معادله اویلر–لاگرانژ

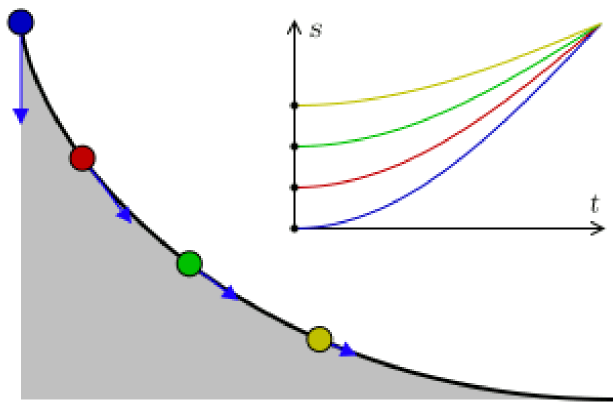
که با) Euler–Lagrange equation) (انگلیسی: به) معادلهٔ اویلر–لاگرانژ ،حساب وردشی در شناخته شده معادله‌ی دیفرانسیل هم شناخته می‌شود.) نام یک معادلهٔ لاگرانژ یا معادلهٔ اویلر نام‌های معین را تعادلی می‌کنند. این تابعی هستند که یک تابع‌هایی است. جواب‌های این معادله‌ی دیفرانسیل، ، ریاضیدانِ ایتالیایی در دههٔ ژوزف لویی لاگرانژ ، ریاضیدانِ سوئیسی ولئونارد اویلر معادلهٔ دیفرانسیل را ۱۷۵۰. میلادی به دست آوردند.

موضعیِ خود تعادلی می‌شود، معادلهٔ بیشینه یا کمینه‌ی از آن‌جایی که یک تابعِ مشتق‌پذیر، در نقطهٔ را حل کنیم و در آن یک بهینه‌سازی اویلر–لاگرانژ، زمانی کاربردی است که بخواهیم مسئله‌ای مربوط به قضیه تابعیِ معین داده شده و می‌خواهیم این تابعی را کمینه یا بیشینه کنیم. این قضیه قابلِ مقایسه با است که می‌گوید یک تابعِ مشتق‌پذیر، در نقطه‌ای اکسترممِ موضعیِ حساب دیفرانسیل و انتگرال در فرما .آن صفر شود مشتق دارد که

کمترین کنش، تغییرهایِ یک سیستمِ فیزیکی با جوابِ اصل همیلتونی ، به خاطرِمکانیک لاگرانژی در ، این اصل معادل مکانیک کلاسیک معادلهٔ اویلر–لاگرانژ برایِ آن رفتارِ آن سیستم توصیف می‌شود. در مختصات است، هر چند که این مزیت را دارد که در هر سیستمی با قانون‌های حرکتِ نیوتون با ،. فرمِ آن تغییر نمی‌کند و در نتیجه برایِ تعمیم دادن بسیار مناسب‌تر استتعمیم‌یافته

محتویات

تاریخچه



چهار نقطه از چهار موقعیتِ مختلف بر رویِ سیکلوئید رها می‌شوند، اما همگی در زمانِ یکسانی به پایینِ آن می‌رسند. پیکان‌هایِ آبی، شتابِ نقطه‌ها را در طولِ منحنی نشان می‌دهد. در بالا، نمودارِ زمان–مکان نمایش داده شده است.

معادله‌ٔ اویلر–لاگرانژ در دهه‌ٔ ۱۷۵۰ میلادی، به وسیله‌ٔ اویلر و لاگرانژ به دست آمد، زمانی که آن‌ها مشغولِ حلِ مسئله‌ٔ خم هم‌زمانی بودند. مسئله‌ٔ منحنی هم‌زمانی درباره‌ٔ این است که چه‌طور می‌توان منحنی‌ای پیدا کرد که اگر از رویِ آن منحنی توپی را رها کنیم، زمانِ رسیدنِ توپ به پایینِ منحنی مقدارِ ثابتی باشد و فرقی نکند که توپ را از چه ارتفاعی از منحنی به پایین رها کرده‌ایم.
لاگرانژ این مسئله را در سال ۱۷۵۵ حل کرد و جواب را برایِ اویلر فرستاد. این دو به کمکِ هم، متدِ لاگرانژ را به کار گرفتند، تلاشی که در نهایت به خلقِ مکانیک گسترش دادند و در حلِ مسئله‌هایِ مکانیک منجر شد. نخستین بار در سالِ حساب وردشی ختم شد. به علاوه مکاتبه‌هایِ آن‌ها، به خلقِ کاملِ لاگرانژی ۱۷٦٦، اویلر بود که این نام را برایِ تکنیک‌های‌شان به کار برد.

صورت معادله

، آن q است که ویژگی این تابع q چون تابعی معادله‌ٔ لاگرانژ، معادله‌ای است که هدفِ حل کردنِ آن، یافتن است اگر در انتگرالِ زیر قرار بگیرد، آن را اکسترمم می‌کند:

$$S(q) = \int_a^b L(t, q(t), q'(t))\,\mathrm{d}t$$

بخش‌هایِ مختلفِ این انتگرال عبارت‌اند از:

- q: تابع‌هایِ مختلفی وجود دارند که می‌توانند در داخلِ انتگرال قرار بگیرند. به ازایِ هر کدام از این تابع‌ها، مقدارِ انتگرال (بینِ دو کرانِ آن که مقدارهایی ثابت‌اند)، مقداری متفاوت می‌شود. q تابعی است که می‌خواهیم بیابیم و مقدارِ انتگرال را اکسترمم کند:

$$q\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$$
$$t \mapsto x = q(t)$$

که q مشتق‌پذیر است و $q(a) = x_a$, $q(b) = x_b$.

- q': مشتقِ تابعِ q است.

$$q'\colon [a,b] \to T_{q(t)}X$$
$$t \mapsto v = q'(t)$$

که TX کلاف مماسی X است. (فضایِ مقدارهایِ ممکنِ مشتق‌هایِ تابع‌هایی که مقدارشان در X قرار دارد.)

- L: تابعی است که مشتق‌های جزئی آن پیوسته‌اند:

$$L\colon [a,b]\times X\times TX\to \mathbb{R}$$
$$(t,x,v)\mapsto L(t,x,v).$$

تابعی است ثابت و معین که به عنوانِ ورودیِ یک تابعِ دلخواهِ دیگر را (به همراهِ مشتقِ آن L تابع) گرفته و ترکیبی از این تابع و مشتق‌اش را به عنوانِ خروجی ارائه می‌کند.

ای که در آن صدق کند، مقدارِ q در این صورت معادلهٔ اویلر-لاگرانژ، معادلهٔ زیر است که هر تابعِ انتگرال را اکسترمم می‌کند:

$$L_x(t,q(t),q'(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_v(t,q(t),q'(t))=0.$$

می‌باشد. q' نسبت به L مشتقِ جزئی L_v و q نسبت به L مشتقِ جزئیِ L_x در رابطهٔ بالا،

مثال

برود و b به نقطهٔ a یک مثالِ استاندارد این است که تابعی پیدا کنید که از نقطهٔ اولین کاری که باید بکنیم، این ($f(a) = c$ و $f(b) = d$). کمترین مسیرِ ممکن را طی کند است که انتگرالی پیدا کنیم که حلِ آن طولِ مسیر را به دست بدهد. به این ترتیب با مشتقِ جزئی گرفتن از انتگرال‌ده، می‌توانیم تابعی که انتگرال را کمینه یا بیشینه می‌کند بیابیم.

$$\ell(f)=\int_a^b dl$$

به شکلِ زیر به دست می‌آید: قضیه فیثاغورس که طولِ یک جزء از مسیر است به کمکِ dl

$$dl^2=dx^2+dy^2$$

با جایگذاریِ آن در انتگرال داریم:

$$\ell(f)=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}$$

فاکتور بگیریم و آن را از زیرِ رادیکال بیرون بیاوریم و به یاد داشته باشیم dx اگر از است، در نهایت رابطهٔ زیر را خواهیم داشت f همان مشتقِ تابعِ dy/dx که:

$$\ell(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$

تابعی است که $L\left(x,y,y'\right)=\sqrt{1+y'^2}$ با توجه به نتیجه‌ی بالا در این مثال ای را y باید از آن انتگرال‌گیری کنیم. حال به کمکِ رابطهٔ اویلر-لاگرانژ باید تابعِ عبارت‌اند از L را کمینه می‌کند. مشتق‌های جزئیِ L پیدا کنیم که انتگرالِ:

$$\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\quad\text{and}\quad\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial y}=0.$$

با جایگذاریِ این دو مقدار در معادلهٔ اویلر-لاگرانژ، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = 0$$
$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = C = \text{constant}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} := A$$
$$\Rightarrow f(x) = Ax + B$$

به عبارت دیگر، ثابت کردیم که کوتاه‌ترین مسیر ممکن بینِ دو نقطه، خطِ راستی است که از این دو می‌گذرد.

کاربرد در مکانیک کلاسیک

روش پایه

برای اینکه معادله‌ی حرکت را برای یک سیستم معین (که انرژی پتانسیل آن غیروابسته به زمان است.) به دست آوریم، به کمک این معادله می‌توانیم از این روش بهره ببریم:

- ابتدا به کمک انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V لاگرانژین را حساب کنیم $L = T - V.$
- طبق اصل همیلتون باشد انتگرال زیر که انتگرال لاگرانژی است باید مینیمم باشد.:

$$S(q) = \int_a^b L(t, q(t), q'(t))\,\mathrm{d}t$$

می‌دانیم که این انتگرال زمانی مینیمم می‌شود که معادله‌ی اویلر–لاگرانژ برقرار باشد.

- $\frac{\partial L}{\partial q}$ را محاسبه نماییم.
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ را بیابیم. مهم است که $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ را محاسبه کنیم و به کمک آن $\dot{q}$ با همچون یک تابع مستقل برخورد کنیم نه همچون مشتق یک تابع دیگر.
- $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ را به دست می‌آوریم که همان معادله‌ی اویلر–لاگرانژ است.

ذره در میدان نیروی پاستار

حرکت یک ذره‌ی منفرد تحت میدانِ یک نیروی پایستار (مثلاً تحتِ نیروی گرانش) به کمک اصل همیلتون معین می‌شود که می‌گوید در هر حرکت

همواره کمینه خواهد بود. رابطه‌ی کنش برای سیستم تک‌ذره‌ای کنش فیزیکی، فعلی عبارت است از:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\, \mathrm{d}t$$

نمادگذاری است و نقطه‌ی بالای یک متغیر از t مکان ذره در زمان t ($\mathbf{x}(t)$) که به دست آمده و منظور از آن مشتق زمانی یک متغیر است. به عبارت نیوتون است. در معادله‌ی t ($\mathbf{v}(t)$) نشان‌دهنده‌ی همان سرعت t ($\dot{\mathbf{x}}(t)$) دیگر

انرژی و انرژی جنبشی است (تفاضل لاگرانژین نشان‌دهنده‌ی L بالا که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (پتانسیل:

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} v_i^2 - U(\mathbf{x}),$$

که در آن:

- ثابت فرض می‌شود ماده است که در مکانیک کلاسیک جرم m.
- در دستگاه مختصات دکارتی است. (از $\mathbf{v}$ اُم بردار سرعت-i مولفه‌ی v_i همین نمادگذاری برای مولفه‌های بردارهای دیگر هم استفاده می‌شود.)
- پتانسیل نیروهای پایستار است U.

محسوب نمی‌شود. (t) در این حالت، لاگرانژین تابع صریح آرگومان اول خود ناشی قانون‌های پایستگی ، چنین تقارنی در سیستم از قضیه‌ی نودر بنا به پایستگی می‌شود. به شکلِ خاص، عدم وابستگی لاگرانژین به زمان، را نتیجه می‌دهد انرژی.

اگر از لاگرانژین بالا، مشتق پاره‌ای بگیریم خواهیم داشت:

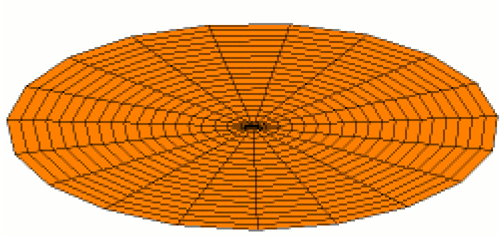
$$\frac{\partial L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial x_i} = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \frac{\partial L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial v_i} = m v_i = p_i,$$

انرژی پتانسیل) که از گرادیان منفی $\mathbf{F} = -\nabla U$ که نیرو برابر است با می‌باشد. با این تکانه $\mathbf{p}$ تعریف انرژی پایستار نتیجه می‌شود و جایگذاری‌ها در معادله‌ی اویلر لاگرانژ، در نهایت به یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم برای مسیر حرکت ذره می‌رسیم:

$$F_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m \dot{x}_i(t) = m \ddot{x}_i(t),$$

است. به عبارت دیگر معادله‌ی اویلر- قانون دوم نیوتون که صورت‌بندی لاگرانژ، صورت‌بندی دیگری برای معادله‌ی دوم حرکت نیوتون است.

اثبات معادله در یک بعد



نمونه‌ای از اختلال سه‌بعدی که در آن ضمن حفظ وضعیت تابع در مرزها، وضعیت آن در قسمت‌های دیگر تغییر می‌کند.

اثباتِ حالت یک‌بعدی معادله‌ی اویلر-لاگرانژ یکی از اثبات‌های کلاسیک در تاریخ ریاضیات است. این اثبات مبتنی بر لم بنیادین حساب وردشی است. می‌خواهیم تابع‌ای همچون f را بیابیم که دارای این دو ویژگی باشد:

1. در شرایط مرزی معین روبه‌رو صدق کند: $f(a)=A$ و $f(b)=B$
2. تابعی زیر را اکسترمم کند:

$$J=\int_a^b F(x,f(x),f'(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

به علاوه فرض می‌کنیم که F دارای مشتق‌های مرتبه‌ی اول پیوسته باشد. (می‌شد این فرض را در نظر نگرفت و تنها مشکلی که پیش می‌آید، آن است که اثبات دشوارتر می‌شود.)

اگر f با حفظ شرایط مرزی، تابعیِ فوق را اکسترمم کند، پس هر اختلال کوچک در f در نقطه‌های غیرمرزی حتی به f یعنی تغییر کردن مقدار f) باعث می‌شود که مقدار J کوچک) یا کمتر شود (اگر f مینیمم‌کننده بوده باشد) یا زیادتر (اگر f ماکسیمم‌کننده بوده باشد).

فرض کنیم تابعی که از اختلال روی f ایجاد می شود به این فرم باشد: $g_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon\eta(x)$ که ε عددی ثابت با مقداری کوچک است و $\eta(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است که اگر بخواهد شرایط مرزی f را تغییر ندهد، لزوماً باید در این شرط صدق کند: $\eta(a)=\eta(b)=0$. حال تعریف می‌کنیم:

$$J_\varepsilon=\int_a^b F(x,g_\varepsilon(x),g_\varepsilon'(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^b F_\varepsilon\,\mathrm{d}x$$

که در آن: $F_\varepsilon=F(x,\,g_\varepsilon(x),\,g_\varepsilon'(x))$. حال آنچه که باید محاسبه کنیم، مشتق کل J_ε نسبت به ε است.

$$\frac{\mathrm{d}J_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_a^b F_\varepsilon \,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}F_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\,\mathrm{d}x$$

از قاعده‌های مشتق تام داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}g_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g_\varepsilon} + \frac{\mathrm{d}g'_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g'_\varepsilon} \\ &= \frac{\mathrm{d}g_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g_\varepsilon} + \frac{\mathrm{d}g'_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g'_\varepsilon} \\ &= \eta(x)\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g_\varepsilon} + \eta'(x)\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g'_\varepsilon}\ .\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{\mathrm{d}J_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon} = \int_a^b \left[\eta(x)\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g_\varepsilon} + \eta'(x)\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial g'_\varepsilon}\right]\mathrm{d}x\ .$$

اگر $\varepsilon = 0$ در این صورت $g_\varepsilon = f$ ، $F_\varepsilon = F(x, f(x), f'(x))$ باشد، و J_ε دارای مقدار اکسترمم می‌باشد:

$$\left.\frac{\mathrm{d}J_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial f} + \eta'(x)\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\mathrm{d}x = 0\ .$$

برای جمله‌ی دوم انتگرال‌گیری جزء به جزء در گام بعدی از انتگرال‌ده بهره می‌بریم و خواهیم داشت:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\eta(x)\,\mathrm{d}x + \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial f'}\right]_a^b = 0\ .$$

خواهیم $\eta(a) = \eta(b) = 0$ به کمک شرط‌های مرزیِ داشت:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

به سادگی لم بنیادین حساب وردشی و حال بهره‌گیری از نتیجه‌ی دلخواهِ ما را به دست می‌دهد:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0\ .$$