A = \frac{3Pa}{2L}$	: ۱۱-۲-۳۳
$H = \frac{qL}{20}$	: ۱۱-۲-۳۶	$R_A = \frac{wL}{45}$; $R_B = \frac{wL}{36}$	: ۱۱-۲-۳۵
$\frac{7P}{20}$; $\frac{23P}{20}$; $\frac{23P}{20}$; $\frac{7P}{20}$; $M_{max} = \frac{7PL}{40}$			: ۱۱-۲-۳۷

۶۳۶

۱۱-۸ جواب های مسائل حل نشده

$v = \frac{q_0 x^2}{120EI} (4L^3 - 8L^2x + 5Lx^2 - x^3)$	: ۱۲-۲-۱		
$R_a = \frac{2q_0 L}{5} ; R_b = \frac{q_0 L}{10} ; M_a = \frac{q_0 L^2}{15}$			
$v = \frac{q_0 x^2}{120EI} (3L^3 - 7L^2x + 5Lx^2 - x^3)$	: ۱۲-۲-۲		
$R_a = \frac{7q_0 L}{20} ; R_b = \frac{3q_0 L}{20} ; M_a = \frac{q_0 L^2}{20} ; M_b = \frac{q_0 L^2}{30}$			
$\frac{qL}{8(\frac{1}{3} + \frac{EI}{KL^3})}$	: ۱۱-۲-۴	$\frac{P}{1 + \frac{3EI}{KL^3}}$	: ۱۱-۲-۳
$ M _{\max} = \frac{7}{32} qa^2$	; $ V _{\max} = \frac{41}{63} qa$		: ۱۱-۲-۵
$ M _{\max} = \frac{13}{24} qa^2$	; $ V _{\max} = \frac{49}{72} qa$		: ۱۱-۲-۶
$\delta_B = \frac{qL^4}{16EI}$	: ۱۱-۲-۸	$\theta = \frac{qL^3}{240EI}$	: ۱۱-۲-۷
$ M _{\max} = \frac{5}{6} M$	; $ V _{\max} = \frac{1}{6} \frac{M}{a}$		: ۱۱-۲-۱
$ M _{\max} = Pa$	; $ V _{\max} = \frac{4}{3} P$		: ۱۱-۲-۲
$ M _{\max} = \frac{9}{32} qa^2$	; $ V _{\max} = \frac{57}{64} qa$		: ۱۱-۲-۳
$ M _{\max} = Pa$	; $ V _{\max} = P$		: ۱۱-۲-۴
$M_w = 2850 \text{ mKg}$	: ۱۱-۲-۶	$M_w = 3140 \text{ mKg}$	: ۱۱-۲-۵
$P_w = 11600 \text{ kg}$	: ۱۱-۲-۸	$P_w = 7730 \text{ Kg}$	: ۱۱-۲-۷
$q_w = 5.2 \text{ t/m}$	: ۱۱-۲-۱۰	$q_w = 7.4 \text{ t/m}$	: ۱۱-۲-۹

حجت الله عادلی

مقاومت مصالح

فصل دوازدهم

کار برد توابع استثنائی در تحلیل تیرها

۱-۱۲ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

در فصل هفتم نحوه رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را مورد بررسی قرار دادیم. بخصوص مشاهده کردیم وقتی که بارها یا لنگرهای متمرکز بر تیر اثر می کنند معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در قسمت های مختلف تیر باید بطور جداگانه نوشته شود. با استفاده از توابع استثنائی می توان این معادلات را به طور خلاصه تری نوشت. توابع استثنائی را با رابطه زیر می توان تعریف نمود:

$$f_n(x) = \langle x-a \rangle^n \quad (12-1)$$

مفهوم عبارت سمت راست را برای وقتی که $n \geq 0$ بدین صورت تعریف می کنیم: اگر جمله درون پرانتز گوشه دار منفی باشد (یعنی اگر $x < a$) تابع $f_n(x)$ برابر صفر و اگر جمله درون پرانتز گوشه دار مثبت باشد (یعنی اگر $x > a$) تابع مزبور برابر $(x-a)^n$ می باشد. این تابع از قانون انتگرال گیری پیروی می کند.

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^n dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0 \text{ برای}) \quad (12-2)$$

لازم است قانون انتگرال گیری را برای حالت های $n = -1$ و $n = -2$ نیز تعریف کنیم.

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-1} dx = \langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & (\text{ برای } x < a) \\ 1 & (\text{ برای } x > a) \end{cases} \quad (12-3)$$

۶۳۸

$$R_b = -2R_a = -2R_c = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{hL} \quad : 11-4-1$$

$$109 \text{ MN/m}^2 \quad : 11-4-2 \quad 35.5 \text{ Kg} \quad : 11-4-2$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma_2 = -7.5 \text{ MN/m}^2 \quad : 11-4-5 \quad 288.5 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 11-4-4$$

$$\frac{64\Delta EI}{3a^3} \quad : 11-4-6$$

$$H = \frac{\pi^2 EA \delta^2}{4L^2} \quad : 11-5-2 \quad \lambda = \frac{17q^2 L^7}{40320 E^2 I^2} \quad : 11-5-1$$

فصل دوازدهم

کاربرد توابع استثنائی در تحلیل تیرها

۱-۱۲ نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

در فصل هفتم نحوه رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را مورد بررسی قرار دادیم. به خصوص مشاهده کردیم وقتی که بارها یا لنگرهای متمرکز بر تیر اثر می کنند معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در قسمت های مختلف تیر باید بطور جداگانه نوشته شود. با استفاده از توابع استثنائی می توان این معادلات را به طور خلاصه تری نوشت. توابع استثنائی را با رابطه زیر می توان تعریف نمود:

$$f_n(x) = \langle x-a \rangle^n \quad (12-1)$$

مفهوم عبارت سمت راست را برای وقتی که $n \geq 0$ بدین صورت تعریف می کنیم: اگر جمله درون پرانتز گوشه دار منفی باشد (یعنی اگر $x < a$) تابع $f_n(x)$ برابر صفر و اگر جمله درون پرانتز گوشه دار مثبت باشد (یعنی اگر $x > a$) تابع مزبور برابر $(x-a)^n$ می باشد. این تابع از قانون انتگرال گیری پیروی می کند.

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^n dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0 \text{ برای}) \quad (12-2)$$

لازم است قانون انتگرال گیری را برای حالت های $n = -1$ و $n = -2$ نیز تعریف کنیم.

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-1} dx = \langle x-a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & (x < a \text{ برای}) \\ 1 & (x > a \text{ برای}) \end{cases} \quad (12-3)$$

۶۳۸

$$R_b = -2R_a = -2R_c = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{hL} \quad : 11-4-1$$

$$109 \text{ MN/m}^2 \quad : 11-4-2 \quad 35.5 \text{ Kg} \quad : 11-4-2$$

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\sigma_2 = -7.5 \text{ MN/m}^2 \quad : 11-4-5 \quad 288.5 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 11-4-2$$

$$\frac{64\Delta EI}{3a^3} \quad : 11-4-6$$

$$H = \frac{\pi^2 EA \delta^2}{4L^2} \quad : 11-5-2 \quad \lambda = \frac{17q^2 L^7}{40320 E^2 I^2} \quad : 11-5-1$$

۶۴۰

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-2} dx = \langle x-a \rangle^{-1} \quad (12-4)$$

توابع $\langle x-a \rangle^{-1}$ و $\langle x-a \rangle^{-2}$ در همه جا صفر می‌باشند مگر در $x=a$ که مفاد بر آنها بی‌سبابت می‌باشد بطوریکه روابط فوق صادق باشند.

پنج نمودار شکل ۱-۱۲ انواع استثنائی با درجعات مختلف را که برای سازه‌ها بارگذاری متداول سیرها لازم می‌باشند نشان می‌دهد. وقتی که بارگذاری در روی تیرها استفاده از توابع مریور بسته شد، پیدا کردن نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیرها استفاده از قواعد انتگرال‌گیری فوق به سهولت انجام می‌گیرد.

در موقع استفاده از توابع استثنائی معمولاً "جهت مثبت بار به طرف بالا فرض می‌شود (شکل ۱-۱۲)، بنابراین رابطه ۳-۷ (رابطه بین شدت بار w و نیروی برشی V) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dV}{dx} = w \quad (12-5)$$

رابطه ۴-۷ را نیز در اینجا مجدداً می‌نویسیم.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (12-6)$$

کاربرد توابع استثنائی برای پیدا کردن نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرها را به کمک چند مثال شرح می‌دهیم.

مثال ۱-۱۲

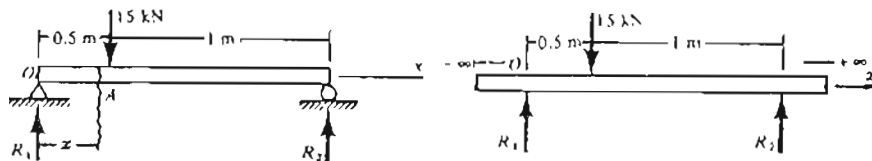
تیر ساده شکل ۲-۱۲ تحت اثر بار متمرکز ۱۵ kN قرار دارد. با استفاده از توابع استثنائی معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر را نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید.

حل: واکنش‌های R_1 و R_2 به صورت نیروهای متمرکز در روی شکل ۲-۱۲ نشان داده شده‌اند. می‌توان فرض نمود که تیر از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد. در این صورت تیر مورد مطالعه قسمتی از این تیر فرضی را (مطابق شکل ۳-۱۲) تشکیل می‌دهد. در سمت چپ واکنش R_1 و در سمت راست واکنش R_2 نیروی برشی در بی‌نهایت طول وجود ندارد و در نتیجه نیروی برشی و لنگر خمشی در این نواحی باید برابر صفر باشند.

۶۴۱

$w(x) = M_0(x-a)^{-2}$	
$w(x) = F_0(x-a)^{-1}$	
$w(x) = w_0(x-a)^0$	
$w(x) = \frac{dw}{dx}(x-a)^1$	
$w(x) = \frac{C(x-a)^2}{2}$	

شکل ۱-۱۲

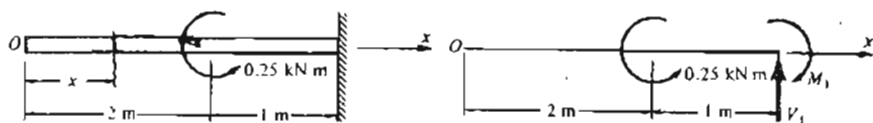


شکل ۲-۱۲

شکل ۳-۱۲

۶۴۳

ولنگر خمشی در طول تیر را با استفاده از انواع استثنائی نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید.



شکل ۶-۱۲

شکل ۷-۱۲

حل: نمودار جسم آزاد تیر در شکل ۷-۱۲ رسم شده است. V_1 و M_1 واکنش‌های دیوار تکیه گاه می‌باشند. تابع شدت بار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = -0.25 \langle x-2 \rangle^{-2} + V_1 \langle x-3 \rangle^{-1} + M_1 \langle x-3 \rangle^{-2}$$

پس از انتگرال گیری از رابطه فوق نیروی برشی بدست می‌آید:

$$V(x) = \int_{-\infty}^x w dx = -0.25 \langle x-2 \rangle^{-1} + V_1 \langle x-3 \rangle^0 + M_1 \langle x-3 \rangle^{-1}$$

اگر نقطه‌ای از تیر فرضی بی‌نهایت طویل درست در سمت راست V_1 را در نظر بگیریم با توجه به تعریف تابع $\langle x-a \rangle^{-1}$ نتیجه می‌شود که $V_1 = 0$. بنابراین رابطه فوق بصورت زیر در می‌آید:

$$V(x) = -0.25 \langle x-2 \rangle^{-1} + M_1 \langle x-3 \rangle^{-1}$$

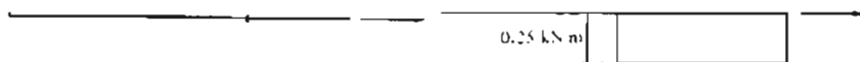
پس از انتگرال گیری از رابطه فوق لنگر خمشی بدست می‌آید:

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V dx = -0.25 \langle x-2 \rangle^0 + M_1 \langle x-3 \rangle^0$$

لنگر خمشی در نقطه‌ای درست در سمت راست تکیه گاه برابر صفر است. بنابراین نتیجه می‌شود

$$-0.25 + M_1 = 0 \quad ; \quad M_1 = 0.25 \text{ kNm}$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر به ترتیب در شکل‌های ۸-۱۲ و ۹-۱۲ رسم شده‌اند.



شکل ۸-۱۲ نمودار نیروی برشی

شکل ۹-۱۲ نمودار لنگر خمشی

۶۴۲

با استفاده از شکل ۱-۱۲ تابع شدت بار را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$w(x) = R_1 \langle x \rangle^{-1} - 15 \langle x-0.5 \rangle^{-1} + R_2 \langle x-1.5 \rangle^{-1} \quad (12-7)$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۵ و قواعد انتگرال گیری ۱۲-۲ و ۱۲-۳، نیروی برشی به دست می‌آید:

$$V(x) = \int_{-\infty}^x w dx = R_1 \langle x \rangle^0 - 15 \langle x-0.5 \rangle^0 + R_2 \langle x-1.5 \rangle^0 \quad (12-8)$$

همین طور با استفاده از رابطه ۱۲-۶ و قواعد انتگرال گیری فوق لنگر خمشی در طول تیر محاسبه می‌شود:

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V dx = R_1 \langle x \rangle^1 - 15 \langle x-0.5 \rangle^1 + R_2 \langle x-1.5 \rangle^1 \quad (12-9)$$

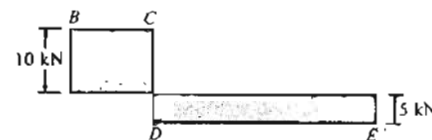
واکنش‌های R_1 و R_2 را می‌توانیم از معادلات ۱۲-۸ و ۱۲-۹ بدست آوریم. برای x کمی بزرگتر از ۱.۵، یعنی برای نقاط سمت راست واکنش R_2 ، نیروی برشی $V(x)$ باید برابر صفر باشد. بنابراین از معادله ۱۲-۸ نتیجه می‌شود

$$R_1 - 15 + R_2 = 0$$

برای $x=1.5$ (در روی تکیه گاه راست)، لنگر خمشی $M(x)$ باید صفر باشد. بنابراین از معادله ۱۲-۹ حاصل می‌شود

$$R_1(1.5) - 15(1.5-0.5) + 0 = 0$$

از حل دو معادله فوق $R_1=10\text{kN}$ و $R_2=5\text{kN}$ بدست می‌آیند. البته با استفاده از معادلات تعادل نیز می‌توانستیم به همین نتیجه برسیم. پس از جایگزینی مقادیر واکنش‌ها در معادلات ۱۲-۸ و ۱۲-۹ می‌توان نمودارهای نیروی برشی (شکل ۴-۱۲) و لنگر خمشی (شکل ۵-۱۲) را رسم نمود.



شکل ۴-۱۲ نمودار نیروی برشی

شکل ۵-۱۲ نمودار لنگر خمشی

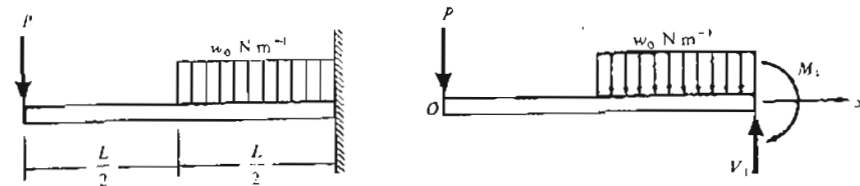
مثال ۲-۱۲

تیر طره‌ای شکل ۶-۱۲ تحت اثر لنگر ۲۵۰mN قرار دارد. معادلات نیروی برشی

مثال ۱۲-۳

۶۴۴

معادلات سیروی برشی و لنگر خمشی برای سر طره‌ای شکل ۱۰-۱۲ را با استفاده از توابع استثنائی نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید.



شکل ۱۱-۱۲

شکل ۱۰-۱۲

حل: نمودار جسم آزاد نیز در شکل ۱۱-۱۲ رسم شده است. تابع بار صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = -P\langle x \rangle^{-1} - w_0\langle x-L/2 \rangle^0 + V_1\langle x-L \rangle^{-1} + M_1\langle x-L \rangle^{-2}$$

از این رابطه انتگرال می‌گیریم تا نیروی برشی در طول سر بدست آید.

$$V(x) = -P\langle x \rangle^0 - w_0\langle x-0.5L \rangle^1 + V_1\langle x-L \rangle^0 + M_1\langle x-L \rangle^{-1}$$

سیروی برشی در نقطه‌ای از سر فرضی بی‌سهاب طویل درست در سمت راست V_1 برابر صفر است. بنابراین

$$-P - w_0(L-0.5L) + V_1 = 0 \quad ; \quad V_1 = P + \frac{w_0 L}{2}$$

از معادله نیروی برشی انتگرال می‌گیریم تا لنگر خمشی بدست آید.

$$M(x) = -P\langle x \rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x-0.5L \rangle^2 + \left(P + \frac{w_0 L}{2}\right)\langle x-L \rangle^1 + M_1\langle x-L \rangle^0$$

لنگر خمشی در نقطه‌ای از سر فرضی بی‌نهایت طویل درست در سمت راست تکیه گاه راست برابر صفر است. از این شرط لنگر تکیه گاهی M_1 بدست می‌آید.

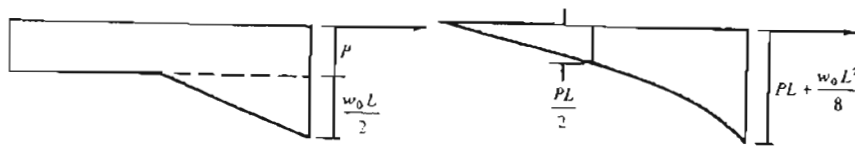
$$M_1 = PL + \frac{w_0 L^2}{8}$$

نمودارهای سیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل‌های ۱۲-۱۲ و ۱۲-۱۳ رسم شده‌اند.

مثال ۱۲-۴

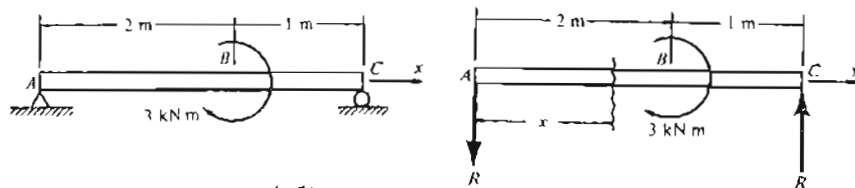
۶۴۵

سیر ساده AC در شکل ۱۴-۱۲ تحت اثر لنگر 3 kNm قرار دارد. با استفاده از توابع استثنائی معادلات سیروی برشی و لنگر خمشی در طول نیز را نوشته نمودارهای جسم آزاد آنها را رسم کنید.



شکل ۱۳-۱۲ نمودار لنگر خمشی

شکل ۱۲-۱۲ نمودار نیروی برشی



شکل ۱۴-۱۲

شکل ۱۵-۱۲

حل: تیر فقط تحت اثر یک لنگر قرار دارد. سایرین واکنش‌های تکیه گاه‌های تیر مساوی و مخالف الحمت می‌باشند (شکل ۱۵-۱۲) و مقدار آنها از معادله تعادل لنگری بدست می‌آید.

$$\sum M_A = 3R - 3 = 0 \quad ; \quad R = 1\text{ kN}$$

تابع شدت بار عبارتست از

$$w(x) = -1\langle x \rangle^{-1} + 3\langle x-2 \rangle^{-2} + 1\langle x-3 \rangle^{-1}$$

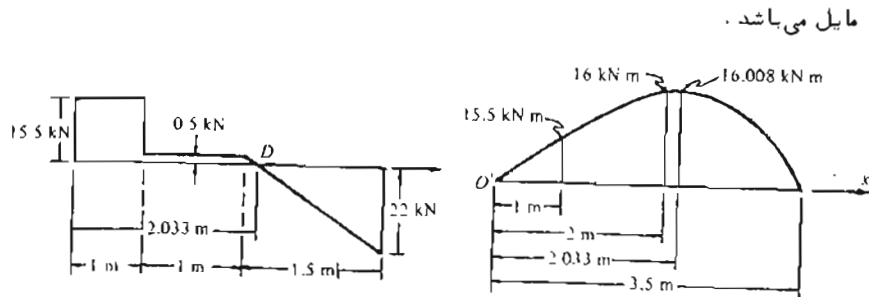
با انتگرال گیری از این رابطه ابتدا سیروی برشی و سپس لنگر خمشی را محاسبه می‌کنیم.

$$V(x) = \int_{-\infty}^x w dx = -1\langle x \rangle^0 + 3\langle x-2 \rangle^{-1} + 1\langle x-3 \rangle^0$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V dx = -1\langle x \rangle^1 + 3\langle x-2 \rangle^0 + 1\langle x-3 \rangle^1$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل‌های ۱۲-۱۶ و ۱۲-۱۷ رسم شده‌اند.

۶۴۷



۶۴۶

شده اند .

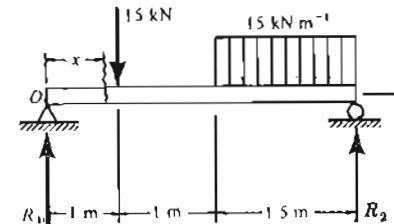


شکل ۱۶-۱۲ نمودار نیروی برشی

شکل ۱۷-۱۲ نمودار لنگر خمشی

مثال ۵-۱۲

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر شکل ۱۸-۱۲ با استفاده از توابع استثنائی نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید .



شکل ۱۸-۱۲

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل واکنشهای R_1 و R_2 را تعیین می کنیم .

$$\Sigma M_O = 3.5R_2 - 15 - 22.5(2.75) = 0 \quad ; \quad R_2 = 22.0 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = R_1 - 15 - 22.5 + 22.0 = 0 \quad ; \quad R_1 = 15.5 \text{ kN}$$

تابع شدت بار بر حسب توابع استثنائی به صورت زیر نوشته می شود :

$$w(x) = 15.5\langle x \rangle^{-1} - 15\langle x-1 \rangle^{-1} - 15\langle x-2 \rangle^0 + 22\langle x-3.5 \rangle^{-1}$$

با انتگرال گیری از این رابطه ابتدا نیروی برشی و سپس لنگر خمشی بدست می آید .

$$V(x) = \int_{-\infty}^x w dx = 15.5\langle x \rangle^0 - 15\langle x-1 \rangle^0 - 15\langle x-2 \rangle^1 + 22\langle x-3.5 \rangle^0$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V dx = 15.5\langle x \rangle^1 - 15\langle x-1 \rangle^1 - 7.5\langle x-2 \rangle^2 + 22\langle x-3.5 \rangle^1$$

نمودار نیروی برشی تیر در شکل ۱۹-۱۲ رسم شده است . این نمودار در قسمت چپ و مرکزی از دو خط مستقیم افقی تشکیل می یابد و در قسمت راست به صورت یک خط مستقیم

شکل ۲۰-۱۲ نمودار لنگر خمشی
شکل ۱۹-۱۲ نمودار نیروی برشی
برای پیدا کردن نقطه‌ای از تیر که در آن نیروی برشی صفر است کافی است V را در ناحیه راست تیر مساوی صفر قرار دهیم .

$$15.5 - 15 - 15(x-2) = 0 \quad ; \quad x = 2.033 \text{ m}$$

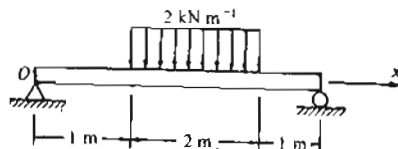
برای پیدا کردن لنگر خمشی در نقطه‌ای که نیروی برشی صفر است مقدار $x=2.033 \text{ m}$ را در معادله $M(x)$ قرار می دهیم

$$M(x=2.033) = 15.5(2.033) - 15(1.033) - 7.5(0.033)^2 = 16.008 \text{ kNm}$$

نمودار لنگر خمشی در شکل ۲۰-۱۲ رسم شده است . این نمودار دارای دو خط مستقیم در قسمت چپ و مرکزی و یک منحنی سهمی در قسمت راست می باشد . توجه کنید در $x=2 \text{ m}$ خط مستقیم بر محلی سهمی مماس می باشد زیرا در این نقطه تغییرات ناگهانی نیروی برشی وجود ندارد (معادله 6-12 را ببینید) .

مثال ۶-۱۲

با استفاده از توابع استثنائی معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر شکل ۲۱-۱۲ نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید .



شکل ۲۱-۱۲

۶۴۹

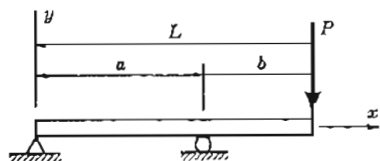
$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = V \quad (12-11)$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = w \quad (12-12)$$

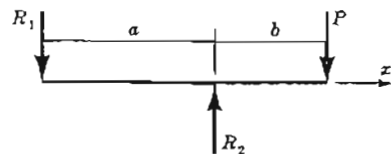
وقتی که بارگذاری روی تیر مسوع می باشد این روش بسیار "کوناه و آسان" است . در روش معمولی حل معادله دیفرانسیل محلی تغییر مکان تیر (فصل ۱۰ را ببینید) برای هر قسمت از تیر ثابت های استگرال گیری جداگانه ای وارد معادله می شود ، در حالی که در روش توابع استثنائی فقط دو ثابت استگرال گیری در معادله پیدا می شود که مقدار آنها را با استفاده از شرایط حدی نکه گاههای تیر بدست می آوریم . کار برد این روش را به کمک چند مثال نشان می دهیم .

مثال ۱۲-۷

معادله محلی تغییر مکان تیر شکل ۱۲-۲۴ را با استفاده از توابع استثنائی بدست آورید .



شکل ۱۲-۲۴



شکل ۱۲-۲۵

حل : واکنش های R_1 و R_2 با استفاده از معادلات تعادل به سهولت بدست می آید .

$$R_1 = \frac{Pb}{a} \quad ; \quad R_2 = P \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

تابع بار به صورت زیر نوشته می شود :

$$w(x) = -\frac{Pb}{a} \langle x \rangle^{-1} + P \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^{-1} - P \langle x-L \rangle^{-1}$$

با استگرال گیری از این رابطه نیروی برشی $V(x)$ و با استگرال گیری $V(x)$ لنگر خمشی

۶۴۸

حل : برای اینکه بتوانیم تابع شدت بار را با استفاده از توابع استثنائی بنویسیم فرض می کنیم بار گسسته یکنواخت با شدت 2 kN/m از $x=1 \text{ m}$ تا $x=\infty$ ادامه داشته باشد . سپس بر تیر فرضی بی نهایت طولی بار گسسته یکنواخت دیگری با شدت 2 kN/m از $x=3 \text{ m}$ تا $x=\infty$ اضافه می کنیم تا بارگذاری نیروی فرضی با بارگذاری واقعی یکسان گردد . اکنون با توجه به اینکه بارگذاری روی تیر واقعی متغیر است و در نتیجه واکنش های آن هر یک برابر 2 kN می باشد ، تابع شدت بار را به صورت زیر می نویسیم :

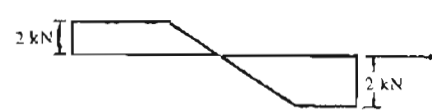
$$w(x) = 2 \langle x \rangle^{-1} - 2 \langle x-1 \rangle^0 + 2 \langle x-3 \rangle^0 + 2 \langle x-4 \rangle^{-1}$$

با دو بار استگرال گیری از این رابطه ابتدا نیروی برشی و سپس لنگر خمشی بدست می آید .

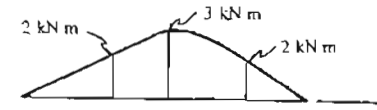
$$V(x) = 2 \langle x \rangle^0 - 2 \langle x-1 \rangle^1 + 2 \langle x-3 \rangle^1 + 2 \langle x-4 \rangle^0$$

$$M(x) = 2 \langle x \rangle^1 - 1 \langle x-1 \rangle^2 + 1 \langle x-3 \rangle^2 + 2 \langle x-4 \rangle^1$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به ترتیب در شکل های ۱۲-۲۲ و ۱۲-۲۳ رسم شده اند .



شکل ۱۲-۲۲ نمودار نیروی برشی



شکل ۱۲-۲۳ نمودار لنگر خمشی

۱۲-۲ منحنی تغییر مکان (ارتجاعی) تیرها

یکی از راههای ساده برای پیدا کردن محلی تغییر مکان (محلی ارتجاعی) تیرها استفاده از توابع استثنائی است . خصوصیت جالب روش توابع استثنائی این است که با یک معادله می توان تمام منحنی تغییر مکان سر را بیان نمود . در این روش معمولاً "جهت مثبت محور y را به طرف بالا فرض می کنند . در این صورت با توجه به اینکه جهت بار نیز به طرف بالا مثبت فرض می شود معادلات دیفرانسیل محلی تغییر مکان سر به صورت زیر نوشته می شود :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M \quad (12-10)$$

۶۵۱

حل : واکنش‌های تیر از معادلات تعادل بدست می‌آید (شکل ۲۲ - ۱۲) :
 $R = M_1/L$ با داشتن واکنش‌های تیر، تابع شدت بار به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$w(x) = -\frac{M_1}{L} \langle x \rangle^{-1} + M_1 \langle x-a \rangle^{-2} + \frac{M_1}{L} \langle x-L \rangle^{-1}$$

سیروی برشی با انتگرال گیری از معادله فوق بدست می‌آید .

$$V(x) = -\frac{M_1}{L} \langle x \rangle^0 + M_1 \langle x-a \rangle^{-1} + \frac{M_1}{L} \langle x-L \rangle^0$$

لنگر خمشی با انتگرال گیری مجدد از رابطه فوق محاسبه می‌شود .

$$M(x) = -\frac{M_1}{L} \langle x \rangle^1 + M_1 \langle x-a \rangle^0 + \frac{M_1}{L} \langle x-L \rangle^1 = EI v''$$

معادله منحنی تغییر مکان پس از دو بار انتگرال گیری از این رابطه بدست می‌آید .

$$EI v' = -\frac{M_1}{2L} \langle x \rangle^2 + M_1 \langle x-a \rangle^1 + \frac{M_1}{2L} \langle x-L \rangle^2 + C_1$$

$$EI v = -\frac{M_1}{6L} \langle x \rangle^3 + \frac{M_1}{2} \langle x-a \rangle^2 + \frac{M_1}{6L} \langle x-L \rangle^3 + C_1 x + C_2 \quad (12-13)$$

از دو شرط حدی $v=0$ در $x=0$ و $x=L$ ثابت‌های انتگرال گیری محاسبه می‌شوند .

$$C_1 = \frac{M_1 L}{6} - \frac{M_1 b^2}{2L} ; C_2 = 0$$

بنابراین

$$EI v = -\frac{M_1}{6L} \langle x \rangle^3 + \frac{M_1}{2} \langle x-a \rangle^2 + \left(\frac{M_1 L}{6} - \frac{M_1 b^2}{2L} \right) x$$

نوجه کنید جمله سوم معادله 12-13 در معادله فوق حدی گردیده است زیرا جمله مزبور برای تیر به طول محدود L صفر می‌شود و علت وجودش در معادله به خاطر در نظر گرفتن تیر فرضی بی‌نهایت طولی می‌باشد .

مثال ۹-۱۲

تیر ساده شکل ۲۸-۱۲ در قسمتی از طولش تحت اثر بار گسترده یکنواخت با شدت q قرار دارد . معادله منحنی تغییر مکان T را پیدا کنید .

۶۵۰

$M(x)$ بدست می‌آید .

$$V(x) = -\frac{Pb}{a} \langle x \rangle^0 + P \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^0 - P \langle x-L \rangle^0$$

$$M(x) = -\frac{Pb}{a} \langle x \rangle^1 + P \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^1 - P \langle x-L \rangle^1$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = -\frac{Pb}{a} \langle x \rangle^1 + P \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^1 - P \langle x-L \rangle^1$$

هرگاه از این معادله دو بار انتگرال بگیریم معادله منحنی تغییر مکان نتیجه می‌شود .

$$EI v' = -\frac{Pb}{2a} \langle x \rangle^2 + \frac{P}{2} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^2 - \frac{P}{2} \langle x-L \rangle^2 + C_1$$

$$EI v = -\frac{Pb}{6a} \langle x \rangle^3 + \frac{P}{6} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x-L \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

ثابت‌های انتگرال گیری C_1 و C_2 از شرایط حدی بدست می‌آیند .

$$v(0) = 0 ; C_2 = 0$$

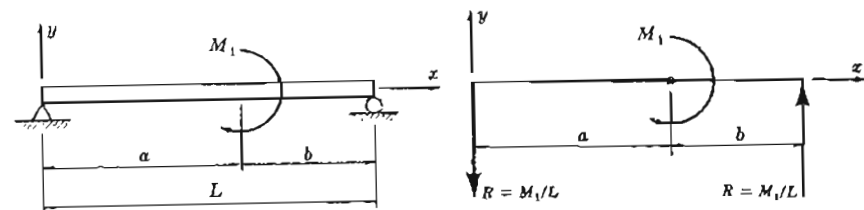
$$v(a) = 0 ; -\frac{Pba^3}{6a} + C_1 a = 0 ; C_1 = \frac{Pab}{6}$$

بنابراین معادله منحنی تغییر مکان تیر به صورت زیر می‌باشد :

$$EI v = -\frac{Pb}{6a} \langle x \rangle^3 + \frac{P}{6} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \langle x-a \rangle^3 + \frac{Pabx}{6}$$

مثال ۸-۱۲

معادله منحنی تغییر مکان تیر ساده شکل ۲۶-۱۲ تحت اثر لنگر M_1 را به دست آورید .



شکل ۲۶-۱۲

شکل ۲۷-۱۲

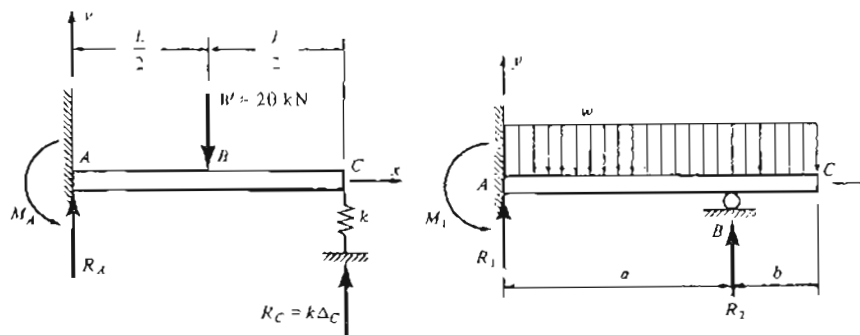
$$EIv = \frac{qb}{6L} \left(\frac{b}{2} + c \right) \langle x \rangle^3 - \frac{1}{24} q \langle x-a \rangle^4 + \frac{1}{24} q \langle x-a-b \rangle^4 + \left\{ \frac{q}{24L} [(L-a)^4 - c^4] - \frac{qbL}{6} \left(\frac{b}{2} + c \right) \right\} x$$

۱۲-۳ نیروهای هیپر استاتیک

روش سوانع استثنائی برای حل نیروهای هیپر استاتیک را در چند مثال شرح می‌کنیم.

مثال ۱۰-۱۲

تیر شکل ۱۲-۳۰ در انحنای A گیردار و در انتهای C بر روی فنری با ثابت فنری $k=400 \text{ kN/m}$ قرار دارد. موقعی که باری بر سر وجود ندارد، فنر بدون نیرو می‌باشد. قبل از اسکه فوری در نقطه C وجود داشته باشد، وقتی که نیروی قائم 10 kN در نقطه C وارد می‌شود عطف مزبور به اندازه 50 mm تغییر مکان می‌دهد. موقعی که فنر به بر مصل شده و بار 20 kN در وسط دهانه آن اثر می‌کند تغییر مکان عطف C حقدرد خواهد بود؟



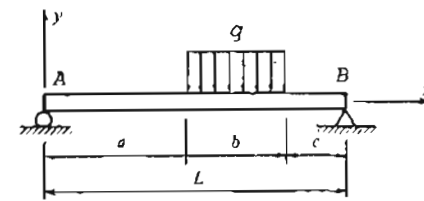
شکل ۱۲-۳۰

شکل ۱۲-۳۱

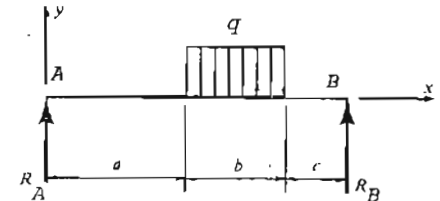
حل: تابع بار را توجه به شکل ۱۲-۳۰ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = -M_A \langle x \rangle^{-2} + R_A \langle x \rangle^{-1} - W \langle x-0.5L \rangle^{-1} + R_C \langle x-L \rangle^{-1}$$

۶۵۲



شکل ۱۲-۲۸



شکل ۱۲-۲۹

حل: واکنش‌های تیر را استفاده از معادلات تعادل به سادگی بدست می‌آیند (شکل ۱۲-۲۹).

$$R_A = \frac{qb}{L} \left(\frac{b}{2} + c \right) ; \quad R_B = \frac{qb}{L} \left(\frac{b}{2} + a \right)$$

تابع بار گذاری:

$$w_1(x) = R_A \langle x \rangle^{-1} - q \langle x-a \rangle^0 + q \langle x-a-b \rangle^0 + R_B \langle x-L \rangle^{-1}$$

نیروی برشی $V(x)$ از انتگرال گیری عبارت فوق بدست می‌آید.

$$V(x) = R_A \langle x \rangle^0 - q \langle x-a \rangle^1 + q \langle x-a-b \rangle^1 + R_B \langle x-L \rangle^0$$

لنگر خمشی $M(x)$ از انتگرال گیری عبارت فوق سیخه می‌شود.

$$M(x) = R_A \langle x \rangle^1 - \frac{1}{2} q \langle x-a \rangle^2 + \frac{1}{2} q \langle x-a-b \rangle^2 + R_B \langle x-L \rangle^1$$

از معادله $EIv'' = M(x)$ دو بار انتگرال می‌گیریم تا معادله محلی تغییر مکان بدست آید.

$$EIv' = \frac{1}{2} R_A \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} q \langle x-a \rangle^3 + \frac{1}{6} q \langle x-a-b \rangle^3 + \frac{1}{2} R_B \langle x-L \rangle^2 + C_1$$

$$EIv = \frac{1}{6} R_A \langle x \rangle^3 - \frac{1}{24} q \langle x-a \rangle^4 + \frac{1}{24} q \langle x-a-b \rangle^4 + \frac{1}{6} R_B \langle x-L \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

شرایط حدی: $v(0) = 0$ (1) ; $v(L) = 0$ (2)

$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{1}{24} q (L-a)^4 + \frac{1}{24} q (L-a-b)^4 + C_1 L = 0$$

$$C_1 = \frac{q}{24L} [(L-a)^4 - c^4] - \frac{qbL}{6} \left(\frac{b}{2} + c \right)$$

۶۵۵

هرگاه مقدار فوق و $k = 400 \text{ kN/m}$ را در رابطه 12-15 قرار دهیم و معادله حاصل را برای R_A حل کنیم خواهیم داشت: $R_A = 15.83 \text{ kN}$. از تعادل نیروها در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$R_C = W - R_A = 20 - 15.83 = 4.17 \text{ kN}$$

سپارین تغییر مکان نقطه C برابر است با

$$\Delta_C = \frac{R_C}{-k} = -\frac{4.17}{400} \text{ m} = -10.4 \text{ mm}$$

مثال ۱۱-۱۲

واکنش‌های R_1 و R_2 تیر هیبر استاتیک شکل ۱۲-۳۱ را حساب کنید.

حل: معادلات تعادل لنگری تیر حول نقطه A و تعادل نیروها در امتداد قائم عبارتند از

$$\Sigma M_A = M_1 + R_2 a - \frac{w(a+b)^2}{2} = 0 \quad (12-6)$$

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - w(a+b) = 0 \quad (12-7)$$

تابع شدت بار تیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-2} + R_1 \langle x \rangle^{-1} - w \langle x \rangle^0 + R_2 \langle x-a \rangle^{-1}$$

از این معادله سه بار متوالی انتگرال می‌گیریم.

$$V(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-1} + R_1 \langle x \rangle^0 - w \langle x \rangle^1 + R_2 \langle x-a \rangle^0$$

$$M(x) = EI v'' = -M_1 \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x \rangle^1 - \frac{w}{2} \langle x \rangle^2 + R_2 \langle x-a \rangle^1$$

$$EI v' = -M_1 \langle x \rangle^1 + \frac{R_1}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{w}{6} \langle x \rangle^3 + \frac{R_2}{2} \langle x-a \rangle^2 + C_1$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_1 = 0$. از رابطه فوق مجدداً انتگرال می‌گیریم.

$$EI v = -\frac{M_1}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{R_1}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{w}{24} \langle x \rangle^4 + \frac{R_2}{6} \langle x-a \rangle^3 + C_2$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_2 = 0$. یک شرط حدی دیگر $v=0$ در

۶۵۴

از رابطه فوق سه بار انتگرال می‌گیریم.

$$V(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + R_A \langle x \rangle^0 - W \langle x-0.5L \rangle^0 + R_C \langle x-L \rangle^0$$

$$EI v'' = M(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + R_A \langle x \rangle^1 - W \langle x-0.5L \rangle^1 + R_C \langle x-L \rangle^1$$

$$EI v' = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{1}{2} R_A \langle x \rangle^2 - \frac{W}{2} \langle x-0.5L \rangle^2 + \frac{R_C}{2} \langle x-L \rangle^2 + C_1$$

از شرط حدی $v'=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_1 = 0$. بنابراین با انتگرال گیری مجدد از رابطه فوق معادله منحنی تغییر مکان تیر بدست می‌آید.

$$EI v = -\frac{1}{2} M_A \langle x \rangle^2 + \frac{1}{6} R_A \langle x \rangle^3 - \frac{1}{6} W \langle x-0.5L \rangle^3 + \frac{1}{6} R_C \langle x-L \rangle^3 + C_2$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_2 = 0$. تغییر مکان نقطه C (Δ_C) با جایگزینی $x=L$ در معادله فوق بدست می‌آید.

$$EI \Delta_C = -\frac{M_A L^2}{2} + \frac{R_A L^3}{6} - \frac{WL^3}{48} \quad (12-14)$$

واکنش R_C برابر است با

$$R_C = -k \Delta_C$$

علامت منفی در این رابطه به خاطر این است که تغییر مکان به طرف پایین (که منفی است) نظیر نیروی R_C به طرف بالا می‌باشد. اگر معادله فوق همراه با دو معادله تعادل

$$R_A + R_C - W = 0 \quad ; \quad \frac{WL}{2} + M_A - R_A L = 0$$

را در رابطه 12-14 جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$-\frac{EI(W-R_A)}{k} = \frac{R_A L^3}{6} - \frac{WL^3}{48} - \frac{L^2}{2} \left(R_A L - \frac{WL}{2} \right)$$

این معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$R_A \left(\frac{EI}{k} + \frac{L^3}{3} \right) = \frac{EIW}{k} + \frac{11WL^3}{48} \quad (12-15)$$

موقعی که فنری وجود ندارد تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای تحت بار متمرکز 10 kN برابر 50 mm است. بنابراین با استفاده از نتایج حالت 4 پیوست ۲-۳ کتاب می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{(10 \times 10^3)(L^3)}{3EI} = 0.05 \text{ m} \quad ; \quad \frac{EI}{L^3} = \frac{10^4}{0.15} \text{ N/m}$$

۶۵۷

$$EIv'' = M(x) = -\frac{w_0}{2}\langle x \rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x-a \rangle^2 + R_1\langle x-L \rangle^1 + M_1\langle x-L \rangle^0$$

$$EIv' = -\frac{w_0}{6}\langle x \rangle^3 + \frac{w_0}{6}\langle x-a \rangle^3 + \frac{R_1}{2}\langle x-L \rangle^2 + M_1\langle x-L \rangle^1 + C_1$$

از شرط حدی $v' = 0$ در $x = L$ نتیجه می شود: $C_1 = w_0(L^3 - b^3)/6$. از معادله فوق محدا " انتگرال می گیریم.

$$EIv = -\frac{w_0}{24}\langle x \rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{R_1}{6}\langle x-L \rangle^3 + \frac{M_1}{2}\langle x-L \rangle^2 + \frac{w_0}{6}(L^3 - b^3)x + C_2$$

از شرط حدی $v = 0$ در $x = L$ ثابت انتگرال گیری C_2 بدست می آید.

$$C_2 = \frac{w_0}{24}(L^4 - b^4) - \frac{w_0 L}{6}(L^3 - b^3)$$

پس از جایگزینی C_2 در معادله تغییر مکان و همچنین حذف حملات سوم و چهارم در آن خواهیم داشت

$$EIv = -\frac{w_0}{24}\langle x \rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{w_0}{6}(L^3 - b^3)x + \frac{w_0}{24}(L^4 - b^4) - \frac{w_0 L}{6}(L^3 - b^3)$$

مسئله ۱۲-۲

معادله منحنی تغییر مکان تیر شکل ۱۲-۳۲ را تحت بار گذاری نشان داده شده پیدا کنید.

$$R_A = R_B = \frac{(\frac{qL}{2})(\frac{L}{2})}{L} = \frac{qL}{4}$$

حل: واکنش های تیر برابرند با

تابع شدت بار به صورت زیر نوشته می شود:

$$w = \frac{qL}{4}\langle x \rangle^{-1} - q\langle x \rangle^0 + 2q\langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 - \frac{qL}{4}\langle x-L \rangle^{-1}$$

از این رابطه چهار بار انتگرال می گیریم.

$$V = \frac{qL}{4}\langle x \rangle^0 - q\langle x \rangle^1 + 2q\langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 - \frac{qL}{4}\langle x-L \rangle^0$$

۶۵۶

$x = a$ می باشد که از آن معادله زیر حاصل می شود:

$$0 = -\frac{M_1 a^2}{2} + \frac{R_1 a^3}{6} - \frac{w a^4}{24} \quad ; \quad M_1 = R_1 \frac{a}{3} - \frac{w a^2}{12}$$

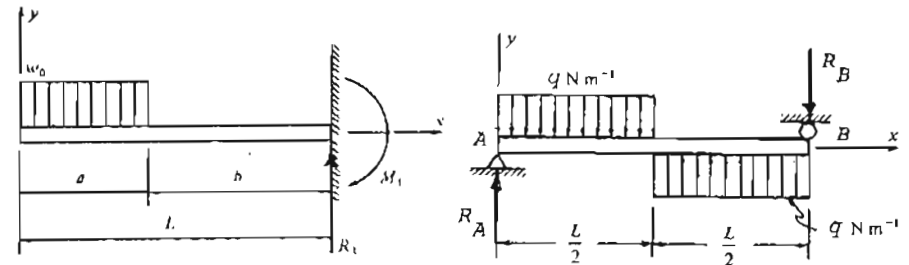
اگر به جای M_1 از معادله فوق در معادلات ۱۲-۶ و ۱۲-۷ قرار دهیم و معادلات حاصل را برای R_1 و R_2 حل کنیم خواهیم داشت

$$R_1 = \frac{5}{8}wa - \frac{3wb^2}{4a} \quad ; \quad R_2 = \frac{3}{8}wa + wb + \frac{3wb^2}{4a}$$

۱۲-۴ مسائل حل شده

مسئله ۱۲-۱

معادله منحنی تغییر مکان تیر شکل ۱۲-۳۲ را با استفاده از توابع استثنائی بدست آورید.



شکل ۱۲-۳۲

شکل ۱۲-۳۳

حل: محاسبه واکنش ها در این مسئله لازم نیست. تابع شدت بار به صورت زیر نوشته می شود:

$$w(x) = -w_0\langle x \rangle^0 + w_0\langle x-a \rangle^0 + R_1\langle x-L \rangle^1 + M_1\langle x-L \rangle^{-2}$$

از این رابطه سه بار متوالی انتگرال می گیریم.

$$V(x) = -w_0\langle x \rangle^1 + w_0\langle x-a \rangle^1 + R_1\langle x-L \rangle^0 + M_1\langle x-L \rangle^{-1}$$

۶۵۹

از این رابطه چهار بار انتگرال می گیریم .

$$V(x) = -125\langle x \rangle^0 + 100\langle x-1 \rangle^{-1} - 100\langle x-2 \rangle^1 + 100\langle x-4 \rangle^1 + 525\langle x-4 \rangle^0 - 200\langle x-7 \rangle^0$$

$$EIV'' = M = -125\langle x \rangle^1 + 100\langle x-1 \rangle^0 - 50\langle x-2 \rangle^2 + 50\langle x-4 \rangle^2 + 525\langle x-4 \rangle^1 - 200\langle x-7 \rangle^1$$

$$EIV' = -\frac{125}{2}\langle x \rangle^2 + 100\langle x-1 \rangle^1 - \frac{50}{3}\langle x-2 \rangle^3 + \frac{50}{3}\langle x-4 \rangle^3 + \frac{525}{2}\langle x-4 \rangle^2 - 100\langle x-7 \rangle^2 + C_1$$

$$EIV = -\frac{125}{6}\langle x \rangle^3 + 50\langle x-1 \rangle^2 - \frac{25}{6}\langle x-2 \rangle^4 + \frac{25}{6}\langle x-4 \rangle^4 + \frac{175}{2}\langle x-4 \rangle^3 - \frac{100}{3}\langle x-7 \rangle^3 + C_1x + C_2$$

از شرایط حدی $v=0$ در $x=0$ و $x=4m$ ثابت های انتگرال گیری بدست می آید .

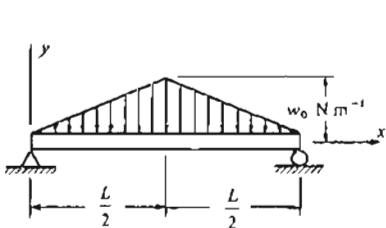
$$C_1 = 237.5 : C_2 = 0$$

بما بر این معادله منحنی تغییر مکان تبر به صورت زیر نوشته می شود :

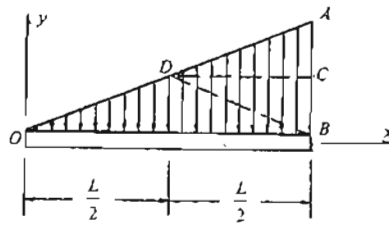
$$EIV = -\frac{125}{6}\langle x \rangle^3 + 50\langle x-1 \rangle^2 - \frac{25}{6}\langle x-2 \rangle^4 + \frac{25}{6}\langle x-4 \rangle^4 + \frac{175}{2}\langle x-4 \rangle^3 + 237.5x$$

مسئله ۱۲-۴

معادله منحنی تغییر مکان تبر شکل ۱۲-۳۶ را تحت بار گذاری نشان داده شده پیدا کنید . تغییر مکان وسط دهانه نیز چقدر می باشد ؟



شکل ۱۲-۳۶



شکل ۱۲-۳۷

۶۵۸

$$EIV'' = M = \frac{qL}{4}\langle x \rangle^1 - \frac{q}{2}\langle x \rangle^2 + q\langle x - \frac{L}{2} \rangle^2 - \frac{qL}{4}\langle x-L \rangle^1$$

$$EIV' = \frac{qL}{8}\langle x \rangle^2 - \frac{q}{6}\langle x \rangle^3 + \frac{q}{3}\langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 - \frac{qL}{8}\langle x-L \rangle^2 + C_1$$

$$EIV = \frac{qL}{24}\langle x \rangle^3 - \frac{q}{24}\langle x \rangle^4 + \frac{q}{12}\langle x - \frac{L}{2} \rangle^4 - \frac{qL}{24}\langle x-L \rangle^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad (1) ; \quad v(L) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

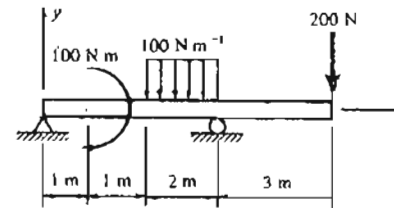
$$(1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{24} + \frac{q}{12}\left(\frac{L^4}{16}\right) + C_1L = 0 : C_1 = -\frac{qL^3}{192}$$

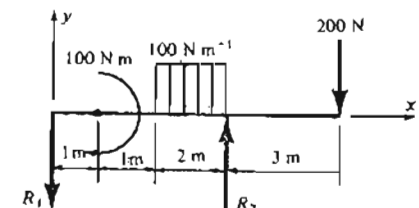
$$EIV = \frac{qL}{24}\langle x \rangle^3 - \frac{q}{24}\langle x \rangle^4 + \frac{q}{12}\langle x - \frac{L}{2} \rangle^4 - \frac{qL^3}{192}x$$

مسئله ۱۲-۳

معادله منحنی تغییر مکان تبر شکل ۱۲-۳۴ را تحت بار گذاری نشان داده شده پیدا کنید .



شکل ۱۲-۳۴



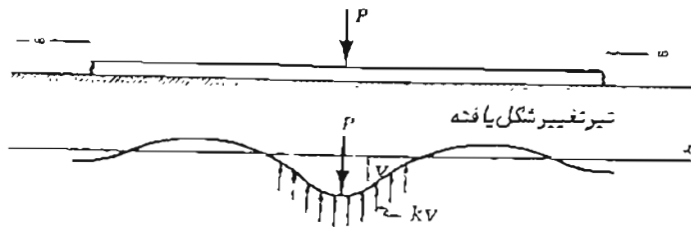
شکل ۱۲-۳۵

حل : واکنشها از معادلات تعادل به سهولت بدست می آید (شکل ۱۲-۳۵) .

$$R_1 = 125N : R_2 = 525N$$

تابع شدت بار برابر است با

$$w(x) = -125\langle x \rangle^{-1} + 100\langle x-1 \rangle^{-2} - 100\langle x-2 \rangle^0 + 100\langle x-4 \rangle^0 + 525\langle x-4 \rangle^{-1} - 200\langle x-7 \rangle^{-1}$$



شکل ۱۲-۳۸

حل: اگر تغییر مکان در نقطه‌ای از تیر v باشد واکنش بی در آن نقطه kv خواهد بود. سایرین شدت بار در رابطه ۱۲-۱۲ برابر $w = -kv$ می باشد و رابطه مذکور به صورت زیر نوشته می شود:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = 0 \quad (1)$$

این معادله در تمام نقاط تیر بجز در زیر بار متمرکز P صادق است. جواب این معادله دیفرانسیل به شکل $y = e^{mx}$ می باشد که اگر آن را در معادله مرسوم جایگزین کنیم رابطه زیر برای m بدست می آید:

$$m^4 + \frac{k}{EI} = 0$$

این معادله چهار جواب به صورت $m = \pm \beta(1 \pm i)$ دارد که در آن $\beta = \sqrt[4]{k/4EI}$ و $i = \sqrt{-1}$ بنا بر این جواب عمومی معادله ۱ به صورت زیر نوشته می شود:

$$v = e^{-\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (2)$$

از این معادله نسبت به x مشتق می گیریم.

$$v' = e^{-\beta x} (-A\beta \sin \beta x + B\beta \cos \beta x) - \beta e^{-\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{\beta x} (-C\beta \sin \beta x + D\beta \cos \beta x) + \beta e^{\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (3)$$

واضح است که منحنی تغییر مکان تیر مربوط به نسبت به نقطه اثر نیروی متمرکز باید متقارن باشد. اگر قسمی از تیر واقع در سمت راست سیروی متمرکز را در نظر بگیریم برای مقادیر خیلی زیاد x تغییر مکان و شیب منحنی تغییر مکان باید برابر صفر باشد. در نتیجه از معادله ۲ نتیجه می شود که $C = D = 0$. در واقع اگر ما برای ضرایب مزبور هر مقدار دیگری را در نظر بگیریم، موقعی که x بی نهایت زیاد می گردد تغییر مکان و شیب

حل: واکنشهای R_A و R_B را یکدیگر مساوی و برابرند با $R_A = R_B = \frac{w_0 L}{4}$ بار گذاری تیر را به صورت بار گذاری مثلثی OAB مهیای بار گذاری مثلثی ADB در نظر می گیریم (شکل ۱۲-۳۷).

$$w(x) = \frac{w_0 L}{4} \langle x \rangle^{-1} - \frac{2w_0}{L} \langle x \rangle^1 + 2 \left(\frac{2w_0}{L} \right) \langle x - 0.5L \rangle^1 + \frac{w_0 L}{4} \langle x - L \rangle^{-1}$$

جمله دوم در رابطه فوق بار گذاری مثلث OAB و جمله سوم در این رابطه بار گذاری مثلث ADB را نشان می دهد. پس از چهار بار انتگرال گیری از رابطه فوق منحنی تغییر مکان تیر بدست می آید.

$$V(x) = \frac{w_0 L}{4} \langle x \rangle^0 - \frac{w_0}{L} \langle x \rangle^2 + \frac{2w_0}{L} \langle x - 0.5L \rangle^2 + \frac{w_0 L}{4} \langle x - L \rangle^0$$

$$M(x) = \frac{w_0 L}{4} \langle x \rangle^1 - \frac{w_0}{3L} \langle x \rangle^3 + \frac{2w_0}{3L} \langle x - 0.5L \rangle^3 + \frac{w_0 L}{4} \langle x - L \rangle^1 = EI v''$$

$$EI v' = \frac{w_0 L}{8} \langle x \rangle^2 - \frac{w_0}{12L} \langle x \rangle^4 + \frac{w_0}{6L} \langle x - 0.5L \rangle^4 + \frac{w_0 L}{8} \langle x - L \rangle^2 + C_1$$

به علت تقارن بار گذاری روی تیر، شیب v' در $x = L/2$ صفر است. از این شرط نتیجه می شود: $C_1 = -5w_0 L^3 / 192$. از رابطه فوق مجدداً انتگرال می گیریم.

$$EI v = \frac{w_0 L}{24} \langle x \rangle^3 - \frac{w_0}{60L} \langle x \rangle^5 + \frac{w_0}{30L} \langle x - 0.5L \rangle^5 + \frac{w_0 L}{24} \langle x - L \rangle^3 - \frac{5}{192} w_0 L^3 x + C_2$$

از شرط حدی $v = 0$ در $x = 0$ نتیجه می شود: $C_2 = 0$. تغییر مکان وسط دهانه تیر با جایگزینی $x = L/2$ در رابطه فوق بدست می آید.

$$\delta_c = -\frac{w_0 L^4}{120EI}$$

معادله تغییر مکان یک تیر بی نهایت طول را که در روی یک بی ارتجاعی قرار دارد تحت اثر نیروی متمرکزی در وسط آن بدست آورید (شکل ۱۲-۳۸). نیرویی که یک بی ارتجاعی در هر نقطه از تیر به آن وارد می کند با تغییر مکان آن نقطه مناسب می باشد.

۶۶۳

حل: تابع بار به صورت زیر نوشته می شود (توجه کنید بعلاقتقارن، واکنشها در دو تکیه گاه مساوی می باشند):

$$w(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-2} + R_1 \langle x \rangle^{-1} - w \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x-L \rangle^{-1} + M_1 \langle x-L \rangle^{-2}$$

از این معادله سه بار انتگرال می گیریم:

$$V(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-1} + R_1 \langle x \rangle^0 - w \langle x \rangle^1 + R_1 \langle x-L \rangle^0 + M_1 \langle x-L \rangle^{-1}$$

$$M(x) = -M_1 \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x \rangle^1 - \frac{w}{2} \langle x \rangle^2 + R_1 \langle x-L \rangle^1 + M_1 \langle x-L \rangle^0 = EI V''$$

$$EI V' = -M_1 \langle x \rangle^1 + \frac{R_1}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{w}{6} \langle x \rangle^3 + \frac{R_1}{2} \langle x-L \rangle^2 + M_1 \langle x-L \rangle^1 + C_1$$

از شرط حدی $V' = 0$ در $x = 0$ نتیجه می شود: $C_1 = 0$. از معادله فوق مجدداً انتگرال می گیریم:

$$EI V = -\frac{M_1}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{R_1}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{w}{24} \langle x \rangle^4 + \frac{R_1}{6} \langle x-L \rangle^3 + \frac{M_1}{2} \langle x-L \rangle^2 + C_2$$

از شرط حدی $V = 0$ در $x = 0$ نتیجه می شود: $C_2 = 0$. همچنین از شرط حدی $V = 0$ در $x = L$ معادله زیر حاصل می شود:

$$-\frac{M_1 L^2}{2} + \frac{R_1 L^3}{6} - \frac{w L^4}{24} = 0$$

به علت تقارن بار گذاری از معادله تعادل نیروها در امتداد قائم نتیجه می شود:

$$R_1 = wL/2$$

پس از جایگزینی این مقدار R_1 در معادله فوق واکنش M_1 بدست می آید:

$$M_1 = wL^2/12$$

مسئله ۷-۱۲

واکنشهای دوانتهای تیر دو سر گیردار شکل ۴۰-۱۲ را تحت یک نیروی متمرکز P بدست آورید.

حل: تابع شدت بار:

$$w(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-2} + R_1 \langle x \rangle^{-1} - P \langle x-a \rangle^{-1} + R_2 \langle x-L \rangle^{-1} + M_2 \langle x-L \rangle^{-2}$$

از این معادله سه بار انتگرال می گیریم:

$$V(x) = -M_1 \langle x \rangle^{-1} + R_1 \langle x \rangle^0 - P \langle x-a \rangle^0 + R_2 \langle x-L \rangle^0 + M_2 \langle x-L \rangle^{-1}$$

۶۶۲

منحنی تغییر مکان نیز به طور نامحدودی افزایش می یابد. چون به علت تقارن، منحنی تغییر مکان باید در $x = 0$ یک مماس افقی داشته باشد. از معادله ۳ نتیجه می شود $A = B$. بنابراین معادله ۲ به صورت زیر در می آید:

$$v = Ae^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (4)$$

از این معادله نسبت به x سه بار مشتق می گیریم:

$$v' = -2\beta Ae^{-\beta x} \sin \beta x$$

$$v'' = 2\beta^2 Ae^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x)$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = 4\beta^3 Ae^{-\beta x} \cos \beta x \quad (5)$$

سیروی برشی در نقطه ای از تیر درست در سمت راست بار P برابر $P/2$ می باشد (علامت منعی به خاطر قرار داد علامتی است که ما در فصل هفتم برای سیروی برشی انتخاب کردیم). هرگاه این شرط را در معادله ۵ بکار ببریم (با استفاده از معادله ۱۱-۱۲) خواهیم داشت:

$$-\frac{P}{2} = EI (4\beta^3 A) \quad : \quad A = -\frac{P}{8\beta^3 EI}$$

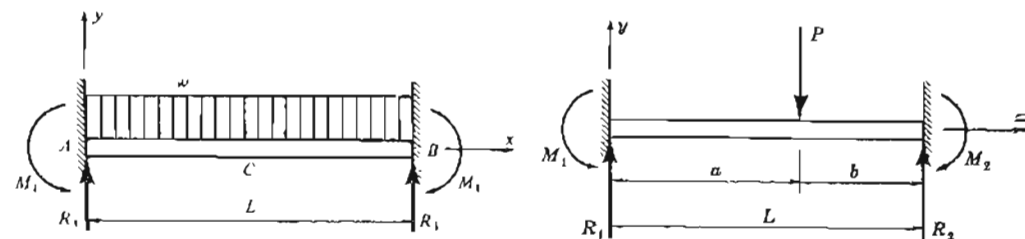
اگر این مقدار A را در معادله ۴ بکار ببریم معادله منحنی تغییر مکان نیمه راست تیر بدست می آید.

$$y = -\frac{P}{8\beta^3 EI} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

مسئله ۶-۱۲

واکنشهای تیر دو سر گیردار شکل ۳۹-۱۲ را تحت اثر بار گسترده یکنواخت با

شدت w بدست آورید.



شکل ۳۹-۱۲

شکل ۴۰-۱۲

۶۶۵

حل: با وجود اینکه در ابتدا این مسئله ممکن است نامعین به نظر برسد، شرط صفر بودن لنگر خمشی در نقطه B تیر مزبور را معین می‌سازد. بنابراین اگر نیمه چپ تیر را از آن جدا کنیم نمودار جسم آزاد آن به صورت شکل ۴۲ - ۱۲ خواهد بود. از معادله تعادل لنگری این قسمت از تیر حول نقطه B خواهیم داشت

$$\Sigma M_B = R_1 L - P \frac{L}{2} = 0 \quad ; \quad R_1 = \frac{P}{2}$$

حال اگر تعادل تمام تیر را در امتداد قائم در نظر بگیریم (شکل ۴۱ - ۱۲) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$2R_1 + R_2 - 2P = 0 \quad ; \quad R_2 = P$$

اکنون با استفاده از توابع استثنائی منحنی تغییر مکان تمام تیر را بدست می‌آوریم. تابع شدت بار برابر است با

$$w(x) = \frac{P}{2} \langle x \rangle^{-1} - P \langle x - 0.5L \rangle^{-1} + P \langle x - L \rangle^{-1} - P \langle x - 1.5L \rangle^{-1} + \frac{P}{2} \langle x - 2L \rangle^{-1}$$

از این معادله سه بار انتگرال می‌گیریم.

$$V(x) = \frac{P}{2} \langle x \rangle^0 - P \langle x - 0.5L \rangle^0 + P \langle x - L \rangle^0 - P \langle x - 1.5L \rangle^0 + \frac{P}{2} \langle x - 2L \rangle^0$$

$$M(x) = \frac{P}{2} \langle x \rangle^1 - P \langle x - 0.5L \rangle^1 + P \langle x - L \rangle^1 - P \langle x - 1.5L \rangle^1 + \frac{P}{2} \langle x - 2L \rangle^1 = EI v''$$

$$EI v' = \frac{P}{4} \langle x \rangle^2 - \frac{P}{2} \langle x - 0.5L \rangle^2 + \frac{P}{2} \langle x - L \rangle^2 - \frac{P}{2} \langle x - 1.5L \rangle^2 + \frac{P}{4} \langle x - 2L \rangle^2 + C_1$$

به علت تقارن در $x=L$ شیب $v'=0$ است. بنابراین

$$0 = \frac{PL^2}{4} - \frac{P}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 \quad ; \quad C_1 = -\frac{PL^2}{8}$$

این مقدار C_1 را در معادله شیب جایگزین می‌کنیم و مجدداً انتگرال می‌گیریم.

$$EI v = \frac{P}{12} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - 0.5L \rangle^3 + \frac{P}{6} \langle x - L \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - 1.5L \rangle^3 + \frac{P}{12} \langle x - 2L \rangle^3 - \frac{PL^2}{8} x + C_2$$

از شرط $v=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود $C_2=0$. اگر $x=L$ را در معادله فوق جایگزین نمائیم تغییر مکان نقطه میانی B تیر بدست می‌آید.

۶۶۴

$$M(x) = -M_1 \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x \rangle^1 - P \langle x - a \rangle^1 + R_2 \langle x - L \rangle^1 + M_2 \langle x - L \rangle^0 = EI v''$$

$$EI v' = -M_1 \langle x \rangle^1 + \frac{R_1}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{P}{2} \langle x - a \rangle^2 + \frac{R_2}{2} \langle x - L \rangle^2 + M_2 \langle x - L \rangle^1 + C_1$$

از شرط حدی $v'=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_1=0$. از معادله فوق مجدداً انتگرال می‌گیریم.

$$EI v = -\frac{M_1}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{R_1}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x - a \rangle^3 + \frac{R_2}{6} \langle x - L \rangle^3 + \frac{M_2}{2} \langle x - L \rangle^2 + C_2$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می‌شود: $C_2=0$

تغییر مکان و شیب منحنی تغییر مکان در انتهای راست تیر صفر می‌باشد. بنابراین از جایگزینی $x=L$ در دو معادله فوق خواهیم داشت

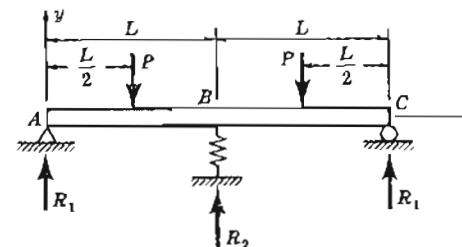
$$0 = -M_1 L + \frac{R_1 L^2}{2} - \frac{Pb^2}{2} \quad ; \quad 0 = -\frac{M_1 L^2}{2} + \frac{R_1 L^3}{6} - \frac{Pb^3}{6}$$

واکنش‌های R_1 و M_1 از حل همزمان دو معادله فوق بدست می‌آیند.

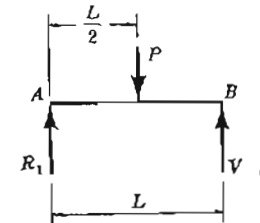
$$R_1 = \frac{Pb^2}{L^2} + \frac{2Pab^2}{L^3} \quad ; \quad M_1 = \frac{Pab^2}{L^2}$$

مسئله ۸-۱۲

در شکل ۴۱ - ۱۲ ثابت فنری k سر را چنان تعیین کنید که لنگر خمشی در جایی که تیر بر فنر تکیه دارد برابر صفر باشد.



شکل ۴۱ - ۱۲



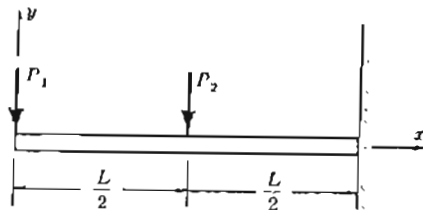
شکل ۴۲ - ۱۲

۶۶۷

مسائل ۱۲-۲-۱ تا ۱۲-۲-۶ معادله محنتی تغییر مکان تیرهای شکل های ۱۲-۲-۱ تا ۱۲-۲-۶ را با استفاده از توابع استثنائی بدست آورده با جواب های داده شده مقایسه کنید.

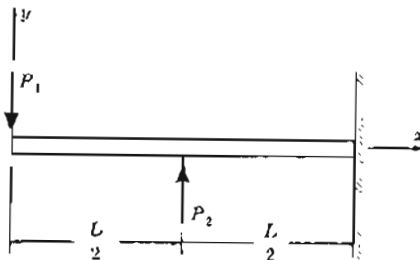
مسائل ۱۲-۲-۷ تا ۱۲-۲-۴۴ مسائل ۱۰-۴-۲ تا ۱۰-۴-۲۹ و ۱۰-۴-۳۸ تا ۱۰-۴-۴۷ را با استفاده از توابع استثنائی حل کنید.

مسائل ۱۲-۳-۱ تا ۱۲-۳-۸ واکنشهای تیرهای شکل های ۱-۳-۱ تا ۱-۳-۸ را با استفاده از توابع استثنائی بدست آورید.



$$EIv = -\frac{P_1}{6}(x)^3 - \frac{P_2}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{P_1 L^2}{2} + \frac{P_2 L^2}{8}\right)x - \frac{P_1 L^3}{3} - \frac{5P_2 L^3}{48}$$

شکل ۱۲-۲-۱



$$EIv = -\frac{P_1}{6}(x)^3 + \frac{P_2}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{P_1 L^2}{2} - \frac{P_2 L^2}{8}\right)x - \frac{P_1 L^3}{3} + \frac{5P_2 L^3}{48}$$

شکل ۱۲-۲-۲

۶۶۶

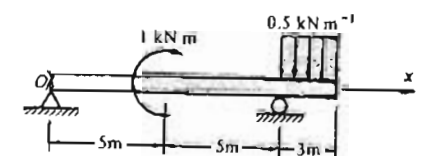
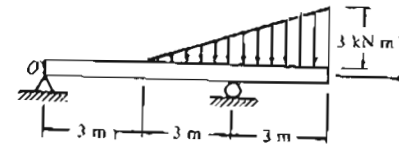
$$\delta_B = v(x=L) = \frac{P}{12EI} \left(L^3 - \frac{14L^3}{8} \right) = -\frac{PL^3}{16EI}$$

سراجام ثابت فیری k فر برابر است با

$$k = \frac{R_2}{\delta_B} = \frac{16EI}{L^3}$$

۱۲-۵ مسائل حل نشده

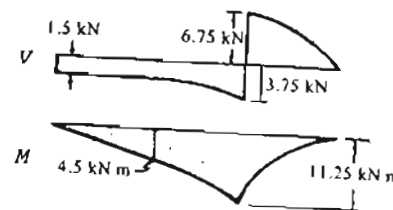
مسائل ۱۲-۱-۱ و ۱۲-۱-۲ معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیرهای شکل های ۱۲-۱-۱ و ۱۲-۱-۲ نوشته نمودارهای آنها را رسم کنید و با جواب های داده شده مقایسه نمایید.



$$w(x) = -1.5(x)^{-1} - \frac{3}{8}(x-3)^1 + 10.5(x-6)^{-1}$$

$$V(x) = -1.5(x)^0 - \frac{3}{2}(x-3)^2 + 10.5(x-6)^0 \text{ kN}$$

$$M(x) = -1.5(x)^1 - \frac{3}{8}(x-3)^3 + 10.5(x-6)^1 \text{ kN.m}$$

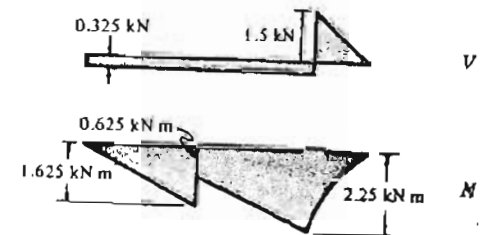


شکل ۱۲-۱-۱

$$w(x) = -0.325(x)^{-1} + 1(x-5)^{-1} + 1.825(x-10)^{-1} - 0.5(x-10)^0$$

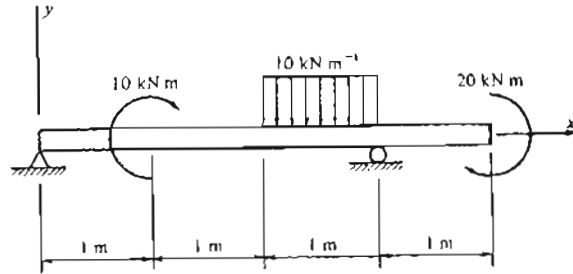
$$V(x) = -0.325(x)^0 + 1(x-5)^0 + 1.825(x-10)^0 - 0.5(x-10)^1 \text{ kN}$$

$$M(x) = -0.325(x)^1 + 1(x-5)^1 + 1.825(x-10)^1 - 0.25(x-10)^2 \text{ kN.m}$$



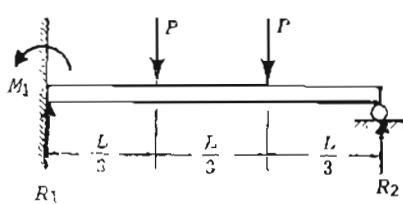
شکل ۱۲-۱-۲

۶۶۹

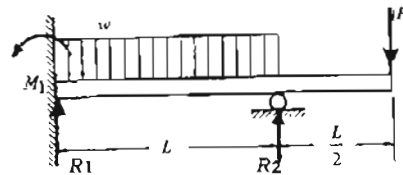


$$EIv = -\frac{1}{3}(x)^3 + 5(x-1)^2 - \frac{1}{24}(x-2)^4 + \frac{1}{24}(x-3)^4 + \frac{1}{6}(x-3)^3 + 10(x-4)^2 + 61x$$

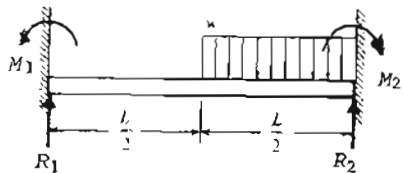
شکل ۲-۲-۶



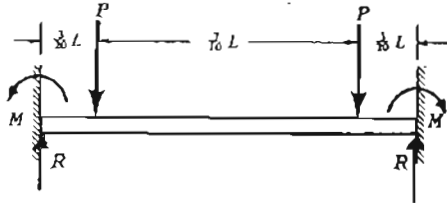
شکل ۲-۲-۱



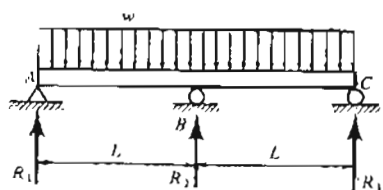
شکل ۲-۲-۲



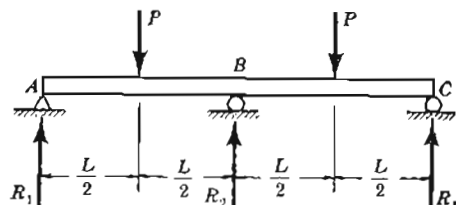
شکل ۲-۲-۳



شکل ۲-۲-۴

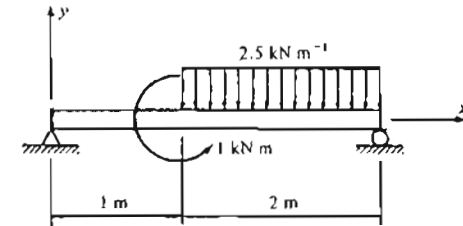


شکل ۲-۲-۵



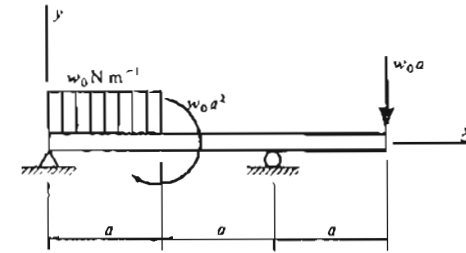
شکل ۲-۲-۶

۶۶۸



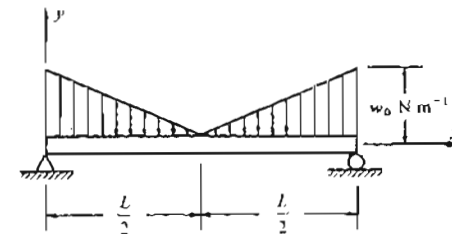
$$EIv = \frac{1}{3}(x)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{24}(x-1)^4 + \frac{1}{2}(x-3)^3 - 1.78x \text{ kN m}^3$$

شکل ۲-۲-۳



$$EIv = -\frac{w_0a}{24}(x)^3 - \frac{w_0}{24}(x)^4 + \frac{w_0}{24}(x-a)^4 + \frac{w_0a^2}{2}(x-a)^3 + \frac{9}{24}w_0a(x-2a)^3 - \frac{w_0a}{6}(x-3a)^3 + \frac{11}{48}w_0a^3x$$

شکل ۲-۲-۴



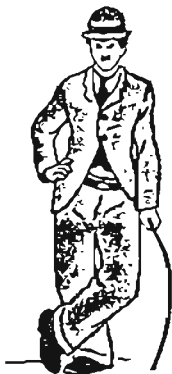
$$EIv = \frac{w_0L}{24}(x)^4 - \frac{w_0}{24}(x)^4 + \frac{w_0}{60L}(x)^5 - \frac{w_0}{10L}\left(x - \frac{L}{2}\right)^5 - \frac{3}{192}w_0L^3x$$

فصل سیزدهم

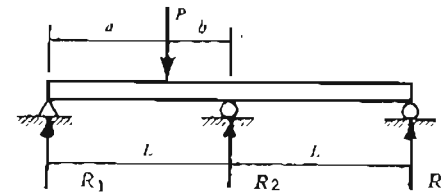
ستون ها

۱۳-۱ مقدمه

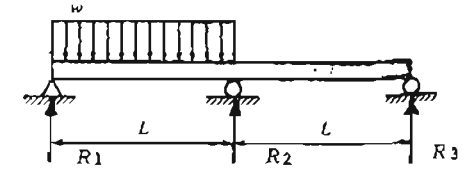
انتخاب ستون ها معمولاً قسمت خیلی مهم طرح یک سازه را تشکیل می دهد زیرا شکست ستون معمولاً آثار فاجعه انگیز به بار می آورد. علاوه بر طرح ستون ها نسبت به طرح تیرهای تحت خمش و یا میله های تحت پیچش مشکل تر است زیرا رفتار آنها پیچیده تر می باشد. اگر طول ستون نسبت به عرض آن زیاد باشد ممکن است در اثر کمانش، یعنی در اثر خمش و تغییر مکان جانبی زیاد، شکست بخورد تا اینکه بوسیله فشار مستقیم، بسته به لاغری ستون، کمانش ممکن است ارتجاعی یا غیر ارتجاعی باشد. در بخش های زیر ما اساساً رفتار ستون های لاغر و بلند را مطالعه می کنیم که رفتار ارتجاعی دارند.



پدیده کمانش!



شکل ۷-۳-۱۲



شکل ۸-۳-۱۲

مسائل ۹-۳-۱۲ تا ۲۳-۳-۱۲ مسائل ۱-۲-۱۱ تا ۷-۲-۱۱ ،
۱-۳-۱۱ تا ۱۴-۳-۱۱ ، ۲۱-۳-۱۱ ، ۲۴-۳-۱۱ ، ۳۵-۳-۱۱ و
۲۷-۳-۱۱ را با استفاده از توابع استثنائی حل کنید.

۱۲-۶ جواب های مسائل حل نشده

$$R_1 = \frac{4P}{3} ; M_1 = \frac{PL}{3} ; R_2 = \frac{2P}{3} : 12-3-1$$

$$R_1 = \frac{5}{8}wL - \frac{3}{4}P ; M_1 = \frac{1}{8}wL^2 - \frac{1}{4}PL ; R_2 = \frac{3}{8}wL + \frac{7}{4}P : 12-3-2$$

$$R_1 = \frac{3wL}{32} ; M_1 = \frac{5wL^2}{192} ; R_2 = \frac{13wL}{32} ; M_2 = \frac{11wL^2}{192} : 12-3-3$$

$$R_1 = \frac{3}{8}wL ; R_2 = \frac{5}{4}wL : 12-3-5 \quad R = P ; M = \frac{51PL}{400} : 12-3-4$$

$$R_1 = \frac{5}{16}P ; R_2 = \frac{11}{8}P : 12-3-6$$

$$R_1 = \frac{Pb}{L} - \frac{Pa}{4L^2}(L^2 - a^2) ; R_2 = \frac{Pa}{L} + \frac{Pa}{2L^2}(L^2 - a^2) ; R_3 = -\frac{Pa}{4L^3} \times (L^2 - a^2) : 12-3-7$$

$$R_1 = \frac{7wL}{16} ; R_2 = \frac{5wL}{8} ; R_3 = -\frac{wL}{16} : 12-3-8$$

فصل سیزدهم

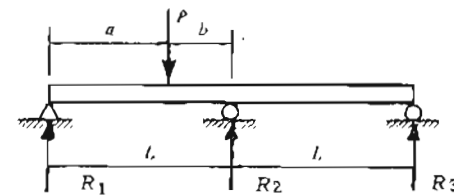
ستون ها

۱۳-۱ مقدمه

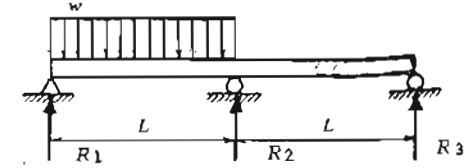
انتخاب ستون ها معمولا " قسمت خیلی مهم طرح یک سازه را تشکیل می دهد زیرا شکست ستون معمولا " آثار فاجعه انگیز به بار می آورد . بعلاوه ، طرح ستون ها نسبت به طرح تیرهای تحت خمش و یا میله های تحت پیچش مشکل تر است زیرا رفتار آنها پیچیده تر می باشد . اگر طول ستون نسبت به عرض آن زیاد باشد ممکن است در اثر کماتش ، یعنی در اثر خمش و تغییر مکان جایی زیاد ، شکست بخورد تا اینکه بوسیله فشار مستقیم . بسته به لاغری ستون ، کماتش ممکن است ارتجاعی یا غیر ارتجاعی باشد . در بحث های زیر ما اساسا " رفتار ستون های لاغر و بلند را مطالعه می کنیم که رفتار ارتجاعی دارند .



پدیده کماتش !



شکل ۱۲-۳-۷



شکل ۱۲-۳-۸

مسائل ۱۲-۳-۹ تا ۱۲-۳-۲۳ مائل ۱۱-۲-۱ تا ۱۱-۲-۷ و ۱۱-۳-۱ تا ۱۱-۳-۳۵ ، ۱۱-۳-۳۴ ، ۱۱-۳-۳۱ ، ۱۱-۳-۱۴ و ۱۱-۳-۳۷ را با استفاده از توابع استثنائی حل کنید .

۱۲-۶ جواب های مسائل حل نشده

$$R_1 = \frac{4P}{3} ; M_1 = \frac{PL}{3} ; R_2 = \frac{2P}{3} : 12-3-1$$

$$R_1 = \frac{5}{8}wL - \frac{3}{4}P ; M_1 = \frac{1}{8}wL^2 - \frac{1}{4}PL ; R_2 = \frac{3}{8}wL + \frac{7}{4}P : 12-3-2$$

$$R_1 = \frac{3wL}{32} ; M_1 = \frac{5wL^2}{192} ; R_2 = \frac{13wL}{32} ; M_2 = \frac{11wL^2}{192} : 12-3-3$$

$$R_1 = \frac{3}{8}wL ; R_2 = \frac{5}{4}wL : 12-3-5 \quad R = P ; M = \frac{51PL}{400} : 12-3-4$$

$$R_1 = \frac{5}{16}P ; R_2 = \frac{11}{8}P : 12-3-6$$

$$R_1 = \frac{Pb}{L} - \frac{Pa}{4L^3}(L^2 - a^2) ; R_2 = \frac{Pa}{L} + \frac{Pa}{2L^3}(L^2 - a^2) ; R_3 = -\frac{Pa}{4L^3} \times (L^2 - a^2) : 12-3-7$$

$$R_1 = \frac{7wL}{16} ; R_2 = \frac{5wL}{8} ; R_3 = -\frac{wL}{16} : 12-3-8$$

۶۷۳

داشت

$$v'' + k^2 v = -k^2 e \quad (13-4)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت می باشد و جواب آن شامل دو سمت است :

(الف) - جواب معادله همگن که با صفر قرار دادن سمت راست معادله 13-4 نتیجه می شود .

(ب) - جواب ویژه که در معادله 13-4 صدق کند .

جواب معادله همگن عبارتست از

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

C_1 و C_2 ثابت های اختیاری هستند که با توجه به شرایط حدی محاسبه می شود . جواب ویژه معادله 13-4 مساوی است با

$$v_p = -e$$

بنابراین جواب عمومی معادله 13-4 برابر $v_H + v_p$ می باشد .

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e \quad (13-5)$$

درستی این جواب را می توان با جایگزین نمودن آن در معادله 13-4 تحقیق نمود .

ثابت های انتگرال گیری را می توان از شرایط دو انتهای تیر بدست آورد . این شرایط عبارتند از $v=0$ در $x=0$ و $x=L$. اگر این شرایط را در معادله 13-5 بکار ببریم

خواهیم داشت

$$C_2 = e \quad ; \quad C_1 = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} = e \tan \frac{kL}{2}$$

بنابراین معادله منحنی تغییر مکان تیر برابر است با

$$v = e \left(\tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right) \quad (13-6)$$

با داشتن خروج از مرکز e و بار P تغییر مکان ستون را از رابطه فوق می توان حساب نمود .

تغییر مکان وسط ستون (δ) با جایگزینی $x = L/2$ در معادله 13-6 به دست می آید .

$$\delta = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (13-7)$$

به عنوان حالت خاص اگر $P=0$ باشد (یعنی $k=0$ و $\sec kL/2 = 1$) تغییر مکان

۶۷۲

۱۳-۲ ستون های با بار محوری خارج از مرکز

مطالعه رفتار ستون ها را با بررسی یک ستون لایحه که تحت اثر بارهای محوری P با خروج از مرکز e (شکل ۱-۱۳) قرار دارد شروع می کنیم . ستون در دو انتها دارای تکیه گاه های ساده می باشد و خروج از مرکز e از مرکز سطح مقطع عرضی تا خط اثر نیروهای محوری اندازه گیری می شود . با فرض اینکه صفحه xy یک صفحه تقارن ستون باشد ، مشاهده می کنیم که ستون در همان صفحه تغییر شکل خواهد داد .

لنگر خمشی در ستون در فاصله x از انتهای پایینی آن برابر است با

$$M = P(e + v) \quad (13-1)$$

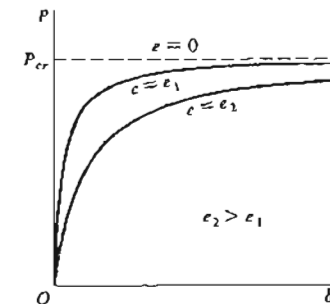
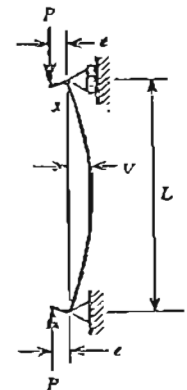
در این رابطه v تغییر مکان جانبی ستون در امتداد y می باشد . علامت لنگر خمشی در معادله 13-1 با قرار دادن علامتی که قلاب در تعیین تعبیر مکان تیرها بکار بردیم (بخش ۱-۱۰ را ببینید) مطابقت دارد . در این صورت معادله منحنی تغییر مکان ستون شکل ۱-۱۳ به صورت زیر نوشته می شود :

$$EI v'' = -M = -P(e + v) \quad (13-2)$$

فرض می کنیم

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (13-3)$$

پس از تقسیم نمودن طرفین رابطه 13-2 بر EI و استفاده از رابطه 13-3 خواهیم



شکل ۱-۱۳ ستون با بارهای محوری خارج از مرکز

شکل ۱۳-۲ نمودار بار-تغییر مکان برای ستون شکل ۱-۱۳

صفر می شود. اکنون اگر مقدار معین e_1 از خروج از مرکز e را انتخاب کنیم از معادله 13-7 می توانیم منحنی بار- تغییر مکان (P در مقابل δ) را رسم نمائیم. این منحنی در شکل ۲-۱۳ رسم شده است که از آن مشاهده می کنیم با اضافه شدن بار P تغییر مکان δ نیز هر چند به طور غیر خطی افزایش می یابد. اگر مقدار جدید e_2 (بزرگتر از e_1) را برای خروج از مرکز e انتخاب کنیم، در این صورت تغییر مکان ها نیز همانطور اضافه خواهند شد.

در شکل ۲-۱۳ مشاهده می کنیم موقعی که بار P به یک مقدار بحرانی معینی نزدیک می شود تغییر مکان δ ستون بدون حد افزایش می یابد. مقدار این بار بحرانی که آن را با P_{CR} نشان می دهیم از معادله 13-7 بدست می آید. هرگاه در این معادله $kL/2 = \pi/2$ باشد، جمله سکانت در آن بی نهایت می گردد. بنابراین وقتی که $kL = \pi$ می باشد تغییر مکان δ بی نهایت می شود و مقدار بحرانی بار P با توجه به رابطه 13-3 برابر خواهد بود با

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (13-8)$$

با بررسی حالتی که خروج از مرکز e صفر می باشد نیز همین نتیجه برای بار بحرانی حاصل می شود. اگر $e = 0$ باشد، تغییر مکان δ که از معادله 13-7 به دست می آید برای همه مقادیر $kL/2$ کوچکتر از $\pi/2$ صفر می شود زیرا در همه حالات مزبور جمله $\sec \frac{kL}{2} - 1$ معادله مزبور مقدار محدودی دارد. از این رو وقتی که P کوچکتر از P_{CR} است تغییر مکان δ صفر باقی می ماند. اما موقعی که $P = P_{CR}$ و $kL/2 = \pi/2$ ، تغییر مکان δ بوسیله معادله 13-7 مشخص نمی باشد و می تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد. این شرط در روی منحنی بار- تغییر مکان شکل ۲-۱۳ بوسیله خط افقی $e = 0$ مشخص شده است.

در بحث منحنی های شکل ۲-۱۳ باید به خاطر سپرد که معادله 13-7 براساس این فرضها بدست آمد که تغییر مکان ها کوچک باشند و ماده رفتار ارتجاعی خطی داشته باشد. بنابراین تغییر مکان δ فقط به صورت فرضی می تواند خیلی زیاد شود. همان طوریکه در بخش های ۱-۱۰ و ۱-۱۱ بحث شد، اگر تغییر مکان ها کوچک نباشند رابطه دقیق انحناء باید مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این در یک ستون واقعی قبل از اینکه تغییر مکان ها خیلی زیاد گردد تنش ماکزیمم در ستون احتمالاً از حد تناسب تجاوز خواهد نمود.

یک نتیجه مهم که از شکل ۲-۱۳ بدست می آید این است که بار P و تغییر مکانی

که آن ایجاد می کند با یکدیگر متناسب نمی باشد. بدین ترتیب حتی اگر تغییر مکان ها کوچک باقی بمانند و ماده ستون ارتجاعی خطی باشد اصل اجتماع اثر توا را نمی توان بکار برد. اگر ما بارهای وارد بر ستون در شکل ۱-۱۳ را معادل بارهای P که به طور مرکزی وارد شوند بعلاوه لنگرهای Pe که در دو انتهای ستون اثر کنند در نظر بگیریم، دلیل این نتیجه را می توان به آسانی درک نمود. لنگرهای Pe اگر به تنهایی اثر کنند تغییر مکانی ایجاد می کنند که می توان آن را مطابق روش های معمول محاسبه تغییر مکان تیرها حساب نمود (فصل دهم را ببینید). در چنین حالتی وجود تغییر مکان های کوچک در تیر اثر بارها را تغییر نمی دهد و لنگرهای خمشی در طول تیر را می توان بدون در نظر گرفتن تغییر مکان تیر حساب کرد. اما موقعی که بار محوری نیز بر ستون وجود دارد، تغییر مکان های ایجاد شده در اثر لنگرهای Pe باعث می شود که نیروی محوری علاوه بر اثر فشاری اثر خمشی نیز داشته باشد. این عمل خمشی نیروی محوری تغییر مکان های اضافی ایجاد می کند که بنوبه خود بر روی لنگرهای خمشی اثر خواهد داشت. بدین ترتیب لنگرهای خمشی را نمی توان مستقل از تغییر مکان ها بدست آورد و یک رابطه غیرخطی بین نیروی محوری و تغییر مکان ها وجود دارد.

اگر نیروی محوری که بر ستون شکل ۱-۱۳ اثر می کند در مقایسه با بار بحرانی خیلی کوچک باشد (مثلاً کمتر از 2 درصد بار بحرانی)، در این صورت کمیت $kL/2$ به اندازه کافی کوچک خواهد بود که بتوانیم تابع سکانت را با دو جمله اولش در بسط سری آن مساوی قرار دهیم.

$$\sec \frac{kL}{2} \approx 1 + \frac{k^2 L^2}{8}$$

اگر این رابطه را در معادله 13-7 جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$\delta = \frac{k^2 L^2 e}{8} = \frac{Pe L^2}{8EI} \quad (13-9)$$

این مقدار δ برابر است با تغییر مکان وسط یک تیر ساده که در دو انتها تحت اثر لنگرهای خمشی Pe قرار دارد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که هر موقع نیروی محوری P در مقایسه با P_{CR} خیلی کوچک باشد (همچون در یک ستون کوتاه) اثر تغییر مکان ها روی بزرگی لنگر خمشی را می توان صرف نظر نمود و فرمول های متداول محاسبه تغییر مکان تیرها (پیوست ۳ کتاب) را می توان بکار برد.

حداکثر لنگر خمشی در ستون با بار گذاری خارج از مرکز شکل ۱-۱۳ در وسط آن رخ می دهد و برابر است با

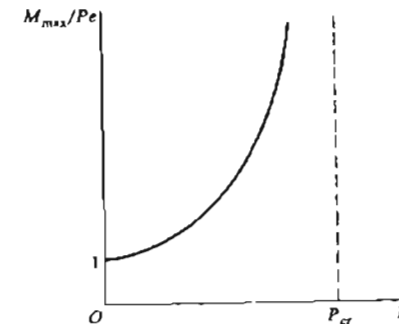
$$M_{\max} = P(e + \delta) = Pe \sec \frac{kL}{2} \quad (13-10)$$

نمودار این معادله در شکل ۳-۱۳ رسم شده است. از این شکل مشاهده می کنیم که برای مقادیر خیلی کوچک P حداکثر لنگر خمشی برابر Pe است و این مقدار برابر لنگر خمشی در ستون وقتی که از اثر تغییر مکان صرف نظر شود می باشد. با اضافه شدن P لنگر خمشی به طور غیر خطی افزایش می یابد و موقعی که P نزدیک مقدار بحرانی $\pi^2 EI/L^2$ می گردد لنگر خمشی خیلی زیاد می شود. حداکثر تنش فشاری در ستون که در سطح مقعرش اتفاق می افتد برابر است با

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad (13-11)$$

در این رابطه، S ضریب مقطع می باشد. این معادله در بخش ۵-۱۳ به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در سراسر بحث فوق فرض بر این بوده است که خمش ستون در یک صفحه تقارن ستون (صفحه xy در شکل ۱-۱۳) صورت می گیرد. اگر ستون دو صفحه تقارن دارد و خروج از مرکز e در امتداد یکی از محورهای اصلی مقطع عرضی نباشد لازم است که لنگر خمشی Pe را به دو مؤلفه که هر یک در یک صفحه تقارن ستون اثر کند تجزیه نمود. تغییر مکان ستون در هر یک از دو صفحه تقارن را می توان با همان روش مورد بحث در بالا بررسی نمود.



شکل ۳-۱۳ نمودار لنگر خمشی ماکزیمم ستون شکل ۱-۱۳

در بخش قبل نشان داده شد موقعی که نیروی محوری در یک ستون با بار محوری خارج از مرکز به یک مقدار بحرانی نزدیک می شود تغییر مکان ستون به سرعت زیاد می گردد. وقتی که P برابر P_{cr} می شود، فرمول های تغییر مکان در وسط ستون (معادله ۷-۱۳) و لنگر خمشی ماکزیمم (معادله ۱۰-۱۳) مقادیر بی نهایت زیادی می دهد. برای ستونی با تکیه گاه های ساده پیدا کردیم $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. این مقدار بار بحرانی بستگی به ابعاد ستون و ضریب ارتجاعی ماده ستون دارد. تا زمانی که ستون ارتجاعی باقی می ماند می توانیم بار بحرانی را به عنوان بار نهایی ستون در نظر بگیریم زیرا وقتی که بار P به این مقدار نزدیک می شود تغییر مکان های ستون خیلی زیاد می گردد. در طرح های واقعی و عملی معمولاً "ضریب اطمینان مناسبی انتخاب می شود و بار مجاز از تقسیم نمودن بار بحرانی بر ضریب اطمینان مزبور تعیین می گردد.

در خیلی از ستون های با ابعاد معمولی قبل از اینکه بار محوری فشاری در آنها به بار بحرانی برسد تنش ماکزیمم از تنش تسلیم تجاوز خواهد کرد. این نوع ستون ها تحت بارهای کمتر از بار بحرانی ارتجاعی کماتنه می کنند. در این فصل ما فقط کماتنه ارتجاعی ستون ها را بررسی می کنیم.

بار بحرانی ستون را می توان مستقیماً با مطالعه رفتار یک ستون ایده آل بدست آورد. فرض می شود ستون ایده آل کاملاً "مستقیم و تحت یک بار فشاری مرکزی (باری که از مرکز سطح مقطع عرضی آن عبور کند) قرار داشته باشد. ابتدا ستون ایده آل لاغری به طول L را در نظر می گیریم که در انتهای تحتانی گیر دار و در انتهای فوقانی آزاد می باشد (شکل ۴-۱۳). فرض می شود ماده ستون ارتجاعی خطی باشد. اگر بار محوری P کمتر از بار بحرانی باشد، میله مستقیم باقی می ماند و فقط تحت فشار محوری قرار می گیرد. این شکل مستقیم تعادل پایدار می باشد و این بدان معنی است که اگر بر ستون نیروی جانبی وارد شود و تغییر مکان کوچکی ایجاد گردد، وقتی که نیروی جانبی برداشته شود تغییر مکان ستون از بین رفته و ستون مجدداً "به حالت مستقیم در می آید. اما با افزایش تدریجی بار P وقتی که این بار برابر P_{cr} می گردد، ستون یک حالت تعادل خمشی پیدا می کند. ستون تحت اثر بار مزبور به طور ثنوری می تواند هر تغییر مکان کوچکی داشته باشد و نیروی جانبی کوچک در ستون تغییر مکانی ایجاد خواهد کرد که پس از برداشتن نیروی جانبی از بین نخواهد رفت. ستون تحت اثر بارهای بیشتر از بار بحرانی نا پایدار است و فرو خواهد ریخت. این پدیده نا پایداری به کماتنه موسوم می باشد و

۶۷۸

می‌توانیم بگوئیم که ستون تحت اثر بار بحرانی کمانه می‌کند یا نا پایدار می‌شود.
بار بحرانی ستون را می‌توان با استفاده از معادله دیفرانسیل خمشی تغییر مکان بدست آورد. برای ستون شکل ۵-۱۳ لنگر خمشی در فاصله x از پای ستون برابر است با

$$M = -P(\delta - v)$$

در این رابطه، δ تغییر مکان انتهای آزاد ستون می‌باشد. بنابراین معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان به صورت زیر در می‌آید:

$$EIv'' = -M = P(\delta - v) \quad (13-12)$$

چون انتهای بالای ستون آزاد است که در هر جهتی خم شود واضح است که کمانش ستون در صفحه صلبیت خمشی (EI) مینیمم رخ خواهد داد، یعنی خمش حول آن محور اصلی اتفاق خواهد افتاد که کوچکترین گشتاور لختی را داشته‌باشد. فرض می‌کنیم صفحه‌ای که در آن کمانش رخ می‌دهد صفحه xy باشد و این صفحه یک صفحه تقارن باشد. اگر در اینجا نیز مانند بحث قبل فرض کنیم $k^2 = P/EI$ ، معادله 13-12 بصورت زیر نوشته می‌شود:

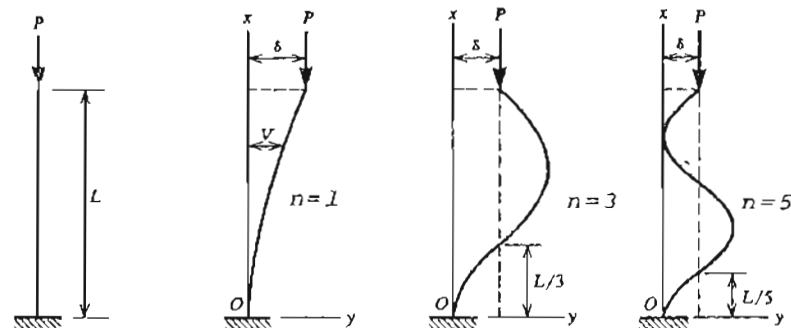
$$v'' + k^2v = k^2\delta$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \quad (13-13)$$

برای پیدا کردن ثابت‌های C_1 و C_2 از شرایط حدی انتهای گیر دار ستون استفاده می‌کنیم. این شرایط عبارتند از $v = v' = 0$ در $x = 0$ ، اگر از طرفین معادله 13-13 مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$v' = C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx \quad (13-14)$$



شکل ۴-۱۳

شکل ۵-۱۳

شکل ۶-۱۳

شکل ۷-۱۳

۶۷۹

اکنون از جایگزینی شرایط حدی در معادلات 13-13 و 13-14 نتیجه می‌شود

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\delta$$

بنابراین معادله منحنی تغییر مکان عبارت است از

$$v = \delta(1 - \cos kx) \quad (13-15)$$

تغییر مکان δ هنوز در این معادله نا معین می‌باشد.

برای اینکه اطلاعات بیشتری در مورد تغییر مکان ستون بدست آوریم، شرط $v = \delta$ در $x = L$ (در انتهای فوقانی ستون) را در معادله 13-15 بکار می‌بریم. از این شرط حاصل می‌شود

$$\delta \cos kL = 0 \quad (13-16)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که $\delta = 0$ یا $\cos kL = 0$. اگر $\delta = 0$ باشد ستون تغییر مکانی نخواهد داشت و در نتیجه کمانش رخ خواهد داد (شکل ۴-۱۳). در چنین حالتی کمیت kL هر مقداری می‌تواند داشته‌باشد و معادله 13-16 با هر مقدار kL صادق خواهد بود. بنابراین بار P نیز می‌تواند هر مقداری اختیار کند. این نتیجه با محور قائم منحنی بار - تغییر مکان در شکل ۸-۱۳ نشان داده شده است.

اما در $\cos kL = 0$ است که در این حالت از معادله 13-16 مشاهده می‌کنیم که δ می‌تواند هر مقدار کوچکی داشته‌باشد. شرط $\cos kL = 0$ لازم می‌دارد که

$$kL = \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (13-17)$$

برای بدست آوردن کوچکترین مقدار P که در رابطه فوق صدق کند، n را برابر واحد اختیار می‌کنیم یا $kL = \pi/2$ و از این رابطه داریم

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (13-18)$$

این فرمول کوچکترین بار بحرانی ستون شکل ۴-۱۳ را می‌دهد. برای تعیین شکل منحنی تغییر مکان مشاهده می‌کنیم که $k = \pi/2L$ و در نتیجه کمیت kx در رابطه 13-15 از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند. بنابراین شکل منحنی تغییر مکان مطابق شکل ۵-۱۳ می‌باشد. با این جواب مقدار تغییر مکان δ نا معین باقی می‌ماند و این حالت در منحنی بار - تغییر مکان شکل ۸-۱۳ با خط افقی $P = P_{cr}$ نشان داده شده است. البته باید به خاطر سپرد که در این تحلیل ایده‌آل تغییر مکان‌ها کوچک فرض شده‌اند.

بار بحرانی P_{cr} برای یک ستون ارتجاعی ایده‌آل اغلب به بار اولر^۱ موسوم

۶۸۱

(شکل ۹ - ۱۳) . این نوع کماتش به کماتش موضعی موسوم است که مطالعه آن احتیاج به تحلیل دقیق تری دارد (مرجع ۲۵) .
اکنون معادله ۱۳-۱۷ را مجدداً در نظر می‌گیریم . جواب کلی این معادله بر حسب n به صورت زیر می‌باشد :

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2} \quad (13-19)$$

از این رابطه بی نهایت جواب بدست می‌آید . معادله منحنی تغییر مکان نظیر رابطه فوق از رابطه ۱۳-۱۵ بدست می‌آید .

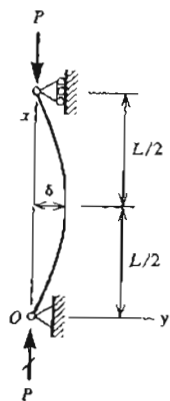
$$v = \delta \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2L} \right) \quad (13-20)$$

این معادله نشان می‌دهد موقعی که n اضافه می‌شود منحنی تغییر مکان موج‌های بیشتری خواهد داشت . وقتی که $n = 1$ ، منحنی تغییر مکان مطابق شکل ۵ - ۱۳ یک نیم موج دارد . برای حالت بعدی ($n = 3$) داریم

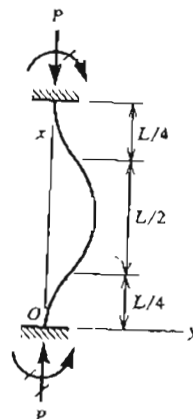
$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} ; \quad v = \delta \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2L} \right)$$

برای $n = 5$ داریم

$$P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2} ; \quad v = \delta \left(1 - \cos \frac{5\pi x}{2L} \right)$$



(a)



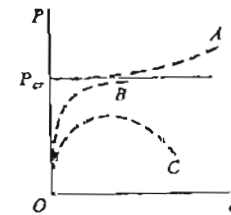
(b)

شکل ۱۰ - ۱۳

۶۸۰

است زیرا ریاضی داس مشهور لئونارد اولر^۱ (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷) اولین کسی بود که مسئله کماتش ستون‌های لاغر و تعیین نمودن بارهای بحرانی را مورد بررسی قرار داد (مراجع ۲۵ ، ۳۵ و ۳۶) .

از رابطه ۱۳-۱۸ مشاهده می‌شود که بار بحرانی ستون مستقیماً با صلیبت حتمی EI و معکوساً با مربع طول ستون متناسب می‌باشد . همچنین باید توجه نمود که بار بحرانی مستقل از مقاومت فشاری ماده است . از این رو با استفاده از فولادی که دارای تنش تسلیم بالایی است می‌توان بار بحرانی ستون را اضافه نمود ، اما بار بحرانی را می‌توان با افزایش گشتاور لختی مقطع (I) اضافه کرد . این کار را می‌توان با توزیع ماده در حداکثر فاصله از مرکز سطح مقطع عرضی ستون انجام داد . از این رو مقاطع تو خالی و جدار نازک از مقاطع تو پر هم سطح اقتصادی تر هستند . با کاهش ضخامت جدار چنین مقاطعی و افزایش ابعاد مقطع ، پایداری ستون افزایش می‌یابد زیرا گشتاور لختی در این حالت بیشتر است . ولی برای ضخامت جدار ستون جدار نازک یک حد پایینی وجود دارد که اگر ضخامت جدار از آن مقدار کمتر شود ، خود جدار نا پایدار می‌گردد . در این صورت به جای کماتش نام ستون ، در ستون کماتش موضعی به صورت چین خوردگی پیدای می‌شود



شکل ۸ - ۱۳ نمودارهای بار - تغییر مکان برای ستون‌ها



شکل ۹ - ۱۳ مثال کماتش موضعی در ستون

۶۸۲

نشان داده شده است. تئوری مربوط به تغییر مکان‌های کوچک محدود بود زیرا ما از رابطه تقریبی $\delta = \frac{1}{2} K \Delta$ برای احصای ستون به جای رابطه دقیق (معادله 10-11) استفاده کردیم. جواب معادله دیفرانسیل دقیق برای چند حالت محاسبه شده است (مرجع 25) و این نتایج نشان می‌دهد که در واقع هیچ نا معنی در تغییر مکان ستون وجود ندارد. اگر از معادله دیفرانسیل دقیق برای ستون ارتجاعی ایده‌آل استفاده کنیم خواهیم یافت که نمودار بار - تغییر مکان به صورت منحنی A در شکل ۸-۱۳ در می‌آید. پس از اینکه ستون تغییر مکان زیادی داد، اگر تنش‌ها در ستون از حد تناسب تجاوز کند، در این صورت منحنی بار - تغییر مکان نسبت به منحنی A به طرف پائین خواهد رفت. در آزمایش‌هایی که با ستون‌های ارتجاعی صورت می‌گیرد نمودار بار - تغییر مکان حاصل معمولاً شبیه منحنی B شکل ۸-۱۳ می‌باشد (شکل ۲-۱۳ را نیز ببینید). به دلیل سی‌دستی در بارگذاری و ساختن و اجرای ستون، تغییر مکان‌های حاشی در بارهای کم‌تر از P_{cr} ظاهر می‌شوند و با نزدیک شدن بار به بار بحرانی افزایش می‌یابند. هر چقدر که ستون دقیق‌تر ساخته و بارگذاری شود، منحنی B به منحنی دو خطی تئوری (یکی قائم و دیگری افقی) نزدیک‌تر می‌شود. اگر تنش‌ها در ستون تحت بارهای کم‌تر از P_{cr} از حد تناسب تجاوز کند، منحنی بار - تغییر مکان شبیه منحنی C خواهد بود. نقطه ماکزیمم این منحنی معرف بار کمانش تئوری برای کمانش غیر ارتجاعی ستون می‌باشد و این بار کم‌تر از بار اولر برای همان ستون است.

مثال ۱-۱۳

ستون لاغری به طول L در انتهای بحرانی گیردار و در انتهای موانعی دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد (شکل ۱۱-۱۳). کوچکترین بار بحرانی این ستون و شکل کمانه کرده آن را تعیین کنید.

حل: موقعی که این ستون کمانه می‌کند نیروی واکنشی افقی R در انتهای موانعی ستون ایجاد می‌شود. در انتهای گیردار، نیروی افقی و همچنین لنگر وجود می‌آید. از معادلات تعادل استاتیک نتیجه می‌شود که دو نیروی افقی با یکدیگر مساوی ولی مختلف جهت می‌باشند و لنگر M برابر RL می‌باشد. لنگر خمشی در فاصله x از پای ستون برابر است با

$$M = P_v - R(L - x)$$

۶۸۲

منحنی‌های تغییر مکان برای این دو حالت به ترتیب در شکل‌های ۶-۱۳ و ۷-۱۳ رسم شده است. با وجود اینکه این جواب‌ها به طور تئوری حالت‌های ممکن کمانش ستون‌ها را نشان می‌دهند به طور عملی مورد استفاده نمی‌باشند زیرا ستون همواره در حالت اول کمانش، وقتی که P به مقدار داده شده بوسیله معادله 13-18 می‌رسد، کمانه می‌کند. بار بحرانی (کمانش) ستون‌های با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار را می‌توان از جواب حالت مورد بحث در فوق بدست آورد. برای مثال واضح است که به علت تقارن، منحنی تغییر مکان ستونی که در دو انتها دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی است (شکل a ۱۰-۱۳) در حالت اول کمانش در وسط طولش مماس قائم دارد. از این رو هر نیمه ستون در همان شرایط ستون شکل ۵-۱۳ می‌باشد و بار بحرانی ستون دو سر مفصلی با جایگزینی L/2 به جای L در معادله 13-18 بدست می‌آید.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (13-21)$$

همین نتیجه قبلاً در بحث ۲-۱۳ بدست آمد (معادله 8-13 را ببینید). سئوی که در دو انتها دارای تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد به حالت اساسی کمانش ستون‌های منشوری موسوم می‌باشد.

اگر ستون در دو انتها گیردار است (شکل b ۱۰-۱۳)، در هنگام کمانش در تکیه‌گاه‌ها لنگرهای واکنشی ایجاد می‌شود. منحنی تغییر مکان برای حالت اول کمانش یک منحنی کوسینوسی است که در مواضع L/4 از دو تکیه‌گاه دارای نقاط عطف می‌باشد. هر ربع طول ستون مانند یک ستون طره‌ای عمل می‌کند (شکل ۵-۱۳) و بنابراین بار بحرانی ستون دو سر گیردار با جایگزینی L/4 به جای L در معادله 13-18 به دست می‌آید.

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (13-22)$$

تغییر مکان‌های زیاد ستون‌ها

در موقع بدست آوردن معادله منحنی تغییر مکان (معادله 13-15)، تغییر مکان ماکزیمم δ مشخص شده باقی ماند. از این رو نتیجه گرفتیم که ستون در $P = P_{cr}$ می‌تواند هر تغییر مکان کوچکی داشته باشد و این حالت بوسیله خط افقی در شکل ۸-۱۳

است
کمانه
25
EI
بحر
نسبت
با
حد
جد
مقادیر
حالت
که
به

۶۸۵

پس از بسط دترمینان و ساده کردن خواهیم داشت

$$kL = \tan kL \quad (13-25)$$

از حل این معادله فرارده بار بحرانی بدست می آید. کوچکترین مقدار غیر صفر kL که در معادله مزبور صدق می کند $kL = 4.493$ می باشد که از روش آزمون و خطا محاسبه می شود. بار بحرانی مربوطه برابر است با

$$P_{cr} = (kL)^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{20.19EI}{L^2} \quad (13-26)$$

این مقدار بار بحرانی بین مقادیر بار بحرانی برای ستون های با دو انتهای مفصلی (معادله 13-21) و با دو انتهای گیردار (معادله 13-22) قرار دارد.

اکنون از معادلات 13-24 ثابت های C_1 و C_2 را بر حسب R حساب می کنیم.

$$C_1 = \frac{R}{kP} ; \quad C_2 = -\frac{RL}{P}$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله 13-23 معادله منحنی تغییر مکان بدست می آید.

$$v = \frac{R}{Pk} [\sin kx - kL \cos kx + kL (1 - \frac{x}{L})] \quad (13-27)$$

مقادیر P و k در این معادله معلوم می باشد. معادله فوق شکل ستون کمانه کرده را می دهد ولی دامنه تغییر مکان ستون نامعین بانی می ماند زیرا R یک مقدار اختیاری می باشد.

۴-۱۳ تنش ها در ستون ها

تنش فشاری متوسط در ستونی با بار مرکزی از تقسیم نمودن نیروی محوری بر مساحت مقطع عرضی ستون بدست می آید. تنشی که بدین ترتیب برای وقتی که بار محوری برابر بار بحرانی است محاسبه می شود به تنش بحرانی موسوم می باشد. برای حالت اساسی کمانش (شکل ۱۳-۱) بار بحرانی از معادله 13-21 بدست می آید و در نتیجه تنش بحرانی برابر است با

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (13-28)$$

۶۸۶

بنابراین معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان ستون عبارتست از

$$EI v'''' = -Pv + R(L-x)$$

جواب عمومی این معادله مساوی است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + R(L-x)/P \quad (13-23)$$

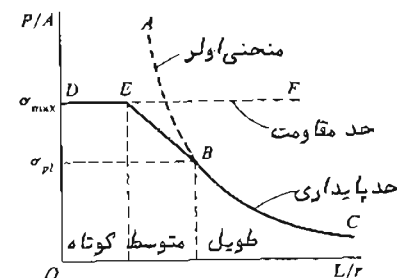
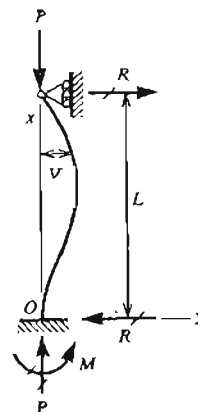
در این رابطه $k^2 = P/EI$

برای پیدا کردن ثابت های انتگرال گیری C_1 و C_2 و واکنش محمول R از سه شرط زیر در دو انتهای ستون استفاده می کنیم: $v=v'=0$ در $x=0$ و $v=0$ در $x=L$. اگر این شرایط را در معادله 13-23 بکار ببریم خواهیم داشت

$$C_2 + RL/P = 0 ; \quad C_1 k - R/P = 0 ; \quad C_1 \tan kL + C_2 = 0 \quad (13-24)$$

یک جواب سه معادله فوق $C_1 = C_2 = R = 0$ می باشد که در این صورت ستون تغییر مکانی نخواهد داشت و به شکل مستقیم در حال تعادل باقی می ماند. برای بدست آوردن جواب های مخالف صفر دستگاه معادلات 13-24 باید دترمینان مراتب را مساوی صفر قرار دهیم. بدین ترتیب معادله کمانش زیر حاصل می شود

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L/P \\ k & 0 & -1/P \\ \tan kL & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



شکل ۱۲-۱۳ نمودار تنش فشاری محوری در مقابل ضریب لاغری شکل ۱۱-۱۳

$$\tau = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (13-29)$$

شعاع ژیراسیون حداقل مقطع عرضی ستون می باشد. نسبت L/τ که در مخرج معادله 13-28 وجود دارد به ضریب لاغری ستون موسوم است. تنش بحرانی یا مربع این ضریب معکوساً متناسب است. البته رابطه 13-28 وقتی صادق است که σ_{cr} از حد سلب ماده ستون کمتر باشد.

نمودار تنش فشاری در ستون در مقابل ضریب لاغری در شکل ۱۲ - ۱۳ رسم شده است. منحنی ABC از معادله 13-28 رسم شده و به منحنی اولر موسوم است. این منحنی به طور فیزیکی فقط در ناحیه BC قابل قبول است که در آن فست σ_{cr} کوچکتر از حد تناسب با σ_{pl} می باشد. مقدار حدی L/τ که فرمول اولر بالاتر از آن صافی است با قرار دادن $\sigma_{cr} = \sigma_{pl}$ در معادله 13-28 و حل معادله حاصل برای L/τ بدست می آید. به عنوان مثال اگر فولاد سازه ای را در نظر بگیریم و فرض کنیم $\sigma_{pl} = 2500 \text{ Kg/cm}^2$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ، مقدار L/τ نظیر نقطه B در شکل ۱۲ - ۱۳ تقریباً 91 خواهد بود. بدین ترتیب برای $L/\tau < 91$ در یک ستون فولادی ایده آل با تکیه گاه های ساده قبل از اینکه کماش رخ دهد، تنش فشاری متوسط در آن به تنش حد تناسب خواهد رسید. از این رو فرمول اولر برای بار بحرانی در این حالت غیر قابل استفاده است. اگر $L/\tau > 91$ باشد، ستون به صورت ارتجاعی کمانه خواهد کرد و می توان فرمول اولر را بکار برد.

منحنی BC شکل ۱۲ - ۱۳ نشان می دهد وقتی که ضریب لاغری مقدار بزرگی دارد، تنش بحرانی خیلی کوچک می باشد. از این رو یک ستون خیلی لاغر تحت تنش فشاری کمی کمانه خواهد کرد. این حالت را می توان با بکار بردن مصالح با مقاومت بالاتر اصلاح نمود. تنش بحرانی را فقط با اضافه کردن شعاع ژیراسیون یا با بکار بردن ماده ای که ضریب ارتجاعی بالاتری دارد می توان افزایش داد.

موقعی که ضریب لاغری ستون خیلی پائین است می توان انتظار داشت که شکست ستون در اثر شکست خود ماده باشد. چنین شکستی ممکن است به شکل خورد شدن ماده (مثلاً وقتی که ماده ستون پستی باشد) و یا در اثر تسلیم شدن ماده (مثلاً در مورد فولاد سازه ای) صورت گیرد. در چنین شرایطی تنش فشاری ماکزیمم معینی (P/A) را می توان به عنوان حد مقاومت ماده تعیین نمود و بار نهایی را بر اساس این تنش بدست آورد. این حد در شکل ۱۲ - ۱۳ بوسیله خطی افقی DEF که از تنش ماکزیمم σ_{max}

می گذرد نشان داده شده است. این خط معرف حد مقاومت ستون می باشد. در شکل ۱۲ - ۱۳ من نواحی ستون های طویل و کوتاه ناحیه ای وجود دارد که در آن ضریب لاغری کوچکتر از آن است که ستون به صورت ارتجاعی کمانه کند و بزرگتر از آن است که ملاحظات مقاومت به تنهایی باعث شکست ستون شود. چنین ستون هایی با طول متوسطه صورت غیر ارتجاعی کمانه می کنند. در طرح های واقعی، بعضی از مواقع کافی است که بین E و B (شکل ۱۲ - ۱۳) را با یک خط مستقیم وصل کنیم. بدین ترتیب خط شکسته DEBC بدست می آید که اساس طرح ستون های با طول های مختلف را تشکیل می دهد. روش دیگری نیز متداول است و آن وصل نقاط D و B بوسیله یک منحنی هموار می باشد (بخش ۷ - ۱۳ را ببینید).

تنش P/A که از روی نموداری از نوع نمودار شکل ۱۲ - ۱۳ بدست می آید باید به عنوان تنش ماکزیمم σ_{max} برای ستون در نظر گرفته شود. تحت چنین نشی، بسته به مقدار ضریب لاغری، ستون یا در اثر شکست مستقیم خود ماده و یا در اثر کماش، خواهد شکست. تنش مجاز σ_w برای فشار باید σ_{max}/n اختیار شود که در آن n ضریب اطمینان می باشد. مقداری که برای n انتخاب می شود بستگی به احتمال وجود بار های اضافی پیش بینی نشده یا تصادفی، خطاهای ممکن در وارد نمودن مرکزی بار، و وجود انحنای کوچک اولیه در ستون دارد. تأثیر بواقص موجود در ستون با اضافه شدن طول ستون زیاد می شود، از این رو منطقی آن است که ضریب اطمینان متغیری انتخاب شود که با ضریب لاغری افزایش یابد. ضریب اطمینان برای کارهای سازه ای معمولاً از 1.5 تا 3 تغییر می کند. چند فرمول ویژه برای تنش های مجاز در بخش ۷ - ۱۳ داده شده است.

طول مؤثر ستون

در موقع رسم منحنی اولر در شکل ۱۲ - ۱۳ ما فقط حالت اساسی کماش (معادله 13-28) را در نظر گرفتیم. اما با معرفی مفهوم طول مؤثر (یا طول معادل) می توان منحنی مزبور را برای شرایط انتهایی دیگر ستون ها نیز بکار برد. با مقایسه بار بحرانی یک ستون طره ای (معادله 13-18) با بار بحرانی یک ستون دو سر مفصلی (معادله 13-21) مشاهده می کنیم که رابطه بار بحرانی یک ستون دو سر مفصلی را برای یک ستون طره ای نیز می توان بکار برد به شرط آنکه به جای L طول مؤثر 2L (دو برابر طول ستون طره ای) را بکار ببریم. بدین ترتیب می توانیم معادله 13-28 برای تنش بحرانی

را به صورت زیر تعمیم دهیم :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (13-30)$$

در این رابطه، KL طول مؤثر ستون می باشد. کمیت K (موسوم به ضریب طول مؤثر) برای ستون طره ای برابر ۲، برای ستون دو سر گیر دار برابر ۰.۵ (معادله 13-22) را ببینید)، برای ستونی که در یک انتها گیر دار و در انتهای دیگر مفصلی است برابر ۰.۷ (معادله 13-26) را ببینید) و برای ستون دو سر مفصلی برابر واحد می باشد. به طور کلی معادله 13-30 را برای ستون های با هر شرایط انتهایی می توان بکار برد، به شرط آنکه ضریب طول مؤثر معلوم باشد.

۵-۱۳ فرمول سکانت برای ستون ها

موقعی که ستونی با تکیه گاه های ساده تحت اثر نیروی محوری خارج از مرکزی فشرده می شود (شکل ۱-۱۳) تنش فشاری ماکزیم در ستون برابر است با (معادله 13-11)

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad (13-31)$$

جمله اول سمت راست این معادله معرف اثر فشار مستقیم و جمله دوم سمت راست معادله مزبور معرف اثر خمشی ستون می باشد. اگر c فاصله دورترین تار طرف مقعر ستون از محور خنثای مقطع ستون باشد، ضریب مقطع $S = I/c$ خواهد بود. با جایگزینی این مقدار ضریب مقطع و همچنین استفاده از شعاع زیراسیون $r = \sqrt{I/A}$ در معادله 13-31 خواهیم داشت

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{kL}{2} \right)$$

حال در این رابطه به جای k مقدار مساوی آن $\sqrt{P/EI}$ را قرار می دهیم.

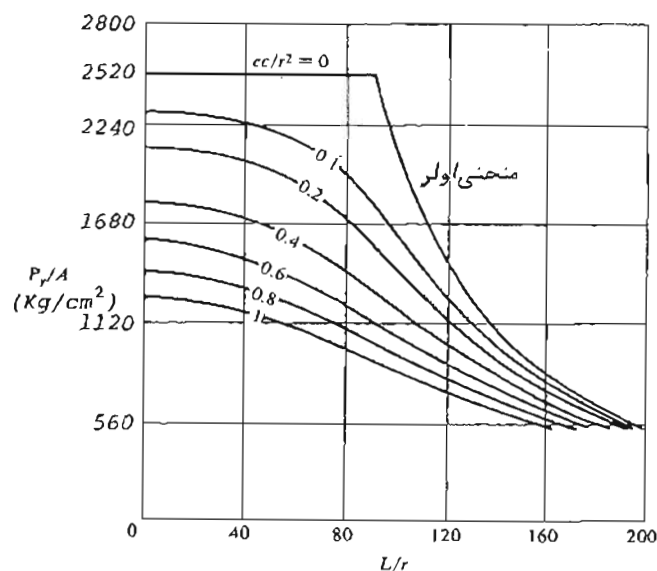
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (13-32)$$

این معادله که به فرمول سکانت برای ستون با بار خارج از مرکز موسوم می باشد، تنش ماکزیم در ستون را به صورت تابعی از تنش فشاری متوسط P/A ، ضریب لاغری L/r و نسبت خروج از مرکز ec/r^2 می دهد.

اگر برای تنش ماکزیم σ_{max} حدی انتخاب کنیم، در این صورت می توانیم از معادله 13-32 تنش فشاری متوسط مربوطه (P/A) را حساب کنیم. برای مثال در مورد فولاد سازهای می توان تنش تسلیم σ_y را به عنوان تنش حدی انتخاب نمود. در این صورت معادله 13-32 را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{P_y}{A} = \frac{\sigma_y}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P_y}{EA}} \right)} \quad (13-33)$$

در این رابطه P_y نیرویی است که باعث می شود تنش در تار از ستون که تحت بیشترین تنش قرار دارد به تنش تسلیم برسد. برای هر مقدار انتخابی نسبت خروج از مرکز، معادله فوق را می توان با روش آزمون و خطا حل نمود و نتایج را به صورت منحنی P_y/A تابعی از ضریب لاغری رسم نمود. چند نمونه از این منحنی ها برای $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ در شکل ۱۳-۱۳ رسم شده است. پس از محاسبه P_y ، بار مجاز P_w ستون با تقسیم نمودن P_y بر ضریب اطمینان بدست می آید.



شکل ۱۳-۱۳ نمودار معادله 13-33 برای $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

۶۹۱

(ب) - بار P_y که با خروج از مرکز e اثر می کند و باعث شروع تسلیم در ستون می گردد با جایگزینی $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ در معادله 33-13 و سپس حل معادله حاصل برای P_y با روش آزمون و خطا بدست می آید. نتیجه $P_y = 370.7 \text{ t}$ می باشد. بنابراین ضریب اطمینان در مقابل تسلیم برابر است با

$$n = \frac{P_y}{P} = \frac{370.7}{180} = 2.06$$

۱۳-۶ نواقص در ستون ها

نواقص احتمالی در ستون ها از قبیل انحناى اولیه در ستون، خروج از مرکزهای غیر قابل اجتناب در موقع وارد کردن بار، ناقص بودن شرایط انتهای، یا همگی بودن مصالح و غیره در روی رفتار ستون تحت بارگذاری فشاری مرکزی تأثیر مهمی دارند. مقدار این نواقص از ستونی به ستون دیگر فرق می کند و در نتیجه در نتایج آزمایش های انجام شده در روی ستون ها پراکندگی وجود دارد. به طور کلی وجود نواقص در ستون ها موجب میشود که ستون تحت اثر فشار نوام با خمش قرار بگیرد. بنابراین منطقی است نتیجه بگیریم که رفتار یک ستون ناقص با بارگذاری مرکزی مشابه رفتار یک ستون ایده آل تحت بارگذاری نیرویی با خروج از مرکز e خواهد بود. با این استدلال با انتخاب مقدار مناسبی برای نسبت خروج از مرکز ec/r^2 به طوریکه تأثیر نواقص به حساب بیاید می توان از فرمول سکانت برای طرح ستون هایی که ظاهراً "مستقیم و تحت بارگذاری مرکزی قرار دارند" استفاده نمود. البته مقدار ec/r^2 باید براساس نتایج آزمایش ها انتخاب شود. باوجود این استفاده از فرمول سکانت به طریق مزبور یک روش منطقی برای به حساب آوردن تأثیر نواقص در ستون ها می باشد تا اینکه صرفاً "بر مقدار ضریب اطمینان بیافزاییم".

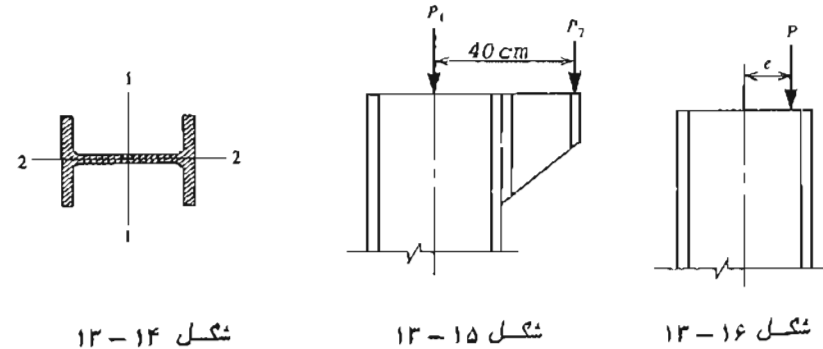
برای ستون های فولادی دو سر مصلی مقداری از نسبت خروج از مرکز که معمولاً مورد استفاده قرار می گیرد $ec/r^2 = 0.25$ می باشد. اگر این مقدار را در معادله 33-13 بکار ببریم و تنش تسلیم σ_y و ابعاد ستون نیز معلوم باشد می توانیم بار P_y را که در تارهای خارجی ستون تسلیم اولیه ایجاد می کند حساب کنیم. پس بار مجاز ستون با تقسیم نمودن P_y بر ضریب اطمینان مناسبی (مثلاً $n = 2$) بدست می آید.

در موقع استفاده از فرمول سکانت در بالا فرض کردیم که اثر نواقص غیر قابل اجتناب در ستون را می توان با انتخاب یک خروج از مرکز مناسب به حساب آورد. روش

۶۹۰

مثال ۲-۱۳

ستون فولادی شکل ۱۴-۱۳ از نوع $W14 \times 103$ (پیوست ۲ را ببینید)، در دو انتها مفصلی و به طول 7.5 m می باشد. این ستون بار مرکزی $P_1 = 158 \text{ t}$ و بار خارج از مرکز $P_2 = 22 \text{ t}$ را (شکل ۱۵-۱۳) که در امتداد محور 2-2 و در فاصله 40 cm از مرکز سطح مقطع اثر می کند حمل می نماید. (الف) - با استفاده از فرمول سکانت تنش فشاری ماکزیم را در ستون حساب کنید. (ب) - اگر تنش تسلیم فولاد $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، ضریب اطمینان در مقابل شروع تسلیم در ستون چقدر می باشد؟



حل: (الف) - دو بار P_1 و P_2 که در شکل ۱۵-۱۳ اثر می کنند به طور استاتیکی معادل بار متمرکز $P = 180 \text{ t}$ با خروج از مرکز $e = 4.9 \text{ cm}$ می باشند (شکل ۱۶-۱۳). مساحت مقطع عرضی ستون (A) و شعاع زیراسیون (r) و ضریب مقطع ستون (S) حول محور 1-1 از جداول پیوست ۲ کتاب بدست می آیند.

$$A = 30.3 \text{ in}^2 = 195.5 \text{ cm}^2 ; S = 164 \text{ in}^3 = 2687.5 \text{ cm}^3$$

$$r = 6.21 \text{ in} = 15.77 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{180000}{195.5} = 920.72 \text{ Kg/cm}^2 ; \frac{L}{r} = \frac{750}{15.77} = 47.6$$

$$\frac{ec}{r^2} = \frac{eA}{S} = \frac{(4.9)(195.5)}{2687.5} = 0.36$$

حال مقادیر محاسبه شده در فوق را در معادله 33-13 جایگزین می کنیم.

$$\sigma_{\max} = 920.72 \left[1 + 0.36 \sec \left(\frac{47.6}{2} \sqrt{\frac{920.72}{2.1 \times 10^6}} \right) \right] = 1298.1 \text{ Kg/cm}^2$$

۶۹۲

ستون فولاد سازه‌ای با تنش تسلیم σ_y باشد. همچنین فرض می‌کنیم مقطع عرضی ستون به شکل I باشد و خمش حول محور اصلی قوی تر صورت گیرد. در اکثر موارد عملی می‌توانیم مقطع عرضی را به صورت دو سطح مساوی که در محل بال‌ها قرار دارند ایده‌آل کنیم. گشتاور لختی و شعاع زیراسیون چنین مقطع ایده‌آلی را می‌توان به سهولت حساب نمود.

$$I = Ac^2 \quad ; \quad r = c \quad (13-39)$$

در این روابط، c فاصله محور خنشی از بال‌ها و A مساحت کل مقطع عرضی می‌باشد. اگر I و r را از معادلات 13-39 در معادله 13-38 جایگزین کنیم، به جای α از معادله 13-36 در معادله 13-38 قرار دهیم و فرض کنیم $\sigma_{max} = \sigma_y$ به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{P_y}{A} = \frac{\sigma_y \left[\pi^2 E - \frac{P_y}{A} \frac{L^2}{r^2} \right]}{\pi^2 E \left(1 + \frac{L}{r} \frac{a}{L} \right) - \frac{P_y}{A} \frac{L^2}{r^2}} \quad (13-40)$$

P_y در این رابطه مقداری از بار محوری است که تنش در دورترین تارهای ستون را به حد تنش تسلیم می‌رساند. نمودار این معادله برای فولاد سازه‌ای با $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ و مقادیر a/L برابر با $1/1000$ ، $1/700$ و $1/400$ در شکل ۱۷-۱۳ رسم شده است. برای ستون‌های خیلی کوتاه هر سه منحنی $P_y/A \approx 2520 \text{ Kg/cm}^2$ می‌دهند. برای ستون‌های خیلی لاغر مقادیری که از منحنی‌های مزبور به دست می‌آید نزدیک مقادیر حاصل از منحنی اولر می‌باشد. با استفاده از این منحنی‌ها کسیت P_y/A به دست می‌آید و با تقسیم نمودن این تنش فشاری متوسط بر ضریب اطمینان مناسبی (مثلاً $n=2$) مقدار مجاز تنش فشاری متوسط حاصل می‌شود. مریت این روش در استفاده از یک ضریب اطمینان ثابت می‌باشد، زیرا افزایش بی‌دقتی با اضافه شدن طول L ستون قبلاً با فرض نمودن یک تغییر مکان اولیه متناسب با طول ستون به حساب آورده شده است. اما بزرگی تغییر مکان اولیه ستون تا حدودی نا معین می‌باشد و بستگی به اطلاعات تجربی دارد. مقادیر مورد استفاده متداول برای L/a معمولاً بین 400 و 1000 تغییر میکند، منحنی‌های شکل ۱۷-۱۳ نیز برای مقادیر بین حدود مزبور رسم شده‌اند (برای اطلاعات بیشتر در مورد نوافس ستون‌ها به مرجع 25 رجوع کنید).

۶۹۲

دیگری برای این مسئله وجود دارد و آن این است که فرض کنیم بی‌دقتی‌های موجود معادل یک انحراف اولیه در ستون می‌باشد. برای سئوسی با استباهای مفصلی می‌توان فرض نمود که تغییر مکان اولیه v_0 ستون نصف موج یک منحنی سیوسی با تغییر مکان ماکزیمم a می‌باشد.

$$v_0 = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (13-34)$$

در این صورت لنگر خمشی در ستون موقعی که تحت اثر بار محوری مرکزی P قرار دارد برابر خواهد بود با

$$M = P (v_0 + v)$$

در این رابطه، v تغییر مکان اضافی ستون ناشی از خمش می‌باشد. این عبارت لنگر خمشی را می‌توان در معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان نیز جایگزین نمود و سپس معادله حاصل را مطابق آنچه که در بخش ۲-۱۳ بحث شد حل کرد. معادله حاصل برای تغییر مکان کل در وسط ستون عبارتست از

$$\delta_{max} = \frac{a}{1 - \alpha} \quad (13-35)$$

در این رابطه، α نسبت بار محوری P به بار بحرانی ستون می‌باشد.

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \quad (13-36)$$

معادله 13-35 نشان می‌دهد که بار محوری باعث می‌شود تغییر مکان اولیه ستون به اندازه ضریب $1/(1-\alpha)$ اضافه شود. چون α کوچکتر از واحد است، این ضریب همواره بزرگتر از واحد می‌باشد.

لنگر خمشی ماکزیمم در ستون برابر است با

$$M_{max} = P \delta_{max} = \frac{Pa}{1 - \alpha} \quad (13-37)$$

تنش فشاری ماکزیمم مساوی است با

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pac}{(1-\alpha)I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ac}{r^2(1-\alpha)} \right] \quad (13-38)$$

اگر مانند آنچه که در بخش ۵-۱۲ برای فرمول سکانت انجام دادیم برای تنش ماکزیمم σ_{max} حدی تعیین کنیم، در این صورت از معادله 13-38 مقدار P/A نظیر تنش حداکثر مزبور بدست می‌آید.

برای اینکه معادله 13-38 را به صورت ترسیمی نشان دهیم فرض می‌کنیم مصالح

ایالات متحده آمریکا فرمول هایی پیشنهاد کرده است که بر اساس ملاحظات زیر قرار دارد .
وقتی که L/r بزرگ است تنش ماکزیم σ_{max} (برابر با بار نهایی یا شکست فرض شده
تقسیم بر مساحت مقطع عرضی) بر اساس فرمول بار بحرانی اولر محاسبه میشود . بنابراین

$$\sigma_{max} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (13-41)$$

در این رابطه طول مؤثر KL یکار رفته است تا فرمول مربوط برای ستون های با شرایط
انتباهی مختلف صادق باشد . معادله 13-41 تا وقتی قابل استفاده می باشد که تنش
واقعی در ستون کمتر از حد تناسب (که برای فولاد سازه ای آن را می توانیم برابر تنش
 تسلیم σ_y فرض کنیم) باقی بماند . اما به علت وجود تنش های جا مانده (تنش هایی
 که در هنگام ساختن فولاد در آن ایجاد می شوند و قبل از وارد کردن بار وجود دارند)
تنش فشاری واقعی در موقع کمانش برابر است با

$$\sigma_c = \sigma_{max} + \sigma_r \quad (13-42)$$

در این رابطه ، σ_r تنش جا مانده فشاری در ستون است که مقدار آن ممکن است به
 $\sigma_y/2$ برسد σ_{max} برابر P/A می باشد . برای تعیین حد قابل استفاده بودن معادله
13-41 ، σ_c را برابر مقدار حدی آن σ_y و σ_r را برابر مقدار ماکزیم فرضی آن $\sigma_y/2$
قرار می دهیم . در این صورت از معادله 13-42 پیدا می کنیم $\sigma_{max} = \sigma_y/2$. بنابراین
نتیجه می گیریم تا وقتی که σ_{max} کمتر از $\sigma_y/2$ می باشد می توانیم از معادله 13-41
استفاده کنیم . مقدار حدی نظیر KL/r که آن را با λ نشان می دهیم با جایگزینی
 $\sigma_y/2$ به جای σ_{max} در معادله 13-41 و حل معادله حاصل برای λ بدست می آید .

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (13-43)$$

هر وقت که ضریب لاغری مؤثر KL/r برابر یا بیشتر از λ باشد ، فرمول اولر برای
تنش بحرانی (معادله 13-41) قابل استفاده می باشد .

با تقسیم نمودن طرفین رابطه 13-41 بر σ_y آن را به صورت بی بعدی می نویسیم .

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_y (KL/r)^2} = \frac{\lambda^2}{2(KL/r)^2} \quad \left(\frac{KL}{r} \geq \lambda \right) \quad (13-44)$$

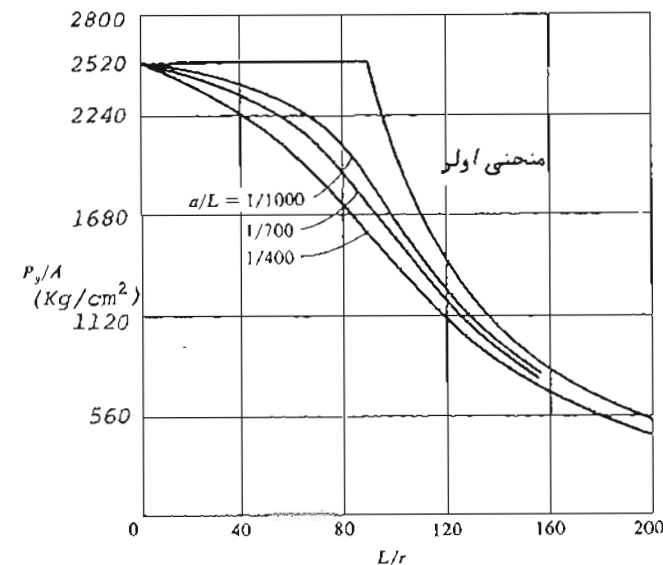
این معادله در شکل ۱۸ - ۱۳ رسم شده است .

برای ناحیه کمانش غیر انجاعی ($KL/r \leq \lambda$) ، شورای تحقیقات ستون یک منحنی

سهمی با معادله زیر پیشنهاد کرده است :

روش های مورد بحث در بخش های فوق برای تخمین ظرفیت باربری ستون ها
بر اساس ملاحظات تئوری قرار دارد . در موقع استفاده از روش های مزبور هور عوامل
تا مدینی از قبیل انتخاب ضریب اطمینان (که احتمالاً باید با L/r تغییر کند) و
انتخاب مقادیر مناسب برای بی دقتی ها و خروج از مرکزهای فرض شده وجود دارند . این
کمیت ها را فقط بر اساس نتایج حاصل از آزمایش های انجام شده در روی ستون های واقعی
می توان به طور صحیحی انتخاب نمود . بر اساس چنین آزمایش هایی است که می توانیم
ضرائب اطمینان را انتخاب کنیم و مقادیر مجاز تنش های فشاری متوسط در ستون ها را به
دست آوریم . فرمول های تجربی وجود دارند که تنش مجاز σ_w (برابر با P_w/A) را
به صورت تابعی از نسبت لاغری L/r می دهند .

برای طرح ستون های فولادی با بار گذاری مرکزی شورای تحقیقات ستون ^۱



شکل ۱۷-۱۳ نمودار معادله 13-40 برای مقطع I با $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

۶۹۷

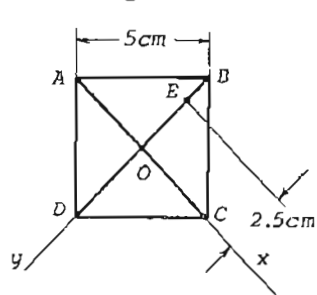
این معادلات تنش‌های مجاز نیز در شکل ۱۸-۱۳ رسم شده‌اند. این روابط با معادلات داده شده در آئین نامه مؤسسه ساختمانی فولادی آمریکا^۱ برای طرح ستون‌های فولادی تحت بارگذاری مرکزی معادل می‌باشند.

انتخاب یک مقطع مناسب برای ستونی تحت بارگذاری مشخص معمولاً "باید براساس روش آزمون و خطا صورت گیرد. با دانستن بار محوری، تنش مجاز σ_w را تخمین می‌زنیم و مساحت مقطع عرضی لازم را به طور تقریبی حساب می‌کنیم. سپس از جداول مقاطع استاندارد (از فیل جداول پیوست ۲ کتاب) مقطعی را انتخاب می‌کنیم. به کمک فرمول‌های مناسب ستون بررسی می‌کنیم که آیا مقطع انتخاب شده برای تحمل بارهای وارده کافی می‌باشد یا نه. اگر مقطع مزبور کافی نباشد، در این صورت مقطع سنگین‌تری را انتخاب و عمل بالا را تکرار می‌نماییم و اگر مقطع انتخاب شده بیش از اندازه قوی باشد، مقطع سبک‌تری را انتخاب و مجدداً "مقطع جدید را برای تحمل بارهای وارده بررسی می‌کنیم.

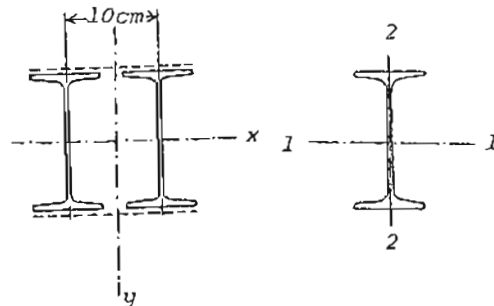
۱۳-۸ مسائل حل شده

مسئله ۱-۱۳

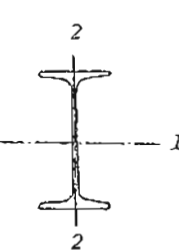
ستونی با مقطع مربع و ابعاد ۵cm×۵cm و طول ۱.۸۰ m تحت بار خارج از مرکز



شکل ۱۳-۱۹



شکل ۱۳-۲۰



شکل ۱۳-۲۱

1- American Institute of Steel Construction

۶۹۶

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y} = 1 - \frac{(KL/r)^2}{2\lambda^2} \quad \left(\frac{KL}{r} \leq \lambda \right) \quad (13-45)$$

این معادله نیز در شکل ۱۸-۱۳ رسم شده است. از روی منحنی مزبور مشاهده می‌شود که σ_{max} برای $KL/r = 0$ برابر σ_y می‌باشد. این منحنی در $KL/r = 0$ مماس افقی دارد و در نقطه $KL/r = \lambda$ بر منحنی معادله ۱۳-۴۴ مماس می‌باشد.

در طرح ستون‌ها برای اینکه تنش مجاز σ_w از تنش ماکزیم σ_{max} بدست آید باید ضریب اطمینان مناسبی بکار برده شود ($\sigma_w = \sigma_{max}/n$). مؤسسه ساختمانی فولادی آمریکا روابط زیر را برای ضریب اطمینان به منظور استفاده با فرمول‌های شورای تحقیقات ستون پیشنهاد کرده است:

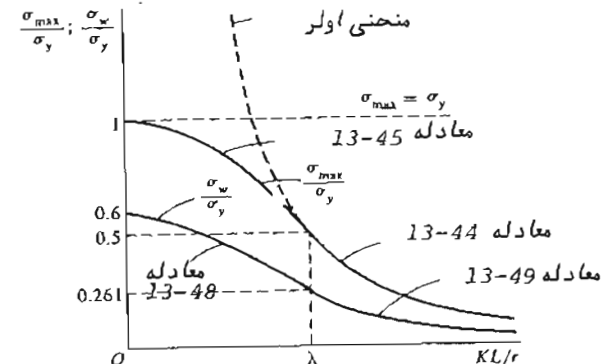
$$n_1 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8\lambda} - \frac{(KL/r)^3}{8\lambda^3} \quad \left(\frac{KL}{r} \leq \lambda \right) \quad (13-46)$$

$$n_2 = \frac{23}{12} \approx 1.92 \quad \left(\frac{KL}{r} \geq \lambda \right) \quad (13-47)$$

بنابراین معادلات تنش‌های مجاز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y} = \frac{1 - (KL/r)^2 / (2\lambda^2)}{n_1} \quad \left(\frac{KL}{r} \leq \lambda \right) \quad (13-48)$$

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y} = \frac{\lambda^2}{2n_2 (KL/r)^2} \quad \left(\frac{KL}{r} \geq \lambda \right) \quad (13-49)$$



شکل ۱۸-۱۳ نمودار تنش ماکزیم (σ_{max}) و تنش مجاز σ_w برای طرح ستون‌های فولاد

۶۹۹

حل: محورهاى x و y محورهاى اصلی گشتاور لحنی می باشد و گشتاور لحنی حول یکی از این محورها ماکزیمم و حول محور دیگر میبیم می باشد. بنابراین ما باید I_x و I_y را حساب کنیم تا محوری را که حول آن گشتاور لحنی حداقل می باشد پیدا کنیم

(شکل های ۱۲-۲۰ و ۱۲-۲۱)

$$I_x = 2I_1 = 2(863.28) = 1726.56 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2[I_2 + A(5)^2] = 2[71.09 + (22.94)(5)^2] = 1289.18 \text{ cm}^4$$

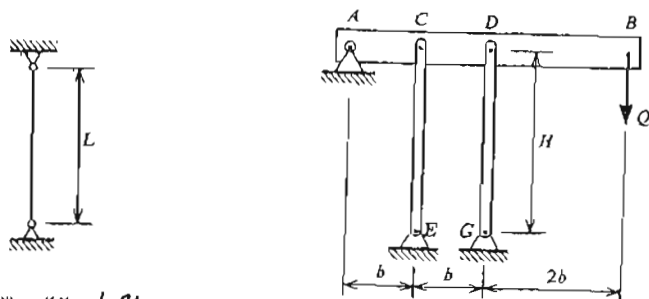
$$I_{\min} = I_y = 1289.18 \text{ cm}^4$$

بنابراین کماتش حول محور y صورت خواهد گرفت و بار بحرانی ستون مربوط برابر است با

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} = \frac{\pi^2 (2.1 \times 10^6) (1289.18)}{(360)^2} = 206171 \text{ Kg}$$

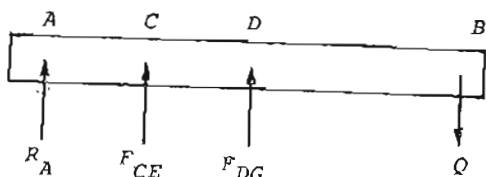
مسئله ۱۳-۳

میله باریکی در دو انتها معطلی و بر تکیه گاههای غیر قابل حرکت تکیه دارد (شکل ۱۳-۲۲). با فرض شرایط ایده آل و رفتار ارتجاعی چقدر اضافه درجه حرارت ΔT در میله کماتش ایجاد خواهد کرد؟ ضریب انبساط حرارتی میله را α فرض کنید.



شکل ۱۳-۲۲

شکل ۱۳-۲۳



شکل ۱۳-۲۴: نمودار خیمه آزاد مبادی

۶۹۸

$P = 4050 \text{ Kg}$ فشرده می شود. خروج از مرکز e در امتداد یکی از قطرهاى مربع و برابر 2.5 m می باشد (شکل ۱۹-۱۳). با فرض اینکه ستون در دو انتها دارای تکیه گاههای ساده باشد حداکثر تنش فشاری را در آن بیابید. ضریب ارتجاعی در مسار $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

حل: فرض می کنیم E نقطه اثر نیروی فشاری P باشد. در این صورت خروج از مرکز e برابر است با

$$e = \overline{EO} = 2.5 \text{ cm}$$

خمش ستون حول محور x صورت خواهد گرفت. گشتاور لحنی مقطع مربع حول محور x دو برابر گشتاور لحنی مثلث ABC حول محور x می باشد. گشتاور لحنی مثلث ABC حول قاعده آن در جداول پیوست ۱ کتاب داده شده است.

$$I_x = 2(I_{ABC})_x = 2 \frac{\overline{AC} (\overline{OB})^3}{12} = 2 \frac{5\sqrt{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^3}{12} = 52.08 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S} \sec \frac{kL}{2}$$

$$S = \frac{I_x}{\overline{OB}} = \frac{52.08}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = 14.73 \text{ cm}^3$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} = \sqrt{\frac{4050}{(2.1 \times 10^6)(52.08)}} = \frac{6.09}{1000}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4050}{5 \times 5} + \frac{(4050)(2.5)}{14.73} \sec \frac{(6.09)(180)}{2000} = 162 + 805.13 = 967.13 \text{ Kg/cm}^2$$

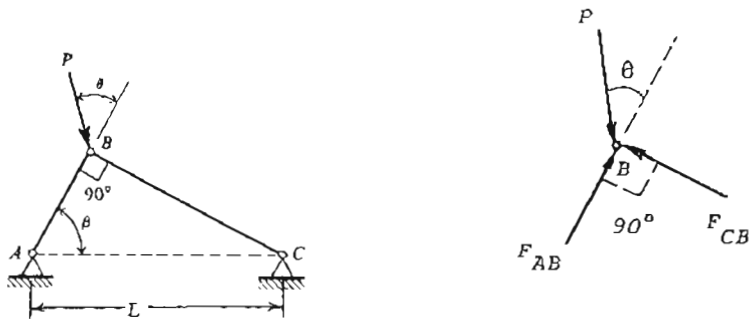
مسئله ۱۳-۲

ستونی مطابق شکل ۱۳-۲۰ از دو مقطع I که بوسیله صفحه های به یکدیگر متصل شده اند تشکیل شده است. سطح مقطع هر یک از مقاطع $A = 22.94 \text{ cm}^2$ و گشتاور لحنی هر یک از آنها حول محورهاى نوى (محور ۱) و ضعیف (محور ۲) به ترتیب $I_1 = 863.28 \text{ cm}^4$ و $I_2 = 71.09 \text{ cm}^4$ می باشد. تکیه گاههای ستون ساده و طول آن 3.6 m می باشد. بار بحرانی ستون چقدر است؟ ضریب ارتجاعی در فشار $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد.

۷۰۱

مسئله ۵-۱۳

خرپای ABC از دو میله باریک با مقطع و جنس یکسان تشکیل شده است (شکل ۲۵-۱۳). با فرض اینکه فرو ریزش خرابی در اثر کماتش اصلی آن صورت گیرد تحت چه زاویه θ می توان بیشترین بار P را بر خرابی وارد کرد ؟ (فرض کنید $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



شکل ۲۵-۱۳

شکل ۲۶-۱۳ نمودار جسم آزاد اتصال B

حل : بار P وقتی ماکزیمم خواهد بود که دو میله AB و BC به طور همزمان کمانه کنند .

$$F_{AB} = (P_{cr})_{AB} = \frac{\pi^2 EI}{(L \cos \theta)^2} = P \cos \theta$$

$$F_{CB} = (P_{cr})_{CB} = \frac{\pi^2 EI}{(L \sin \theta)^2} = P \sin \theta$$

از تقسیم کردن طرفین دو رابطه فوق بر یکدیگر نتیجه می شود

$$\tan \theta = \cot^2 \theta \quad : \quad \theta = \arctan(\cot^2 \theta)$$

مسئله ۶-۱۳

میلای مطابق شکل ۲۷-۱۳ از دو قسمت تشکیل شده است به طوریکه نیمه بالا دارای صلیت خمشی EI می باشد و نیمه پائین را می توان صلب فرض نمود . بار بحرانی این میله را تعیین کنید .

۷۰۰

حل : اگر میله آزاد بود در اثر اضافه درجه حرارت ΔT بر طول آن $\Delta L = \alpha L \Delta T$ افزوده می شد . ولی چون از اضافه طول میله جلوگیری به عمل می آید در آن نیروی F ایجاد می شود که از رابطه زیر بدست می آید (A سطح مقطع میله می باشد) :

$$\Delta L = \alpha L \Delta T = \frac{FL}{AE} \quad : \quad F = \alpha AE \Delta T$$

میله وقتی کمانه می کند که F برابر بار بحرانی P_{cr} شود .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = F = \alpha AE \Delta T$$

از این رابطه اضافه درجه حرارت ΔT که در میله کمانش ایجاد خواهد کرد بدست می آید .

$$\Delta T = \frac{\pi^2 I}{\alpha A L^2}$$

I در این رابطه گشتاور لختی حداقل مقطع میله می باشد .

مسئله ۴-۱۳

میله صلب AB شکل ۲۳-۱۳ در نقطه A دارای تکیه گاه مفصلی و در نقاط C و D روی دو ستون تکیه دارد . هر یک از ستون ها دارای صلیت خمشی EI می باشد . تحت چه بار Q دستگاه در اثر کماتش اعضای فشاری فرو خواهد ریخت ؟

حل : سازه مزبور از لحاظ استاتیکی یک درجه نامعین می باشد و وقتی فرو خواهد ریخت که نیروی محوری ستون های CE و DG برابر بار بحرانی شود . یعنی

$$F_{CE} = F_{DG} = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{H^2} \quad (1)$$

از تعادل لگری میله AB حول نقطه A نتیجه می شود (شکل ۲۴-۱۳)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4bQ - bF_{CE} - 2bF_{DG} = 0$$

$$Q = \frac{F_{CE} + 2F_{DG}}{4} \quad (2)$$

اگر به جای F_{CE} و F_{DG} از رابطه ۱ در رابطه ۲ قرار دهیم بار بحرانی Q_{cr} بدست می آید .

$$Q_{cr} = \frac{3\pi^2 EI}{4H^2}$$

۷۰۲

حل : تغییر شکل میله مرئوس مطابق شکل ۲۸-۱۳ می باشد بطوریکه قسمت BC مستقیم ولی در نقطه B بر AB مماس باقی می ماند. تغییر مکان جانبی نقطه B را δ می نامیم. معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان عبارت است از

$$EI v'''' = -M = -Pv$$

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

مروض کنید

$$v'''' + k^2 v = 0$$

جواب این معادله دیفرانسیل به صورت زیر می باشد :

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$v(0) = \delta \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = \frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{L} \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (3)$$

شرط دوم پیوستگی و مماس بودن قسمت BC را در نقطه B بر قسمت AB بیان میکند.

$$(1) \Rightarrow C_2 = \delta$$

$$(2) \Rightarrow C_1 k = \frac{2\delta}{L} \quad ; \quad C_1 = \frac{2\delta}{Lk}$$

$$v = \delta \left(\frac{2}{Lk} \sin kx + \cos kx \right)$$

$$(3) \Rightarrow \tan \frac{kL}{2} = -\frac{kL}{2}$$

از حل این معادله خواهیم داشت : $\frac{kL}{2} = 2.03$ و از آنجا بار بحرانی :

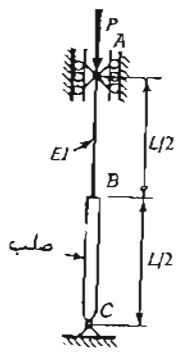
$$P_{CR} = 1.67 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

مسئله ۷-۱۳

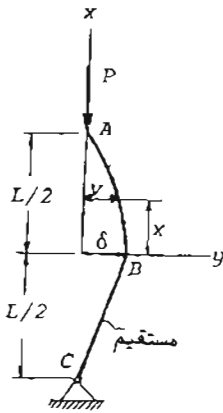
در شکل ۲۹-۱۳ تحت چه بار p ستون CD گمانه می کند؟ صلبیت خمشی تیر و ستون EI می باشد و طول هر دو برابر L است.

حل : ابتدا نیروی فشاری F وارد بر ستون CD را با استفاده از اصل اجتماع

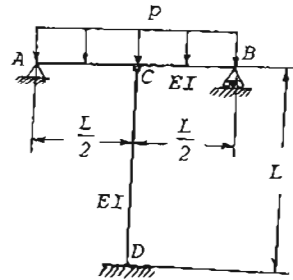
۷۰۳



شکل ۲۷-۱۳



شکل ۲۸-۱۳



شکل ۲۹-۱۳

اثر قوا تعیین می کنیم و سپس آن را برابر با بار بحرانی ستون CD قرار می دهیم که مساویست با

$$(P_{CR})_{CD} = \frac{20.19EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

اگر از تغییر شکل محوری ستون صرف نظر کنیم شرط سازگاری تغییر مکان هادر نقطه C به صورت زیر نوشته می شود (شکل ۳۰-۱۳) :

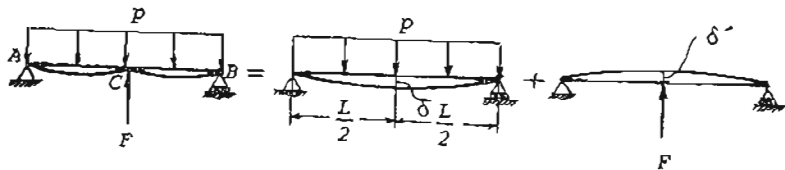
$$\delta = \delta'$$

δ و δ' از جداول پیوست ۳ کتاب بدست می آیند.

$$\delta = \frac{5pL^4}{384EI} \quad ; \quad \delta' = \frac{FL^3}{48EI}$$

از تساوی δ و δ' نیروی فشاری F بدست می آید :

$$F = \frac{5pL}{8}$$



شکل ۳۰-۱۳

۷۰۵

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_3 = F_1 = \frac{P}{\sqrt{3}} \quad (\text{کششی})$$

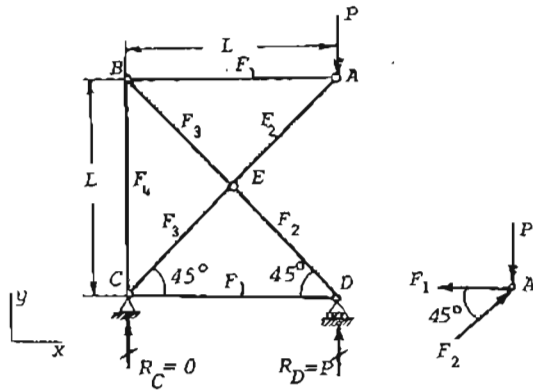
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_4 = (F_1 + F_3) \cos 60^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}} \quad (\text{فشاری})$$

بنابراین عضوهای AB، BC و CD تحت فشار می‌باشند و نیروی فشاری همه آنها $\frac{P}{\sqrt{3}}$ می‌باشد. چون طول این سه عضو نیز برابر است هر سه آنها عضوهای بحرانی می‌باشند و خرابی فرو می‌ریزد که نیروی داخلی آنها برابر با بار بحرانی $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ گردد. بنابراین

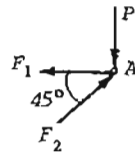
$$F_1 = F_4 = \frac{P_{CR}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad ; \quad P_{CR} = \frac{\sqrt{3} \pi^2 EI}{L^2}$$

مسئله ۱۳-۹

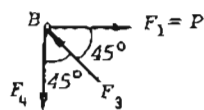
اعضای خرابی شکل ۱۳-۲۴ همگی دارای گشتاور لختی حداقل I می‌باشند. بار بحرانی P_{CR} را که باعث فرو ریختن خرابی در اثر کماتش یکی از اعضای آن می‌شود پیدا کنید.



شکل ۱۳-۲۴



شکل ۱۳-۲۵



شکل ۱۳-۲۶

حل: نیروهای داخلی میله‌ها را با توجه به تفارن خرابی و بارها مطابق شکل

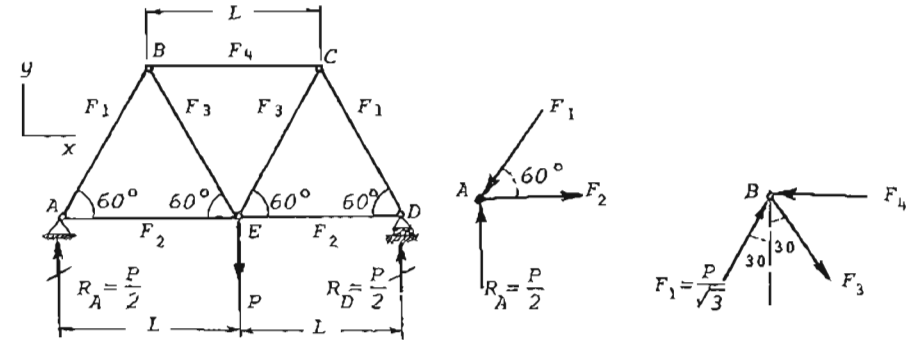
۷۰۴

حال اگر نیروی F را با $(P_{CR})_{CD}$ مساوی قرار دهیم مقدار بحرانی بار p یعنی P_{CR} بدست می‌آید.

$$\frac{5pL}{8} = \frac{20.19EI}{L^2} \quad ; \quad P_{CR} = 32.3 \frac{EI}{L^3}$$

مسئله ۱۳-۸

خرپای شکل ۱۳-۳۱ از اعضای یکسان به طول L و گشتاور لختی حداقل I تشکیل شده است. بار بحرانی P_{CR} را که باعث فرو ریختن خرابی در اثر کماتش یکی از اعضای آن می‌شود پیدا کنید.



شکل ۱۳-۳۱ نمودار جسم آزاد
شکل ۱۳-۳۲ نمودار جسم آزاد
شکل ۱۳-۳۳ نمودار جسم آزاد

حل: نیروهای داخلی میله‌ها را با توجه به تفارن خرابی و بارگذاری مطابق شکل

۱۳-۳۱ نام گذاری می‌کنیم. ابتدا باید نیروهای داخلی اعضای خرابی را پیدا کنیم.

از نمودار جسم آزاد مفصل A (شکل ۱۳-۳۲) نیروهای F_1 و F_2 بدست می‌آید.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos 30^\circ = \frac{P}{2} \quad ; \quad F_1 = \frac{P}{\sqrt{3}} \quad (\text{فشاری})$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 \cos 60^\circ = \frac{P}{2\sqrt{3}} \quad (\text{کششی})$$

از نمودار جسم آزاد مفصل B نیروهای F_3 و F_4 بدست می‌آیند (شکل ۱۳-۳۳).

۷۰۶

۳۴-۱۳ نام گذاری می‌کنیم. از نمودار جسم آزاد مفصل A نیروهای F_1 و F_2 بدست می‌آیند (شکل ۱۳-۳۵).

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 \cos 45^\circ = P : F_2 = \sqrt{2} P \quad (\text{فشاری})$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \cos 45^\circ = P \quad (\text{کششی})$$

از نمودار جسم آزاد مفصل B نیروهای F_3 و F_4 بدست می‌آیند (شکل ۱۳-۳۶).

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_3 \cos 45^\circ = P : F_3 = \sqrt{2} P \quad (\text{فشاری})$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_4 = F_3 \cos 45^\circ = P \quad (\text{کششی})$$

بنابراین عضوهای AE، BE، CE و DE تحت فشار می‌باشند و نیروی فشاری همه آنها $\sqrt{2} P$ می‌باشد. چون طول آنها نیز یکسان است هر سه با هم کمانه می‌کنند و خرب پا وقتی فرو می‌ریزد که نیروی داخلی آنها برابر با بار بحرانی $\frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{\sqrt{2}})^2}$ گردد. بنابراین

$$F_2 = F_3 = \sqrt{2} P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{\sqrt{2}})^2} : P_{cr} = \frac{\sqrt{2} \pi^2 EI}{L^2}$$

مسئله ۱۰-۱۳

سازه شکل ۳۷-۱۳ از سه عضو AB، BC و CD با صلبیت خمشی یکسان EI تشکیل شده است که در نقاط B و C به یکدیگر مفصل شده‌اند. مقدار بحرانی بار P را که باعث کمانه کردن عضو BC می‌شود حساب کنید.

حل: از تعادل لنکری عضو AB (با استفاده از نمودار جسم آزاد AB در شکل ۱۳-۳۸) حول نقطه A نتیجه می‌شود

$$\Sigma M_A^+ = 0 \Rightarrow \frac{PL}{2} - F_{BC} \cos 45^\circ L = 0$$

۷۰۷

$$F_{BC} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

برای پیدا کردن P_{cr} کافی است که F_{BC} را برابر با بار بحرانی عضو BC قرار دهیم.

$$F_{BC} = \frac{P_{cr}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2} L)^2} : P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt{2} L^2}$$

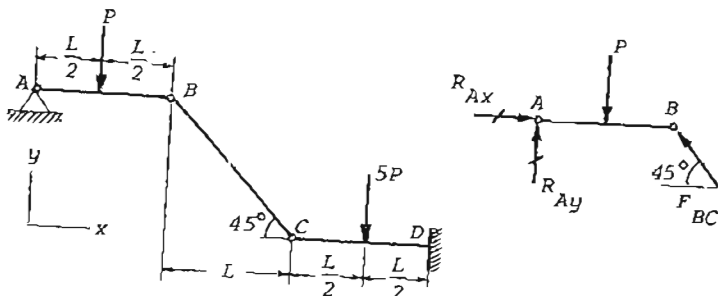
مسئله ۱۱-۱۳

یک ستون فولادی با مقطع مربع مستطیل و ابعاد $2.5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ در دو انتها دارای تکیه گاههای ساده و تحت یک بار فشاری محوری است. کوتاه‌ترین طول L ستون که برای آن فرمول اولر برای بار بحرانی صادق می‌باشد چقدر است؟ حد تناسب فولاد را $\sigma_{pl} = 2100 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی آن را $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ فرض کنید.

حل: تنش بحرانی در ستون برابر است با

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

اگر در این رابطه به جای σ_{cr} تنش حد تناسب σ_{pl} و به جای I گشتاور لختی حداقل I_x (شکل ۱۳-۳۹) را قرار دهیم کوتاه‌ترین طول L ستون که برای آن فرمول اولر



شکل ۳۷-۱۳

شکل ۳۸-۱۳ نمودار جسم آزاد عضو AB

۷۰۹

توجه کنید در محاسبه σ_{cr} به جای I گشتاور لختی حداقل (I_x) قرار داده شده است.

مسئله ۱۳-۱۳

سازه ABCD از سه میله باریک با صلبیت خمشی یکسان EI تشکیل شده است (شکل ۳-۴۰ a). با فرض اینکه فرو ریختن سازه در اثر کمزش اعمالی آن صورت گیرد مقدار بحرانی بار P چقدر می باشد؟ زاویه β را برابر 30° اختیار کنید.

حل: با توجه به شکل ۳-۴۰ b به علت تقارن داریم:
 $F_{AD} = F_{CD}$
 معادله تعادل در امتداد قائم: (1)
 $P = F_{BD} + 2F_{CD}\cos\beta$
 سازه مزبور وقتی در اثر کمزش فرو خواهد ریخت که هر سه عضو با هم کمانه کنند. بار کمزش عضوهای AD و CD برابر است با

$$(P_{cr})_{AD} = (P_{cr})_{CD} = \frac{20.19EI}{\left(\frac{L}{\cos\beta}\right)^2}$$

بار کمزش عضو BD مساویست با

$$(P_{cr})_{BD} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

اگر به جای نیروهای داخلی اعضاء در معادله 1 بار بحرانی آنها را قرار دهیم مقدار بحرانی بار P بدست می آید.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} + \frac{2(20.19)EI}{\left(\frac{L}{\cos\beta}\right)^2} \quad \cos\beta = 36.1 \frac{EI}{L^2}$$

مسئله ۱۳-۱۴

بار بحرانی و شکل کمانه کرده ستونی را که در دو انتها دارای اتصالات گیر دار می باشد پیدا کنید (شکل ۱۳-۴۱).

۷۰۸

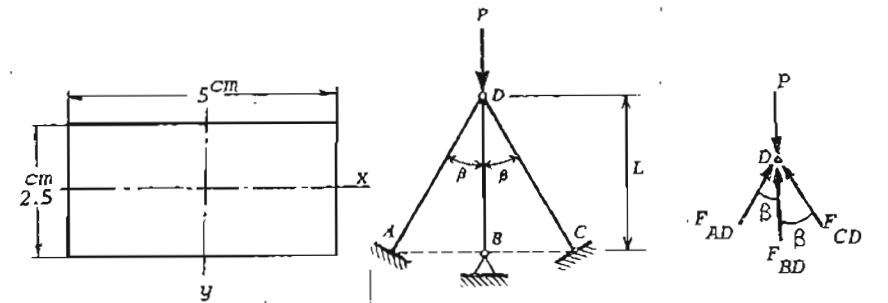
صادق است بدست می آید.

$$L^2 = \frac{\pi^2 EI}{A\sigma_{pl}} = \frac{\pi^2 (2.1 \times 10^6) \left(\frac{1}{12} \times 5 \times 2.5^3\right)}{(2.5 \times 5) (2100)} = 5140.42$$

$$L = 71.70 \text{ cm}$$

مسئله ۱۳-۱۲

اگر ستون مسئله قبل به طول 120 cm باشد تنش فشاری بحرانی در آن چقدر خواهد بود؟



شکل ۱۳-۳۹

شکل ۱۳-۴۰ a

شکل ۱۳-۴۰ b

حل: چون $L = 120 \text{ cm} > 71.70 \text{ cm}$ می باشد می توانیم از فرمول اولر استفاده کنیم.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \frac{\pi^2 (2.1 \times 10^6) \left(\frac{1}{12} \times 5 \times 2.5^3\right)}{(2.5) (5) (120)^2} = 750 \text{ Kg/cm}^2$$

۷۱۱

$$v_P = \frac{M_A}{P}$$

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{M_A}{P}$$

$$v(0) = 0 \quad (1) \quad ; \quad v'(0) = 0 \quad (2) \quad \text{شرایط حدی :}$$

$$v(L) = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow C_2 = -\frac{M_A}{P}$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v = \frac{M_A}{P} (1 - \cos kx) \quad \text{معادله منحنی شکل کمانه کرده ستون :}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{M_A}{P} (1 - \cos kL) = 0$$

برای تعیین بار کمانش باید مقدار داخل پرانتز را مساوی صفر قرار دهیم .

$$1 - \cos kL = 0 \quad : \quad \cos kL = 1$$

$$kL = n\pi \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

برای تعیین کوچکترین مقدار P مقدار n را برابر ۲ اختیار می‌کنیم .

$$kL = 2\pi$$

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} = \frac{P_{cr}}{EI} \quad : \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

مسئله ۱۵ - ۱۳

ستون شکل ۱۳-۴۲ در پایه گیر دار و در انتهای بالای آن آزاد و تحت اثر بار

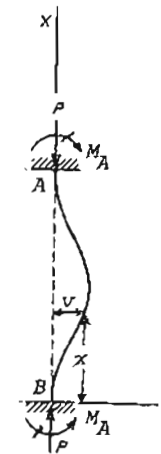
فشاری P با خروج از مرکز e می‌باشد . تعیین کنید :

الف - تغییر مکان ماکزیمم ستون (δ) .

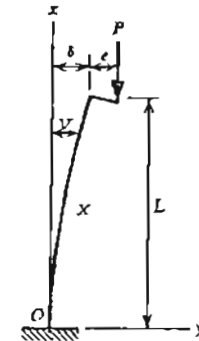
ب - لنگر خمشی ماکزیمم ستون (M_{max}) .

پ - بار بحرانی ستون مزبور .

۷۱۰



شکل ۱۳-۴۱



شکل ۱۳-۴۲

حل : لنگر خمشی در فاصله x از تکیه گاه پایین برابر است با

$$M = Pv - M_A$$

بنابراین معادله دیفرانسیل منحنی تغییر شکل به صورت زیر نوشته می‌شود

$$EI v'' = -M = -Pv + M_A$$

$$v'' + \frac{P}{EI} v = \frac{P}{EI} \frac{M_A}{P}$$

$$\frac{P}{EI} = k^2$$

فرض می‌کنیم :

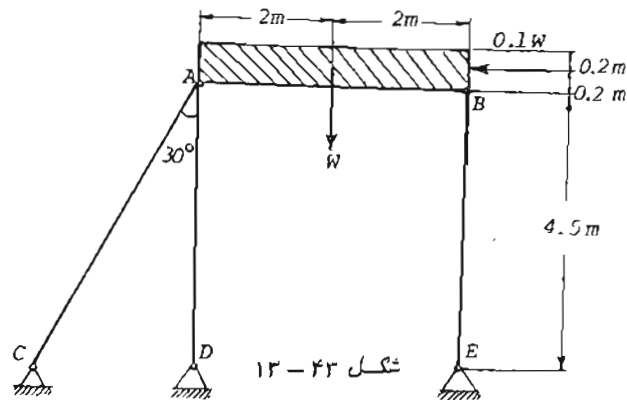
$$v'' + k^2 v = k^2 \frac{M_A}{P}$$

جواب این معادله به صورت مجموع جواب معادله همکن (v_H) و یک جواب ویژه (v_P) می‌باشد .

$$v = v_H + v_P$$

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

۷۱۲



شکل ۴۳-۱۳

حل: چون ستون‌ها در دو انتها مصلی می‌باشد بار وارد بر آن‌ها فقط بار محوری می‌باشد. از نمودار جسم آزاد شکل ۴۵-۱۳ نیروهای محوری ستون‌ها به دست می‌آیند.

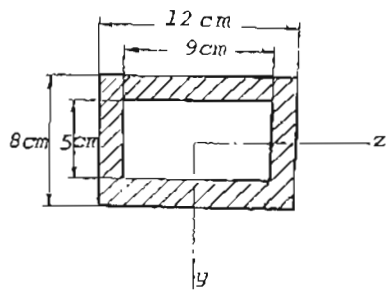
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2W - 0.2(0.1W) - 4F_{BE} = 0$$

$$F_{BE} = 0.495W$$

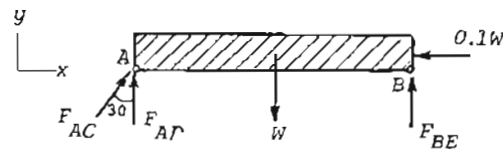
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC} \cos 60^\circ - 0.1W = 0 ; F_{AC} = 0.2W$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} \cos 30^\circ + F_{AD} + F_{BE} - W = 0 ; F_{AD} = 0.332W$$

با توجه به اینکه مقطع هر سه ستون یکسان می‌باشد در $F_{BE} > F_{AD}$ کمانش یکسان است در ستون‌های BE یا AC رخ دهد. بنابراین بار کمانش هر یک از این دو ستون را حساب می‌کنیم. کمانش این ستون‌ها حول محور ۲ (محور ضعیف) صورت خواهد گرفت.



شکل ۴۴-۱۳ مقطع ستون‌ها



شکل ۴۵-۱۳ نمودار جسم آزاد جسم مصلی

۷۱۲

حل: لنگر خمشی در فاصله x از پایه ستون برابر است با

$$M = -P(\delta + e - v)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان ستون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$EIv'' = -M = P(\delta + e - v)$$

$$EIv'' + Pv = P(\delta + e)$$

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

فرض می‌کنیم:

$$v'' + k^2v = k^2(\delta + e)$$

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

جواب معادله همگن:

$$v_P = \delta + e$$

جواب ویژه:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta + e$$

جواب معادله دیفرانسیل:

$$v(0) = 0 \quad (1) ; \quad v'(0) = 0 \quad (2)$$

شرایط حدی:

$$(1) \Rightarrow C_2 = -\delta - e$$

$$(2) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v = (\delta + e)(1 - \cos kx)$$

تغییر مکان ماکزیمم ستون برابر است با

$$\delta = v(L) = (\delta + e)(1 - \cos kL) ; \quad \delta = e(\sec kL - 1)$$

لنگر خمشی ماکزیمم در پای ستون می‌باشد:

$$M_{max} = P(\delta + e) = Pe \sec kL$$

بار بحرانی ستون از معادله $\sec kL = \infty$ یا $kL = \frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید. $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

مسئله ۱۶-۱۳

جسم مصلی به وزن W مطابق شکل ۴۳-۱۳ بر روی ستون‌های AC، AD، BE قرار دارد و تحت اثر یک نیروی افقی (ناشی از زلزله یا باد) مساوی 0.1W می‌باشد. مقطع ستون‌ها به صورت صدوقی توخالی با ابعاد نشان داده شده در شکل ۴۴-۱۳ می‌باشد. حداکثر وزن W چقدر می‌تواند باشد تا سازه مربور در اثر پدیده کمانش فرو نریزد؟ جنس ستون ۵ فولاد با ضریب ارتجاعی $2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ می‌باشد.

۷۱۵

قسمت بالای ستون δ فرض می شود. معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان ستون عبارتست از

$$EIv'' = -M = P(\delta - v) - K\delta(L - x)$$

این معادله با فرض $k^2 = P/EI$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$v'' + k^2v = k^2\delta - \frac{K}{EI}\delta(L - x)$$

حواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق برابر است با

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \delta - \frac{K}{P}\delta(L - x)$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می شود $C_1 = \delta \left(\frac{K}{P}L - 1 \right)$. از شرط حدی $v'=0$ در $x=L$ می توانیم بنویسیم $C_2 = -\frac{K}{PK}\delta$. بالاخره از شرط حدی $v=\delta$ در $x=L$ می توانیم بنویسیم

$$\delta = \delta \left(\frac{K}{P}L - 1 \right) \cos kL - \frac{K}{PK}\delta \sin kL + \delta$$

پس از ساده کردن، معادله فزاینده زیر برای بار بحرانی بدست می آید:

$$\tan kL = kL - \frac{kP}{K}$$

مسئله ۱۸-۱۳

ستونی به طول L در دو انتها گیردار است (شکل ۴۸-۱۳) ولی گیرداری آن طوری است که لنگرهای واکنشی M_0 با زاویه دوران انتهای ستون بر حسب رادیان مناسب می باشد. نشان دهید بار بحرانی ستون مزبور از رابطه $\tan \frac{kL}{2} = -\frac{P}{KK}$ به دست می آید که در آن $k^2 = P/EI$ و K ضریب تناسب لنگر واکنشی M_0 با زاویه دوران انتهای ستون می باشد.

حل: معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان سیر عبارتست از

$$EIv'' = -M = -(-M_0 + Pv) = M_0 - Pv$$

که در آن $M_0 = K\theta$ (زاویه دوران انتهای ستون θ) می باشد. با تقسیم نمودن طرفی

۷۱۴

$$I_z = \frac{12(8)^3 - 9(5)^3}{12} = 418.25 \text{ cm}^4$$

$$(P_{cr})_{BE} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} = \frac{\pi^2 (2.1 \times 10^6) (418.25)}{(450)^2} = 42.81 \text{ t}$$

$$42.81 \text{ t} > 0.495W \Rightarrow W < 86.48 \text{ t}$$

$$(P_{cr})_{AC} = \frac{\pi^2 EI_z}{\left(\frac{L}{\cos 30^\circ}\right)^2} = \frac{\pi^2 (2.1 \times 10^6) (418.25)}{\left(\frac{450}{\cos 30^\circ}\right)^2} = 32.11 \text{ t}$$

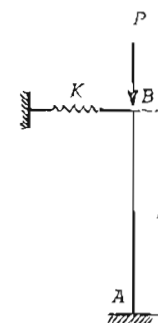
$$32.11 \text{ t} > 0.2W \Rightarrow W < 160.55 \text{ t}$$

بنابراین برای اینکه سازه مزبور در اثر پدیده کمانش فرو بریزد W باید از 86.48 t کمتر باشد. چنانچه بار W برابر 86.48 t گردد ستون BE کمانه خواهد کرد.

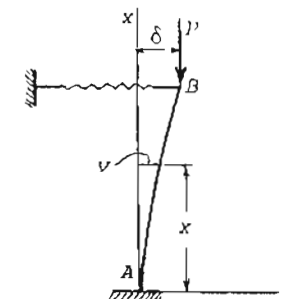
مسئله ۱۲-۱۳

ستون شکل ۴۶-۱۳ در انتهای نحاسی گرد دار و در انتهای موفانی به مری با ثابت مری K متصل می باشد. معادله فرارنده برای تعیین مقدار بحرانی بار P را پیدا کنید.

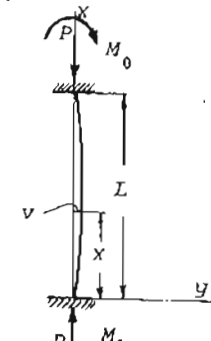
حل: شکل تغییر مکان یافته ستون در شکل ۴۷-۱۳ رسم شده است. تغییر مکان



شکل ۴۶-۱۳



شکل ۴۷-۱۳



شکل ۴۸-۱۳

۷۱۷

با فرض $k^2 = P/EI$ معادلات فوق به صورت زیر در می آیند:

$$v_1'' = -\frac{k^2 \delta}{L} x \quad ; \quad v_2'' + k^2 v_2 = k^2 \delta \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

جواب های عمومی این معادلات عبارتند از

$$v_1 = -\frac{k^2 \delta}{6L} x^3 + C_1 x + C_2 \quad ; \quad v_2 = C_3 \sin kx + C_4 \cos kx + \delta \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

از شرط حدی $v_1 = 0$ در $x=0$ نتیجه می شود $C_2 = 0$. در $x=L/2$ داریم $v_1 = v_2 = \delta$ و در $x=L$ نیز $v_2 = 0$ می باشد. بدین ترتیب چهار معادله زیر حاصل میشود:

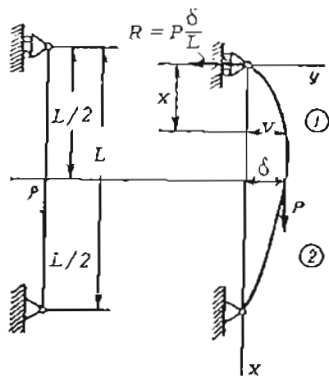
$$-\frac{k^2 \delta}{L} \frac{L^3}{48} + C_1 \frac{L}{2} = \delta$$

$$C_3 \sin \frac{kL}{2} + C_4 \cos \frac{kL}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

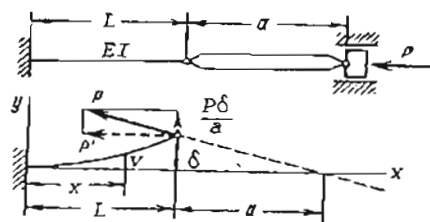
$$-\frac{k^2 \delta L}{8} + C_1 = C_3 k \cos \frac{kL}{2} - C_4 k \sin \frac{kL}{2} - \frac{\delta}{L}$$

$$C_3 \sin kL + C_4 \cos kL = 0$$

چهار معادله فوق دارای چهار مجهول C_1, C_3, C_4 و δ می باشد. برای اینکه این معادلات جواب های مخالف صفر داشته باشند در میان ضرایب معادلات باید برابر صفر شود.



شکل ۱۳-۴۹



شکل ۱۳-۵۱

۷۱۶

رابطه فوق بر EI و استفاده از رابطه $k^2 = P/EI$ خواهیم داشت

$$v'' + k^2 v = k^2 \frac{M_0}{P}$$

جواب عمومی این معادله برابر است با

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{M_0}{P}$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می شود $C_1 = -M_0/P$. از شرط حدی $v'=0$ در $x=L/2$ خواهیم داشت

$$-C_1 k \sin \frac{kL}{2} + C_2 k \cos \frac{kL}{2} = 0 \quad ; \quad C_2 = -\frac{M_0}{P} \tan \frac{kL}{2}$$

فرض می کنیم زاویه دوران انتهای ستون ($x=0$) برابر θ باشد. در این صورت می توانیم بنویسیم

$$\theta \approx v'(x=0) = -\frac{M_0}{P} k \tan \frac{kL}{2}$$

اگر در رابطه فوق $M_0 = K\theta$ را قرار دهیم و θ را از طرفین معادله حذف کنیم، معادله زیر برای بار بحرانی ستون بدست می آید:

$$\tan \frac{kL}{2} = -\frac{P}{Kk}$$

مسئله ۱۹-۱۳

بار بحرانی ستون شکل ۱۳-۴۹ را که در وسط طولش بار P را حمل می کند تعیین نمایید.

حل: شکل تغییر مکان یافته ستون در شکل ۱۳-۵۰ رسم شده است. تغییر مکان وسط ستون را δ می نامیم. در این صورت واکنش بالای ستون $R = P\delta/L$ خواهد بود. تغییر مکان نیمه بالای ستون را v_1 و تغییر مکان نیمه پائین ستون را v_2 می نامیم. در این صورت معادلات دیفراسیل منحنی تغییر مکان به صورت زیر نوشته می شود:

$$EI v_1' = -P \frac{\delta}{L} x \quad ; \quad EI v_2' = -P \frac{\delta}{L} x + P(\delta - v)$$

۷۱۹

با فرض $k^2 = P/EI$ این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v'' + k^2 v = k^2 \delta \left(1 + \frac{L}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

جواب عمومی این معادله برابر است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \left(1 + \frac{L}{a} - \frac{x}{a}\right)$$

از شرایط حدی $v=0$ در $x=0$ و $v=\delta$ در $x=L$ سه معادله زیر حاصل می‌شود:

$$C_2 + \delta \left(1 + \frac{L}{a}\right) = 0 ; \quad C_1 k - \delta \frac{1}{a} = 0 ; \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن دتر میان ضرائب سه معادله فوق معادله فرازنده زیر به دست می‌آید:

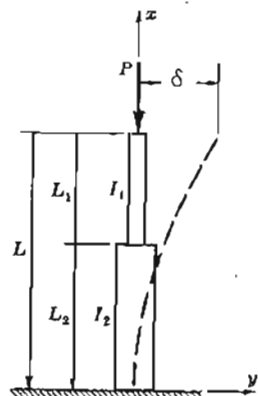
$$\tan kL = kL \left(1 + \frac{a}{L}\right)$$

برای هر مقدار معین a/L ، نیروی بحرانی از معادله فوق محاسبه می‌شود.

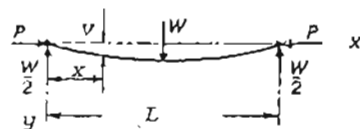
مسئله ۲۱-۱۳

بار بحرانی ستون شکل ۱۳-۵۲ را که در انتهای تحتانی گیر دار و در انتهای فوقانی آزاد می‌باشد و از دو قسمت منشوری با گشتاورهای لختی I_1 و I_2 ساخته شده است پیدا کنید.

حل: اگر تغییر مکان بالای ستون را δ بنامیم معادلات دیفرانسیل دو قسمت



شکل ۱۳-۵۲



شکل ۱۳-۵۳

۷۱۸

$$\begin{vmatrix} \frac{L}{2} & 0 & 0 & -1 - \frac{k^2 L^2}{48} \\ 0 & \sin \frac{kL}{2} & \cos \frac{kL}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -k \cos \frac{kL}{2} & k \sin \frac{kL}{2} & \frac{1}{L} - \frac{k^2 L}{8} \\ 1 & \sin kL & \cos kL & 0 \end{vmatrix} = 0$$

از این دتر میان معادله فرازنده زیر بدست می‌آید:

$$\tan \frac{kL}{2} = \frac{3 \left(\frac{kL}{2}\right)}{\left(\frac{kL}{2}\right)^2 - 9}$$

کوچکترین ریشه این معادله برابر است با

$$\frac{kL}{2} = 2.16$$

بنابراین بار بحرانی ستون مزبور مساوی می‌شود با

$$P_{cr} \approx \frac{18.7EI}{L^2}$$

مسئله ۲۰-۱۳

میله‌ای به طول L در یک انتهای گیر دار و در انتهای دیگر مفصلی است. نیروی P بوسیله میله صلبی به طول a به انتهای مفصلی میله وارد می‌شود (شکل ۱۳-۵۱). مقدار بحرانی نیروی P را حساب کنید.

حل: میله صلب به طول a را برداشته و به میله ارتجاعی نیروی طولی $P' = P$ و نیروی جانبی برابر $P \frac{\delta}{a}$ را وارد می‌کنیم (δ تغییر مکان انتهای مفصلی میله می‌باشد). در این صورت معادله دیفرانسیل محلی تغییر مکان میله عارست از

$$EIv'' = P(\delta - v) + P \frac{\delta}{a} (L - x)$$

۷۲۱

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می شود $C_1=0$. از شرط حدی $v=0$ در $x=L/2$ حاصل می شود $C_2 = \frac{W}{2Pk \cos \frac{kL}{2}}$. بنابراین معادله تغییر مکان نیمه چپ ستون برابر

است با

$$v = \frac{W}{2P} \left(\frac{\sin kx}{k \cos \frac{kL}{2}} - x \right) \quad 0 < x < \frac{L}{2}$$

تغییر مکان ماکزیمم در $x=L/2$ است. بنابراین

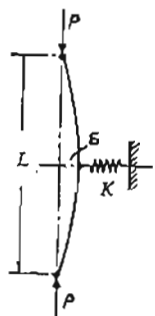
$$v_{\max} = v(x=L/2) = \frac{W}{2P} \left(\frac{\tan \frac{kL}{2}}{k} - \frac{L}{2} \right)$$

لنگر خمشی ماکزیمم نیز در $x=L/2$ می باشد.

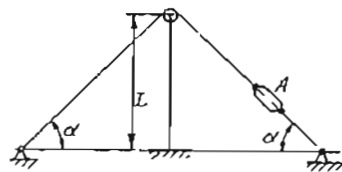
$$M_{\max} = Pv_{\max} + \frac{W}{2} \frac{L}{2} = \frac{W}{2k} \tan \frac{kL}{2}$$

مسئله ۲۳ - ۱۳

ستون قائم باریکی به طول $L=1m$ که در ابتدا مستقیم می باشد در دو انتهای مفصلی و بار P را حمل می کند (شکل ۵۴ - ۱۳). فتری با ثابت فتری $K=4.5kN/m$ به



شکل ۵۴ - ۱۳



شکل ۵۵ - ۱۳

۷۲۰

ستون به صورت زیر نوشته می شوند:

$$EI_1 v_1'' = P(\delta - v_1) \quad ; \quad EI_2 v_2'' = P(\delta - v_2)$$

فرض کنید $k_1^2 = P/EI_1$ و $k_2^2 = P/EI_2$. در این صورت حوالب های معادلات فوق برابر خواهند بود با

$$v_1 = \delta + C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x \quad ; \quad v_2 = \delta(1 - \cos k_2 x)$$

از شرایط $v_1 = v_2 = \delta$ در $x=L$ و $v_1 = v_2$ در $x=L/2$ خواهیم داشت

$$\delta + C_1 \cos k_1 L + C_2 \sin k_1 L = \delta$$

$$\delta + C_1 \cos k_1 L/2 + C_2 \sin k_1 L/2 = \delta(1 - \cos k_2 L/2)$$

از حل این دو معادله ثابت های C_1 و C_2 بر حسب δ بدست می آیند.

$$C_2 = \frac{\delta \cos k_2 L/2 \cos k_1 L}{\sin k_1 L/2} \quad ; \quad C_1 = -C_2 \tan k_1 L$$

از شرط $v_1' = v_2'$ در $x=L/2$ معادله زیر نتیجه می شود:

$$\delta k_2 \sin k_2 L/2 = -C_1 k_1 \sin k_1 L/2 + C_2 k_1 \cos k_1 L/2$$

با جایگزینی C_1 و C_2 در معادله فوق سرانجام معادله زیر برای محاسبه P_{CR} به دست می آید:

$$\tan k_1 L/2 \tan k_2 L/2 = \frac{k_1}{k_2}$$

مسئله ۲۲ - ۱۳

ستون شکل ۵۳ - ۱۳ به طول L تحت اثر بار جایی W در وسط طولش قرار دارد. تغییر مکان و لنگر خمشی ماکزیمم در طول ستون را حساب کنید.

حل: معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان نیمه چپ ستون عبارتست از

$$EI v'' = -Pv - \frac{W}{2} x$$

با فرض $k^2 = P/EI$ این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$v'' + k^2 v = -\frac{Wk^2}{2P} x$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx - \frac{W}{2P} x$$

۷۲۲

بدون اصطکاک است که از روی آن کابلی عبور می‌کند. کابل توسط سه نیرو افقی P تحت کشش قرار دارد و در نتیجه نیروی فشاری P در ستون ایجاد می‌شود. مقدار بحرانی نیروی P را حساب کنید.

حل: فرض کنید سمت فوقانی ستون به اندازه δ تغییر مکان افقی دهد (شکل ۵۶-۱۳). در این صورت زاویه تعادل نیمه چپ کابل به اندازه $\Delta\alpha$ کاهش و زاویه تعادل نیمه راست به همان مقدار افزایش می‌یابد. در نتیجه اگر T نیروی کششی در کابل باشد نیروی افقی P_1 بر ستون وارد می‌شود که برابر است با (شکل ۵۷-۱۳)

$$P_1 = T \cos(\alpha - \Delta\alpha) - T \cos(\alpha + \Delta\alpha)$$

چون $\Delta\alpha$ زاویه کوچکی است می‌توانیم بنویسیم

$$P_1 = 2T \sin \Delta\alpha$$

از طرفی داریم $2T \sin \alpha = P$ ، بنابراین $P_1 = P \Delta\alpha$. از طرف دیگر از مثلث ABC (شکل ۵۶-۱۳) می‌توانیم بنویسیم

$$(\Delta\alpha) \Delta\alpha = \delta \sin \alpha$$

و چون $OA = \frac{L}{\sin \alpha}$ داریم

$$\Delta\alpha = \frac{\delta}{L} \sin^2 \alpha \quad ; \quad P_1 = P \frac{\delta}{L} \sin^2 \alpha$$

حال معادله دیفرانسیل منحنی تعادل مکان ستون را تحت بارگذاری قائم P و بارگذاری افقی P_1 می‌نویسیم (شکل ۵۷-۱۳).

$$EI v'' = P(\delta - v) - P \frac{\delta}{L} \sin^2 \alpha (L - x)$$

فرض می‌کنیم $k^2 = P/EI$.

$$v'' + k^2 v = k^2 \delta - k^2 \frac{\delta}{L} (L - x) \sin^2 \alpha$$

جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta - \frac{\delta}{L} (L - x) \sin^2 \alpha$$

از شرط‌های $v = v' = 0$ در $x = 0$ و $v = \delta$ در $x = L$ معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$C_2 + \delta \cos^2 \alpha = 0 \quad ; \quad C_1 k + \frac{\delta}{L} \sin^2 \alpha = 0 \quad ; \quad C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0$$

۷۲۲

طور افقی در وسط ستون متصل شده است. موقعی که ستون مستقیم است و در نتیجه اندازه 3 cm کشیده می‌باشد. اگر P برابر یک چهارم بار بحرانی اولر و EI برابر 30 Nm^2 باشد، تغییر مکان وسط ستون را محاسبه کنید.

حل: مطابق مسئله ۲۲-۱۳ تغییر مکان وسط ستون تحت اثر بار جانبی W برابر است با

$$v_{\max} = \frac{W}{2P} \left(\frac{1}{k} \tan \frac{kL}{2} - \frac{L}{2} \right)$$

از طرفی اگر تغییر مکان وسط ستون را δ بنامیم (شکل ۵۴-۱۳) خواهیم داشت

$$W = K(0.03 - \delta) = 4.5 \times 10^3 (0.03 - \delta)$$

$$\frac{W}{2P} = \frac{4.5 \times 10^3 (0.03 - \delta)}{2 \left(\frac{\pi^2 EI}{4L^2} \right)} = 30.4 (0.03 - \delta)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{4L^2 EI}} = \frac{\pi}{2L}$$

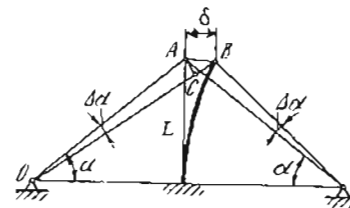
$$\frac{1}{k} \tan \frac{kL}{2} - \frac{L}{2} = \frac{2L}{\pi} \tan \frac{\pi}{4} - \frac{L}{2} = 0.136$$

بنابراین تغییر مکان وسط ستون برابر است با

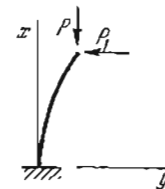
$$\delta = 30.4 (0.03 - \delta) (0.136) \quad ; \quad \delta = 0.024 \text{ m} = 2.4 \text{ cm}$$

مسئله ۲۴-۱۳

ستون شکل ۵۵-۱۳ در انتهای تحتانی گیردار و در انتهای فوقانی دارای مفصله



شکل ۵۶-۱۳



شکل ۵۷-۱۳

۷۲۵

می آید :

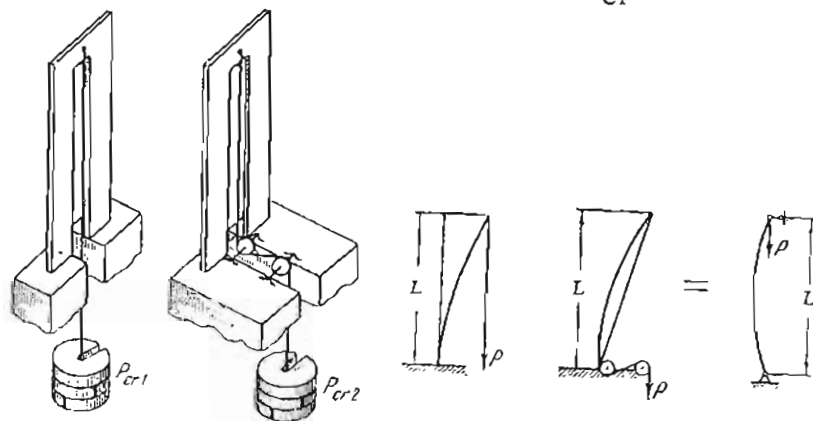
$$\frac{dM}{dx} - V - P \frac{dv}{dx} = 0$$

اگر بین دو رابطه فوق و همچنین رابطه $EIV''' = -M$ کمیت های M و V را حذف کنیم معادله زیر بین تغییر مکان v و شدت بار q بدست می آید :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = q$$

مسئله ۲۶-۱۳

ستونی در انتهای تحتانی گیر دار و در انتهای آزاد بوسیله نیروی قائمی که متوسط طنابی به آن منتقل می شود بارگذاری شده است (شکل ۶۰-۱۳). انتقال نیروی متوسط طناب به دو صورت مختلف صورت می گیرد . در حالت اول طناب به آزادی به طور قائم قرار دارد . در حالت دوم طناب از روی دو قرفه صلب بدون اصطکاک عبور می کند . در کدام حالت بار بحرانی P_{cr} بیشتر می باشد ؟



شکل ۶۱-۱۳

شکل ۶۲-۱۳

شکل ۶۰-۱۳

حل : بار بحرانی در حالت دوم چهار برابر بار بحرانی در حالت اول می باشد . برای اثبات این نکته کافی است ستون را در هر دو حالت در موقعیت تغییر شکل یافته رسم کنیم . در حالت اول (شکل ۶۱-۱۳) بار بحرانی برابر است با

۷۲۴

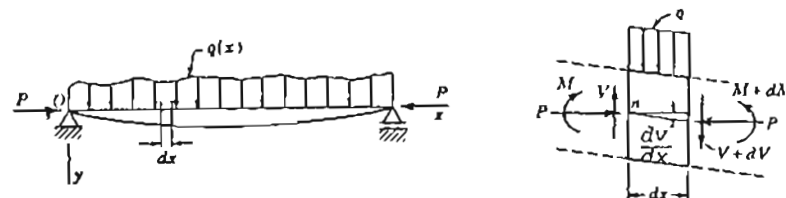
با مساوی صفر قرار دادن دتر میاب ضرائب معادلات فوق معادله فرازنده زیر برای بار بحرانی بدست می آید :

$$\tan kL = -kL \cot^2 \alpha$$

از این معادله مشاهده می شود که بار بحرانی ستون به زاویه تمایل کامل بستگی دارد .

مسئله ۲۵-۱۳

معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان تیری را که تحت اثر توام بارهای محوری P در دو انتها و بار جانبی گسترده q قرار دارد بنویسید (شکل ۵۸-۱۳) .



شکل ۵۸-۱۳

شکل ۵۹-۱۳

حل : عنصر کوچکی از تیر به طول dx را جدا کرده و بنمودار جسم آزاد آن را مطابق شکل ۵۹-۱۳ رسم می نمایم . نیروی برشی و لنگر خمشی در سمت چپ عنصر را به ترتیب V و M و مقادیر نظیر در سمت راست عنصر را به ترتیب $V + dV$ و $M + dM$ می نامیم . از معادله تعادل عنصر در امتداد قائم خواهیم داشت

$$-V + q dx + (V + dV) = 0 \quad ; \quad \frac{dV}{dx} = -q$$

با فرض اینکه زاویه بین محور تیر و امتداد افق کوچک باشد معادله تعادل لنگری عنصر را نسبت به نقطه n می نویسیم

$$M + q dx \left(\frac{dx}{2} \right) + (V + dV) dx - (M + dM) + P \frac{dv}{dx} dx = 0$$

اگر از جملات بی نهایت کوچک مرتبه دوم صرف نظر کنیم این معادله به صورت زیر در

۷۲۷

با فرض $k^2 = P/EI$ این معادله به صورت زیر در می آید :

$$v'' + k^2 v = k^2 \frac{\delta}{a} x$$

جواب عمومی این معادله برابر است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{\delta}{a} x$$

از شرط حدی $v=0$ در $x=0$ نتیجه می شود $C_2=0$. از شرط های $v'=0$ و $v=\delta$ در $x=L$ نیز دو معادله ربر حاصل می شود :

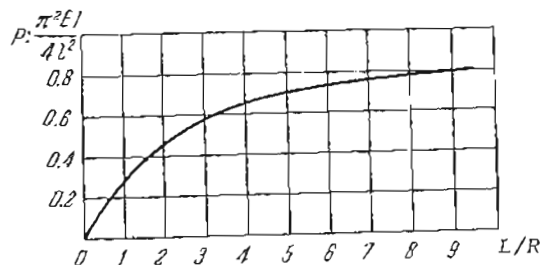
$$C_1 \sin kL + \frac{\delta}{a} L = \delta ; \quad C_1 k \cos kL + \frac{\delta}{a} = 0$$

با صفر قرار دادن در میان ضرائب دو معادله فوق معادله فرازده زیر برای بار بحرانی بدست می آید :

$$\tan kL = kL \left(1 - \frac{a}{L} \right)$$

مسئله ۲۸-۱۳

در شکل ۶۵-۱۳، بزرگی نیروی بحرانی P چگونه با شعاع R جام تغییر میکند؟



شکل ۶۷-۱۳

حل : معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان میله قائم جام با توجه به شکل

۱۳-۶۶ عبارتست از

$$EI v'' = P (\delta + R\phi - v)$$

با فرض $k^2 = P/EI$ جواب عمومی این معادله برابر است با

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta + R\phi$$

۷۲۶

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

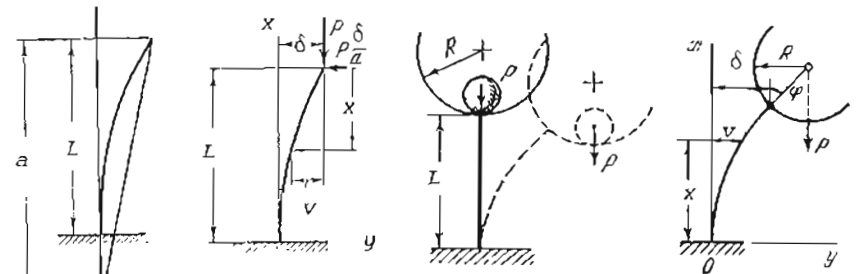
در حالت دوم، نیروی وارد بر ستون همواره از انتهای گیر دار آن عبور می کند (شکل ۶۲-۱۳). بنابراین بارگذاری ستون در این حالت مشابه بارگذاری یک ستون

دو سر مفصلی می باشد، در نتیجه $P_{cr2} = \pi^2 EI / L^2$.

مسئله ۲۷-۱۳

با توجه به مسئله فل بار بحرانی ستون شکل ۶۳-۱۳ را که تحت اثر نیروی

P قرار دارد حساب کنید. بار P بوسیله کابلی که از روی قرقره بدون اصطکاک عبور می کند به ستون وارد می شود.



شکل ۶۴-۱۳

شکل ۶۵-۱۳

شکل ۶۶-۱۳

شکل ۶۳-۱۳

حل : نیروی P را به دو مؤلفه قائم P_v و افقی P_h تجزیه می کنیم (شکل

۱۳-۶۴).

$$P_v \approx P ; \quad P_h = P \frac{\delta}{a}$$

تغییر مکان بالای ستون را δ فرض می کنیم. معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی سیر عبارتست از

$$EI v'' = -Pv + P \frac{\delta}{a} x$$

۷۲۹

می باشد. اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ باشد چه بار P در ستون تنش تسلیم ایجاد خواهد نمود؟

مسئله ۱-۳-۱۳ دو ستون با تکیه گاههای ساده دارای طول، مساحت مقطع عرضی و ضریب ارتجاعی یکسان می باشد. مقطع عرضی یکی از ستون ها دایره ای و مقطع عرضی ستون دیگر مربعی می باشد. بارهای بحرانی P_c و P_s به ترتیب برای ستون های دایره ای و مربعی را با یکدیگر مقایسه کنید.

مسئله ۲-۳-۱۳ ستونی از مقطع $W14 \times 84$ ($E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$) و به طول 13.70 m در انتهای تحتانی گیر دار و در انتهای فوقانی مفصلی می باشد. بار بحرانی این ستون را پیدا کنید.

مسئله ۳-۳-۱۳ ستونی از مقطع $S6 \times 12.5$ (پیوست ۲ کتاب را ببینید) و به طول 1.83 m در دو انتها تکیه گاههای ساده دارد. با فرض اینکه ضریب ارتجاعی ستون فولادی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد بار بحرانی آن را محاسبه کنید.

مسئله ۴-۳-۱۳ از جداول پیوست ۲ کتاب سبک ترین مقطع I عریض بال (مقطع W) را برای ستونی با تکیه گاههای ساده و به طول 6.10 m که تحت اثر بار فشاری $P = 204.3 \text{ Kg}$ می باشد انتخاب کنید به طوریکه ضریب اطمینان در مقابل کمانش ارتجاعی حداقل $n = 2.5$ باشد. فرض کنید $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

مسئله ۵-۳-۱۳ از جداول پیوست ۲ کتاب سبک ترین مقطع نبشی با بال های مساوی را برای ستونی با تکیه گاههای ساده و به طول 3.05 m که تحت اثر بار فشاری $P = 9080 \text{ Kg}$ می باشد انتخاب کنید به طوریکه ضریب اطمینان در مقابل کمانش ارتجاعی حداقل $n = 2.5$ باشد. فرض کنید $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

مسئله ۶-۳-۱۳ تیر - ستون شکل ۳-۱۳ بار جانبی $2Q$ را در وسط دهانه و بار فشاری P را در انتهای B مطلق شکل تحمل می کند. برای وقتی که $P < P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$ باشد معادله دیفرانسیل منحنی ارتجاعی تیر - ستون مزبور را نوشته تغییر مکان قائم δ در وسط دهانه را پیدا کنید. ضریب خمشی تیر EI و طول آن L می-

۷۲۸

از شرایط حدی $v = v' = 0$ در $x = 0$ و $v = \delta$ و $v' = \phi$ در $x = L$ معادلات زیر حاصل می شود:

$C_1 = 0$; $C_2 + \delta + R\phi = 0$
 $C_1 \sin kL + C_2 \cos kL + R\phi = 0$; $C_1 k \cos kL - C_2 k \sin kL = \phi$
 اگر دتر میان ضرایب سه معادله برای سه مجهول C_2 ، δ و ϕ را مساوی صفر قرار دهیم، معادله فرازیده زیر برای بار بحرانی بدست می آید:

$$\frac{L}{R} = kL \tan kL$$

رابطه بین بار بحرانی و نسبت L/R در شکل ۶۷-۱۳ رسم شده است.

۱۳-۹ مسائل حل نشده

مسئله ۱-۲-۱۳ ستونی به طول 1.2 m و با مقطع مستطیل به ابعاد $2.5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ تحت اثر بار فشاری خارج از مرکز $P = 1360 \text{ Kg}$ فشرده می نمود. خط اثر بار فشاری از گوشه مقطع عرضی عبور می کند. دو انتهای ستون دارای تکیه گاه ساده می باشد. تنش فشاری ماکزیم در ستون را با فرض اینکه ضریب ارتجاعی ماده ستون $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد تعیین کنید.

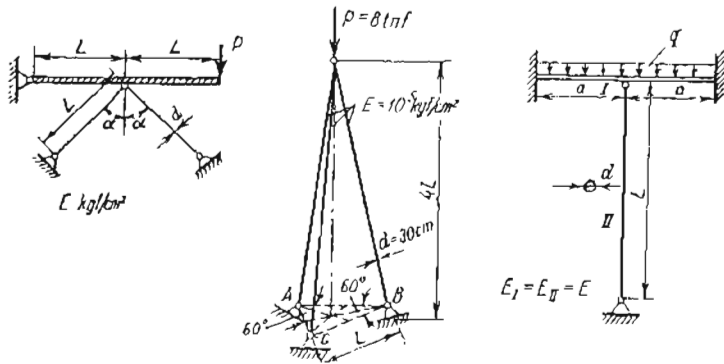
مسئله ۲-۲-۱۳ ستونی با دو انتهای مفصلی از مقطع ناودانی $C8 \times 11.5$ (پیوست ۲ کتاب را ببینید) ساخته شده است. بار فشاری P در صفحه تقارن ناودانی در نقطه ای که محور ۱-۱ صفحه پشتی ناودانی را قطع می کند، یعنی در فاصله 1.45 cm از مرکز سطح مقطع عرضی وارد می نمود. با فرض اینکه $P = 1816 \text{ Kg}$ ، $L = 3.05 \text{ m}$ و $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد تغییر مکان وسط ستون و تنش های کششی و فشاری ماکزیم در ستون را حساب کنید.

مسئله ۳-۲-۱۳ ستونی با دو انتهای مفصلی از مقطع $W8 \times 40$ (پیوست ۲ را ببینید) ساخته شده است. بار فشاری P در روی محور ۲-۲ با خروج از مرکزی برابر 7.60 cm وارد می شود. طول ستون $L = 4.88 \text{ m}$ و ضریب ارتجاعی آن $E = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

۷۳۱

ساخته شده‌اند. گشتاور لختی تیرهای افقی $6.28 \times 10^4 \text{ cm}^4$ می‌باشد. ستون دارای مقطع دایره به قطر 20 cm می‌باشد.

مسائل ۱۰-۱۳-۳ تا ۱۲-۳-۱۳ تعیین کنید در چه طول L سازه‌های شکل‌های ۱۰-۱۳-۳ تا ۱۲-۳-۱۳ پایدار می‌گردند. در مسئله ۱۲-۳-۱۳ از کرش فتاری ستون صرف نظر کنید. صاحب مقطع عرصه ستون مسئله ۱۲-۳-۱۳ و ستون‌های مایل در مسئله ۱۰-۱۳-۳ را A فرض کنید.



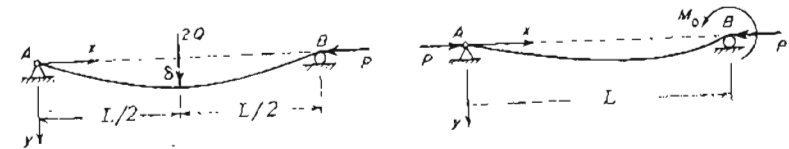
شکل ۱۰-۱۳-۳ تا ۱۲-۳-۱۳

مسائل ۱۳-۳-۱۳ تا ۱۳-۳-۱۵ در سازه‌های شکل‌های ۱۳-۳-۱۳ تا ۱۳-۳-۱۵ تعیین کنید چه اضافه درجه حرارتی ($\Delta T^\circ \text{C}$) باعث شود که اعضای فشاری سازه پایداری شان را از دست بدهند. برای فولاد صرب ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$ و تنش حد تناسب $\sigma_{pl} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ و برای مس $\sigma_{pl} = 1000 \text{ kg/cm}^2$ و $\alpha = 16.5 \times 10^{-6}$ ، $E = 10^6 \text{ kg/cm}^2$ مفادیر مزبور را در دو حالت تیر افقی صلب و اعطاف پذیر حل کنید.

مسئله ۱۳-۳-۱۶ مقاطع عرصه چند ستون در شکل ۱۳-۳-۱۶ مشاهده می‌شود.

۷۳۰

باشد. دوانتهای A و B را مفصلی فرض کنید.

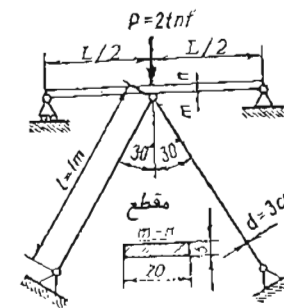


شکل ۱۳-۳-۶

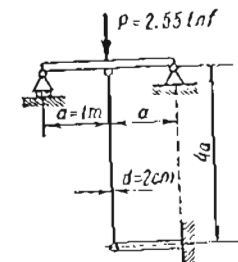
شکل ۱۳-۳-۷

مسئله ۱۳-۳-۷ تیر - ستونی با تکیه گاههای ساده و صلبیت خمشی یکنواخت ET در دوانتها تحت اثر بارهای فشاری P و در اسهای B تحت انرلنگر M_0 مطابق شکل ۱۳-۳-۷ قرار دارد. برای وضعی که $P < P_{cr}$ ، معادله دیفراسیل محلی تغییر مکان تیر - ستون را نوشته و جواب $y=f(x)$ آن را پیدا کنید.

مسئله ۱۳-۳-۸ صرب اطمینان در مقابل کماتش را برای ستون‌های مایل، شکل ۱۳-۳-۸ حساب کنید. تیر افقی و ستون‌های مایل از فولاد با صرب ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ساخته شده‌اند. مقطع عرصه تیر به شکل مستطیل و به ابعاد $20 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ می‌باشد. ستون‌های مایل دایره‌ای و به قطر 5 cm می‌باشد.



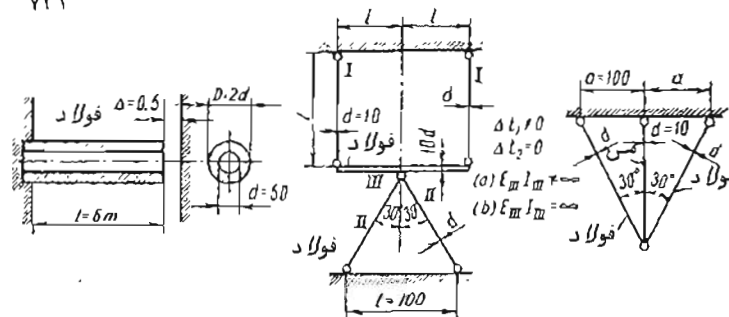
شکل ۱۳-۳-۸



شکل ۱۳-۳-۹

مسئله ۱۳-۳-۹ صرب اطمینان در مقابل کماتش را برای ستون شکل ۱۳-۳-۹ حساب کنید. تیرهای افقی و ستون قائم از فولاد با صرب ارتجاعی $E = 2.07 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

۷۳۲

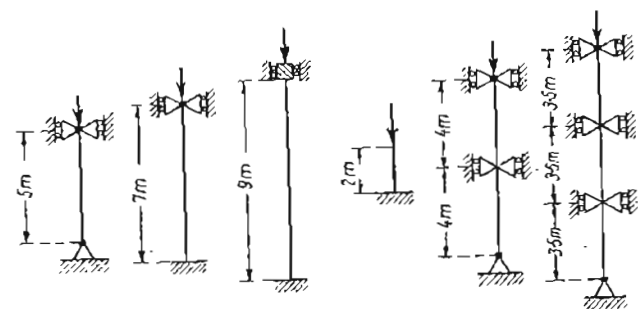


شکل ۱۳-۳-۱۳ شکل ۱۳-۳-۱۴ شکل ۱۳-۳-۱۵



این ستون‌ها در چه امتدادی کمانه می‌کند؟

مسئله ۱۳-۳-۱۷ با فرض اینکه مقطع عرضی تمام ستون‌های شکل ۱۳-۳-۱۷ یکسان باشد کدام ستون بیشترین و کدام ستون کمترین بار فشاری را می‌تواند تحمل کند؟



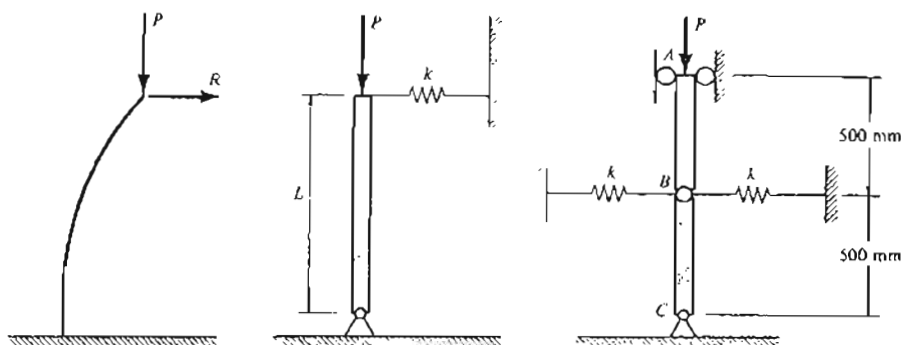
شکل ۱۳-۳-۱۷

مسئله ۱۳-۳-۱۸ میله‌ای به طول L در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد می‌باشد (شکل ۱۳-۳-۱۸). در انتهای آزاد میله نیروی قائم P برابر با یک چهارم بار اولر برای این میله و نیروی افقی R وارد می‌شود. تغییر مکان جاسی انتهای فوقانی میله را حساب کنید.

مسئله ۱۳-۳-۱۹ میله صلبی مطابق شکل ۱۳-۳-۱۹ در انتهای تحناتی مفصلی

۷۳۳

و در انتهای فوقانی به فتری با ثابت فتری k متصل می‌باشد و تحت اثر نیروی فشاری P قرار دارد. به انتهای فوقانی میله تغییر مکان جانبی کوچکی داده می‌شود. مقدار بحرانی بار P را حساب کنید.



شکل ۱۳-۳-۱۸

شکل ۱۳-۳-۱۹

شکل ۱۳-۳-۲۰

مسئله ۱۳-۳-۲۰ دستگاه شکل ۱۳-۳-۲۰ از دو میله قائم صلب AB و BC تشکیل شده که در نقطه C مفصلی و در نقطه A از تغییر مکان جانبی آن جلوگیری شده است (در نقطه A میله AB می‌تواند به آزادی دوران کند). دو میله همچنین در نقطه B مفصل شده‌اند. نقطه میانی B به دو فنر هر یک با ثابت فتری $k \text{ N/mm}$ متصل شده است. قبل از اینکه بار P وارد شود فنرها بدون بار می‌باشند. مقداری از بار P را که باعث نا پایداری دستگاه می‌گردد تعیین کنید.

مسئله ۱۳-۳-۲۱ میله صلب و در ابتدا مستقیم AB در دو انتهای فوقانی و تحتانی به فنرهای ارتجاعی متصل می‌باشد (شکل ۱۳-۳-۲۱). فنر انتهای A یک فنر پیچشی می‌باشد که مقاومتی برابر $K \text{ Nm}$ برای هر رادیان دوران در نقطه A ایجاد می‌کند. فنر خطی در B نیز در مقابل تغییر مکان جانبی در این نقطه مقاومتی برابر $k \text{ N/mm}$ برای واحد تغییر مکان افقی ایجاد می‌کند. موقعی که میله قائم می‌باشد فنرها بدون نیرو می‌باشند. معادله مشخصه‌ای را که بار بحرانی را می‌دهد تعیین کنید.

مسئله ۱۳-۳-۲۲ میله آلومینیومی AB (شکل ۱۳-۳-۲۲) به قطر 16 mm و ضریب ارتجاعی $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ بوسیله دو فنر افقی نگهداشته شده و تحت اثر بار

۷۳۵

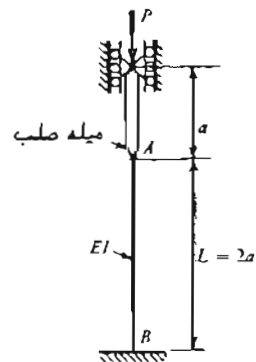
صف موج محبی-سنوسی $v_0 = a \sin \pi x / L$ می باشد (شکل ۱۳-۳-۲۵) . اگر نیروی مزبور تحت اثر نیروهای فشاری P مطابق شکل قرار نگیرد نشان دهد که تغییر مکان کل نبر برابر است با

$$v = v_0 + v_1 = \frac{1}{1 - P/P_{CR}} a \sin \frac{\pi x}{L}$$

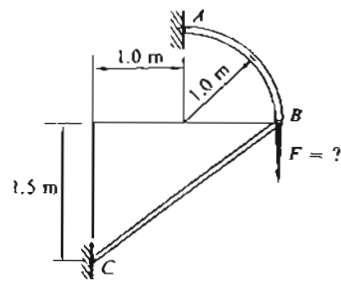
در این رابطه $P_{CR} = \pi^2 EI / L^2$ می باشد .

مسئله ۱۳-۳-۲۶ میله AB با صلبیت خمشی EI و به طول $L=2a$ به میله صلبی به طول a مطابق شکل ۱۳-۳-۲۶ متصل می باشد . بار بحرانی دستگاه مزبور را حساب کنید .

مسئله ۱۳-۳-۲۷ دستگاه شکل ۱۳-۳-۲۷ از عضو محنی AB (به شکل ربع دایره) و عضو مستقیم BC تشکیل شده است . اگر عضو BC از چوب به مقطع $4\text{cm} \times 8\text{cm}$ باشد ، چه نیروی قائم F می توان بر اتصال B وارد نمود ؟ تمام اتصالات را مفصلی فرض کنید . از فرمول اولر یا ضریب اطمینان ۳ استفاده نکنید . همچنین فرض کنید $E = 11 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$.



شکل ۱۳-۳-۲۶

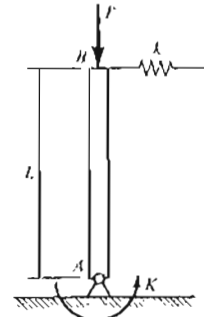


شکل ۱۳-۳-۲۷

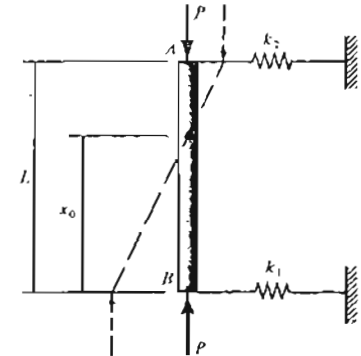
مسئله ۱۳-۳-۲۸ عضو چوبی AB در شکل ۱۳-۳-۲۸ به طول ۳م تحت فشار قرار دارد . مقطع عرضی این عضو به شکل مستطیل و به ابعاد $0.06 \times 0.10\text{m}$ می باشد .

۷۳۴

فناری قائم P قرار دارد . ثابت های فنرها $k_1=4\text{N/mm}$ و $k_2=8\text{N/mm}$ می باشد . طول میله ۶۰۰mm است . مقدار بحرانی بار P و شکل کمانه کرده مله را پیدا کنید .



شکل ۱۳-۳-۲۱



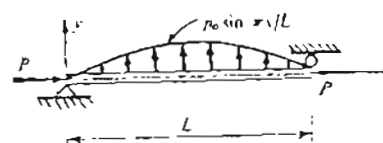
شکل ۱۳-۳-۲۲

مسئله ۱۳-۳-۲۳ ستون باریکی به طول L و صلبیت خمشی EI در هر یک از دو انتها بر یک محیط ارتجاعی متکی می باشد که بر ستون لنگر K در هر رادیان دوران انتهای ستون وارد می کند . اولین بار کماش ستون را پیدا کنید .

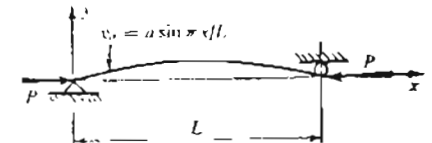
مسئله ۱۳-۳-۲۴ تیر - ستون شکل ۱۳-۳-۲۴ تحت اثر یک بار سینوسی قرار دارد . نشان دهید معادله منحنی تغییر مکان آن

$$v = \frac{P_0 L^4}{\pi^4 EI} \left(\frac{1}{1 - P/P_{CR}} \right) \sin \frac{\pi x}{L}$$

می باشد که در آن $P_{CR} = \pi^2 EI / L^2$.



شکل ۱۳-۳-۲۴



شکل ۱۳-۳-۲۵

مسئله ۱۳-۳-۲۵ تیری دارای یک انحنا اولیه است به طوریکه محور آن به شکل

۷۳۷

مسئله ۱۳-۳-۳۱ دستگاه شکل ۱۳-۳-۳۱ شامل سه میله صلب مشابه می باشد که به طور مفصلی به یکدیگر متصل و همچنین به فنری با ثابت k وصل شده اند. لنکر M بر میله میانی وارد می شود. مقدار بحرانی لنکر M را که حد پایداری ارتجاعی را مشخص می کند پیدا کنید.

مسئله ۱۳-۳-۳۲ میله صلبی به طول L بوسیله یک فنر مارپیچی نگهداشته شده است (شکل ۱۳-۳-۳۲). وقتی که میله به اندازه θ دوران می کند فنر مزبور لنکر $k\theta$ بر آن وارد می کند. زاویه دوران میله را به صورت تابعی از P بدست آورید. به ازای چه مقداری از P تعادل پایدار می باشد؟ فرض کنید E کوچک و تحلیل به زوایای کوچک θ محدود می باشد.

مسئله ۱۳-۴-۱ یک میله فولادی با مقطع عرضی دایره به قطر 2.5 cm در دو انتهای گیر دار و تحت اثر نیروی فشاری محوری قرار دارد. کوتاهترین طول L ستون که برای آن فرمول بار بحرانی اولر صادق می باشد چقدر است؟ فرض کنید ضریب ارتجاعی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش حد تناسب $\sigma_{pl} = 2100 \text{ Kg/cm}^2$.

مسئله ۱۳-۴-۲ اگر طول میله مسئله قبل $L = 1.52 \text{ m}$ باشد، تنش بحرانی σ_{cr} ستون مزبور را حساب کنید.

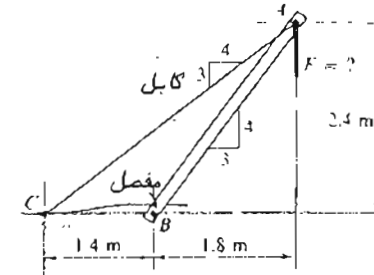
مسئله ۱۳-۴-۳ تنش فشاری بحرانی σ_{cr} را برای یک ستون $W12 \times 106$ که در دو انتها مفصلی و به طول 9.14 m می باشد حساب کنید. ضریب ارتجاعی $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ است. اگر ضریب اطمینان $n = 2.5$ باشد بار فشاری مجاز P چقدر می باشد؟

مسئله ۱۳-۴-۴ اگر در مسئله قبل تنش حد تناسب $\sigma_{pl} = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ باشد، کوتاهترین طول L ستون که برای آن فرمول اولر برای بار بحرانی صادق می باشد چقدر است؟

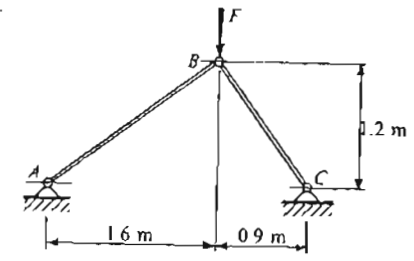
مسئله ۱۳-۵-۱ یک مقطع $W16 \times 50$ (پیوست ۲ کتاب را ببینید) بعنوان ستونی به طول 4.90 m و با تکیه گاههای ساده بکار رفته است. این ستون بار فشاری P را تحمل می کند به طوریکه خمش حول محور اصلی ضعیف (محور ۲-۲) صورت می گیرد.

۷۳۶

اگر در مقابل کمانش صریب اطمینانی برابر ۲ انتخاب شود مقدار ماکزیمم نیروی F چقدر می تواند باشد؟ فرض کنید $E = 1.2 \times 10^{10} \text{ Pa}$.



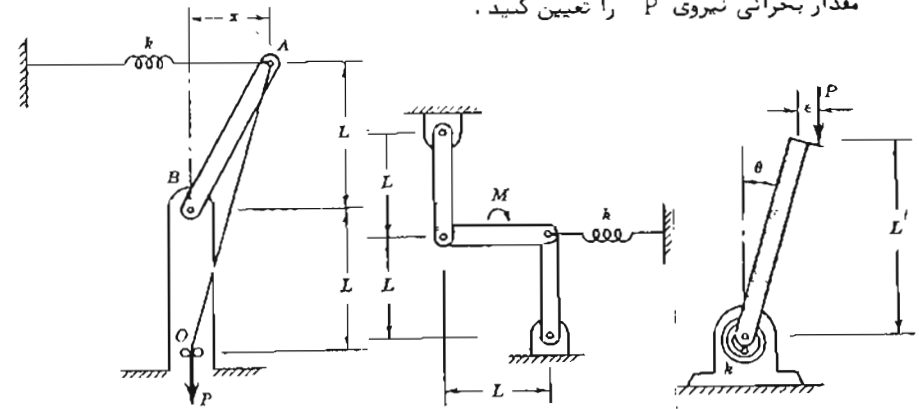
شکل ۱۳-۳-۲۸



شکل ۱۳-۳-۲۹

مسئله ۱۳-۳-۲۹ با فرض اینکه کمانش سازه شکل ۱۳-۳-۲۹ در صفحه سازه رخ دهد، مقدار نیروی F را که باعث نا پایداری می گردد حساب کنید. اعضای سازه از آلومینیوم با ضریب ارتجاعی $E = 70 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ساخته شده اند و مقاطع عرضی آنها به ابعاد $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ می باشد.

مسئله ۱۳-۳-۳۰ میله صلب AB در نقطه A به فنری با ثابت فنری k (شکل ۱۳-۳-۳۰) متصل است. وقتی که $x=0$ است فنر بدون نیرو می باشد. نیروی P از طریق طنابی که از میان فرقه های O عبور می کند به میله AB وارد می شود. مقدار بحرانی نیروی P را تعیین کنید.



شکل ۱۳-۳-۳۰

شکل ۱۳-۳-۳۱

شکل ۱۳-۳-۳۲

۷۳۹

بدست آورید .

مسئله ۱۳-۶-۲ یک ستون فولادی ($E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$) با دو انتهای مفصلی از مقطع $W8 \times 48$ ساخته شده است و بار محوری $P=102.1 \text{ t}$ را حمل می کند . طول ستون 4.57 m می باشد . ستون با خمش حول محور اصلی ضعیف تر مقطع عرضی گمانه می کند . ستون دارای یک تغییر مکان اولیه به شکل موج منحنی سینوسی می باشد و تغییر مکان وسط آن برابر 0.51 cm است . با استفاده از معادله 13-38 تنش ماکزیمم در ستون را حساب کنید . اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ باشد ضریب اطمینان در مقابل تسلیم چقدر می باشد ؟

مسئله ۱۳-۶-۳ ستونی به طول 1.22 m و با مقطع دایره به قطر 5.08 cm بار فشاری P را تحمل می کند . ستون از فولاد با ضریب ارتجاعی $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش تسلیم $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ می باشد . مقدار مجاز بار P چقدر می باشد ؟ از فرمول 13-38 استفاده نمایید و فرض کنید $L/a = 400$ و ضریب اطمینان در مقابل تسلیم $n=2$ می باشد .

مسئله ۱۳-۶-۴ یک ستون فولادی از یک مقطع نبشی $3^4 \times 3^4 \times \frac{1}{4}$ (پیوست ۲ را ببینید) به طول $L=3.05 \text{ m}$ ساخته شده است . ستون در دو انتها گیردار و بار فشاری P را حمل می کند . مقدار مجاز بار P را با استفاده از فرمول 13-38 پیدا کنید . فرض کنید $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ ، $n=1.5$ ، $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ و $a/L = 1/800$.

مسئله ۱۳-۶-۱ با استفاده از فرمول های مؤسسه ساختمان های فولادی آمریکا مقدار مجاز بار فشاری P را برای ستونی با مقطع $W10 \times 72$ ، به طول 4.57 m و با دو انتهای مفصلی حساب کنید . فرض کنید $E=2.03 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 3500 \text{ Kg/cm}^2$.

مسئله ۱۳-۶-۲ با استفاده از فرمول های مؤسسه ساختمان های فولادی آمریکا بار فشاری مجاز P یک ستون فولادی $W10 \times 45$ را برای سه طول $L=3.05 \text{ m}$ ، $L=6.10 \text{ m}$ و $L=9.15 \text{ m}$ حساب کنید . شرایط دو انتهای ستون را مفصلی فرض کنید . ضریب ارتجاعی فولاد ستون $E=2.03 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و تنش تسلیم $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$.

۷۳۸

نسبت خروج از مرکز $ec/r^2 = 0.2$ می باشد . اگر ضریب اطمینان در مقابل تسلیم $n=2$ ، تنش تسلیم $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب ارتجاعی $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ باشد مقدار مجاز بار P را حساب کنید .

مسئله ۱۳-۵-۲ یک ستون فولادی به شکل لوله نوحالی در پایه اش گیر دار و در انتهای فوقانی مفصلی می باشد . قطرهای داخلی و خارجی لوله به ترتیب 7.6 cm و 8.9 cm می باشند . طول ستون 3.66 cm است . با فرض اینکه نسبت خروج از مرکز $ec/r^2 = 0.25$ ، تنش تسلیم $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$ ، ضریب ارتجاعی $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب اطمینان $n=2$ باشد ، بار مجاز P را تعیین کنید .

مسئله ۱۳-۵-۳ یک ستون فولادی ($E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$) با دو انتهای مفصلی و به طول 3.05 m از مقطع $W12 \times 72$ ساخته شده است . بار $P_1 = 45.4 \text{ Kg}$ از مرکز سطح مقطع عرضی عبور می کند و بار خارج از مرکز P_2 در روی محور 1-1 به فاصله 10.1 cm از محور 2-2 وارد می شود . با فرض اینکه تنش تسلیم $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب اطمینان $n=2.5$ باشد مقدار مجاز بار P_2 را پیدا کنید .

مسئله ۱۳-۵-۴ یک ستون فولادی ($E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$) به طول 7.62 m در دو انتها مفصلی و از مقطع $W14 \times 84$ ساخته شده است . ستون بار مرکزی $P_1 = 90.8 \text{ t}$ و بار خارج از مرکز $P_2 = 45.4 \text{ t}$ را تحمل می کند . بار P_2 بر محور 2-2 و به فاصله 19 cm از مرکز سطح وارد می شود . با استفاده از فرمول سکانت تنش ماکزیمم در ستون را حساب کنید . اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ باشد ، ضریب اطمینان در مقابل شروع تسلیم چقدر می باشد ؟

مسئله ۱۳-۵-۵ ستونی از یک مقطع نبشی $3^4 \times 4^4 \times \frac{3}{8}$ (پیوست ۲ کتاب را ببینید) به طول 1.83 m و با تکیه گاه های مفصلی ساخته شده است . بار فشاری P بر گوشه خارجی نبشی در جایی که دو ضلع نبشی به یکدیگر برخورد می کنند وارد می شود . اگر تنش تسلیم $\sigma_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ ، ضریب ارتجاعی $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و ضریب اطمینان مطلوب در مقابل تسلیم $n=2$ باشد مقدار مجاز بار P را حساب کنید .

مسئله ۱۳-۶-۱ معادله ای مشابه معادله 13-40 برای ستونی با مقطع عرضی مربع

۷۴۱

$$P_{CR} = kL \quad : 12-2-19 \quad 16(4-\pi)RL^3/\pi^3EI \quad : 12-2-18$$

$$(\alpha^2 = P/EI \text{ فرض با}) : 12-2-21 \quad P_{CR} = 300N \quad : 12-2-20$$

$$\alpha L \cot \alpha L + \frac{kL}{P-kL} - \frac{PL}{K} = 0$$

$$P_{CR} = L \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) = 1.6kN : 12-2-22$$

میله مستقیم باقی می ماند و حول نقطه $X_0 = 400 \text{ mm}$ دوران میکند.

$$\tan \frac{kL}{2} = - \frac{P}{kK} \quad : k^2 = P/EI \text{ فرض با} : 12-2-23$$

$$4.14 \text{ kN} \quad : 12-2-28 \quad P_{CR} = 0.94EI/L^2 \quad : 12-2-26$$

$$kL^2/2 \quad : 12-2-31 \quad 2kL \quad : 12-2-30$$

$$P < k/L \quad : 12-2-32$$

$$1442 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 12-4-2 \quad 1.26 \text{ m} \quad : 12-4-1$$

$$6.78 \text{ m} \quad : 12-4-4 \quad P = 125t, \sigma_{CR} = 1543 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 12-4-3$$

$$12620 \text{ Kg} \quad : 12-5-2 \quad 54t \quad : 12-5-1$$

$$n = 2.03 \quad : 12-5-4 \quad 27420 \text{ Kg} \quad : 12-5-3$$

$$\sigma_{\max} = 1302 \text{ Kg/cm}^2$$

$$4131 \text{ Kg} \quad : 12-5-5$$

$$a\sqrt{3}/L \text{ را قرار دهید.} \quad : 12-6-1 \quad \text{در معادله 13-40 بجای } a/L \text{ کمیت}$$

$$13300 \text{ Kg} \quad : 12-6-3 \quad \sigma_{\max} = 1470 \text{ Kg/cm}^2; n = 1.62 \quad : 12-6-2$$

$$202.5 \text{ t} \quad : 12-7-1 \quad 7627 \text{ Kg} \quad : 12-6-4$$

$$4.24 \text{ m} \quad : 12-7-3 \quad P = 104.4t; 61.7t; 27.7t \quad : 12-7-2$$

۷۴۰

می باشد.

مسئله ۱۳-۷-۳ یک ستون فولادی به شکل لوله تو خالی به قطر داخلی 7.4 cm و به قطر خارجی 8.9 cm بار محوری $P = 9534 \text{ Kg}$ را حمل می کند. حداکثر طول L ستون چقدر می تواند باشد تا تنش ماکزیمم در ستون از تنش مجاز بر اساس فرمول های موئسه ساختمان های فولادی آمریکا تجاوز نکند؟ شرایط دو انتهای ستون را مفصلی فرض کنید. همچنین فرض کنید $E = 2.03 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ و $\sigma_y = 2520 \text{ Kg/cm}^2$.

۱۳-۱۰ جواب های مسائل حل نشده

$$812 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 12-2-1$$

$$\delta = 0.31 \text{ cm}; \sigma_t = 165.2 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_c = 166.6 \text{ Kg/cm}^2 \quad : 12-2-2$$

$$P_c/P_s = 3/\pi = 0.955 \quad : 12-2-1 \quad P_y = 86 \text{ Kg} \quad : 12-2-3$$

$$P_{CR} = 47.2t \quad : 12-2-3 \quad P_{CR} = 212t \quad : 12-2-2$$

$$L5 \times 5 \times \frac{1}{2} \quad : 12-2-5 \quad W14 \times 84 \quad : 12-2-4$$

$$k = \sqrt{P/EI} \quad \delta \text{ که در آن } \delta = \frac{QL}{2P} \left(\frac{\tan kL/2}{kL/2} - 1 \right) \quad : 12-2-6$$

$$k = \sqrt{P/EI} \quad y \text{ که در آن } y = \frac{M_0}{P} \left(\frac{\sin kx}{\sin kL} - \frac{x}{L} \right) \quad : 12-2-7$$

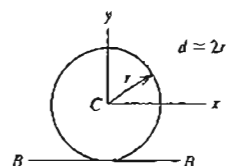
$$2 \quad : 12-2-9 \quad 7.4 \quad : 12-2-8$$

$$9.5 \text{ m} \quad : 12-2-11 \quad \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\pi E \cos \alpha}{P}} \quad : 12-2-10$$

$$82^\circ \quad : 12-2-12 \quad \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\pi E}{qa}} \quad : 12-2-12$$

$$63^\circ \quad : 12-2-15 \quad (a) 37.5^\circ; (b) 10.1^\circ : 12-2-14$$

6. دایره (مبدأ محورها در مرکز)

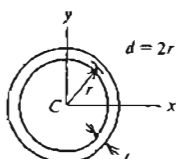


$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

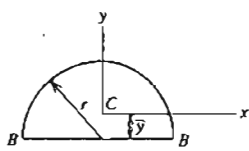
7. حلقه دایره‌ای (مبدأ محورها در مرکز) روابط تقریبی برای حالتی که t کوچک می‌باشد.



$$A = 2\pi r t = \pi d t \quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8. نیم دایره (مبدأ محورها در مرکز سطح)

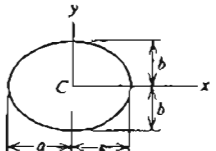


$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

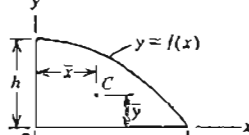
9. بیضی (مبدأ محورها در مرکز سطح)



$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + a^2)$$

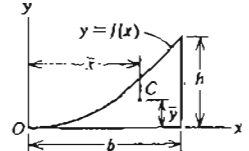
10. سهمی (مبدأ محورها در رأس)



$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

11. سهمی (مبدأ محورها در رأس)



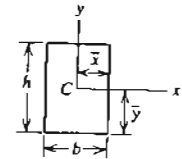
$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{4} \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

ویژگی‌های سطوح

$\bar{x}, \bar{y}$ = فواصل تا مرکز سطح C
 A = مساحت
 I_x, I_y = گشتاورهای لختی نسبت به محورها x و y
 I_{xy} = گشتاور لختی حاصلضرب نسبت به محورها x و y
 $J = I_x + I_y$ = گشتاور لختی قطبی
 I_{BB} = گشتاور لختی نسبت به محور B-B

1. مستطیل (مبدأ محورها در مرکز سطح)

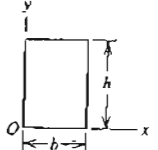


$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

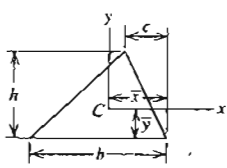
2. مستطیل (مبدأ محورها در گوشه)



$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \quad J = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

3. مثلث (مبدأ محورها در مرکز سطح)

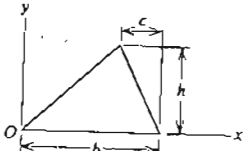


$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{bh}{36} (b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72} (b - 2c) \quad J = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

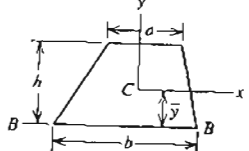
4. مثلث (مبدأ محورها در رأس)



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh}{12} (3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24} (3b - 2c) \quad J = \frac{bh}{12} (h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

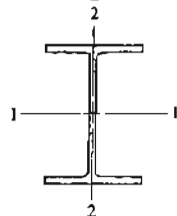
5. دوزنقه (مبدأ محورها در مرکز سطح)



$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \quad I_{yy} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

جدول ۱-۲ ویژگی های مقاطع I عریض بال (مقاطع W)



نوع مقطع	وزن در فوت	مساحت در فوت	ارتفاع مقطع In.	لصفامت بال جان			محور 1-1			محور 2-2		
				عرض	صفامت In.	In.	I	S	r	I	S	r
	Lb	In. ²	In.	In.	In.	In.	In. ⁴	In. ³	In.	In. ⁴	In. ³	In.
W36×300	300	88.3	36.72	16.655	1.680	0.945	20300	1110	15.2	1300	156	3.83
W36×245	245	72.1	36.06	16.512	1.350	0.802	16100	894	15.0	1010	123	3.75
W30×210	210	61.9	30.38	15.105	1.315	0.775	9890	651	12.6	757	100	3.50
W30×172	172	50.7	29.88	14.985	1.065	0.655	7910	530	12.5	598	79.8	3.43
W24×160	160	47.1	24.72	14.091	1.135	0.656	5120	414	10.4	530	75.2	3.35
W24×120	120	35.4	24.31	12.088	0.930	0.556	3650	300	10.2	274	45.4	2.78
W18×114	114	33.5	18.48	11.833	0.991	0.595	2040	220	7.79	274	46.3	2.86
W18×85	85	25.0	18.32	8.838	0.911	0.526	1440	157	7.57	105	23.8	2.05
W16×96	96	28.2	16.32	11.533	0.875	0.535	1360	166	6.93	224	38.8	2.82
W16×50	50	14.7	16.25	7.073	0.628	0.380	657	80.8	6.68	37.1	10.5	1.59
W14×202	202	59.4	15.63	15.750	1.503	0.930	2540	325	6.54	980	124	4.06
W14×103	103	30.3	14.25	14.575	0.813	0.495	1170	164	6.21	420	57.6	3.72
W14×84	84	24.7	14.18	12.023	0.778	0.451	928	131	6.13	225	37.5	3.02
W14×38	38	11.2	14.12	6.776	0.513	0.313	386	54.7	5.88	26.6	7.86	1.54
W12×190	190	55.9	14.38	12.670	1.736	1.060	1890	263	5.82	590	93.1	3.25
W12×106	106	31.2	12.88	12.230	0.986	0.620	931	145	5.46	301	49.2	3.11
W12×72	72	21.2	12.25	12.040	0.671	0.430	597	97.5	5.31	195	32.4	3.04
W12×31	31	9.13	12.09	6.525	0.465	0.265	239	39.5	5.12	21.6	6.61	1.54
W10×112	112	32.9	11.38	10.415	1.248	0.755	719	126	4.67	235	45.2	2.67
W10×72	72	21.2	10.50	10.170	0.808	0.510	421	80.1	4.46	142	27.9	2.59
W10×45	45	13.2	10.12	8.022	0.618	0.350	249	49.1	4.33	53.2	13.3	2.00
W10×25	25	7.36	10.08	5.762	0.430	0.252	133	26.5	4.26	13.7	4.76	1.37
W8×67	67	19.7	9.00	8.287	0.933	0.575	272	60.4	3.71	88.6	21.4	2.12
W8×48	48	14.1	8.50	8.117	0.683	0.405	184	43.2	3.61	60.9	15.0	2.08
W8×40	40	11.8	8.25	8.077	0.558	0.365	146	35.5	3.53	49.0	12.1	2.04
W8×28	28	8.23	8.06	6.540	0.463	0.285	97.8	24.3	3.45	21.6	6.61	1.62

یادداشت: محورها 1-1 و 2-2 محورها اصلی مرکز سطحی می باشند.

پیوست ۲

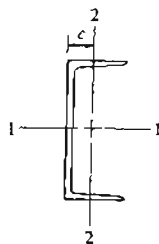
ویژگی های مقاطع استاندارد امریکائی

در این پیوست، ویژگی های چند شکل سازه ای استاندارد امریکائی به طور نمونه داده شده است. علامات بکار رفته در این پیوست عبارتند از:

- I = گشتاور لختی
- S = ضریب مقطع
- r = شعاع ژیراسیون
- A = مساحت مقطع
- $r = \sqrt{I/A}$

۷۴۷

جدول ۲-۳ ویژگی های مقاطع ناودانی (مقاطع C)



نوع مقطع	وزن در فوت	مساحت در فوت	ارتفاع مقطع	بال		ضخامت متوسط	محور 1-1	محور 2-2														
				عرض	ضخامت			I	S	r	I	S	r	c								
															In.	In.	In.	In.	In.	In.	In.	In.
	Lb	In. ²	In.	In.	In.	In.	In. ⁴	In. ³	In.	In. ⁴	In. ³	In.	In.									
C15×50	50.0	14.7	15.00	3.716	0.650	0.716	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.799									
C15×40	40.0	11.8	15.00	3.520	0.650	0.520	349	46.5	5.44	9.23	3.36	0.886	0.778									
C12×30	30.0	8.82	12.00	3.170	0.501	0.510	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674									
C12×20.7	20.7	6.09	12.00	2.942	0.501	0.282	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698									
C10×30	30.0	8.82	10.00	3.033	0.436	0.673	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669	0.649									
C10×20	20.0	5.88	10.00	2.739	0.436	0.379	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.691	0.606									
C8×18.75	18.75	5.51	8.00	2.527	0.390	0.487	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599	0.565									
C8×11.5	11.5	3.38	8.00	2.260	0.390	0.220	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625	0.571									
C6×13	13.0	3.83	6.00	2.157	0.343	0.437	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525	0.514									
C6×8.2	8.2	2.40	6.00	1.920	0.343	0.200	13.1	4.38	2.34	0.692	0.492	0.537	0.512									
C4×7.25	7.25	2.13	4.00	1.721	0.296	0.321	4.59	2.29	1.47	0.432	0.343	0.450	0.459									
C4×5.4	5.4	1.59	4.00	1.584	0.296	0.184	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449	0.458									

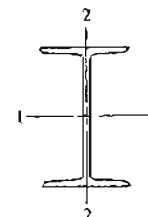
یادداشت :

۱- محوره های ۱-۱ و ۲-۲ محوره های اصلی مرکز سطحی می باشند.

۲- فاصله C از مرکز سطح تا پشت حان نیز اندازه گرفته می شود.

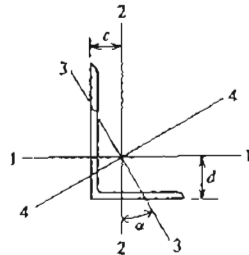
۳- برای محور ۲-۲ ، مقدار S کوچکترین دو مقدار ضریب مقطع حول این محور می باشد.

جدول ۲-۲ ویژگی های مقاطع I (یا S) ۷۴۶



نوع مقطع	وزن در فوت	مساحت در فوت	ارتفاع مقطع	ضخامت بال			محور ۱-۱			محور ۲-۲		
				عرض	ضخامت	جان	I	S	r	I	S	r
	Lb	In. ²	In.	In.	In.	In.	In. ⁴	In. ³	In.	In. ⁴	In. ³	In.
S24×120	120.0	35.3	24.00	8.048	1.102	0.798	3030	252	9.26	84.2	20.9	1.54
S24×105.9	105.9	31.1	24.00	7.875	1.102	0.625	2830	236	9.53	78.2	19.8	1.58
S24×79.9	79.9	23.5	24.00	7.001	0.871	0.501	2110	175	9.47	42.3	12.1	1.34
S18×70	70.0	20.6	18.00	6.251	0.691	0.711	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
S18×54.7	54.7	16.1	18.00	6.001	0.691	0.461	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14
S12×50	50.0	14.7	12.00	5.477	0.659	0.687	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
S12×40.8	40.8	12.0	12.00	5.252	0.659	0.472	272	45.4	4.77	13.6	5.16	1.06
S12×31.8	31.8	9.35	12.00	5.000	0.544	0.350	218	36.4	4.83	9.36	3.74	1.00
S8×23	23.0	6.77	8.00	4.171	0.425	0.441	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
S8×18.4	18.4	5.41	8.00	4.001	0.425	0.271	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
S7×20	20.0	5.88	7.00	3.860	0.392	0.450	42.4	12.1	2.69	3.17	1.64	0.734
S7×15.3	15.3	4.50	7.00	3.662	0.392	0.252	36.7	10.5	2.86	2.64	1.44	0.766
S6×17.25	17.25	5.07	6.00	3.565	0.359	0.465	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
S6×12.5	12.5	3.67	6.00	3.332	0.359	0.232	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
S5×14.75	14.75	4.34	5.00	3.284	0.326	0.494	15.2	6.09	1.87	1.67	1.01	0.620
S5×10	10.0	2.94	5.00	3.004	0.326	0.214	12.3	4.92	2.05	1.22	0.809	0.643
S4×9.5	9.5	2.79	4.00	2.796	0.293	0.326	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
S4×7.7	7.7	2.26	4.00	2.663	0.293	0.193	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581

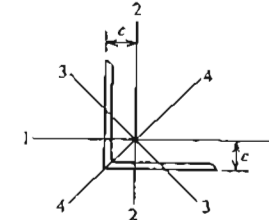
یادداشت : محوره های ۱-۱ و ۲-۲ محوره های اصلی مرکز سطحی می باشند.



نوع مقطع	وزن در فوت	مساحت	محور 1-1				محور 2-2				محور 3-3	
			I	S	r	d	I	S	r	c	r _{min}	Tan α
In.	Lb	In. ²	In. ⁴	In. ³	In.	In.	In. ⁴	In. ³	In.	In.	In.	
L8×6×1	44.2	13.00	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
L8×6×½	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.559
L7×4×½	30.2	8.86	42.9	9.65	2.20	2.55	10.2	3.46	1.07	1.05	0.856	0.318
L7×4×¼	17.9	5.25	26.7	5.81	2.25	2.42	6.53	2.12	1.11	0.917	0.872	0.335
L6×4×½	27.2	7.98	27.7	7.15	1.86	2.12	9.75	3.39	1.11	1.12	0.857	0.421
L6×4×¼	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
L5×3½×½	19.8	5.81	13.9	4.28	1.55	1.75	5.55	2.22	0.977	0.996	0.748	0.464
L5×3½×¼	10.4	3.05	7.78	2.29	1.60	1.61	3.18	1.21	1.02	0.861	0.762	0.486
L5×3×½	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
L5×3×¼	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371
L4×3×½	13.6	3.98	6.03	2.30	1.23	1.37	2.87	1.35	0.849	0.871	0.637	0.534
L4×3×¼	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551

یادداشت :

- ۱- محوره های 1-1 و 2-2 محوره های مرکز سطحی موازی بال های نبشی می باشند.
- ۲- فواصل c و d از مرکز سطح تا پشت بال ها اندازه گرفته می شود.
- ۳- برای محوره های 1-1 و 2-2 ، مقدار S کوچکترین مقدار دو ضریب مقطع حول محوره های مزبور می باشد.
- ۴- محوره های 3-3 و 4-4 محوره های اصلی مرکز سطحی می باشند.
- ۵- گشتاور لختی حول محور 3-3 که کوچکترین مقدار دو گشتاور لختی حول محوره های اصلی می باشد از معادله $I_{33} = A r_{min}^2$ بدست می آید.
- ۶- گشتاور لختی حول محور 4-4 که بزرگترین مقدار دو گشتاور لختی حول محوره های اصلی می باشد از معادله $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$ بدست می آید.

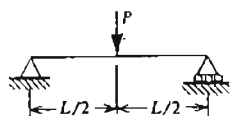


نوع مقطع	وزن در فوت	مساحت	محوره های 1-1 و 2-2				محور 3-3
			I	S	r	c	
In.	Lb	In. ²	In. ⁴	In. ³	In.	In.	In.
L8×8×1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
L8×8×½	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L6×6×1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
L6×6×¼	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
L5×5×½	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973
L5×5×¼	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
L4×4×½	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
L4×4×¼	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
L3½×3½×½	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
L3½×3½×¼	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L3×3×½	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
L3×3×¼	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592

یادداشت :

- ۱- محوره های 1-1 و 2-2 محوره های مرکز سطحی موازی بال های نبشی می باشند.
- ۲- فاصله c از مرکز سطح تا پشت بال ها اندازه گرفته می شود.
- ۳- برای محوره های 1-1 و 2-2 ، مقدار S کوچکترین مقدار دو ضریب مقطع حول محوره های مزبور می باشد.
- ۴- محوره های 3-3 و 4-4 محوره های اصلی مرکز سطحی می باشند.
- ۵- گشتاور لختی حول محور 3-3 که کوچکترین مقدار دو گشتاور لختی حول محوره های اصلی می باشد از معادله $I_{33} = A r_{min}^2$ بدست می آید.
- ۶- گشتاور لختی حول محور 4-4 که بزرگترین مقدار دو گشتاور لختی حول محوره های اصلی می باشد از معادله $I_{44} + I_{33} = I_{11} + I_{22}$ بدست می آید.

4.

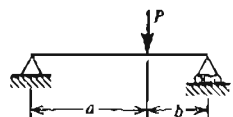


$$v = \frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{P}{16EI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

5.



$$v = \frac{Pbx}{6LEI} (L^2 - b^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

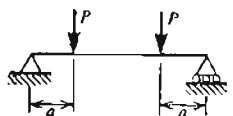
$$v' = \frac{Pb}{6LEI} (L^2 - b^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$a \geq b, \delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$a \geq b, x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad v_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$

6.



$$v = \frac{Px}{6EI} (3aL - 3a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

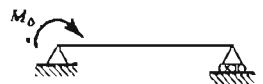
$$v' = \frac{P}{2EI} (aL - a^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa}{6EI} (3Lx - 3x^2 - a^2) \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{Pa}{2EI} (L - 2x) \quad a \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\theta_a = \frac{Pa(L-a)}{2EI} \quad \delta_c = v_{max} = \frac{Pa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$$

7.



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0 L^2}{16EI} \quad \theta_a = \frac{M_0 L}{3EI} \quad \theta_b = \frac{M_0 L}{6EI}$$

$$x_1 = L \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

۷۵۰

پیوست ۳ روابط خیز و شیب تیرها

۱-۳ خیزها و شیب های تیر های ساده

خیز در جهت y

شیب مماسی خیز $v' = \frac{dx}{dv}$

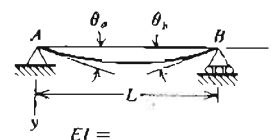
خیز در وسط تیر $\delta_c = v\left(\frac{L}{2}\right)$

فاصله از A تا نقطه خیز ماکزیم x_1

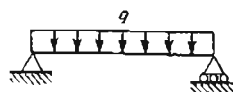
خیز ماکزیم $\delta_{max} = v_{max}$

شیب در انتهای چپ تیر $\theta_a = v'(0)$

شیب در انتهای راست تیر $\theta_b = -v'(L)$



1.

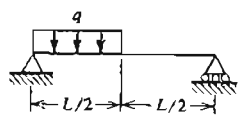


$$v = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = \frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_c = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_a = \theta_b = \frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v = \frac{qx}{384EI} (9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

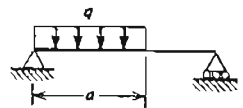
$$v' = \frac{q}{384EI} (9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v = \frac{qL}{384EI} (8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{qL}{384EI} (24x^2 - 48Lx + 17L^2) \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{768EI} \quad \theta_a = \frac{3qL^3}{128EI} \quad \theta_b = \frac{7qL^3}{384EI}$$

3.



$$v = \frac{qx}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

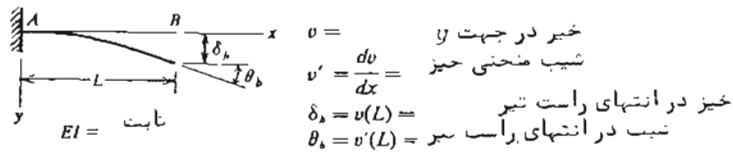
$$v' = \frac{q}{24LEI} (a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{qa^2}{24LEI} (-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \quad a \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{qa^2}{24LEI} (4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \quad a \leq x \leq L$$

$$\theta_a = \frac{qa^2}{24LEI} (a^2 - 4aL + 4L^2) \quad \theta_b = \frac{qa^2}{24LEI} (2L^2 - a^2)$$

۳-۳ خیزها و تیب های بیرهای طره ای



۱.

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_s = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_s = \frac{qL^3}{6EI}$$

۲.

$$v = \frac{qx^2}{24EI} (6a^2 - 4ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{qx}{6EI} (3a^2 - 3ax + x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{qa^3}{24EI} (4x - a) \quad v' = \frac{qa^2}{6EI} \quad a \leq x \leq L$$

$$v = \frac{qa^4}{8EI} \quad v' = \frac{qa^3}{6EI} \quad x = a \text{ در}$$

$$\delta_s = \frac{qa^3}{24EI} (4L - a) \quad \theta_s = \frac{qa^2}{6EI}$$

۳.

$$v = \frac{qx^2}{12EI} (3bL + 3ab - 2bx) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{qbx}{2EI} (L + a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \quad a \leq x \leq L$$

$$v' = \frac{q}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \quad a \leq x \leq L$$

$$v = \frac{qa^2b}{12EI} (3L + a) \quad v' = \frac{qabL}{2EI} \quad x = a \text{ در}$$

$$\delta_s = \frac{q}{24EI} (3L^4 - 4a^3L + a^4) \quad \theta_s = \frac{q}{6EI} (L^3 - a^3)$$

۴.

$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x) \quad v' = \frac{Px}{2EI} (2L - x)$$

$$\delta_s = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_s = \frac{PL^2}{2EI}$$

۸.

$$v = \frac{M_0x}{24LEI} (L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI} (L^2 - 12x^2) \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = 0 \quad \theta_s = \frac{M_0L}{24EI} \quad \theta_b = -\frac{M_0L}{24EI}$$

۹.

$$v = \frac{M_0x}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{M_0a}{3LEI} (3aL - 2a^2 - L^2) \quad x = a \text{ در}$$

$$v' = \frac{M_0}{3LEI} (3aL - 3a^2 - L^2) \quad x = a \text{ در}$$

$$\theta_s = \frac{M_0}{6LEI} (6aL - 3a^2 - 2L^2) \quad \theta_b = \frac{M_0}{6LEI} (3a^2 - L^2)$$

۱۰.

$$v = \frac{q_0x}{360LEI} (7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

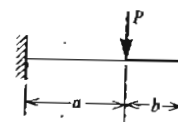
$$v' = \frac{q_0}{360LEI} (7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_c = \frac{5q_0L^4}{768EI} \quad \theta_s = \frac{7q_0L^3}{360EI} \quad \theta_b = \frac{q_0L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0.5193L \quad \delta_{\max} = 0.00652 \frac{q_0L^4}{EI}$$

1. Beer, F.P. and Johnston, E.R., Jr., " Vector Mechanics for Engineers ", 3rd edition, McGraw-Hill Book Co., 1977.
2. Belyayev, N.M., " Problems in Strength of Materials ", Pergamon Press, 1966.
3. Crandall, S.H., Dahl, N.C., and Lardner, T.J., " An Introduction to the Mechanics of Solids ", 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., 1972.
4. Feodosyev, V., " Strength of Materials ", MIR Publishers, 1968.
5. Feodosyev, V.I., " Selected Problems and Questions in Strength of Materials ", MIR Publishers, 1977.
6. Hall, A. and Kabaila, A.P., " Basic Concepts of Structural Analysis ", John Wiley and Sons, 1977.
7. Higdon, A., Stiles, W.B., Davis, A.W., and Evces, C.R., " Engineering Mechanics " 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1976.
8. Johnston, B.G. and Lin, F., " Basic Steel Design ", Prentice-Hall, Inc., 1974.
9. Kinasoshvili, R., " Strength of Materials ", MIR Publishers, 1978.
10. Marshall, W.T., " Solution of Problems in Structures ", 2nd ed., Pitman, 1978.
11. Marshall, W.T. and Nelson, H.M., " Structures ", 2nd ed., Pitman, 1977.
12. Massonnet, C., " Résistance des Matériaux ", DUNOD, 1962.
13. Meriam, J.L., " Statics ", 2nd ed., John Wiley and Sons, 1975.
14. Mirolyubov, I.N. et al, " An Aid to Solving Problems in Strength of Materials ", MIR Publishers, 1977.
15. Morgan, W., " The Elements of Structure ", 2nd ed., Pitman, 1977.
16. Nash, W.A., " Strength of Materials ", 2nd ed.,

5.



$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3a - x) \quad v' = \frac{Px}{2EI} (2a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI} (3x - a) \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \quad a \leq x \leq L$$

$$v = \frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \quad x = a \quad \text{در}$$

$$\delta_b = \frac{Pa^2}{6EI} (3L - a) \quad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$

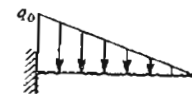
6.



$$v = \frac{M_0 x^2}{2EI} \quad v' = \frac{M_0 x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0 L^2}{2EI} \quad \theta_b = \frac{M_0 L}{EI}$$

7.

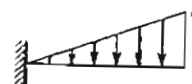


$$v = \frac{q_0 x^2}{120 LEI} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24 LEI} (4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0 L^4}{30 EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{24 EI}$$

8.



$$v = \frac{q_0 x^2}{120 LEI} (20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24 LEI} (8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_b = \frac{11q_0 L^4}{120 EI} \quad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{8 EI}$$