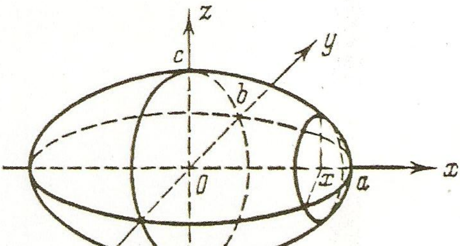
ریاضیات عمومی

جلد دوم

مولف :

ایساک مارون

شامل : ✓ خلاصه مباحث ✓ ۴۰۰ مسئلهٔ حل شده



ترجمه : دکتر خلیل پارياب

هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

General Mathematics

2nd Volume

Author:
J.A. Maron

Translator:
Dr. Khalil Paryab

کتاب حاضر علاوه بر اینکه از منابع مهم ریاضیات عمومی یک میباشد. با توجه به شهود و حل مسائل متعدد، مهارتهای صحیح بکار بردن مفاهیم ریاضی را تقویت می کند و رابطه تنگاتنگ علوم ریاضی و مهندسی را نشان میدهد.

انتشارات پارياب

ریاضیات عمومی

جلد دوم

تألیف ایساك مارون

ترجمه : خلیل پاریاب

عضو هیئت علمی دانشگاه علم وصنعت ایران

فهرست

عنوان صفحه

عنوان	صفحه

بنام خدا

مقدمه:

جلد اول کتاب «**ریاضیات عمومی**» در اواخر سال ٦٥ به چاپ رسید و با استقبال بی نظیری مواجه شد به طوری که در کمتر از دو ماه تمام نسخ آن به اتمام رسید. بر آن شدم جلد دوم را هر چه سریعتر آماده چاپ سازم.

از طرفی به خاطر این که این مجموعه شامل تمام مطالب و سر فصلهای درس ریاضیات عمومی ۱ باشد لازم دیدم که مبحث سریها و اعداد مختلط را به کتاب اضافه نمایم. برای ایجاد رابطه منطقی بین سایر مباحث کتاب و این دو مبحث، تصمیم گرفتم مبحث سریها را در یک فصل اضافه نمایم. همچنین برای بالا بردن کیفیت این کتاب حدود ۵۰۰ مسئله سودمند دیگر نیز در لابلای مطالب جلد دوم گنجانده شده است.

این کتاب با انتگرالهای نامعین شروع می شود و سپس به انتگرالهای معین و کاربردهای آن می رسد و بالاخره مبحث انتگرالهای غیر عادی مطرح می گردد و آنگاه به بحث درباره سریهای نامتناهی منتهی می گردد.

همانند جلد اول هر فصلی با خلاصه مباحث شروع شده و سپس حل چند مسئله متنوع آمده و آنگاه مسائل مشابه برای حل داده شده است.

این کتاب غیر از مبحث سریها (که آنهم رابطه تنگاتنگی با انتگرالها دارد)، تماماً انتگرالها را مورد بحث قرار می دهد که می توان گفت اغلب روشهای جامع انتگرالگیری را در بردارد و انتگرال معین با آن همه کاربردهای متنوع مورد بحث قرار می گیرد.

خواننده خود می داند که انتگرالها در ریاضیات رُل اساسی را بازی می کنند و در تمام مسائل مهندسی نقش تعیین کننده دارند. موفقیت یک دانشجوی مهندسی یا علوم در ریاضیات در گرو مهارت و تبحر او در روشهای انتگرالگیری دارد. به اعتقاد اینجانب، این کتاب می تواند این مهارت را در خواننده ایجاد نماید و راه را برای موفقیت او در سایر مباحث ریاضی هموار سازد.

در خاتمه از همسرم به خاطر تشریک مساعی صمیمانه اش در تنظیم فرمولها سپاسگزارم و از کارکنان قسمت «کامپ سِت» انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران نیز به خاطر حروفچینی فارسی کمال تشکر را دارم. از خوانندگان عزیز انتظار دارد هر نظر اصلاحی که داشته باشند اطلاع دهند تا در چاپهای بعدی در نظر گرفته شود.

خلیل پاریاب
گروه ریاضیات کاربردی و کامپیوتر
دانشگاه علم و صنعت ایران
اردیبهشت ١٣٦٦

فصل چهارم

روشهای بنیادی انتگرالگیری

۱ـ ٤ انتگرالگیری و روش تعمیم

در انتگرالگیری مستقیم، از جدول انتگرالها که شامل دستورهای اساسی انتگرالگیری است استفاده می کنیم:

(1) $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1);$

(2) $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C;$

(3) $\int a^u\,du=\frac{1}{\ln a}a^u+C; \qquad \int e^u\,du=e^u+C;$

(4) $\int \cos u\,du=\sin u+C; \qquad \int \sin u\,du=-\cos u+C;$

(5) $\int \cosh u\,du=\sinh u+C; \qquad \int \sinh u\,du=\cosh u+C;$

(6) $\int \frac{du}{\cos^2 u}=\tan u+C; \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u}=-\cot u+C;$

(7) $\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cot}\frac{u}{a}+C_1 \quad (a>0);$

(8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C=-\arccos\frac{u}{a}+C_1 \quad (a>0);$

(9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left(u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right)+C;$

(10) $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$

در این دستورها u یا متغیر مستقل است و یا تابعی مشتقپذیر از متغیر مستقل دیگری است.

اگر

$$\int f(u)\,du=F(u)+C,$$

آنگاه

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

خاصیت خطی بودن انتگرالها به صورت زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)\,dx \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|>0\right).$$

۱ــ۱ــ٤ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I=\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

حل

$$I=\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx=\int (x^{3/2}+5x^{1/2}-x^{-1/2})\,dx=$$
$$=\int x^{3/2}\,dx+5\int x^{1/2}\,dx-\int x^{-1/2}\,dx=$$
$$=\frac{2x^{5/2}}{5}+C_1+\frac{5\cdot 2}{3}x^{3/2}+C_2-2x^{1/2}+C_3=$$
$$=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5x}{3}-1\right)+C.$$

تذکر. لازم نیست که در محاسبهٔ هر انتگرال یک مقدار ثابت به جواب آن اضافه کنیم (همان طوری که در مثال بالا دیدیم) چون مجموع چند مقدار ثابت، یک مقدار ثابت است. لذا فقط یک مقدار ثابت بعد از حل آخرین انتگرال به جواب اضافه می کنیم.

۲ــ۱ــ٤

$$I=\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}\,dx.$$

جواب:

$$I=x^3+x^2+0.5\ln|2x-1|+C.$$

۳ــ۱ــ٤

$$I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

حل. انتگران را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

پس

$$I=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\tan x-\cot x+C.$$

۴ـ۱ـ۴

$$I=\int \tan^2 x\,dx.$$

حل . چون $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ ، بنابر این

$$I=\int \tan^2 x\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\tan x-x+C.$$

۴ـ۱ـ۵

$$I=\int (x^2+5)^3\,dx.$$

حل . انتگران را با استفاده از دستور دو جمله ای، بسط می دهیم

$$I=\int (x^6+15x^4+75x^2+125)\,dx=\frac{x^7}{7}+\frac{15x^5}{5}+\frac{75x^3}{3}+125x+C.$$

۴ـ۱ـ۶

$$I=\int (3x+5)^{17}\,dx.$$

حل . چون $u=3x+5$ تابعی خطی است، پس معقول نیست که از بسط دو جمله ای استفاده کنیم و آن را به قوهٔ ۱۷ برسانیم . با توجه به جدول انتگرالها داریم :

$$\int u^{17}\,du=\frac{u^{18}}{18}+C,$$

از آنجا

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^{18}}{18}+C.$$

۴ـ۱ـ۷

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

جواب :

$$I=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

۴ـ۱ـ۸

$$I=\int\cos(\pi x+1)\,dx.$$

حل . با توجه به فرمول **(۴)** از جدول انتگرالها، داریم

$$\int\cos u\,du=\sin u+C,$$

پس

$$I=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1)+C.$$

۹ــ۱ــ٤

$$I=\int \cos 4x \cos 7x\, dx.$$

حل . توصیه می شود در حل چنین انتگرالهایی از دستورهای مثلثاتی استفاده گردد.

$$\cos 4x \cos 7x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{2}\int \cos 3x\, dx+\frac{1}{2}\int \cos 11x\, dx=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C.$$

تذکر. در حل چنین انتگرالهایی از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می کنیم

$$\sin mx \cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x];$$
$$\sin mx \sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$$
$$\cos mx \cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x].$$

۱۰ــ۱ــ٤

$$I=\int \cos x \cos 2x \cos 5x\, dx.$$

حل . داریم

$$(\cos x \cos 2x)\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 3x)\cos 5x=$$
$$=\frac{1}{4}[\cos 4x+\cos 6x]+\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 8x).$$

از آنجا

$$I=\frac{1}{4}\left[\int \cos 2x\, dx+\int \cos 4x\, dx+\int \cos 6x\, dx+\int \cos 8x\, dx\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{32}\sin 8x+C.$$

۱۱ــ۱ــ٤

$$I=\int \sin^2 3x\, dx.$$

حل . چون

$$\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2},$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)\, dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C.$$

۱۲ـ۱ـ٤

$$I=\int \cosh^2(8x+5)\,dx.$$

حــــل . چـــون

$$\cosh^2 u=\frac{\cosh 2u+1}{2},$$

پس

$$I=\frac{1}{2}\int[1+\cosh(16x+10)]\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{32}\sinh(16x+10)+C.$$

۱۳ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}\cdot$$

حــــل .

$$I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\operatorname{arc\,tan}(x+2)+C.$$

۱٤ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{4x^2+25}\cdot$$

جواب: $I=\frac{1}{10}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x}{5}+C.$

۱۵ـ۱ـ٤ $\quad I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}\cdot$

جواب: $I=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

۱٦ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}\cdot$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{4/9-x^2}}=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sin}\frac{3x}{2}+C.$$

۱۷ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}\cdot$$

حل .

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{x+2}{3}+C.$$

۱۸ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}\cdot$$

جواب: $I=\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}|+C.$

۱۹ـ۱ـ٤

$$I=\int\frac{dx}{4-x^2-4x}\cdot$$

حل .

$$I=\int \frac{dx}{4-x^2-4x}=\int \frac{dx}{8-(x+2)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)}\right|+C.$$

۲۰ـ۱ـ۴

$$I=\int \frac{dx}{10x^2-7}\,.$$

جواب: $I=\frac{1}{2\sqrt{70}}\ln\left|\frac{\sqrt{10}x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}x+\sqrt{7}}\right|+C.$

۲۱ـ۱ـ۴ انتگرالهای زیر را حساب کنید

(a) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$; (b) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

(c) $\int \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx$; (d) $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

جواب :

(a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}+C$; (b) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$; (c) $3\tan x+$ $+2\cot x+C$; (d) $-\frac{2}{x}+\arctan x+C.$

۲۲ـ۱ـ۴ انتگرالهای زیر را حساب کنید :

(a) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; (b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;

(c) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; (d) $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)\,dx.$

جواب :

(a) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arcsin x+C$; (b) $\sin x-\cos x+C$;
(c) $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}+C$; (d) $-0.2\cos 5x-x\sin 5\alpha+C.$

۲۳ـ۱ـ۴ انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

1. $\int 5a^2x^6dx.$ جواب : $\frac{5}{7}a^2x^7$
2. $\int (6x^2+8x+3)\,dx.$ // $2x^3+4x^2+3x.$
3. $\int x(x+a)(x+b)\,dx.$ // $\frac{x^4}{4}+\frac{(a+b)x^3}{3}+\frac{abx^2}{2}.$
4. $\int (a+bx^3)^2\,dx.$ // $a^2x+\frac{abx^4}{2}+\frac{b^2x^7}{7}.$
5. $\int \sqrt{2px}\,dx.$ // $\frac{2x}{3}\sqrt{2px}.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$ // $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}.$
7. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx.$ // $\sqrt[n]{nx}.$

8. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$ جواب: $a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}.$

9. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx.$ 〃 $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x.$

10. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$ 〃 $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x}.$

11. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx.$ 〃 $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}.$

12. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx.$ 〃 $2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+7}.$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}}$

14. $\int \frac{dx}{x^2-10}.$ 〃 $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right|.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 〃 $\ln (x + \sqrt{4+x^2}).$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$ 〃 $\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}}$

17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx.$ 〃 $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln (x + \sqrt{x^2+2}).$

18. a) $\int \tan^2 x\, dx;$ 〃 a) $\tan x - x.$

راهنمائی ــ فرض کنید $\tan^2 x = \sec^2 x - 1;$

b) $\int \tanh^2 x\, dx.$ جواب: b) $x - \tanh x.$

راهنمائی ــ فرض کنید $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$

19. a) $\int \cot^2 x\, dx;$ جواب: a) $-\cot x - x;$

b) $\int \coth^2 x\, dx.$ b) $x - \coth x.$

20. $\int 3^x e^x dx.$ 〃 $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1}.$

۲ــ٤ انتگرالگیری بکمک تغییر متغیر

درحل انتگرالها با روش تغییر متغیر، به جای x تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $\varphi(t)$ را قرار می دهیم، یعنی

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

بعد از حل، براساس تابع معکوس، بجای t نسبت به x قرار می دهیم، یعنی

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

از فرمول فوق به صورت زیر هم، می توان استفاده کرد:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx,$$

که در آن $x = \varphi(t)$

۱ـ۲ـ٤ $I = \int x\sqrt{x-5}\,dx.$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\sqrt{x-5} = t.$$

از آنجا

$$x-5 = t^2, \quad x = t^2+5, \quad dx = 2t\,dt.$$

انتگرال به صورت زیر در می آید

$$I = \int (t^2+5)\,t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+5t^2)\,dt = 2\,\frac{t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C.$$

به جای t نسبت به x ، مقدار می گذاریم

$$I = \frac{2\,(x-5)^{5/2}}{5} + \frac{10\,(x-5)^{3/2}}{3} + C.$$

۲ـ۲ـ٤ $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$

حل . با توجه به تغییر متغیر $1+e^x = t$ داریم:

$$e^x = t-1, \quad x = \ln(t-1), \quad dx = dt/(t-1)$$

این مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t\,(t-1)}$$

چون

$$\frac{1}{t\,(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t},$$

نابراین

$$I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} = \ln|t-1| - \ln|t| + C.$$

با توجه به رابطهٔ بین t و x داریم:

$$I=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C=x-\ln(1+e^x)+C.$$

توجه . این انتگرال را می‌توان به صورت زیر، با ضرب صورت و مخرج به e^{-x} حل کرد:

$$\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln(e^{-x}+1)+C=$$
$$=-\ln\frac{e^x+1}{e^x}=x-\ln(e^x+1)+C.$$

۴ــ۲ــ۳

$$I=\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}\,dx.$$

جواب :

$$I=\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3}+\frac{5}{2}\sqrt{2x-5}-\frac{37}{4\sqrt{2x-5}}+C.$$

۴ــ۲ــ۴

$$I=\int\frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\operatorname{arc\,tan}\dfrac{x^2+1}{x}}.$$

حل . انتگرال را به صورت زیر تغییر شکل می دهیم:

$$I=\int\frac{(1-1/x^2)\,dx}{[(x+1/x)^2+1]\operatorname{arc\,tan}(x+1/x)}.$$

و با توجه به تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$ داریم

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$$

از آنجا

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+1)\operatorname{arc\,tan}t}$$

دوباره تغییر متغیر $\operatorname{arc\,tan}t=u$ را بکار می بریم، بنابر این

$$\frac{dt}{t^2+1}=du$$

و

$$I=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

جواب را نخست نسبت به t و پس از آن نسبت به x می نویسیم:

$$I=\ln|\operatorname{arc\,tan}t|+C=\ln\left|\operatorname{arc\,tan}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|+C.$$

۴ــ۲ــ۵

$$I=\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx$$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

پس

$$I = -\int \frac{\sqrt{a^2 - 1/t^2}}{(1/t^4)\, t^2}\, dt = -\int t \sqrt{a^2 t^2 - 1}\, dt.$$

دوباره از تغییر متغیر استفاده می کنیم :

$$\sqrt{a^2 t^2 - 1} = z. \quad ، \quad 2a^2 t\, dt = 2z\, dz$$

و

$$I = -\frac{1}{a^2} \int z^2\, dz = -\frac{1}{3a^2} z^3 + C.$$

و بالاخره

$$I = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 x^3} + C.$$

۴ـ۲ـ۶

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

حل .

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

با توجه به تغییر متغیر

$$\frac{a}{b} \tan x = t; \quad dt = \frac{a}{b} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

داریم

$$I = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \arctan t + C.$$

حال جواب را نسبت به x می نویسیم :

$$I = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C.$$

۴ـ۲ـ۷

$$I = \int \sqrt[3]{1 + 3\sin x}\, \cos x\, dx.$$

حل . تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1 + 3\sin x = t.\ 3\cos x\, dx = dt$$

از آنجا

$$I = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{1}{3} \int t^{1/3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} t^{4/3} + C = \frac{(1 + 3\sin x)^{4/3}}{4} + C$$

۴ـ۲ـ۸

$$I = \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

جواب : $I = -2\sqrt{\cos x} + C.$

۴ــ۲ــ۹ $I=\int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}$

حل . به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\arccos x = t;\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt.$$

پس

$$I=-\int \frac{dt}{t^5} = -\int t^{-5}\,dt = \frac{1}{4}t^{-4}+C = \frac{1}{4\arccos^4 x}+C.$$

۴ــ۲ــ۱۰ $I=\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx$ **جواب:** $I=\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$

۴ــ۲ــ۱۱ $I=\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

حل . با توجه به تغییر متغیر $1+\sin^2 x=t$ داریم :

$$2\sin x\cos x\,dx = \sin 2x\,dx = dt.$$

$$I=\int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1+\sin^2 x)+C.$$

۴ــ۲ــ۱۲ $I=\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx$

حل . فرض می کنیم

$$3+x\ln x = t,$$

از آنجا داریم :

$$(1+\ln x)\,dx = dt$$

$$I=\int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|3+x\ln x|+C.$$

۴ــ۲ــ۱۳ . انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

(a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$; (b) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

(c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; (d) $\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2}\,dx$;

(e) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; (f) $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$.

جواب

(a) $0.75\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$; (b) $\ln|\ln x|+C$; (c) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$;
(d) $\frac{1}{na}\arctan\frac{x^n}{a}+C$; (e) $-2\cos\sqrt{x}+C$; (f) $\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln|\ln x|+C$.

۱۴ــ۲ــ۴ . انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

(a) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx$; (b) $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(c) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx$; (d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

جواب

(a) $-\frac{3}{140}(35-40x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$;

(b) $\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}+C$;

(c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$;

(d) $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C$.

۱۵ ـ ۲ ـ ۴ انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید :

1 . $\int \frac{a\, dx}{a-x}$. **جواب:** $a \ln\left|\frac{c}{a-x}\right|$

حل ــ

$$\int \frac{a}{a-x} dx = -a\int \frac{d(a-x)}{a-x} = -a\ln|a-x| + a\ln c = a\ln\left|\frac{c}{a-x}\right|.$$

2 . $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$. **جواب:** $x+\ln|2x+1|$.

حل ــ $\frac{2x+3}{2x+1} = 1+\frac{2}{2x+1}$.

از آنجا

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int dx + \int \frac{2\, dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x+\ln|2x+1|.$$

3. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$. **جواب:** $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln|3+2x|$.

4. $\int \frac{x\, dx}{a+bx}$. // $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|$.

5. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta} dx$. // $\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x+\beta|$.

6. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$. // $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|$.

7. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$. // $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+3|$.

8. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$. // $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|$.

9. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx.$ جواب: $a^2x+2ab\ln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}.$

10. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx.$ 〃 $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}.$

راهنمائی:

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

11. $\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}.$ جواب: $-2b\sqrt{1-y}.$

12. $\int \sqrt{a-bx}\,dx.$ 〃 $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}.$

13*. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ 〃 $\sqrt{x^2+1}.$

حل ــ

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}.$$

14. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$ جواب: $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}.$

15. $\int \frac{dx}{3x^2+5}.$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan x\sqrt{\frac{3}{5}}.$

16. $\int \frac{dx}{7x^2-8}.$ 〃 $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|.$

17. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0<b<a).$ 〃 $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|.$

18. $\int \frac{x^2}{x^2+2}dx.$ 〃 $x-\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}.$

19. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}dx.$ 〃 $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right).$

20. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx.$ 〃 $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\arctan\frac{x}{2}.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}.$ 〃 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2}).$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin x\sqrt{\frac{5}{7}}.$

23. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx.$ 〃 $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$

24. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx.$ 〃 $\frac{3}{\sqrt{35}}\arctan\sqrt{\frac{5}{7}}x-\frac{1}{5}\ln(5x^2+7).$

25. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$ 〃 $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1}).$

26. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$ جواب: $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|.$

27. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}.$ 〃 $\frac{1}{2}\ln|x^2-5|.$

28. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}.$ 〃 $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3).$

29. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx.$ 〃 $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac{1}{a}\arctan\frac{ax}{b}.$

30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$ 〃 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}.$

31. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx.$ 〃 $\frac{1}{3}\arctan x^3.$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}.$ 〃 $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}|.$

33. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$ 〃 $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}.$

34. $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx.$ 〃 $\frac{\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2}{4}.$

35. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx.$ 〃 $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-\frac{\sqrt{(\arctan 2x)^3}}{3}.$

36. $\int \sqrt{\frac{dx}{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}.$ 〃 $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}.$

37. $\int ae^{-mx}dx.$ 〃 $-\frac{a}{m}e^{-mx}.$

38. $\int 4^{2-3x}dx.$ 〃 $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}.$

39. $\int (e^t-e^{-t})dt.$ 〃 $e^t+e^{-t}.$

40. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx.$ 〃 $\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}.$

41. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx.$ 〃 $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x.$

42. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx.$ 〃 $\frac{2}{3\ln a}\sqrt{a^{3x}}+\frac{2}{\ln a\sqrt{a^x}}.$

43. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx.$ 〃 $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}.$

44. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$ 〃 $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}.$

45. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ 〃 $-e^{\frac{1}{x}}.$

46. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. جواب $\frac{2}{\ln 5} 5^{\sqrt{x}}$.

47. $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$. // $\ln |e^x - 1|$.

48. $\int e^x \sqrt{a - be^x}\, dx$. // $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a-be^x)^3}$.

49. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}} dx$. // $\frac{3a}{4}(e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{4}{3}}$.

50. $\int \frac{dx}{2^x+3}$. // $\frac{x}{3} - \frac{1}{3\ln 2} \ln (2^x+3)$.

راهنمائی:

$$\frac{1}{2^x+3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^x}{2^x+3}\right).$$

51. $\int \frac{a^x\, dx}{1+a^{2x}}$. جواب $\frac{1}{\ln a} \arctan (a^x)$.

52. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx$. // $-\frac{1}{2b} \ln \left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$.

53. $\int \frac{e^t\, dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$. // $\arcsin e^t$.

54. $\int \sin (a+bx)\, dx$. // $-\frac{1}{b} \cos (a+bx)$.

55. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx$. // $\sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$.

56. $\int (\cos ax + \sin ax)^2\, dx$. // $x - \frac{1}{2a} \cos 2ax$.

57. $\int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. // $2 \sin \sqrt{x}$.

58. $\int \sin (\lg x) \frac{dx}{x}$. // $-\ln 10 \times \cos (\log x)$.

59. $\int \sin^2 x\, dx$. // $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

راهنمائی —

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

60. $\int \cos^2 x\, dx$. جواب $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$.

61. $\int \sec^2 (ax+b)\, dx$. // $\frac{1}{a} \tan (ax+b)$.

62. $\int \cot^2 ax\, dx$. // $-\frac{\cot ax}{a} - x$.

63. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{a}}$. // $a \ln \left|\tan \frac{x}{2a}\right|$.

64. $\int \frac{dx}{3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$. // $\frac{1}{15} \ln \left|\tan \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|$.

65. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$. جواب $\frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax+b}{2}\right|$.

66. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. // $\frac{1}{2}\tan(x^2)$.

67. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$. // $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$.

68. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2 dx$. // $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|\tan\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$.

69. $\int \tan x\,dx$. // $-\ln|\cos x|$.

70. $\int \cot x\,dx$. // $\ln|\sin x|$.

71. $\int \cot\frac{x}{a-b}\,dx$. // $(a-b)\times\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$.

72. $\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{5}}$. // $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|$.

73. $\int \tan\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. // $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$.

74. $\int x\cot(x^2+1)\,dx$. // $\frac{1}{2}\ln\times|\sin(x^2+1)|$.

75. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$. // $\ln|\tan x|$.

76. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}\,dx$. // $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{a}$.

77. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$. // $\frac{\sin^4 6x}{24}$.

78. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$. // $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}$.

79. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$. // $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$.

80. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}\,dx$. // $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$.

81. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$. // $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$.

82. $\int \tan^3\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}\,dx$. // $\frac{3}{4}\tan^4\frac{x}{3}$.

83. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$. // $\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}$.

84. $\int \frac{\cot^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}\,dx$. // $-\frac{3\cot^{\frac{5}{3}} x}{5}$.

85. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx$. // $\frac{1}{3}\left(\tan 3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$.

86. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}\,dx$. // $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax\right)$.

87. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\cot 3x}\,dx$. // $\frac{1}{3a}\ln|b-a\cot 3x|$.

88. $\int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x)\,dx.$ جواب $\frac{2}{5}\cosh 5x - \frac{3}{5}\sinh 5x.$

89. $\int \sinh^2 x\,dx.$ // $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x.$

90. $\int \frac{dx}{\sinh x}.$ // $\ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right|.$

91. $\int \frac{dx}{\cosh x}.$ // $2\arctan e^x.$

92. $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}.$ // $\ln|\tanh x|.$

93. $\int \tanh x\,dx.$ // $\ln\cosh x.$

94. $\int \coth x\,dx.$ // $\ln|\sinh x|.$

95. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx.$ // $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}.$

96. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx.$ // $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|.$

97. $\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx.$ // $\frac{1}{4\sqrt{5}} \times \arctan \frac{x^4}{\sqrt{5}}.$

98. $\int xe^{-x^2}\,dx.$ // $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$

99. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx.$ // $\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}).$

100 $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx.$ // $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1|.$

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}.$ // $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}.$

102. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx.$ // $\ln|x+\cos x|.$

103. $\int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x}\,dx.$ // $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{\sin 3x}\right).$

104. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ // $-\frac{1}{\ln x}.$

105. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}}\,dx.$ // $\ln|\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 2}|.$

106. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}.$ // $\sqrt{2}\arctan(x\sqrt{2}) - \frac{1}{4(2x^2+1)}.$

107. $\int a^{\sin x}\cos x\,dx.$ // $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}.$

108. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx.$ // $\sqrt[3]{\frac{(x^3+1)^2}{2}}.$

109 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ // $\frac{1}{2}\arcsin(x^2).$

110 $\int \tan^2 ax\,dx.$ // $\frac{1}{a}\tan ax - x.$

111 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx.$ // $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$

112 $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$.	جواب	$\arcsin\frac{\tan x}{2}$.
113. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}$.	〃	$a\ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$.
114 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$.	〃	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.
115. $\int \tan\sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.	〃	$-2\ln\|\cos\sqrt{x-1}\|$.
116 $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$.	〃	$\frac{1}{2}\ln\left\|\tan\frac{x^2}{2}\right\|$.
117 $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$.	〃	$e^{\arctan x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\arctan x$.
118 $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$.	〃	$-\ln\|\sin x+\cos x\|$.
119. $\int \frac{\left(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.	〃	$\sqrt{2}\ln\left\|\tan\frac{x}{2\sqrt{2}}\right\|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.
120. $\int \frac{x^2}{x^2-2}\,dx$.	〃	$x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right\|$.
121. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$.	〃	$\ln\|x\|+2\arctan x$.
122. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$.	〃	$e^{\sin^2 x}$.
123. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$.	〃	$\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$.
124. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.	〃	$x-\ln(1+e^x)$.
125. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0<b<a)$.	〃	$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.
126. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$.	〃	$\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$.
127. $\int \frac{dx}{\sin ax\cos ax}$.	〃	$\frac{1}{a}\ln\|\tan ax\|$.
128. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)dt$.	〃	$-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$.
129. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.	〃	$\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right\|$.
130. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.	〃	$-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.
131. $\int e^{-\tan x}\sec^2 x\,dx$.	〃	$-e^{-\tan x}$.

132. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\,dx.$ جواب $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right).$

133. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$ 〃 $-2\cot 2x.$

134. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 〃 $\frac{(\arcsin x)^2}{2} - \sqrt{1-x^2}.$

135. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}\,dx.$ 〃 $\ln(\sec x + \sqrt{\sec^2 x+1}).$

136. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx.$ 〃 $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|.$

137. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$ 〃 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right).$

راهنمائی :

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2}.$$

138. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx.$ 〃 $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}.$

139. $\int x^2 \cos(x^3+3)\,dx.$ 〃 $\frac{1}{3}\sinh(x^3+3).$

140. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x}\,dx.$ 〃 $\frac{1}{\ln 3}3^{\tanh x}.$

141. $\int x(2x+5)^{10}\,dx.$ 〃 $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right].$

142. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$ 〃 $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}|\right).$

143. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$ 〃 $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|.$

144. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$ 〃 $2\arctan\sqrt{e^x-1}.$

145. $\int \frac{\ln 2x\,dx}{\ln 4x\,x}.$ 〃 $\ln x - \ln 2 \ln|\ln x + 2\ln 2|.$

146. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 〃 $\frac{(\arcsin x)^3}{3}.$

147. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$ 〃 $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}.$

148. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$ 〃 $\frac{2}{5}(\cos^2 x - 5)\times\sqrt{\cos x}.$

149. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$ 〃 $\ln\left|\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$

۳ـ۴ . انتگرالگیری به روش جزء بجزء

دستور

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

موسوم بـه انتـگرالـگیری **به روش جزء بجزء** است که در آن u و v توابعی مشتقپذیر از x هستند. وقتی از این روش استفاده می کنیم انتگران را به حاصلضرب دو عامل تقسیم می کنیم. یکی از عاملها یک تابع است و عامل دیگر دیفرانسیل تابع دیگری است. اگر انتگران، به صورت حاصلضرب یک تابع لگاریتمی، یا یک تابع معکوس مثلثاتی، در یک چند جمله‌ای باشد، در اینصورت **معمولاً** u را تابع لگاریتمی یا تابع معکوس مثلثاتی، انتخاب می کنند. ولی اگر انتگران حاصلضرب یک تابع لگاریتمی یا یک تابع نمایی در یک تابع جبری باشد، **معمولاً** تابع جبری را u فرض می کنند.

۱ـ۳ـ۴. $I = \int \arctan x\,dx$ را حل کنید.

حل . فرض می کنیم :

$$u = \arctan x, \qquad dv = dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \qquad v = x;$$

$$I = \int \arctan x\,dx = x \arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

۲ـ۳ـ۴ $I = \int \arcsin x\,dx$ **جواب :** $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

۳ـ۳ـ۴ $I = \int x \cos x\,dx$ را حل کنید.

حل . فرض می کنیم :

$$u = x; \qquad dv = \cos x\,dx,$$

از آنجا

$$du = dx; \qquad v = \sin x,$$

$$I = \int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C.$$

حال نشان می‌دهیم که هر گاه انتخاب u و dv نامناسب باشد، چه اشکالی پیش می آید؟

در انتگرال $\int x \cos x\,dx$ فرض می کنیم :

$$u = \cos x; \qquad dv = x\,dx,$$

بنابراین

$$du = -\sin x\,dx; \qquad v = \frac{1}{2}x^2.$$

در این حالت

$$I = \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x\,dx.$$

پر واضح است که انتگرال حاصل از اولی مشکلتر است.

۴ــ۳ــ۴ $I = \int x^3 \ln x\,dx.$

حل. فرض می کنیم

$$u = \ln x; \quad dv = x^3\,dx,$$

از آنجا

$$du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{1}{4}x^4,$$

$$I = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^4\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

۴ــ۳ــ۵ $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx.$

حل. فرض می کنیم

$$u = x^2 - 2x + 5; \quad dv = e^{-x}\,dx,$$

و از آنجا

$$du = (2x-2)\,dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x-1)e^{-x}\,dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم:

$$x - 1 = u; \qquad dv = e^{-x}\,dx,$$

$$du = dx; \quad v = -e^{-x}.$$

از آنجا

$$I_1 = 2\int (x-1)e^{-x}\,dx = -2e^{-x}(x-1) + 2\int e^{-x}\,dx = -2xe^{-x} + C.$$

بنابراین

$$I = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - 2xe^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 5) + C.$$

تذکر. نتیجه‌ای که از انتگرالگیری، انتگرالهای به صورت $\int P(x)e^{ax}\,dx$ حاصل می شود این است که جواب انتگرال، تابعی به صورت $Q(x)e^{ax}$ است که در آن

$Q(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجهٔ آن با درجهٔ چند جمله‌ای $P(x)$ یکی است. در محاسبه انتگرالها با این روش، از روش ضرایب مجهول استفاده می شود. بدین معنی که $Q(x)$ را یک چند جمله‌ای هم درجه با چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب مجهول فرض کرده و سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم و نتیجه را با هم معادل قرار می دهیم به دستگاه معادلاتی می رسیم که از حل آن ضرایب مورد نظر را تعیین می کنیم.

برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را حل می کنیم.

۶ــ۳ــ٤ روش ضرایب مجهول را بکار برده و انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int (3x^3 - 17)\, e^{2x}\, dx.$$

حل .فرض می کنیم

$$\int (3x^3 - 17)\, e^{2x}\, dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)\, e^{2x} + C$$

از دو طرف مشتق می گیریم:

$$(3x^3 - 17)\, e^{2x} = 2\,(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)\, e^{2x} + e^{2x}\,(3Ax^2 + 2Bx + D)$$

از دو طرف e^{2x} را حذف می کنیم، داریم:

$$3x^3 - 17 \equiv 2Ax^3 + (2B + 3A)\, x^2 + (2D + 2B)\, x + (2E + D)$$

ضرایب x های هم درجه را در دو طرف با هم مساوی قرار می دهیم:

$$3 = 2A; \qquad 0 = 2B + 3A;$$
$$0 = 2D + 2B; \qquad -17 = 2E + D.$$

از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A = \frac{3}{2}; \quad B = -\frac{9}{4}; \quad D = \frac{9}{4}; \quad E = -\frac{77}{8}.$$

پس

$$\int (3x^3 - 17)\, e^{2x}\, dx = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{8}\right) e^{2x} + C.$$

۷ــ۳ــ٤ . انتگرال زیر را حساب نمائید:

$$I = \int (x^3 + 1) \cos x\, dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$u = x^3 + 1; \quad dv = \cos x\, dx,$$

از آنجا

$$du = 3x^2\,dx; \quad v = \sin x.$$

$$I = (x^3+1)\sin x - 3\int x^2 \sin x\,dx = (x^3+1)\sin x - 3I_1,$$

که در آن

$$I_1 = \int x^2 \sin x\,dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2I_2,$$

که در آن

$$I_2 = \int x \cos x\,dx.$$

بار دیگر از روش جزء بجزء برای انتگرال حاصل استفاده می کنیم :

$$I_2 = x \sin x + \cos x + C.$$

بالاخره داریم :

$$I = \int (x^3+1)\cos x\,dx = (x^3+1)\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C =$$
$$= (x^3 - 6x + 1)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C.$$

تذکر. روش ضرایب مجهول برای محاسبهٔ انتگرالهای

$$\int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx.$$

بکار می رود.

۸ــ۳ــ٤ .

$$I = \int (x^2 + 3x + 5)\cos 2x\,dx.$$

حل

$$\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx =$$
$$= (A_0x^2 + A_1x + A_2)\cos 2x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)\sin 2x + C.$$

از طرفین مشتق می گیریم

$$(x^2+3x+5)\cos 2x = -2(A_0x^2 + A_1x + A_2)\sin 2x +$$
$$+ (2A_0x + A_1)\cos 2x + 2(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x + (2B_0x + B_1)\sin 2x =$$
$$= [2B_0x^2 + (2B_1 + 2A_0)x + (A_1 + 2B_2)]\cos 2x +$$
$$+ [-2A_0x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)]\sin 2x.$$

ضرایب x های هم درجه در دو طرف را که در ضرایب $\sin 2x$ و $\cos 2x$ موجودند، معادل با

هم قرار می دهیم دستگاه معادلات

$$2B_0=1;\qquad 2(B_1+A_0)=3;\qquad A_1+2B_2=5;$$
$$-2A_0=0;\qquad 2(B_0-A_1)=0;\qquad B_1-2A_2=0.$$

حاصل می شود. از حل دستگاه معادلات حاصل مقادیر زیر نتیجه می شوند:

$$A_0=0;\ B_0=\frac{1}{2};\ A_1=\frac{1}{2};\ B_1=\frac{3}{2};\ A_2=\frac{3}{4};\ B_2=\frac{9}{4}.$$

پس

$$\int(x^2+3x+5)\cos 2x dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin^2 x+C.$$

۹ــ۳ــ۴ $I=\int(3x^2+6x+5)\arctan x\,dx.$

حل . فرض می کنیم

$$u=\arctan x;\qquad dv=(3x^2+6x+5)\,dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{dx}{1+x^2};\quad v=x^3+3x^2+5x.$$

پس

$$I=(x^3+3x^2+5x)\arctan x-\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}dx.$$

برای حل انتگرال اخیر، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$I_1=\int\frac{x^3+3x^2+5x}{1+x^2}dx=\int(x+3)\,dx+\int\frac{4x-3}{x^2+1}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+2\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}+3x+2\ln(x^2+1)-3\arctan x+C.$$

مقدار I_1 را درجای خود قرار می دهیم

$$I=(x^3+3x^2+5x+3)\arctan x-x^2/2-3x-2\ln(x^2+1)+C.$$

۱۰ــ۳ــ۴ . انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I=\int e^{5x}\cos 4x\,dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$e^{5x}=u;\quad \cos 4x\,dx=dv,$$

از آنجا

$$5e^{5x}\,dx=du;\quad v=\frac{1}{4}\sin 4x.$$

بنابراین

$$I=\frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x-\frac{5}{4}\int e^{5x}\sin 4x\,dx.$$

دوباره روش جزء بجزء را بکار می بریم :

$$I_1=\int e^{5x}\sin 4x\,dx=-\frac{1}{4}e^{5x}\cos 4x+\frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4x\,dx.$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{4}e^{5x}\sin 4x-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{5x}\cos 4x+\frac{5}{4}\int e^{5x}\cos 4x\,dx\right)$$

بالاخره

$$I=\frac{4}{41}e^{5x}\left(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x\right)+C.$$

۱۱ــ۳ــ٤ .

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx.$$

حل . فرض می کنیم

$$u=\cos(\ln x);\ \ dv=dx,$$

از آنجا

$$du=-\sin(\ln x)\frac{dx}{x};\quad v=x.$$

بنابر این

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\,dx.$$

از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$u=\sin(\ln x);\qquad dv=dx,$$

از آنجا

$$du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x};\quad v=x.$$

پس

$$I_1=\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\,dx.$$

بنابر این

$$I=\int\cos(\ln x)\,dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-I.$$

بالاخره

$$I=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

۱۲ــ۳ــ٤ .

$$I=\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$$

حل . انتگران را به صورت زیر تغییر می دهیم :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x.$$

پس

$$I=\int x\ln(x+1)\,dx-\int x\ln x\,dx=I_1-I_2.$$

انتگرالهای I_1 و I_2 را به روش جزء بجزء حساب می کنیم

$$u=\ln(x+1);\quad dv=x\,dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{dx}{1+x};\quad v=\frac{1}{2}(x^2-1).$$

پس

$$I_1=\int x\ln(x+1)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)\,dx}{1+x}=$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int(x-1)\,dx=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C.$$

بطور مشابه انتگرال بعدی را حل می کنیم :

$$I_2=\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

بالاخره داریم :

$$I=\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C.$$

۱۳ــ۳ــ٤ . $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^4}\,dx.$

حل .نخست تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم :

$$1+\frac{1}{x^2}=t.$$

بنابر این

$$dt=-\frac{2dx}{x^3}\quad\text{یا}\quad\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}dt.$$

پس

$$I=\int\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,\ln t\,dt.$$

انتگرال حاصل با روش جزء بجزء به راحتی حساب می شود. فرض می کنیم

$$u=\ln t;\quad dv=\sqrt{t}\,dt.$$

پس

$$du=\frac{dt}{t}; \quad v=\frac{2}{3}t\sqrt{t}.$$

از آنجا

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ln t\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{2}{3}\int\sqrt{t}\,dt\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\ln t-\frac{4}{9}t\sqrt{t}\right]+C.$$

جواب را نسبت به x می نویسیم

$$I=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right]+C=$$
$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C.$$

۴ـ۳ـ۱۴. $I=\int\sin x\ln\tan x\,dx.$

جواب : $-\cos x\ln\tan x+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C.$

۴ـ۳ـ۱۵. $I=\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx.$

حل . فرض می کنیم

$$u=\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}); \quad dv=dx,$$

از آنجا

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx;$$
$$v=x.$$

بنابر این

$$I=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\int x\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

تذکر : در محاسبه بعضی از انتگرالها که مجبور به استفاده از روش جزء بجزء بدفعات متعدد هستیم، دستوری تحت عنوان «**تعمیم دستور انتگرالگیری به روش جزء بجزء**» یا «**دستور انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء**» به صورت زیر

بدست می آید:

$$\int u(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v_1(x) - u'(x)\,v_2(x) + u''(x)\,v_3(x) - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)\,v_n(x) - (-1)^{n-1}\int u^{(n)}(x)\,v_n(x)\,dx,$$

که در آن

$$v_1(x) = \int v(x)\,dx;\quad v_2(x) = \int v_1(x)\,dx;\quad \dots;\quad v_n(x) = \int v_{n-1}(x)\,dx.$$

البته، در اینجا فرض براین است که تمام مشتقات و انتگرالهایی که ظاهر می شوند، موجودند.

استفاده از فرمول تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء، وقتی مناسب است که انتگرال به صورت $\int P_n(x)\,\varphi(x)\,dx$ باشد که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای از درجهٔ n است و عامل $\varphi(x)$ طوری است که بتوان از آن $n+1$ بار انتگرال متوالی گرفت. مثلاً:

$$\int P_n(x)\,e^{kx}\,dx = P_n(x)\frac{e^{kx}}{k} - P_n'(x)\frac{e^{kx}}{k^2} + \dots +$$
$$+ (-1)^n P_n^{(n)}(x)\frac{e^{kx}}{k^{n+1}} + C =$$
$$= e^{kx}\left[\frac{P_n(x)}{k} - \frac{1}{k^2}P_n'(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{k^{n+1}}P_n^{(n)}(x)\right] + C.$$

۱۶ــ۳ــ٤ . با استفاده از دستور «**تعمیم انتگرالگیری به روش جزء بجزء**» انتگرالهای زیر را حساب نمائید:

(a) $\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\cos 2x\,dx,$

(b) $\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\sqrt{2x+6}\,dx.$

حل : (a)

$$\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\cos 2x\,dx = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\frac{\sin 2x}{2} -$$
$$-(3x^2 - 4x + 3)\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right) + (6x - 4)\left(-\frac{\sin 2x}{8}\right) - 6\frac{\cos 2x}{16} + C =$$
$$= \frac{\sin 2x}{4}(2x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{\cos 2x}{8}(6x^2 - 8x + 3) + C;$$

حل : (b)

$$\int (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\sqrt{2x+6}\,dx =$$
$$= (2x^3 + 3x^2 - 8x + 1)\frac{(2x+6)^{3/2}}{3} - (6x^2 + 6x - 8)\frac{(2x+6)^{5/2}}{3\cdot 5} +$$
$$+ (12x + 6)\frac{(2x+6)^{7/2}}{3\cdot 5\cdot 7} - 12\frac{(2x+6)^{9/2}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + C =$$
$$= \frac{\sqrt{2x+6}}{5\cdot 7\cdot 9}(2x+6)(70x^3 - 45x^2 - 396x + 897) + C.$$

انتگرالهای زیر را حساب نمائید

۱۷ـ۳ـ۴ $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx.$ جواب $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$

۱۸ـ۳ـ۴ $\int \sqrt[3]{x}\,(\ln x)^2\, dx.$ جواب $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right]+C.$

۱۹ـ۳ـ۴ $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1+}}$ جواب: $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$

۲۰ـ۳ـ۴ $\int \frac{x\cos x\, dx}{\sin^3 x}.$ جواب: $-0.5\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right)+C.$

۲۱ـ۳ـ۴ $\int 3^x \cos x\, dx.$ جواب: $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C.$

۲۲ـ۳ـ۴ $\int (x^3-2x^2+5)\,e^{3x}\, dx.$ جواب:

$\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)e^{3x}+C.$

۲۳ـ۳ـ۴ $\int (1+x^2)^2\cos x\, dx.$ جواب:

$(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^2-20)\cos x+C.$

۲۴ـ۳ـ۴ $\int (x^2+2x-1)\sin 3x\, dx.$ جواب:

$\frac{9x^2+18x-11}{27}\cos 3x+\frac{2x+2}{9}\sin 3x+C.$

۲۵ـ۳ـ۴ $\int (x^2-2x+3)\ln x\, dx.$ جواب:

$\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C.$

۲۶ـ۳ـ۴ $\int x^3\arctan x\, dx.$ جواب ـ

$\frac{x^4-1}{4}\arctan x-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C.$

۲۷ـ۳ـ۴ $\int x^2\arccos x\, dx.$ جواب:

$\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+C.$

۲۸ـ۳ـ۴ . با استفاده از دستور **«انتگرالگیری مکرر به روش جزء بجزء»** انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(a) $\int (3x^2+x-2)\sin^2(3x+1)\, dx;$ (b) $\int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx.$

جواب:

(a) $-\frac{18x^2+6x-13}{72}\sin(6x+2)-\frac{6x+1}{72}\cos(6x+2)+\frac{1}{2}x^3+$ $+\frac{1}{4}x^2-x+C;$ (b) $\frac{3}{4}(x^2-7x+1)(2x+1)^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{40}(2x-7)(2x+1)^{\frac{5}{3}}+$ $+\frac{27}{320}(2x+1)^{\frac{8}{3}}+C.$

۲۹ـ۳ـ٤ . با استفاده از روش جزء بجزء انتگرالهای زیر را حساب کنید:

1. $\int \ln x\,dx.$	جواب	$x\ln x - x.$
2. $\int \operatorname{arc\,tan} x\,dx.$	//	$x \operatorname{arc\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
3. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx.$	//	$x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2}.$
4. $\int x\sin x\,dx.$	//	$\sin x - x\cos x.$
5. $\int x\cos 3x\,dx.$	//	$\frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9}.$
6. $\int \frac{x}{e^x}\,dx.$	//	$-\frac{x+1}{e^x}.$
7. $\int x\cdot 2^{-x}\,dx.$	//	$-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}.$
8 $\int x^2 e^{3x}\,dx.$	//	$\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2).$
9. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx.$	//	$-e^{-x}(x^2+5).$
10. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$	//	$-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162).$
11. $\int x\sin x\cos x\,dx.$	//	$-\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8}.$
12. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$	//	$\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x + \frac{2x+5}{4}\cos 2x.$
13. $\int x^2\ln x\,dx.$	//	$\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$
14. $\int \ln^2 x\,dx.$	//	$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.$
15. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$	//	$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$
16. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$	//	$2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.$
17. $\int x \operatorname{arc\,tan} x\,dx.$	//	$\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tan} x - \frac{x}{2}$
18 $\int x \operatorname{arc\,sin} x\,dx.$	//	$\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,sin} x - \frac{1}{4}\times \operatorname{arc\,sin} x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}.$
19 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$	//	$x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$
20 $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$	//	$-x\cot x + \ln\lvert\sin x\rvert.$
21 $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$	//	$-\frac{x}{\sin x} + \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert.$
22 $\int e^x\sin x\,dx.$	//	$\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}.$
23 $\int 3^x\cos x\,dx.$	//	$\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}.$
24. $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$	//	$\frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$
25. $\int \sin(\ln x)\,dx.$	//	$\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$

روش های مناسب را بکار برده انتگرالهای زیر را حساب کنید

26. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$ جواب $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1).$

27. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ // $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1).$

28. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$ // $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x.$

29. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$ // $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x.$

30. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$ // $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}.$

31. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$ // $[\ln(\ln x)-1]\cdot\ln x.$

32. $\int x^2\arctan 3x\,dx.$ // $\frac{x^3}{3}\arctan 3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1).$

33. $\int x(\arctan x)^2\,dx.$ // $\frac{1+x^2}{2}\times(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

34. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$ // $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\times\arcsin x-2x.$

35. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$ // $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|.$

36. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$ // $-2\sqrt{1-x}\times\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}.$

37. $\int x\tan^2 2x\,dx.$ // $\frac{x\tan 2x}{2}+\frac{\ln|\cos 2x|}{4}-\frac{x^2}{2}.$

38. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$ // $\frac{e^{-x}}{2}\times\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right).$

39. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$ // $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}.$

40. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$ // $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x.$

حل ـ فرض کنید $u=x$ و $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. داریم $du=dx$ و $v=-\frac{1}{2(x^2+1)}$

از آنجا

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

41. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$ جواب $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)$

42. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ // $\frac{x}{2}\times\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

حل ـ فرض می کنیم $u=\sqrt{a^2-x^2}$ و $dv=dx;$ پس $du=-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $v=x$

بنابراین

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$
$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

و در نتیجه

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

۴ـ۴ دستورهای کاهش

دستورهای کاهش به ما امکان می دهند که به انتگرال اندیس $n > 0$ را نسبت داده و آن را کاهش دهیم و انتگرالهایی مشابه با خودش، ولی با اندیس کمتر، به دست آوریم.

۱ـ۴ـ۴ . روش جز بجزء را بکار برده دستور کاهش هر یک از انتگرالهای زیر را به دست آورید:

$$\text{(a)}\ \ I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n};\qquad \text{(b)}\ \ I_{n,-m}=\int\frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx;$$

$$\text{(c)}\ \ I_n=\int(a^2-x^2)^n\,dx.$$

حل . (a) از روش جزء بجزء استفاده کرده و به طریق زیر عمل می کنیم:

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad dv=dx,$$

از آنجا

$$du=-\frac{2n\,x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\quad v=x.$$

بنابر این

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1},$$

از آنجا

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}I_n.$$

به وسیله این دستور، انتگرالگیری از I_{n+1} به انتگرالگیری از I_n منجر می شود و در نتیجه می توانیم کاملاً یک انتگرال را با اندیس یک عدد طبیعی، حساب نمائیم، چون

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

با فرض $n=1$ داریم

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

با فرض $n=2$ حاصل می شود

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2=$$

$$=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

(b) برای حل این انتگرال از روش جزء بجزء استفاده می شود، فرض می کنیم

$$u=\sin^{n-1}x;\quad dv=\frac{\sin x}{\cos^m x}dx,$$

از آنجا

$$du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx;\ \ v=\frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}x}\quad (m\neq 1).$$

بنابراین

$$I_{n,\ -m}=\frac{\sin^{n-1}x}{(m-1)\cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}\int\frac{\sin^{n-2}x\,dx}{\cos^{m-2}x}=$$
$$=\frac{\sin^{n-1}x}{(m-1)\cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}I_{n-2,\ 2-m}\quad (m\neq 1).$$

(c) روش جزء بجزء را بکار می بریم، فرض می‌کنیم:

$$u=(a^2-x^2)^n;\quad dv=dx,$$

از آنجا

$$du=-2nx(a^2-x^2)^{n-1}dx;\quad v=x.$$

پس

$$I_n=x(a^2-x^2)^n+2n\int x^2(a^2-x^2)^{n-1}dx=$$
$$=x(a^2-x^2)^n+2n\int(x^2-a^2+a^2)(a^2-x^2)^{n-1}dx=$$
$$=x(a^2-x^2)^n-2nI_n+2na^2I_{n-1}$$

ویا

$$(1+2n)I_n=x(a^2-x^2)^n+2na^2I_{n-1}$$

وبالاخره

$$I_n=\frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1}+\frac{2na^2}{2n+1}I_{n-1}.$$

برای مثال، می دانیم که

$$I_{-1/2}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

و همچنین

$$I_{1/2}=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}(a^2-x^2)^{1/2}+\frac{a^2}{2}I_{-1/2}=$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$I_{3/2}=\int(a^2-x^2)^{3/2}dx=\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{3/2}+\frac{3}{4}a^2I_{1/2},$$

و الی آخر.

۲ــ ۴ــ ۴ با استفاده از روش جزء بجزء، دستورهای کاهش زیر را ثابت کنید

(a) $I_n=\int(\ln x)^n dx=x(\ln x)^n-nI_{n-1};$

$$\text{(b)}\quad I_n=\int x^{\alpha}(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{\alpha+1}(\ln x)^n}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}\quad(\alpha\neq-1);$$

$$\text{(c)}\quad I_n=\int x^n e^x\,dx=x^n e^x-nI_{n-1};$$

$$\text{(d)}\quad I_n=\int e^{\alpha x}\sin^n x\,dx=$$
$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}\sin^{n-1}x\,(\alpha\sin x-n\cos x)+\frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}I_{n-2}.$$

راهنمایی . (d) دستور تعمیم یافتهٔ روش جزء بجزء را بکار برده و آنگاه رابطهٔ زیر را بدست آورید.

$$I_n=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\sin^{n-1}x\,(\alpha\sin x-n\cos x)+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}I_{n-2}-\frac{n^2}{\alpha^2}I_n.$$

۳ــ۴ــ۴ . فرمول کاهش انتگرال

$$I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$$

را بدست آورده و سپس انتگرال

$$I_3=\int\frac{dx}{\sin^3 x}.$$

را حل کنید.

جواب ــ

$$I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\quad(n\geqslant2);$$
$$I_3=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}I_1=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

۴ــ۴ــ۴ . برای هر کدام از انتگرالهای زیر یک دستور کاهش تعیین کنید:

$$\text{(a)}\quad I_n=\int\tan^n x\,dx;\qquad\text{(b)}\quad I_n=\int\cot^n x\,dx;$$

$$\text{(c)}\quad I_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

جواب:

$$\text{(a)}\quad I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2};\qquad I_1=-\ln|\cos x|+C;\qquad I_0=x+C;$$

$$\text{(b)}\quad I_n=\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-I_{n-2};\qquad I_1=\ln|\sin x|+C;\qquad I_0=x+C;\qquad\text{(c)}\quad I_n=$$
$$=\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a}-\frac{n-1}{n}aI_{n-2};\quad I_1=\sqrt{x^2+a}+C;\quad I_0=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

فصل پنجم

دسته های اساسی از توابع انتگرالپذیر

۱ـ۵ انتگرالگیری از توابع گویا

اگر بتوانیم $Q(x)$ مخرج کسر واقعی $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به صورت

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\ldots(x^2+\alpha x+\beta)^r(x^2+\gamma x+\mu)^s\ldots,$$

بنویسیم که در آن دو جمله ایها و سه جمله ایها از یکدیگر متمایز هستند، و بعلاوه سه جمله ایها ریشه های حقیقی ندارند، در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\\&+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\ldots\\&\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}+\\&+\frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\mu}+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\mu)^2}+\ldots+\frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\mu)^s}+\ldots,\end{aligned}$$

که در آن

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ M_1,\ N_1,\ M_2,\ N_2,\ \ldots,\ R_1,\ L_1,\ R_2,\ L_2,\ \ldots$$

ثابت های حقیقی اند که باید حساب شوند برای محاسبه این ضرایب، از طرف راست مخرج مشترک می گیریم و سپس دو طرف را معادل هم قرار می دهیم. با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم درجه در طرفین، دستگاه معادلاتی بدست می آید که از حل آن ضرایب مطلوب، حاصل می شوند این روش را **«روش مقایسه ضرایب»** گویند. چون اتحاد به ازای تمام مقادیر x برقرار است، لذا برای تعیین دستگاه معادلات می توان به

x مقادیر مناسب دلخواهی، به تعداد مجهولها داد. این روش را **«روش مقادیر خاص»** گویند. موفقیت در انتخاب روش مناسب به تجربه و حل مسائل متعدد، بستگی .. ..

اگر درجهٔ چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج بیشتر یا با هم مساوی باشند، اول صورت را برمخرج تقسیم می کنیم.

۱ــ۱ــ۵

$$I=\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx.$$

را حساب کنید:

حل. چون انتگران کسر واقعی است و مخرج ریشهٔ های حقیقی دارد، پس می‌توان آن را به صورت

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{D}{x-1},$$

نوشت که در آن ضرایب $A,\ B,\ D$ باید محاسبه شوند. از طرف راست مخرج مشترک می گیریم و با طرف چپ معادل قرار می دهیم:

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+\\+D(x-3)(x+4).\quad (*)$$

ضرایب x های هم توان را در طرفین مساوی با هم قرار می دهیم:

$$A+B+D=15;\qquad 3A-4B+D=-4;\qquad -4A+3B-12D=-81.$$

از حل دستگاه معادلات حاصل داریم:

$$A=3,\ B=5,\ D=7$$

پس

$$I=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=\\=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=\\=\ln|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7|+C.$$

توجه. این مثال را با «روش مقادیر خاص» حل می‌کنیم تا کاربرد این روش را ببینیم. چون اتحاد (*) به ازای هر x برقرار است، بنابر این در طرفین سه مقدار دلخواه (به تعداد مجهولها) به x می دهیم. برای سادگی محاسبات، بجای x ریشه های مخرج را قرار می دهیم تا بعضی ازجملات حذف شوند. با قرار دادن $x=3$ ، $x=-4$ ، $x=1$ در رابطهٔ (*) بترتیب $A=3$، $B=5$، $D=7$ به دست می آیند.

۲ــ۱ــ۵ . $I=\int\frac{x^4\,dx}{(2+x)(x^2-1)}$ جواب :

$$\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$$

۳ــ۱ــ۵ . $I=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx.$

حل . چون درجه صورت از درجه مخرج بیشتر است لذا صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم، داریم :

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}.$$

پس

$$I=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx=\int(x+1)\,dx-\int\frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)(x+1)}.$$

انتگران را به صورت زیر می نویسیم :

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}.$$

بنابر این

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-2).$$

با قرار دادن $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-1$ (جوابهای مخرج) در طرفین اتحاد، داریم

$$A=-1;\quad B=\frac{2}{3};\quad D=\frac{1}{3}$$

و بالاخره داریم :

$$I=\int(x+1)\,dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

۴ــ۱ــ۵ . $I=\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx.$ را حل کنید .

حل . انتگران یک کسر واقعی است و ریشه های مخرج حقیقی هستند ولی بعضی از آنها ریشه های چند گانه‌می باشند

$$x^3-2x^2+x=x(x-1)^2.$$

بنابر این کسرهای معادل آن به قرار زیرند :

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1},$$

از آنجا

$$2x^2-3x+3 \equiv A(x-1)^2+Bx+Dx(x-1)=$$
$$=(A+D)x^2+(-2A-D+B)x+A. \qquad (*)$$

با معادل قرار دادن طرفین، معادلات زیر حاصل می شوند:

$$A+D=2;\quad -2A-D+B=-3;\quad A=3.$$

پس

$$A=3;\quad B=2;\quad D=-1.$$

بنابراین

$$I=3\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{dx}{x-1}=3\ln|x|-\frac{2}{x-1}-\ln|x-1|+C.$$

توجه . اگر در رابطه (*) فرض کنیم $x_1=0;\ x_2=1$ (ریشه های مخرج) و x_3 مقدار دلخواهی باشد، ضرایب خیلی راحت‌تر حساب می شوند. به ازای $x=0$ داریم $A=3$ و در $x=1$ داریم، $B=2$ و به ازای $x=2$ ، داریم

$$5=A+2B+2D;\ 5=3+4+2D$$

از آنجا $D=-1$.

۵ــ۱ــ۵ $I=\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ **جواب:** $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{x}{(x-1)^2}+C.$

۵ــ۱ــ۶ $I=\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$

حل . چون

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

و عامل دوم به عوامل درجه اول قابل تجزیه نیست. تجزیه کسر به صورت زیر است:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}.$$

بنابراین

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)=$$
$$=(A+B)x^2+(-A+B+D)x+(A+D).$$

از آنجا

$$A=-\frac{1}{3};\quad B=\frac{1}{3};\quad D=\frac{1}{3}$$

پس

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}I_1.$$

برای محاسبهٔ

$$I_1=\int\frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$$

مخرج را به صورت مجموع دو مربع کامل می نویسیم:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

فرض می کنیم

$$x-\frac{1}{2}=t$$

پس

$$I_1=\int\frac{t+\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

جواب را نسبت به x می نویسیم:

$$I_1=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

پس

$$I=\int\frac{x}{x^3+1}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

۷ــ۱ــ۵. $I=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

حل. مخرج دارای دو دسته ریشهٔ مختلط است، بنابراین

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4},$$

پس

$$1=(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1).$$

برای تعیین ضرایب، از روش مقادیر خاص استفاده می کنیم، چون ریشه های مخرج $(x=\pm 2i$ و $x=\pm i)$ هستند، به قرار زیر عمل می کنیم:

با فرض $x=i$ داریم:

$$3B+3Ai=1$$

که از آن $A=0,\ B=\frac{1}{3}$، و اگر $x=2i$ داریم

$$-3E-6Di=1$$

از آنجا $D=0,\ E=-\frac{1}{3}$ ، پس

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= \frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

۸ــ۱ــ۵. $I = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$ **جواب:**
$$\frac{2}{3\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\arctan(x+2) + C$$

۹ــ۱ــ۵ $I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$

حل. در اینجا مخرج دارای ریشه‌های مختلط چندگانه است. کسرهای معادل آن را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+3} + \frac{F}{x+1}$$

بعد از محاسبه داریم:

$$A=1;\quad B=-1;\quad D=0;\quad E=0;\quad F=1.$$

بنابراین

$$I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx =$$
$$= \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + I_1$$

حال $I_1 = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ را حساب می کنیم:

چون $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$. پس فرض می کنیم $x+1=t$ وآنگاه

$$I_1 = \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}\,dt = \int \frac{t}{(t^2+2)^2}\,dt - 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} - 2I_2$$

انتگرال

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

را به وسیله دستور کاهش حل می کنیم (مسئلهٔ ۱ــ۴ــ۴ را ملاحظه کنید):

$$I_2 = \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

بنابراین

$$I_1 = -\frac{1}{2(t^2+2)} - \frac{t}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

که این رابطه نسبت به x چنین است:

$$I_1=-\frac{1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

بالاخره داریم:

$$I=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=$$
$$=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید

۵ـ۱ـ۱۰ $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ **جواب:** $5x+\ln x^2(x+2)^4|x-2|^3+C.$

۵ـ۱ـ۱۱ $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$ **جواب:**

$$\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C.$$

۵ـ۱ـ۱۲ $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ **جواب:**

$$-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tan}(x-2)+C$$

۵ـ۱ـ۱۳ $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$ **جواب.**

$$-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

۵ـ۱ـ۱۴ $\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$ **جواب:**

$$\frac{x+2}{2(x^2+1)}+2\operatorname{arc\,tan}x+\ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}+C.$$

۵ـ۱ـ۱۵ انتگرالهای زیر را حساب نمائید:

1. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}.$ جواب $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{x+1}{2}$
2. $\int\frac{dx}{x^2+2x}.$ 〃 $\frac{1}{2}\times\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$
3. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}.$ 〃 $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tan}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}.$
4. $\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+13}.$ 〃 $\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt{3}}\times\operatorname{arc\,tan}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}.$

5. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx.$ جواب $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2).$

6. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx.$ // $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}.$

7. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}.$ // $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\arctan(x-3).$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ // $\arcsin(2x-1).$

10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$ // $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|.$

11. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx.$ // $3\sqrt{x^2-4x+5}.$

12. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$ // $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx.$ // $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\right.$
$\left.+\sqrt{5x^2-2x+1}\right).$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$ // $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|.$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}.$ // $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}.$

16 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$ // $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}\ (x>\sqrt{2}).$

17 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$ // $-\arcsin\frac{1}{x+1}.$

18 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx.$ // $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}).$

19 $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$ // $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1).$

20 $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx.$ // $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}.$

21. $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}.$ // $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|.$

22 $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}\,dx.$ // $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}.$

23 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$ // $\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)$

24. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$ // $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|.$

25 $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$ // $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}.$

26. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$ // $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|.$

27. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx.$ // $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|.$

28. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. جواب. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$.

29. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$.

30. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$. $5x+\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{2}}(x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|$.

31. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$.

32. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$.

33. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}$.

34. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$.

35. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}$.

36. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$.

37. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$. $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$.

38. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$. $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x$.

39. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$. جواب

$$\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\times\arctan(x+2).$$

40. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

41 $\int \frac{dx}{x^4+1}$. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\times\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

42. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

43. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\arctan x}{2}$.

44. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$. $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\arctan(x+1)$.

45. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$. $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-$
$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

$$46.\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx.$$ جواب $$\frac{3x-17}{2\,(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln\,(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\arctan(x-2).$$

روش استروگرادسکی[1]

اگر $Q(x)$ ریشه‌های چندگانه داشته باشد ومشتق آن را با $Q'(x)$ نشان دهیم، آنگاه

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{X(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx$$

که در آن $Q_1(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین $Q(x)$ و $Q'(x)$ است و

$$Q_2(x)=Q(x):Q_1(x)$$

$X(x)$ و $Y(x)$ چند جمله ایهایی با ضرایب مجهول هستند که درجه‌های آنها بترتیب یک واحد کمتر از درجهٔ $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ می باشند.

مثال. انتگرال زیر را حل کنید

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$$

حل.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

از دوطرف مشتق می گیریم، داریم:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)\,(x^3-1)-3x^2\,(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

یا

$$1=(2Ax+B)\,(x^3-1)-3x^2\,(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)\,(x^3-1).$$

از متحد قرار دادن دو طرف، معادلات زیر بدست می آیند:

$$D=0;\quad E-A=0;\quad F-2B=0;\quad D+3C=0;\quad E+2A=0;\quad B+F=-1$$

از حل دستگاه معادلات حاصل داریم:

$$A=0;\quad B=-\frac{1}{3};\quad C=0;\quad D=0;\quad E=0;\quad F=-\frac{2}{3}$$

در نتیجه

1. Ostrogradsky

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}$$

برای حل انتگرال اخیر، کسر $\frac{1}{x^3-1}$ را به مجموع کسرهای جزئی تجزیه می کنیم:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

از آنجا

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x-1).$$

با قرار دادن $x=1$ حاصل می شود $L=\frac{1}{3}$.

با متحد قرار دادن دوطرف و استفاده از نتیجهٔ فوق داریم:

$$L+M=0; \quad L-N=1,$$

یا

$$M=-\frac{1}{3}; \quad N=-\frac{2}{3}.$$

بنابر این

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

و

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

۵-۱-۱۶ به کمک روش استروگرادسکی انتگرالهای زیر را حساب کنید.

1. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$. جواب $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tan} x.$

2. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$. " $-\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tan} x - \frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$

3. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$. " $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48}\operatorname{arc\,tan} x.$

4. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx.$ " $x - \frac{x-1}{x^2-2x+2} + 2\ln(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arc\,tan}(x-1).$

6. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$. " $-\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{7(x-1)^7}.$

5. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$. " $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tan} x.$

۲ــ۵ انتگرالگیری از بعضی از عبارات اصم

انتگرال از چنین عبارات اصمی را می‌توان با تغییر متغیرهای مناسب، به انتگرال از عبارت گویا تبدیل کرد. این روش را «گویایی کردن» گویند.

I . اگر انتگران به صورت $R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right)$ باشد، می‌توان تغییر متغیر $x=t^m$ را بکار برد که m کوچکترین مضرب مشترک بین $q_1, q_2, \ldots, q_k$ است.

II . اگر انتگران به صورت توانهایی کسری از $\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ استفاده می‌کنیم که m مثل بالا انتخاب می‌شود.

۵ــ۲ــ۱ $$I=\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$$

حل . کوچکترین مضرب مشترک بین ۳ و ۶ عدد ۶ است، پس تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$x=t^6, \quad dx=6t^5\,dt,$$

بنابر این

$$I=6\int\frac{(t^6+t^4+t)\,t^5}{t^6\,(1+t^2)}dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt=$$
$$=6\int t^3\,dt+6\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\,t^4+6\arctan t+C.$$

عبارت اخیر نسبت به x به صورت زیر می‌باشد:

$$I=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

۵ــ۲ــ۲ $$I=\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx.$$

جواب $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$

۵ــ۲ــ۳ $$I=\int\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}$$

حل . انتگران تابعی اصم از $\sqrt[6]{2x-3}$ است پس فرض می کنیم $2x-3=t^6$ از آنجا

$$dx=3t^5\,dt;\quad (2x-3)^{\frac{1}{2}}=t^3;\quad (2x-3)^{\frac{1}{3}}=t^2$$

بنابراین

$$I=\int\frac{3t^8}{t^2+1}dt=3\int(t^6-t^4+t^2-1)\,dt+3\int\frac{dt}{1+t^2}=$$
$$=3\frac{t^7}{7}-3\frac{t^5}{5}+3\frac{t^3}{3}-3t+3\arctan t+C.$$

که نسبت به x به صورت زیر نوشته می شود:

$$I=3\Big[\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}}\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}}-$$
$$-(2x-3)^{\frac{1}{6}}+\arctan(2x-3)^{\frac{1}{6}}\Big]+C.$$

۵-۲-۴ . $$I=\int\frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}.$$

جواب: $$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{\sqrt[3]{(t+2)^4}}{\sqrt[3]{t-1}\cdot\sqrt{t^2+t+1}}\right|+C,$$

که در آن $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$.

۵-۲-۵ $$I=\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$$

حل . چون انتگران تابعی از x و عبارت اصم $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ است، پس تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t;\quad \frac{2-x}{2+x}=t^3,$$

بنابراین

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3};\quad 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3};\quad dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

پس

$$I=-\int\frac{2(1+t^3)^2\,t\cdot 12t^2}{16t^6(1+t^3)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C.$$

و یا

$$I=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

۵-۲-۶ . $$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

حل. چون

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

تابعی از x و $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ است، بنابر این از تغییر متغیر

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t;\ \frac{x+2}{x-1}=t^4,$$

استفاده می کنیم از آنجا

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1};\quad x-1=\frac{3}{t^4-1};\quad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx=\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt.$$

بنابر این

$$I=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3\,dt}{3\cdot 3t^4t(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C.$$

و یا

$$I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

۵ـ۲ـ۷ $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ جواب: $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+C.$

۵ـ۲ـ۸ $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. جواب: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

۵ـ۲ـ۹ $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ جواب:

$$\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$$

۵ـ۲ـ۱۰ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

1. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$ جواب $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right].$

2. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$ « $\frac{3}{10a^2}\times\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right].$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.$ « $2\arctan\sqrt{x+1}.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ « $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x}).$

5. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$ « $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+$

$$+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right|+6\arctan\sqrt[6]{x}.$$

6. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$ جواب

$$\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}.$$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx.$ **جواب** $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\times\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}.$

8. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$ // $-2\arctan\sqrt{1-x}.$

9. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$ // $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|.$

10. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$ // $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{z^3-1},$

که در آن $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ ،

11. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$ // $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$

۳ــ۵ تغییر متغیرهای اویلر

انتگرالهای به صورت $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ به کمک **«تغییر متغیرهای اویلر»** حل می‌شوند:

$$(1)\ \sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a} \qquad a>0 \text{ اگر}$$

$$(2)\ \sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c} \qquad c>0 \text{ اگر}$$

$$(3)\ \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t$$

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \text{ اگر}$$

که در آن α **ریشه حقیقی** سه جمله‌ای ax^2+bx+c است.

۱ــ۳ــ۵ $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

حل . چون $a=1>0$ پس

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و جملات مساوی را از طرفین حذف می‌کنیم:

$$2x+2tx=t^2-2,$$

از آنجا

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}; \quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt;$$
$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

با توجه به مقادیر فوق داریم :

$$I=\int\frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\,2(1+t)^2}dt=\int\frac{(t^2+2t+2)\,dt}{(1+t)(t+2)^2}.$$

کسرهای معادل انتگران را تعیین می کنیم

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}$$

با استفاده از روش ضرایب مجهول، داریم $A=1,\ B=0,\ D=-2$. بنابر این

$$\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

و یا

$$I=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

۲ـ۳ـ۵ $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

حل . چون $c=1>0$ ، می توان تغییر متغیر اویلر را بکار برد :

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$$

از آنجا

$$(2t-1)x=(t^2-1)x^2; \quad x=\frac{2t-1}{t^2-1};$$
$$dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt; \quad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

بنابر این

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt,$$
$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{t+1}.$$

با روش ضرایب مجهول داریم :

$$A=2; \quad B=-\frac{1}{2}; \quad D=-3; \quad E=-\frac{3}{2}.$$

بنابر این

$$I=2\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-3\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1}=$$
$$=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C,$$

که در آن

$$t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$$

۳ـ۳ـ۵ $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

جواب ـ $-2\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}+1\right)+C.$

۳ـ۳ـ۴ $I=\int\frac{x\,dx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$

حل . چون $a<0$ و $c<0$ پس نمی‌توان از تغییر متغیرهای اویلر استفاده کرد. ولی سه جمله‌ای $7x-10-x^2$ دارای ریشه‌های حقیقی $\alpha=2,\ \beta=5$ است. بنابر این از تغییر متغیر سوم اویلر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)\,t$$

از آنجا

$$5-x=(x-2)\,t^2$$
$$x=\frac{5+2t^2}{1+t^2};\ dx=-\frac{6t\,dt}{(1+t^2)^2};$$
$$(x-2)\,t=\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

بنابر این

$$I=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C,$$

که در آن

$$t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$$

۳ـ۳ـ۵ انتگرالها زیر را با تغییر متغیرهای اویلر حل کنید.

1 $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$. **جواب** $2\ln|\sqrt{x^2+2x+4}-x|-$
$-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1|+C.$

$2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$. جواب $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$

$3.\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. // $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C.$

$4.\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ // $\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{15}+C.$

$5.\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ // $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right|+C.$

$.6.\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. // $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|+C.$

$.7.\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. // $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}}+C.$

$.8.\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx.$ // $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C.$

$9\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. // $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C.$

$10\int \sqrt{2x-x^2}\,dx.$ // $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]+C.$

$11\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. // $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$

$12\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. // $\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}\right|+C.$

$13\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx.$ // $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C.$

$14.\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx.$ // $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C.$

$15.\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx.$ // $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C.$

۴ـ۵ سایر روشهای انتگرالگیری از عبارات اصم

چون در اغلب مواقع، تغییر متغیرهای اویلر باعث زحمت و کندی محاسبه می شوند، لذا اگر روش دیگر و ساده‌تری برای محاسبه انتگرال پیدا نکردیم از تغییر متغیرهای اویلر استفاده می کنیم. برای محاسبه انتگرالهای

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx,$$

روشهای ساده‌تری بکار برده می رود.

I. انتگرال

$$\mathrm{I} = \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

را با تغییر متغیر $x+\frac{b}{2a}=t$ به صورت زیر می نویسیم:

$$I = M_1 \int \frac{t\, dt}{\sqrt{at^2+K}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+K}},$$

که در آن $M_1,\ N_1,\ K$ ضرایب جدید هستند. انتگرال اولی به یک انتگرال از تابع نمائی تبدیل می شود و انتگرال دومی، اگر $a>0$، به انتگرال از تابع لگاریتمی و اگر $a<0,\ K>0$، به صورت $\arcsin$ در می آید.

II. انتگرال

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

که $P_m(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m است با فرمول کاهش زیر قابل محاسبه است

$$\int \frac{P_m(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (1)$$

که $P_{m-1}(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ $m-1$ بوده و K یک عدد ثابت است. برای تعیین ضرایب $P_{m-1}(x)$ و عدد ثابت K، از روش ضرایب مجهول استفاده می کنیم.

III. انتگرال

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

با تغییر متغیر

$$x-a_1=\frac{1}{t}.$$

به انتگرال حالت قبل تبدیل می شود.

IV. جهت آشنایی با تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی، به بخش (۷ـ۵)

مراجعه کنید.

۵ـ۴ـ۱ $I=\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}.$

حل. با استفاده از تغییر متغیر $2x+1=t$ داریم:

$$x=\frac{t-1}{2},\qquad dx=\frac{1}{2}\,dt$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{(t+5)\,dt}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{1}{4}\sqrt{t^2-4}+\frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C.$$

و یا

$$I=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C.$$

۵ـ۴ـ۲ $I=\int\frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$

جواب: $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right)+C.$

۵ـ۴ـ۳ $I=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

حل. در اینجا $P_m(x)=x^3-x-1$ ، پس

$$P_{m-1}(x)=Ax^2+Bx+D.$$

انتگرال به صورت زیر بدست می آید:

$$I=(Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2+2x+2}+K\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

با مشتقگیری از طرفین، داریم:

$$I'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=$$
$$=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+(Ax^2+Bx+D)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+$$
$$+\frac{K}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

بعد از مخرج مشترک گرفتن، صورت کسرهای دو طرف را معادل قرار می دهیم:

$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+D)(x+1)+K.$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های هم درجه با هم، دستگاه معادلات زیر حاصل می شوند :

$$2A+A=1, \qquad B+4A+B+A=0;$$
$$2B+4A+D+B=-1; \qquad 2B+D+K=-1.$$

از حل این دستگاه داریم :

$$A=\frac{1}{3}; \quad B=-\frac{5}{6}; \quad D=\frac{1}{6}; \quad K=\frac{1}{2}.$$

پس

$$I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

که در آن

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

۴ـ۴ـ۵ $I=\int\sqrt{4x^2-4x+3}\,dx.$

حل . انتگرال را به صورت زیر می نویسیم :

$$I=\int\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx=(Ax+B)\sqrt{4x^2-4x+3}+K\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}.$$

با استفاده از روش ضرایب مجهول داریم :

$$I=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)+C.$$

۵ـ۴ـ۵ $\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx.$ **جواب:** $\frac{3x^2+x-1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}+C$

۶ـ۴ـ۵ $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

جواب: $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

۷ـ۴ـ۵ $I=\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}$

حل . انتگرال را به صورت زیر می نویسیم :

$$\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

کسرهای معادل $\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ را تعیین می کنیم :

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}$$

ضرایب به صورت زیر به دست می آیند :

$$A=\frac{5}{9};\quad B=-\frac{2}{3};\quad D=-\frac{5}{9}.$$

پس،

$$I=\int\left[\frac{5}{9(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)^2}-\frac{5}{9(x+2)}\right]\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}-$$
$$-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

انتگرال اول با تغییر متغیر $x-1=\frac{1}{t}$ و انتگرالهای دوم و سوم با تغییر متغیر $x+2=\frac{1}{t}$ حل می شوند که حل مشروح آن به دانشجو محول می شود.

۸ــ۴ــ۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

1. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

جواب: $\frac{1}{3}(x^2-14x+111)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C.$

2. $\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx.$

جواب $\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln|4x+5+$
$+2\sqrt{4x^2+10x+14}|+C.$

3. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

جواب: $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{(x+1)}+C.$

4. $\int\frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$ جواب $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}+C.$

5. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$ 〃 $-\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}+C.$

6. $\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$ 〃 $\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$

راهنمایی: از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کنید.

7. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx.$

جواب: $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right).$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$ جواب $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|.$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}.$ // $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ // $\arcsin(2x-1).$

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$ // $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|.$

13 $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx.$ // $3\sqrt{x^2-4x+5}.$

14. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$ // $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}.$

15. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$ // $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}\,(x>\sqrt{2}).$

16 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}.$ // $-\arcsin\frac{1}{x+1}.$

17 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx.$ // $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right).$

18 $\int \sqrt{x-x^2}\,dx.$ // $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1).$

19. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx.$ // $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}.$

20 $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}.$ // $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|.$

21 $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}\,dx.$ // $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}.$

22. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$ // $\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right).$

23 $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$ // $-\ln\left|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}\right|.$

24. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$ // $\frac{2x+3}{8}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{16}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right).$

25 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ // $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}.$

26. $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ // $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\times\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

27. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$ // $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}.$

$28\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$. جواب $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}$.

$29\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

جواب: $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x+1}+\frac{19}{8}\ln\times(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$.

۵ـ۵ انتگرالگیری از دوجمله‌ای دیفرانسیلی

انتگرال $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ که در آن $m,\ n,\ p$ اعداد گویا هستند فقط در سه حالت زیر با انتگرال توابع مقدماتی بیان می شود:

حالت I. p عددی صحیح است. اگر $p>0$ ، پرانتز را به وسیله دوجمله‌ای نیوتن بسط می دهیم، ولی اگر $p<0$ ، در اینصورت فرض می کنیم $x=t^k$ که k مخرج مشترک m و n است.

حالت II. $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح است. فرض می کنیم $a+bx^n=t^\alpha$ که α مخرج کسر p است.

حالت III. $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح است فرض می‌کنیم $a+bx^n=t^\alpha x^n$ که α مخرج کسر p است.

۵ـ۵ـ۱ $I=\int\sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2dx$

حل. انتگرال را به صورت

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^2dx.$$

می نویسیم چون $p=2$ ، پس حالت اول است.

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx=\int\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{5}{6}}+4x^{\frac{1}{3}}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+3x^{\frac{4}{3}}+C.$$

۵ـ۵ـ۲ $I=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx.$ جواب: $3\arctan\sqrt[3]{x}+C.$

۵ـ۵ـ۳ $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

حل. $I=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$ در اینجا

$$m=-\frac{2}{3};\ n=\frac{1}{3};\ p=\frac{1}{2};\ \ \frac{m+1}{n}=\frac{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}{\frac{1}{3}}=1$$

پس حالت دوم است و از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم :

$$1+x^{\frac{1}{3}}=t^2;\qquad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2t\,dt.$$

بنابراین

$$I=6\int t^2\,dt=2t^3+C=2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

۵ـ۵ـ۴ $$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}dx.$$

جواب: $\frac{2}{3}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}-\frac{12}{5}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C.$

۵ـ۵ـ۵ $$I=\int x^5\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}}dx.$$

جواب: $\frac{3}{22}(1+x^2)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{8}{3}}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{\frac{5}{3}}+C.$

۵ـ۵ـ۶ $$I=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

حل . در این انتگرال

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=-\frac{5}{2}\ \text{و}\ p=-\frac{1}{2}$$

چون

$$\frac{m+1}{n}+p=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3$$

پس حالت سوم است . فرض می کنیم $1+x^4=x^4t^2$ ، بنابراین

$$x=\frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}};\quad dx=-\frac{t\,dt}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}.$$

با توجه به مطالب فوق داریم :

$$I=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{t\,dt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2\,dt=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C.$$

و یا

$$I=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C.$$

۷ـ۵ـ۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

1 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ جواب $\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$

2. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}.$ $\qquad 3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C.$

3. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$ $\qquad \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)}{15}+C.$

4. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ $\qquad \frac{\sqrt{1+x^2}\,(2x^2-1)}{3x^3}+C.$

5 $\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$ $\qquad \frac{21}{32}\sqrt[7]{(1+\sqrt[3]{x^4})^8}+C.$

6. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$ $\qquad \frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}+C.$

7. $\int x^2(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$ $\qquad \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{x^{-4}+1}.$

9 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$ $\qquad \frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}},$

که در آن $z=\sqrt[3]{1+x^5}$

10 $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}.$ $\qquad -\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}.$

11 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$ $\qquad -2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}.$

۶ـ۵ انتگرالگیری از توابع مثلثاتی و هذلولوی

I . انتگرال به صورت

$$I = \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

که در آن m و n اعداد گویا هستند قابل تبدیل به انتگرال دو جمله دیفرانسیلی می باشد

$$I = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, \quad t = \sin x$$

و بنابر این فقط در سه حالت زیر به انتگرال از توابع مقدماتی تبدیل می شود :

(۱) n فرد (یا $\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است)،

(۲) m فرد (یا $\frac{m+1}{2}$ عددی صحیح است)،

(۳) $m+n$ زوج (یا $\frac{m+1}{2}+\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است).

اگر n یک عدد فرد باشد، تغییر متغیر $\sin x = t$ را بکار می بریم.

اگر m یک عدد فرد باشد، از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می کنیم.

اگر $m+n$ زوج باشد، تغییر متغیر $\tan x = t$ (یا $\cot x = t$) را بکار می بریم.

در حالت خاص، این تغییر متغیر برای انتگرالهای

$$\int \tan^n x\, dx \quad \text{یا} \quad \int \cot^n x\, dx$$

وقتی مناسب است که n یک عدد صحیح و مثبت باشد. ولی این تغییر متغیر وقتی m و n هر دو مثبت باشند، مناسب نیست. اگر m و n اعداد زوج نامنفی باشند، تغییر متغیر مثلثاتی مناسب تر است،

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

و یا

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

۱ـ۶ـ۵ $I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\, dx.$

حل . در اینجا $m=3$ عددی فرد است. فرض می کنیم

$$\cos x = t,$$

از آنجا

$$I = -\int (1-t^2)\, t^{-\frac{2}{3}}\, dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} + C =$$
$$= 3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - 1\right) + C.$$

۲ـ۶ـ۵ $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$ **جواب:** $\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C.$

۳ـ۶ـ۵ $I = \int \sin^4 x \cos^6 x\, dx.$

حل. در اینجا m و n اعداد زوج و مثبت هستند. توان را کاهش می‌دهیم:

$$I = \frac{1}{16}\int (2\sin x \cos x)^4 \cos^2 x\, dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\,(1+\cos 2x)\, dx = I_1 + I_2.$$

انتگرال دوم را با تغییر متغیر زیر حل می‌کنیم:

$$\sin 2x = t,\ \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} dt,$$
$$I_2 = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{64}\int t^4\, dt = \frac{t^5}{320} + C = \frac{1}{320}\sin^5 2x + C.$$

برای محاسبه انتگرال اول، دوباره روش تقلیل توان را بکار می‌گیریم:

$$I_1 = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\, dx = \frac{1}{128}\int (1-\cos 4x)^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{128}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x\right) + \frac{1}{256}\int (1+\cos 8x)\, dx =$$
$$= \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + C.$$

و بالاخره

$$I = \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + \frac{1}{320}\sin^5 2x + C.$$

۴ـ۶ـ۵ $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

حل. در اینجا m و n هر دو زوج هستند، ولی یکی از آنها منفی است. پس فرض کنیم:

$$\tan x = t;\quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2;\quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

بنابر این

$$I = \int t^2 (1+t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

۵ــ۶ــ۵. $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx.$

حل . در اینجا می‌توان فرض کرد $\cot x = t$ ، ولی راحت‌تر آن است که به صورت زیر عمل کنیم :

$$I = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x\right) dx =$$
$$= -\cot x - 2x + \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx =$$
$$= -\left(\cot x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{2}\right) + C.$$

۵ــ۶ــ۶ $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$ **جواب:** $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$

۵ــ۶ــ۷. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}}.$

حل . در این انتگرال هر دو توان منفی است و $-\frac{11}{3} - \frac{1}{3} = -4$ یعنی مجموعشان زوج است ، بنابر این فرض می کنیم :

$$\tan x = t; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{\tan^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}} dt =$$
$$= \int \left(t^{-\frac{11}{3}} + t^{-\frac{5}{3}}\right) dt = -\frac{3}{8} t^{-\frac{8}{3}} - \frac{3}{2} t^{-\frac{2}{3}} + C =$$
$$= -\frac{3(1+4\tan^2 x)}{8\tan^2 x \sqrt[3]{\tan^2 x}} + C.$$

۵ــ۶ــ۸ انتگرال توابع $\tan x$ و $\cot x$ را حساب کنید.

حل .

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C;$$
$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

۵ــ۶ــ۹ $I = \int \tan^7 x\, dx$

حل . فرض کنیم

$$\tan x = t, \quad x = \arctan t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

داریم:

$$I=\int t^7 \frac{dt}{1+t^2}=\int\left(t^5-t^3+t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=$$
$$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C=$$
$$=\frac{1}{6}\tan^6 x-\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

۱۰ــ۶ــ۵ $(a)\ \ I=\int \cot^6 x\,dx; \quad (b)\ \ I=\int \tan^3 x\,dx.$

جواب:

$$(a)\quad -\cot x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\frac{1}{5}\cot^5 x-x+C;$$
$$(b)\ \frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

۱۱ــ۶ــ۵ $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$

حل . در اینجا توان $\sin x$ زوج است، لذا فرض می کنیم

$$\cos x=t, \qquad -\sin x\,dx=dt$$

و در نتیجه

$$I=\int\frac{\cos^4 x\sin x}{\sin^4 x}dx=-\int\frac{t^4}{(1-t^2)^2}dt.$$

برای محاسبه، ساده‌تر است که از روش جزء بجزء و با استفاده از روش کلی انتگرالگیری کسرهای گویا، عمل بکنیم (به مسئله **4.4.1** (b) مراجعه کنید):

$$u=t^3; \quad dv=\frac{t\,dt}{(1-t^2)^2}$$

پس

$$du=3t^2\,dt; \quad v=\frac{1}{2(1-t^2)}.$$

بنابراین

$$I=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2\,dt}{1-t^2}=$$
$$=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt=$$
$$=-\frac{t^3}{2(1-t^2)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

۱۲ـ۶ـ۵ $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$ جواب $-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$

II انتگرال $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ که R تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ است و با تغییر متغیر

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t \quad (-\pi<x<\pi).$$

به انتگرال کسرهای گویا تبدیل می شود. این تغییر متغیر را **«تغییر متغیر عمومی»** گویند.
در این حالت

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$
$$x=2\arctan t;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

بعضی مواقع به جای تغییر متغیر $\tan\frac{x}{2}=t$ ، تغییر متغیر $\cot\frac{x}{2}=t\ (0<x<2\pi)$، خیلی مفید است.
اغلب محاسبات، با تغییر متغیر عمومی کُند و پرزحمت است.
از حالات زیر می توان برای تشخیص تغییر **متغیر** ساده‌تر استفاده کرد:
(الف) اگر تساویهای

$$R(-\sin x, \cos x)\equiv -R(\sin x, \cos x)$$

یا

$$R(\sin x, -\cos x)\equiv -R(\sin x, \cos x)$$

برقرار باشند، توصیه می شود که در حالت اول از تغییر متغیر $\cos x=t$ و در حالت دوم از تغییر متغیر $\sin x=t$ استفاده شود.
(ب) اگر تساوی

$$R(-\sin x, -\cos x)\equiv R(\sin x, \cos x)$$

برقرار باشد، بهتر است تغییر متغیر $\tan x=t$ یا $\cot x=t$ را بکار ببریم.
مثلاً با تغییر متغیر اخیر به انتگرال $\int R(\tan x)\,dx$ می رسیم.

۱۳ـ۶ـ۵ $I=\int \frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$

حل. فرض می کنیم

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

پس داریم :

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{(1+t^2)\,dt}{t\,(t^2-4t+3)}\,.$$

کسرهای معادل را به صورت زیر تعیین می کنیم :

$$\frac{1+t^2}{t\,(t-3)\,(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{D}{t-1}\,.$$

ضرایب به قرار زیر تعیین می شوند :

$$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{5}{3};\quad D=-1$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\tan\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

۱۴ــ۶ــ۵ . $I=\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$ **جواب:**

$$\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

۱۵ــ۶ــ۵ . $I=\int\frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$

حل هرگاه در عبارت $\frac{1}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$ ، $\sin x$ را به $-\sin x$ تبدیل کنیم ، علامت کسر تغییر می کند. پس بهتر است از تغییر متغیر

$$t=\cos x;\ \ dt=-\sin x\,dx$$

استفاده شود .

$$I=-\int\frac{dt}{(1-t^2)\,(2t^2-1)}$$

چون

$$\frac{1}{(1-t^2)\,(1-2t^2)}=\frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)\,(1-2t^2)}=\frac{2}{1-2t^2}-\frac{1}{1-t^2}\,,$$

بنابراین

$$I=2\int\frac{dt}{1-2t^2}-\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

۵ـ۶ـ۱۶ $I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

حل . هرگاه $\sin x$ و $\cos x$ را به قرینه خودشان تبدیل کنیم، علامت عبارت تغییر نمی کند، پس تغییر متغیر زیر مناسب است

$$t=\tan x;\quad dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

بنابراین

$$I=\int\frac{\tan^2 x\cdot\cos^4 x}{(\tan x+1)}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{t^2\,dt}{(t+1)(t^2+1)^2}$$

کسرهای معادل را تعیین کرده

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+D}{t^2+1}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^2}$$

ضرایب را حساب می کنیم

$$A=\frac{1}{4};\quad B=-\frac{1}{4};\quad D=\frac{1}{4};\quad E=\frac{1}{2};\quad F=-\frac{1}{2}.$$

پس

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt;$$

$$I=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$$

۵ـ۶ـ۱۷ $I=\int\frac{2\tan x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

حل . صورت و مخرج را به $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم و از تغییر متغیر

$$\tan x=t;\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt$$

استفاده می کنیم:

$$I=\int\frac{2\tan x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx=\int\frac{(2\tan x+3)\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2}=$$
$$=\int\frac{2t+3}{t^2+2}\,dt=\ln(t^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\ln(\tan^2 x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$$

۵ـ۶ـ۱۸ $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

حل. البته، این انتگرال بکمک تغییر متغیر عمومی $\tan\frac{x}{2}=t$ حل می شود، ولی اگر انتگران را به صورت زیر تغییر دهیم. محاسبه ساده‌تر می شود:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}=$$
$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x.$$

از آنجا

$$I=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx-\int\sec^2 x\,dx+\int dx=\frac{1}{\cos x}-\tan x+x+C.$$

۵ـ۶ـ۱۹ $I=\int\frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}\,dx$

حل. در اینجا می توان انتگرال را با تغییر متغیر $\tan x=t$ حل کرد، ولی اگر انتگران را به صورت زیر تغییر دهیم، محاسبه راحت‌تر می شود:

$$I=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^4 x\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\cos^4 x\sin^2 x}\,dx=$$
$$=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\tan^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}+2\tan x-\cot x=$$
$$=\frac{1}{3}\tan^3 x+2\tan x-\cot x+C.$$

III انتگرالگیری از توابع هذلولوی

انتگرالگیری از توابع هذلولوی، همانند انتگرالگیری از توابع مثلثاتی است. باید در محاسبات، دستورهای اساسی زیر را بخاطر داشته باشیم:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \quad \sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1);$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1); \quad \sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x.$$

اگر $\tanh \frac{x}{2} = t$ ، آنگاه $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$; $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$;

$$x = 2\,\mathrm{Artanh}\, t = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad (-1 < t < 1); \; dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

۵ــ۶ــ۲۰ $I = \int \cosh^2 x\, dx$

حل .

$$I = \int \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)\; dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

۵ــ۶ــ۲۱ $I = \int \cosh^3 x\, dx$

حل . چون توان $\cosh x$ فرد است، لذا فرض می‌کنیم

$$\sinh x = t; \; \cosh x\, dx = dt.$$

از آنجا

$$I = \int \cosh^2 x \cosh x\, dx = \int (1+t^2)\, dt = t + \frac{t^3}{3} + C =$$
$$= \sinh x + \frac{1}{3}\sinh^3 x + C.$$

۵ــ۶ــ۲۲ انتگرالهای زیر را حساب کنید

1 $\int \sinh^2 x \cosh^2 x\, dx$; **جواب** $-\frac{x}{8} + \frac{\sinh 4x}{32} + C$;

2. $\int \frac{dx}{\sinh x + 2\cosh x}$. // $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tanh\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

3. $\int \cos^3 x\, dx$. // $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

4. $\int \sin^5 x\, dx$. // $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$.

5. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$. // $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$.

6. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\, dx$. // $\frac{1}{4}\cos^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6 \frac{x}{2}$.

7. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$. // $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x|$.

8. $\int \sin^4 x\, dx$. // $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$.

9. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$ جواب $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}.$

10. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$ // $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$

11. $\int \cos^6 3x \, dx.$ // $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x.$

12 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ // $-\cot x-\frac{\cot^3 x}{3}.$

13 $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$ // $\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x.$

14. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$ // $-\frac{\cot^3 x}{3}-\frac{\cot^5 x}{5}.$

15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$ // $\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}-2\cot 2x.$

16. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}.$ // $\frac{1}{2}\tan^2 x+3\ln|\tan x|-\frac{3}{2\tan^2 x}-\frac{1}{4\tan^4 x}.$

17. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$ // $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}+2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$

18. $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx.$ // $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right].$

19. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$ // $\frac{-\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$

20. $\int \sec^5 4x \, dx.$ // $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x}+\frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x}+\frac{3}{32}\ln\left|\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

21. $\int \tan^2 5x \, dx.$ // $\frac{1}{5}\tan 5x-x.$

22. $\int \cot^3 x \, dx.$ // $-\frac{\cot^2 x}{2}-\ln|\sin x|.$

23. $\int \cot^4 x \, dx.$ // $-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x+x.$

24 $\int \left(\tan^3 \frac{x}{3}+\tan^4 \frac{x}{4}\right) dx.$ // $\frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3}+\tan^3\frac{x}{3}-3\tan\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x.$

25 $\int x \sin^2 x^2 \, dx.$ // $\frac{x^2}{4}-\frac{\sin 2x^2}{8}.$

26 $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$ // $-\frac{\cot^3 x}{3}.$

27 $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx.$ // $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}.$

28 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$ // $2\sqrt{\tan x}.$

29 $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}.$ // $\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1},$

که درآن $z=\sqrt{\tan x}.$

30. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$ // $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}.$

31. $\int \sin 10x \sin 15x \, dx.$ // $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}.$

32 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx.$ // $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}.$

33. $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}\,dx.$ جواب $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x.$

34. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx.$ // $\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b}{2}.$

35. $\int \sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,dt.$ // $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}.$

36. $\int \cos x\cos^2 3x\,dx.$ // $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin 7x}{28}.$

37. $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$ // $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x.$

38. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$ // $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-2}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|$

39. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|.$

40. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$ // $x-\tan\frac{x}{2}.$

41. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx.$ // $-x+\tan x+\sec x.$

42. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$ // $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-5}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|$

43. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$ // $\arctan\left(1+\tan\frac{x}{2}\right).$

44. $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx.$ // $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|.$

حل . فرض می کنیم

$$3\sin x+2\cos x\equiv\alpha(2\sin x+3\cos x)+\beta(2\sin x+3\cos x)'$$

از آنجا،

$$2\alpha-3\beta=3,\quad 3\alpha+2\beta=2$$

نتیجه می‌شود:

$$\alpha=\frac{12}{13},\quad \beta=-\frac{5}{13}$$

بنابراین

$$\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\times\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx=$$

$$=\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|.$$

45. $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx.$ جواب $-\ln|\cos x-\sin x|.$

46. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$ // $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right).$

47. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}.$ // $\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{5}}\right).$

48. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$. جواب $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\tan x+3-\sqrt{13}}{2\tan x+3+\sqrt{13}}\right|$.

49. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$. // $\frac{1}{5}\ln\times\left|\frac{\tan x-5}{\tan x}\right|$.

50. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$. // $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$.

51. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$. // $\ln(1+\sin^2 x)$.

52. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$. // $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$.

53. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$. // $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$.

54. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$.

جواب :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\times\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

راهنمائی:

$$\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}=\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{3-\sin x}.$$

55. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$. جواب $-x+2\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right|$.

راهنمائی:

$$\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}=-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}.$$

56. $\int \sinh^3 x\,dx$. جواب $\frac{\cosh^3 x}{3}-\cosh x$.

57. $\int \cosh^4 x\,dx$. // $\frac{3x}{8}+\frac{\sinh 2x}{4}+\frac{\sinh 4x}{32}$.

58. $\int \sinh^3 x\cosh x\,dx$. // $\frac{\sinh^4 x}{4}$.

59. $\int \sinh^2 x\cosh^2 x\,dx$. // $-\frac{x}{8}+\frac{\sinh 4x}{32}$.

60. $\int \frac{dx}{\sinh x\cosh^2 x}$. // $\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\cosh x}$.

61. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x\cosh^2 x}$. // $-2\coth 2x$.

62 $\int \tanh^3 x\,dx$. // $\ln(\cosh x)-\frac{\tanh^2 x}{2}$.

63. $\int \coth^4 x\,dx$. // $x-\coth x-\frac{\coth^3 x}{3}$.

64. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x+\cosh^2 x}$. // $\arctan(\tanh x)$.

65. $\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x}$.

جواب :

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \arctan (e^x \sqrt{5}) \quad \text{ویا} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{3 \tanh \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} \right)$$

66. $\int \frac{dx}{\tanh x - 1}$. جواب : $-\frac{\sinh^2 x}{2} - \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}$.

راهنمائی:

$$\frac{-1}{\sinh x - \cosh x} \equiv (\sinh x + \cosh x).$$

67 $\int \frac{\sinh x\, dx}{\sqrt{\cosh 2x}}$. جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} \cosh x + \sqrt{\cosh 2x})$.

۷ــ۵ محاسبه بعضی از انتگرالها بکمک تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی

در انتگرالگیری از توابع گویای وابسته به x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$، می توان آنها را بیکی از انتگرالهای زیر تبدیل کرد :

I. $\int R\,(t, \sqrt{p^2t^2+q^2})\,dt;$

II. $\int R\,(t, \sqrt{p^2t^2-q^2})\,dt;$

III. $\int R\,(t, \sqrt{q^2-p^2t^2})\,dt,$

که در آن

$$t = x + \frac{b}{2a};\ \ ax^2+bx+c = \pm p^2t^2 \pm q^2$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر می توان انتگرالهای I تا III را به عبارات گویایی از سینوس و کسینوس (مثلثاتی یا هذلولوی) تبدیل کرد :

I. $t = \frac{q}{p} \tan z$ یا $t = \frac{q}{p} \sinh z.$

II. $t = \frac{q}{p} \sec z$ یا $t = \frac{q}{p} \cosh z.$

III. $t = \frac{q}{p} \sin z$ یا $t = \frac{q}{p} \tanh z.$

۱ــ۷ــ۵ $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$

حل . داریم :

$$5+2x+x^2=4+(x+1)^2.$$

فرض می کنیم $x+1=t$، پس

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}=\int\frac{dt}{(4+t^2)^3}$$

انتگرالی از نوع I حاصل می شود که برای محاسبه آن از تغییر متغیر

$$t=2\tan z;\ dt=\frac{2dz}{\cos^2 z};\ \sqrt{4+t^2}=2\sqrt{1+\tan^2 z}=\frac{2}{\cos z}$$

استفاده می کنیم، داریم:

$$I=\frac{1}{4}\int\cos z\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\,\frac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}}+C=\frac{1}{4}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

۵—۷—۲ $$I=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$$

حل. چون $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ فرض می کنیم $x+1=t$; پس

$$I=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$$

دوباره به انتگرالی از نوع I می رسیم. تغییر متغیر $t=\sinh z$ را در نظر می گیریم. پس

$$dt=\cosh z\,dz;\quad \sqrt{t^2+1}=\sqrt{1+\sinh^2 z}=\cosh z.$$

بنابر این

$$I=\int\frac{\cosh z\,dz}{\sinh^2 z\cosh z}=\int\frac{dz}{\sinh^2 z}=-\coth z+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\sinh^2 z}}{\sinh z}+C=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.$$

۵—۷—۳ $$I=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$$

جواب: $$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C.$$

۴ــ۷ــ۵ $I=\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$

جواب : $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$

۵ــ۷ــ۵ $I=\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$

حل . از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم :

$$x=\cosh t;\quad dx=\sinh t\,dt.$$

بنابر این

$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt{(\cosh^2 t-1)^3}\sinh t\,dt=\int \sinh^4 t\,dt=\\&=\int\left(\frac{\cosh 2t-1}{2}\right)^2 dt=\\&=\frac{1}{4}\int\cosh^2 2t\,dt-\frac{1}{2}\int\cosh 2t\,dt+\frac{1}{4}\int dt=\\&=\frac{1}{8}\int(\cosh 4t+1)\,dt-\frac{1}{4}\sinh 2t+\frac{1}{4}t=\\&=\frac{1}{32}\sinh 4t-\frac{1}{4}\sinh 2t+\frac{3}{8}t+C.\end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned}t&=\operatorname{Arcosh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\\ \sinh 2t&=2\sinh t\cosh t=2x\sqrt{x^2-1};\\ \sinh 4t&=2\sinh 2t\cosh 2t=4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1).\end{aligned}$$

بنابر این

$$I=\frac{1}{8}x\,(2x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

۶ــ۷ــ۵ $I=\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$

حل . تغییر متغیر زیر را بکار می بریم :

$$x=\sin^2 t;\quad dx=2\sin t\cos t\,dt$$

و داریم

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}=\int\frac{2\,dt}{1+\sin t}=\\&=2\int\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt=2\tan t-\frac{2}{\cos t}+C=\end{aligned}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}}+C.$$

۷ـ۷ـ۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید

1. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$ جواب: $I=\arc\sin\frac{x+1}{2}+C.$

2. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$ // $I=\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C.$

3. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$ // $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}.$

4. $\int\sqrt{2+x^2}\,dx.$ // $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2}).$

5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx.$ // $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{9+x^2}).$

6. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$ // $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}).$

7. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx.$ // $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|.$

8. $\int\sqrt{x^2+x}\,dx.$ // $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|.$

9. $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$ // $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|.$

10. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx.$ جواب:

$$\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).$$

11. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$ جواب $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}.$

12. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}.$ // $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}.$

13. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ // $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

14. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$ // $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|.$

۸ـ۵ انتگرالگیری از سایر توابع غیر جبری

۱ـ۸ـ۵ $I=\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

حل. با استفاده از روش جزء بجزء داریم:

$$u=\ln x;\quad dv=\frac{dx}{x^2};$$
$$du=\frac{dx}{x};\quad v=-\frac{1}{x};$$
$$I=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

۲ـ۸ـ۵ $I=\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x}}$

جواب: $I=4\sqrt{1-x}+2\ln(2-x-2\sqrt{1-x})-2(1+\sqrt{1-x})\ln x+C.$

۳ـ۸ـ۵ $I=\int\frac{e^x\,dx}{(1+e^{2x})^2}$

حل. فرض می کنیم $e^x=t;\ e^x\,dx=dt$ ، داریم:

$$I=\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

دستور کاهش را بکار می بریم (مسئلهٔ ۱ـ۴ـ۴ را ببینید):

$$I=I_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2};$$
$$I=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan t+C=\frac{e^x}{2(1+e^{2x})}+\frac{1}{2}\arctan e^x+C.$$

۴ـ۸ـ۵ $I=\int e^{-x}\ln(e^x+1)\,dx.$

حل. با استفاده از روش جزء بجزء داریم:

$$u=\ln(e^x+1);\quad dv=e^{-x}\,dx;$$
$$du=\frac{e^x}{1+e^x}\,dx;\quad v=-e^{-x};$$
$$I=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{dx}{1+e^x}=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{e^x+1-e^x}{1+e^x}\,dx=$$
$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C.$$

۵ـ۸ـ۵ $I=\int\frac{e^{\alpha \arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ جواب: $I=e^{\alpha t}\frac{\alpha\cos t+\sin t}{\alpha^2+1}+C$ که در آن

$t=\arctan x$

۵ـ۸ـ۶ $I=\int\frac{x\arctan x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

حل . بروش جزء بجزء عمل می کنیم، داریم:

$$u=\arctan x;\quad dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$du=\frac{dx}{1+x^2};\quad v=\sqrt{1+x^2};$$

$$I=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$$

۵ـ۸ـ۷ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

1. $\int(x^2+1)^2e^{2x}\,dx.$ جواب $\frac{e^{2x}}{2}\times\left(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right).$

2. $\int x^2\cos^2 3x\,dx.$ // $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)$

3. $\int x\sin x\cos 2x\,dx.$ // $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}.$

4. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$ // $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x).$

5. $\int e^x\sin x\sin 3x\,dx.$ // $\frac{e^x}{2}\left(\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\sin 4x+\cos 4x}{17}\right).$

6. $\int xe^x\cos x\,dx.$ // $\frac{e^x}{2}[x(\sin x+\cos x)-\sin x].$

7. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$ // $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2).$

8 $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$ // $x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1}).$

9 $\int x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$ // $\frac{1}{3}\left[x^3\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2\right].$

10 $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$ جواب:

$$x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\times\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x.$$

11. $\int x\arccos(5x-2)\,dx.$ جواب:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\times\sqrt{20x-25x^2-3}.$$

12. $\int \sin x \sinh x \, dx.$ جواب $\dfrac{\sin x \cosh x - \cos x \sinh x}{2}.$

13. $\int \dfrac{dx}{2x^2-4x+9}.$ // $\dfrac{1}{\sqrt{14}} \arctan \dfrac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}.$

14. $\int \dfrac{x-5}{x^2-2x+2} dx.$ // $\ln \sqrt{x^2-2x+2} - 4 \arctan (x-1).$

15. $\int \dfrac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx.$ // $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{1}{4} \ln \left(x^2+x+\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \arctan (2x+1).$

16. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+5)}.$ // $\dfrac{1}{5} \ln \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+5}}.$

17. $\int \dfrac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}.$ // $2 \ln \left|\dfrac{x+3}{x+2}\right| - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}.$

18. $\int \dfrac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$ // $\dfrac{1}{2}\left(\ln \left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right| - \dfrac{1}{x+1}\right).$

19. $\int \dfrac{dx}{(x^2+2)^2}$ // $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right).$

20. $\int \dfrac{dx}{x^4-2x^2+1}.$ // $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2x}{1-x^2} + \ln \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right).$

21. $\int \dfrac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}.$ // $\dfrac{1}{6} \dfrac{x-2}{(x^2-x+1)^2} + \dfrac{1}{6} \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

22. $\int \dfrac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} dx.$ // $\dfrac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}.$

23. $\int \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx.$ // $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{3x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x^2}.$

24. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ // $\ln \left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right).$

25. $\int \dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx.$ // $\sqrt{2x} - \dfrac{3}{5} \sqrt[6]{(2x)^5}.$

26. $\int \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}.$ // $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}+1}.$

27. $\int \dfrac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} dx.$ // $\dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}.$

28. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}.$ // $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2 - 4 \ln (1+\sqrt[4]{5-x}).$

29. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$ // $\ln |x+\sqrt{x^2-1}| - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

30. $\int \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$ // $-\dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}.$

31. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}.$ // $\dfrac{1}{2} \times \arcsin \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$

32. $\int \dfrac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$ // $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$

33. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$. جواب $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\times \arcsin\frac{2(x+1)}{x+4}$.

راهنمائی —

$$\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right).$$

34. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$. جواب $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|$.

35. $\int \sqrt{x-4x^2}\,dx$. " $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$.

36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. " $\ln\left|\frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$

37. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$. جواب

$$\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$$

38. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$. جواب $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$.

39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$. " $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$.

40. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. " $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$,

که در آن $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

41. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$. " $\frac{5}{2}\times\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$.

42. $\int \cos^4 x\,dx$. " $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

43. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}$. " $\ln|\tan x|-\cot^2 x-\frac{1}{4}\cot^4 x$.

44. $\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$. " $-\cot x-\frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3}$.

45. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}\,dx$. " $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[5]{\cos^3 x}$.

46. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,dx$. " $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\tan\frac{5x}{2}\right|$.

47. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$. " $\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}$.

48. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$. " $\frac{1}{4}\sin 2x$.

49. $\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$. " $\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

50. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$. " $-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$.

51 $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$. " $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{10}}\right)$.

52. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 2\sin^2 x}$. جواب: $\arctan(2\tan x + 1)$.

53. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$. " $\frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$.

54. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$. جواب:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right).$$

55. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}}\, dx$. جواب $\ln|\tan x + 2 + \sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}|$.

56. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}}\, dx$. " $\frac{1}{a} \times \ln(\sin ax + \sqrt{a^2 + \sin^2 ax})$.

57. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 3x}$. " $\frac{1}{3} x \tan 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$.

58. $\int x \sin^2 x\, dx$. " $\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$.

59. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$. " $\frac{e^{2x}}{4}(2x - 1)$.

60. $\int x e^{2x}\, dx$. " $\frac{1}{3} e^{x^3}$.

61. $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\, dx$. " $\frac{x^3}{3} \cdot \ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}$.

62. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. " $\sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

63. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\, dx$. " $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2} - \frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.

64. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$. " $-\frac{1}{1+\tan x}$.

65. $\int \frac{dx}{(\tan x + 1)\sin^2 x}$. " $\ln|1 + \cot x| - \cot x$.

66. $\int \sinh x \cosh x\, dx$. " $\frac{\sinh^2 x}{2}$.

67. $\int \frac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$. " $-2\cosh\sqrt{1-x}$.

68. $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}\, dx$. " $\frac{1}{5}\ln\cosh 2x$.

69. $\int \frac{x}{\sinh^2 x}\, dx$. " $-x\coth x + \ln|\sinh x|$.

70. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$. " $\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2|$.

71. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13}\, dx$. " $\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x - 3}{2}$.

72. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{\frac{1}{4}}}\, dx$. " $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$.

73. $\int \frac{2^x}{1-4^x}\, dx$. " $\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$.

74. $\int (x^2-1)\,10^{-2x}\,dx.$ جواب $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\times\left(x^2-1+\frac{x}{\ln 10}+\frac{1}{2\ln^2 10}\right).$

75. $\int \sqrt{e^x+1}\,dx.$ // $2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}.$

76. $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx.$ // $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\arctan x}{x}.$

77. $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}\,dx.$ // $\frac{1}{4}\left(x^4\arcsin\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right).$

78. $\int \cos(\ln x)\,dx.$ // $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x).$

79. $\int (x^2-3x)\sin 5x\,dx.$ جواب:

$$\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x+\frac{2}{5}x\sin 5x+3x\cos 5x+\frac{2}{25}\cos 5x-\frac{3}{5}\sin 5x\right).$$

80. $\int x\arctan(2x+3)\,dx.$ جواب:

$$\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\arctan(2x+3)+\frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\frac{x}{2}\right].$$

81. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx.$ جواب: $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}.$

82. $\int |x|\,dx.$ // $\frac{x|x|}{2}.$

83. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\sin^2 x}.$ // $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C.$

84. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ // $\arcsin(\ln x)+C.$

85. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$ // $3\sqrt[3]{\sin x}+C.$

86. $\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ // $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C.$

87. $\int \frac{x-\arctan x}{1+x^2}\,dx.$ // $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$

88. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx.$ // $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$

89. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ // $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C.$

90. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx.$ // $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C.$

۹ــ۵ روشهای انتگرالگیری (لیست دستورهای اساسی انتگرالگیری)

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
با تغییر متغیر $\varphi(x)=t$	$\int F[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$	۱
انتگرالگیری با روش جزء بجزء $\int f(x)\varphi'(x)\,dx=f(x)\varphi(x)-\int\varphi(x)f'(x)\,dx.$ مثلاً، این روش برای انتگرالهایی به صورت $\int p(x)f(x)\,dx$ بکار می رود که در آن $p(x)$ یک چند جمله‌ای و $f(x)$ تابعی است به یکی از حالات زیر: $e^{\alpha x}$; $\cos\alpha x$; $\sin\alpha x$; $\ln x$; $\arctan x$; $\arcsin x$, etc. وهمچنین این روش برای محاسبه انتگرالهایی بکار می رود که انتگران، حاصلضرب یک تابع نمایی در یک تابع سینوسی یا کسینوسی باشد.	$\int f(x)\varphi'(x)\,dx$	۲
با استفاده متوالی از روش جزء بجزء به انتگرالی از تابع $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ تبدیل می شود، یعنی $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx=f(x)\varphi^{(n-1)}(x)-$ $-f'(x)\varphi^{(n-2)}(x)+f''(x)\varphi^{(n-3)}(x)-\dots$ $\dots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x)+$ $+(-1)^n\int f^{(n)}(x)\varphi(x)\,dx$	$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx$	۳

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
٤	$\int e^{\alpha x} p_n(x)\, dx,$ که $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است.	با انتگرالگیری متوالی بروش جزء بجزء داریم (شماره ۳ را ببینید). $\int e^{\alpha x} p_n(x)\, dx=$ $=e^{\alpha x}\left[\frac{p_n(x)}{\alpha}-\frac{p'_n(x)}{\alpha^2}+\frac{p''_n(x)}{\alpha^3}-\dots+ +(-1)^n\frac{p_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right]+C$
۵	$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\, dx,$ $p^2-4q<0$	با تغییر متغیر $x+\frac{p}{2}=t$ حل می شود.
٦	$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$	دستور کاهش زیر را به کار ببرید: $I_n=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$
۷	$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$ که $\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک کسر واقعی است و $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\dots(x^2+px+q)^k\dots$	انتگران را به صورت زیر به کسرهای معادل تبدیل کنید $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_l}{(x-x_1)^l}+$ $+\frac{B_1}{(x-x_2)}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\dots+\frac{B_m}{(x-x_2)^m}+$ $+\dots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+$ $+\dots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\dots$
۸	$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx,$ که R یک تابع گویا نسبت به متغیرهایش است.	اگر k مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ باشد، تغییر متغیر $x=t^k$، انتگرال را به انتگرال کسرهای گویا تبدیل می کند.

شماره	انتگرال	روش انتگرالگیری
۹	$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx,$ که R یک تابع گویاست	انتگرال با تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$ به یک انتگرال کسر گویا تبدیل می شود.
۱۰	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	انتگرال با تغییر متغیر $x+\frac{b}{2a}=t$ به مجموع انتگرالهای زیر تبدیل می شود: $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = M_1\int\frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}}+ N_1\int\frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}.$ انتگرال اول، یک انتگرال از یک تابع **نمائی** است و **دومی**، بکمک دستورهای اساسی انتگرالها، حساب می شود.
۱۱	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$ که R تابعی از x و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ است.	این نوع انتگرال بکمک «تغییر متغیرهای **اویلر**» به انتگرال کسر گویا تبدیل می شود. $\sqrt{ax^2+bx+c}=t \pm x\sqrt{a}\quad (a>0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx \pm \sqrt{c}\quad (c>0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)\quad (4ac-b^2<0).$ که x_1 ریشهٔ سه جمله ای ax^2+bx+c است. این انتگرال را می توان با تغییر متغیرهای مثلثاتی زیر نیز حساب کرد. $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t\quad (a<0,\ 4ac-b^2<0)\end{cases}$

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t\\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t \quad (a>0,\ 4ac-b^2<0)\end{cases}$ $x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan t\\ \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cot t \quad (a>0,\ 4ac-b^2>0)\end{cases}$		
اتحاد زیر را می نویسیم : $$\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+ +k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$ که $Q_{n-1}(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n-1$ است. از طرفین مشتق می گیریم و سپس دو طرف را به $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ضرب می کنیم اتحاد زیر حاصل می شود : $$P_n(x)\equiv Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+ +\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k,$$ که نتیجه این اتحاد، یک دستگاه $n+1$ معادله است که از حل آن ضرایب چند جمله‌ای $Q_{n-1}(x)$ و عدد ثابت k به دست می آید. و انتگرال $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ با روشی که در شماره ۱۰ دیدیم حل می‌شود $(M=0;\ N=1)$	$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$ که $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است.	۱۲

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
با تغییر متغیر $x-x_1=\frac{1}{t}$ به انتگرال شماره ۱۲ تبدیل می شود.	$\int\frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$	۱۳
این انتگرال فقط در سه حالت زیر به انتگرال توابع مقدماتی تبدیل می شود: (۱) p عددی صحیح باشد، (۲) $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح باشد، (۳) $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح باشد **حالت اول** الف. p عددی صحیح و مثبت است. مقدار $(a+bx^n)^p$ را با دستور دوجمله‌ای نیوتن حساب می کنیم و آنگاه انتگرال حساب می شود. ب. p عددی صحیح و منفی است. اگر k مخرج مشترک m و n باشد، تغییر متغیر $x=t^k$ را بکار می بریم، انتگرال تبدیل به یک انتگرال کسر گویا می شود. **حالت دوم** $\frac{m+1}{n}$ یک عدد صحیح است. هرگاه k مخرج کسر p باشد، تغییر متغیر $a+bx^n=t^k$ را بکار می بریم. **حالت سوم** $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح است. در این صورت اگر	$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ m, n, p اعداد گویا هستند (یک انتگرال دو جمله‌ای دیفرانسیلی).	۱۴

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
k مخرج کسر p باشد، از تغییر متغیر $a+bx^n=x^n t^k$ استفاده می کنیم.		
تغییر متغیر عمومی $\tan\frac{x}{2}=t$ را بکار ببرید. اگر $R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $\cos x=t$ استفاده کنید اگر $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$ آنگاه تغییر متغیر $\sin x=t$ را بکار ببرید اگر $R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$ آنگاه از تغییر متغیر $\tan x=t$ استفاده کنید	$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$	۱۵
با توجه به $\sinh x=\frac{2t}{1-t^2};\ \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{2dt}{1-t^2}$ از تغییر متغیر $\tanh\frac{x}{2}=t$ استفاده کنید.	$\int R(\sinh x,\ \cosh x)\,dx$	۱۶
با استفاده از فرمولهای زیر، حاصلضرب توابع مثلثاتی را به مجموع یا تفاضل تبدیل کنید: $\sin ax\sin bx=$ $=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$	$\int \sin ax\sin bx\,dx$ $\int \sin ax\cos bx\,dx$ $\int \cos ax\cos bx\,dx$	۱۷

روش انتگرالگیری	انتگرال	شماره
$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$ $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$		
هرگاه m عددی طبیعی و فرد باشد، تغییر متغیر $\cos x = t$ را بکار ببرید. هرگاه n عددی طبیعی و فرد باشد تغییر متغیر $\sin x = t$ بکار می رود. هرگاه $m+n$ عددی منفی و زوج باشد، تغییر متغیر $\tan x = t$ بکار می رود. هرگاه m و n اعداد زوج نا منفی باشند از دستورهای زیر استفاده می شود: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$	$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ m و n اعداد صحیح هستند	۱۸
انتگرال با تغییر متغیر $\sin x = t$ به انتگرال دو جمله ای دیفرانسیلی تبدیل می شود: $\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \int t^p (1-t^2)^{q-1} dt$ (شماره ۱۴ ملاحظه شود).	$\int \sin^p x \cos^q x \, dx$ $(0 < x < \pi/2)$, p و q اعداد گویا هستند.	۱۹
انتگرال با تغییر متغیر $e^{ax} = t$ به یک انتگرال کسر گویا تبدیل می شود.	$\int R(e^{ax})\, dx$	۲۰

جدول مختصر انتگرالها

۱. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

۲. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq ۱, \quad a > ۰$

۳. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۴. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۵. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a(n+۱)} + C, \quad n \neq -۱$

۶. $\int (ax+b)^{-۱}\,dx = \frac{۱}{a}\ln|ax+b| + C$

۷. $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+۱}}{a^۲}\left[\frac{ax+b}{n+۲} - \frac{b}{n+۱}\right] + C, n \neq -۱, -۲$

۸. $\int x(ax+b)^{-۱}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^۲}\ln|ax+b| + C$

۹. $\int x(ax+b)^{-۲}\,dx = \frac{۱}{a^۲}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

۱۰. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{۱}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

۱۱. $\int (\sqrt{ax+b})^n\,dx = \frac{۲}{a}\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+۲}}{n+۲} + C, \quad n \neq -۲$

۱۲. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = ۲\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

۱۳. (آ) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{۲}{\sqrt{-b}}\tan^{-۱}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C,$ اگر $b < ۰$

(ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{۱}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C;$ اگر $b > ۰$

۱۴. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

۱۵. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

۱۶. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۷. $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۱۸. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

۱۹. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

۲۰. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C$$

۲۱. $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۲. $$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۳. $$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\sinh^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$$

۲۴. $$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$$

۲۵. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$$

۲۶. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$$

۲۷. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$$

۲۸. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}$$

۲۹. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۳۰. $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$$

۳۱. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$$

۶۴. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

۶۵. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + C$

۶۶. $\displaystyle\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

۶۷. $\displaystyle\int \frac{\sin ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + C$

۶۸. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax$

$n \neq -m$. (اگر $n = -m$، از شمارهٔ ۸۶ استفاده کنید)

۶۹. $\displaystyle\int \sin^n ax \cos^m ax \, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx$

$m \neq -n$ (اگر $m = -n$، از شمارهٔ ۸۷ استفاده کنید)

۷۰. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

۷۱. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \sin ax + \sqrt{c^2 - b^2} \cos ax}{b + c \sin ax}\right| + C,$

$b^2 < c^2$

۷۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

۷۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

۷۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \tan \frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

۷۵. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2} \sin ax}{b + c \cos ax}\right| + C,$

$b^2 < c^2$

۷۶. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C$

۷۷. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C$

۷۸. $\displaystyle\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$

۷۹. $\displaystyle\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$

۸۰. $\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

۸۱. $\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$

۸۲. $\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

۸۳. $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

۸۴. $\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{q}\tan ax - x + C$

۸۵. $\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

۸۶. $\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۸۷. $\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۸۸. $\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

۸۹. $\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

۹۰. $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

۹۱. $\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

۹۲. $\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۹۳. $\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۹۴. $\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

۹۵. $\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

۹۶. $\int \sin^{-1} ax\, dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

۳۲. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$

۳۳. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$

۳۴. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$

۳۵. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$

۳۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

۳۷. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$

۳۸. $\int (\sqrt{x^2 - a^2})^n\,dx = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{x^2 - a^2})^{n-2}\,dx, n \neq -1$

۳۹. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2 - a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n-2}}, \quad n \neq 2$

۴۰. $\int x(\sqrt{x^2 - a^2})^n\,dx = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

۴۱. $\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$

۴۲. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

۴۳. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}\,dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$

۴۴. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + C$

۴۵. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

۴۶. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$

۴۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

۴۸. $\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

۴۹. $$\int (\sqrt{2ax - x^2})^n \, dx = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}\, dx$$

۵۰. $$\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{(n-3)}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}}$$

۵۱. $$\int x\sqrt{2ax-x^2}\, dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$

۵۲. $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\, dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$

۵۳. $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\, dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

۵۴. $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\sin^{-1}\frac{x-a}{a} - \sqrt{2ax-x^2} + C$$

۵۵. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$$

۵۶. $$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

۵۷. $$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

۵۸. $$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

۵۹. $$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

۶۰. $$\int \sin^n ax\, dx = \frac{-\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx$$

۶۱. $$\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$$

۶۲. (آ) $$\int \sin ax\cos bx\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

(ب) $$\int \sin ax\sin bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

(ج) $$\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

۶۳. $$\int \sin ax\cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

۹۷. $\int \cos^{-۱} ax\, dx = x \cos^{-۱} ax - \frac{۱}{a}\sqrt{۱ - a^۲x^۲} + C$

۹۸. $\int \tan^{-۱} ax\, dx = x \tan^{-۱} ax - \frac{۱}{۲a} \ln (۱ + a^۲x^۲) + C$

۹۹. $\int x^n \sin^{-۱} ax\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \sin^{-۱} ax - \frac{a}{n+۱}\int \frac{x^{n+۱}\, dx}{\sqrt{۱ - a^۲x^۲}}, \quad n \neq -۱$

۱۰۰. $\int x^n \cos^{-۱} ax\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \cos^{-۱} ax + \frac{a}{n+۱}\int \frac{x^{n+۱}\, dx}{\sqrt{۱ - a^۲x^۲}}, \quad n \neq -۱$

۱۰۱. $\int x^n \tan^{-۱} ax\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \tan^{-۱} ax - \frac{a}{n+۱}\int \frac{x^{n+۱}\, dx}{۱ + a^۲x^۲}, \quad n \neq -۱$

۱۰۲. $\int e^{ax}\, dx = \frac{۱}{a} e^{ax} + C$

۱۰۳. $\int b^{ax}\, dx = \frac{۱}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > ۰, \quad b \neq ۱$

۱۰۴. $\int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^۲}(ax - ۱) + C$

۱۰۵. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{۱}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-۱} e^{ax}\, dx$

۱۰۶. $\int x^n b^{ax}\, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-۱} b^{ax}\, dx, \quad b > ۰, \quad b \neq ۱$

۱۰۷. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^۲ + b^۲}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

۱۰۸. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^۲ + b^۲}(a \cos bx + \sin bx) + C$

۱۰۹. $\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x + C$

۱۱۰. $\int x^n \ln ax\, dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} \ln ax - \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲} + C, \quad n \neq -۱$

۱۱۱. $\int x^{-۱} \ln ax\, dx = \frac{۱}{۲}(\ln ax)^۲ + C$

۱۱۲. $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln |\ln ax| + C$

۱۱۳. $\int \sinh ax\, dx = \frac{۱}{a} \cosh ax + C$

۱۱۴. $\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$

۱۱۵. $\int \sinh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

۱۱۶. $\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

۱۱۷. $\int \sinh^n ax\, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 0$

۱۱۸. $\int \cosh^n ax\, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax\, dx. \quad n \neq 0$

۱۱۹. $\int x \sinh ax\, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C$

۱۲۰. $\int x \cosh ax\, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C$

۱۲۱. $\int x^n \sinh ax\, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax\, dx$

۱۲۲. $\int x^n \cosh ax\, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax\, dx$

۱۲۳. $\int \tanh ax\, dx = \frac{1}{a} \ln (\cosh ax) + C$

۱۲۴. $\int \coth ax\, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C$

۱۲۵. $\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$

۱۲۶. $\int \coth^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax + C$

۱۲۷. $\int \tanh^n ax\, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۱۲۸. $\int \cosh^n ax\, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)\, a} + \int \coth^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

۱۲۹. $\int \operatorname{sech} ax\, dx = \frac{1}{a} \sin^{-1} (\tanh ax) + C$

۱۳۰. $\int \operatorname{csch} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + C$

۱۳۱. $\int \operatorname{sech}^{۲} ax\, dx = \frac{۱}{a} \tanh ax + C$

۱۳۲. $\int \operatorname{csch}^{۲} ax\, dx = -\frac{۱}{a} \coth ax + C$

۱۳۳. $\int \operatorname{sech}^{n} ax\, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-۲} ax \tanh ax}{(n-۱)a} + \frac{n-۲}{n-۱}\int \operatorname{sech}^{n-۲} ax\, dx, \quad n \neq ۱$

۱۳۴. $\int \operatorname{csch}^{n} ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-۲} ax \coth ax}{(n-۱)a} - \frac{n-۲}{n-۱}\int \operatorname{csch}^{n-۲} ax\, dx, \quad n \neq ۱$

۱۳۵. $\int \operatorname{sech}^{n} ax \tanh ax\, dx = -\frac{\operatorname{sech}^{n} ax}{na} + C, \quad n \neq ۰$

۱۳۶. $\int \operatorname{csch}^{n} ax \coth ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n} ax}{na} + C, \quad n \neq ۰$

۱۳۷. $\int e^{ax} \sinh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{۲}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^{۲} \neq b^{۲}$

۱۳۸. $\int e^{ax} \cosh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{۲}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^{۲} \neq b^{۲}$

۱۳۹. $\int_{۰}^{\infty} x^{n-۱} e^{-x}\, dx = \Gamma(x) = (n-۱)!, \quad n > ۰.$

۱۴۰. $\int_{۰}^{\infty} e^{-ax^{۲}}\, dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > ۰$

۱۴۱. $\int_{۰}^{\pi/۲} \sin^{n} x\, dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{n} x\, dx$

$= \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (n-۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times n} \times \frac{\pi}{۲},$ هرگاه $n \geq ۲$ و زوج باشد

$= \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times (n-۱)}{۳ \times ۵ \times ۷ \times \cdots \times n},$ هرگاه $n \geq ۳$ و فرد باشد

فصل ششم

انتگرال معین

۱ــ۶ توضیح مطلب

مجموع انتگرال بالا ــ مجموع انتگرال پائین

تابع $f(x)$ را در نظر می گیریم که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده است. عبارت

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

را **مجموع انتگرال** این تابع گویند. که در آن

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

مجموع

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i$$

را **مجموع (انتگرال) بالا** و

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i$$

را **مجموع (انتگرال) پائین** نامند. که در آن

$$M_i = \sup f(x)\ [m_i = \inf f(x)] \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

حد مجموع انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{وقتی} \quad \max|\Delta x_i| \to 0$$

را **انتگرال معین** تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ گویند.

اگر این حد موجود باشد، تابع را در فاصله $[a, b]$ **انتگرالپذیر** گویند. هر تابع پیوسته، انتگرالپذیر است.

۱ـ۱ـ۶ در انتگرال

$$\int_0^\pi \sin x\,dx$$

فاصله $[0, \pi]$ را به ۳ و ۶ فاصله جزء مساوی تقسیم کنید و سپس مجموعهای انتگرال پائین و بالا را در هر حالت تعیین کنید.

حل. با نقاط زیر، فاصله $[0, \pi]$ را به سه **فاصله** مساوی تقسیم می کنیم

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \pi.$$

تابع $\sin x$ در فاصلهٔ $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ بطور یکنواخت صعودی است لذا در این صورت فاصله $m_0 = \sin 0 = 0, \quad M_0 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. کمترین مقدار تابع در فاصلهٔ $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ برابر $m_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و بزرگترین مقدار برابر $M_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ است. در فاصلهٔ $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ تابع $\sin x$ بطور یکنواخت نزول می کند. پس

$$m_2 = \sin\pi = 0, \quad M_2 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

چون هر Δx_k با $\frac{\pi}{3}$ برابر است، پس

$$s_3 = \sum_{k=0}^{2} m_k\,\Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.907,$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2} M_k\,\Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 2.86.$$

وقتی فاصله $[0, \pi]$ را با نقاط

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_5 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_6 = \pi,$$

به ۶ فاصله جزء مساوی تقسیم بکنیم، داریم:

$$m_0=0, \qquad M_0=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$
$$m_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \qquad M_1=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$m_2=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad M_2=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$
$$m_3=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad M_3=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$
$$m_4=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}, \qquad M_4=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$m_5=\sin\pi=0, \qquad M_5=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

و از آنجا

$$s_6=\frac{\pi}{6}(m_0+m_1+\dots+m_5)=\frac{\pi}{6}(1+\sqrt{3})\approx 1.43,$$
$$S_6=\frac{\pi}{6}(M_0+M_1+\dots+M_5)=\frac{\pi}{6}(3+\sqrt{3})\approx 2.48.$$

همانطور که توقع داریم، نامساویهای

$$s_3\leqslant s_6\leqslant\int_0^\pi \sin x\,dx\leqslant S_6\leqslant S_3$$

برقرارند (مقدار دقیق انتگرال برابر ۲ است).

۲ــ۱ــ۶ . به ازای چه مقادیری از $\delta>0$ نامساوی

$$\left|\int_0^\pi \sin x\,dx-\sum_{i=0}^{n-1}\sin\xi_k\,\Delta x_k\right|<0.001$$

از نامساوی $\max\Delta x_i<\delta$ نتیجه می شود؟

حل . چون $s_n<I_n<S_n$ ، پس برای برقراری نامساوی کافی است که تفاضل مجموعهای انتگرال بالا و پائین کمتر از ۰/۰۰۱ باشد:

$$0<S_n-s_n<0.001.$$

ولی

$$S_n-s_n=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\,\Delta x_i<\delta\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i),$$

که M_i و m_i بترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع $\sin x$ در فاصلهٔ $[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$ است. برای سادگی، فرض می کنیم که نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ یکی از نقاط مقسّم فاصله باشد و با استفاده از یکنواختی تابع $\sin x$ در فاصله های $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=2$$

در نتیجه نامساوی مورد نظر وقتی برقرار است که $0.001 > 2\delta$ یعنی $\delta < 0.0005$

(۳ــ 1 ــ ٦) نشان دهید که تابع دیریکله که به صورت

$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویاست}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ اصم است}\end{cases}$$

است در فاصله [۱ ، ۰] انتگرالپذیر نیست.

حل . در تقسیم فاصله [۱ ، ۰] و در انتخاب نقاط در داخل هر کدام، دو حالت در نظر می گریم.

(۱) تمام نقاط ξ_i گویا باشند،

(۲) تمام نقاط ξ_i اصم باشند.

در حالت اول مجموع انتگرال برابر واحد، و در حالت دوم برابر صفر است. پس هر طور که طول بزرگترین فاصله جزء را به صفر میل دهیم، مجموعهای انتگرال برابر صفر و برابر یک می شوند. بنابر این **مجموعهای** انتگرال حد ندارند. یعنی تابع دیریکله در فاصله [۱ ، ۰] انتگرالپذیر نیست.

(٤ــ 1 ــ ٦) فاصله پیموده شده بوسیله یک ذرّه مادی در یک سقوط آزاد در فاصله زمانی $t=a$ ثانیه $t=b$ ثانیه را به دست آورید .

حل . حرکت یک ذرّه مادی در سقوط آزاد، با شتاب ثابت g و سرعت اولیه $v_0=0$ انجام می گیرد. در نتیجه، سرعت در لحظهٔ t با نموسرعت در فاصله زمانی صفر تا t برابر است، یعنی، $v(t)=\Delta v$ در یک زمان کوتاه Δt ، نمو سرعت، تقریباً با حاصلضرب شتاب در لحظهٔ t بر Δt برابر است. ولی در این حالت، شتاب ثابت است، پس $\Delta v=g\Delta t$. چون $\Delta t=t-0=t$ ، بنابر این $v(t)=gt$

فاصله زمانی $t=a$ تا $t=b$ را به n فاصلهٔ مساوی **تقسیم می کنیم**، لذا در زمان Δt هر فاصله جزء برابر است با $\Delta t=\frac{b-a}{n}$ • فرض می کنیم در خلال هر یک از فاصله های زمانی، ذرّه مادی به طور یکنواخت و با سرعتی برابر با سرعت ابتدای آن فاصله، حرکت نماید، یعنی،

$$v_0=ga,$$

$$v_1=g\left(a+1\,\frac{b-a}{n}\right),$$
$$v_2=g\left(a+2\,\frac{b-a}{n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{n-1}=g\left[a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right]$$

از آنجا مسافت پیموده شده بوسیله متحرک در فاصله زمانی iام برابر است با $\frac{v_i\,(b-a)}{n}$ ، کل فاصله طی شده تقریباً برابر است با :

$$s\approx s_n=\frac{b-a}{n}(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})=$$
$$=\frac{b-a}{n}g\left[na+1\,\frac{b-a}{n}+2\,\frac{b-a}{n}+\ldots+(n-1)\,\frac{b-a}{n}\right]=$$
$$=(b-a)\,g\left[a+\frac{b-a}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

با افزایش n فاصله طی شده با دقت بیشتری بدست می‌آید. مقدار دقیق s با حد s_n وقتی $n\to\infty$ ، برابر است با :

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}g\,(b-a)\left[a+\frac{1}{2}(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=g\,(b-a)\left[a+\frac{1}{2}(b-a)\right]=\frac{g}{2}(b^2-a^2).$$

چون s_n به صورت

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}v_i\,\Delta t_i\qquad\left(\Delta t_i=\Delta t=\frac{b-a}{n}\right),$$

یک مجموع انتگرال است پس s از انتگرال زیر به دست می‌آید :

$$s=\int_a^b v\,dt=\int_a^b gt\,dt=\frac{g}{2}(b^2-a^2).$$

۵ــ۱ــ۶ با استفاده از تعریف ، انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x\,dx.$$

حل .بنا به تعریف

$$\int_0^1 x\,dx=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\,\Delta x_i \quad \text{وقتی} \quad \max\Delta x_i\to 0,$$

که در آن
$$0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1, \quad \xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}],$$
$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i.$$

۱ ــ فاصله بسته [۰، ۱] را به n فاصلهٔ مساوی، با نقاط $x_i=\frac{i}{n}\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ تقسیم می کنیم. طول هر فاصله جزء با $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ برابر است، هرگاه $n\to\infty$ داریم $\frac{1}{n}\to 0$.
نقطهٔ انتهایی هرفاصله جزء را نقاط
$$\xi_i:\ \xi_i=x_{i+1}=\frac{i+1}{n}\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$
انتخاب می کنیم. مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:
$$I_n=S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\quad(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$
حد این مجموع برابر است با
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$
پس
$$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

(۲) بوسیله این مثال نشان می دهیم که نقاط ξ_i به هر نحوی انتخاب شوند، حد مجموع انتگرال تغییر نمی کند. مثلاً نقطهٔ وسط فاصله ها را نقاط ξ_i در نظر می گیریم:
$$\xi_i=\frac{i+\frac{1}{2}}{n}\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$
مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:
$$I_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i+1}{2n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n^2}\left[1+3+5+\ldots+(2n-1)\right]=\frac{2n^2}{4n^2}=\frac{1}{2}$$
پس
$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}.$$

۶ــ۱ــ۶ بکمک تعریف، انتگرال زیر را حساب کنید:
$$\int_a^b x^m\,dx\quad(m\neq-1,\ 0<a<b).$$

حل . در این مثال برای راحتی محاسبه، نقاط زیر را بعنوان نقاط مقسّم انتخاب می کنیم:

$$x_0=a;\ x_1=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ \ldots,\ x_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},\ \ldots,\ x_n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n}}=b.$$

که یک تصاعد هندسی با قدر نسبت

$$q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}>1$$

به دست می آید. طول فاصله i ام برابر است با:

$$\Delta x_i=aq^{i+1}-aq^i=aq^i(q-1)$$

بنابر این طول بزرگترین فاصله برابر

$$\max\Delta x_i=aq^{n-1}(q-1)=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]$$

است که با زیاد شدن n به صفر میل می کند، زیرا $\lim\limits_{n\to\infty} q=1$.
نقاط انتهایی هر فاصله را نقاط

$$\xi_i=x_{i+1}=aq^{i+1}\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

انتخاب می کنیم. مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned}I_n&=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^m\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}a^mq^{(i+1)m}aq^i(q-1)=\\&=a^{m+1}(q-1)q^m\left[1+q^{m+1}+\ldots+q^{(n-1)(m+1)}\right]=\\&=a^{m+1}(q-1)q^m\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1}=(b^{m+1}-a^{m+1})q^m\frac{q-1}{q^{m+1}-1}\end{aligned}$$

حد عبارت را وقتی $\max\Delta x_i\to0$، یعنی $q\to1$ حساب می کنیم:

$$\lim I_n=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{q\to1}q^m\frac{q-1}{q^{m+1}-1}=(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{1}{m+1}$$

پس

$$\int_a^b x^m\,dx=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}).$$

۷ـ۱ـ۶ با استفاده از تعریف انتگرال مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

حل . فاصله [۲ ، ۱] را به n قسمت با نقاط $x_i \ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ تقسیم می کنیم که جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q=\sqrt[n]{2}$ هستند

$$x_0=1;\ x_1=q;\ x_2=q^2;\ x_3=q^3;\ \ldots;\ x_n=q^n=2,$$

طول فاصله جزء i ام برابر است با :

$$\Delta x_i=q^{i+1}-q^i=q^i\,(q-1),$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$ یا $q\to 1$ داریم

$$\max \Delta x_i=q^{n-1}\,(q-1)\longrightarrow 0$$

حال نقاط انتهایی هر فاصله را بعنوان نقاط منتخب در آن فاصله در نظر می گیریم

$$\xi_i=x_{i+1}=q^{i+1}$$

و مجموع انتگرال را تشکیل می دهیم :

$$I_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i}\,\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{q^{i+1}}\,q^i\,(q-1)=\frac{n}{q}\,(q-1)=\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\,n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{2^{\frac{1}{n}}}=\ln 2,$$

زیرا وقتی $n\to\infty$ ، داریم

$$2^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln 2$$

پس

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2.$$

۸ـ۱ـ۶ انتگرال

$$I=\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx,$$

را با توجه به مفهوم هندسی آنتگرال، حساب کنید.

حل. منحنی $y=\sqrt{25-x^2}$ نیمه فوقانی دایره $x^2+y^2=25$ است. آن قسمت از منحنی که متناظر تغییرات x از ۰ تا ۵ است، در ربع اول قرار دارد. پس مساحت ذوزنقه منحنی الضلع محدود به خطوط $x=5$; $y=0, x=0$ و $y=\sqrt{25-x^2}$ را حساب می کنیم که برابر مساحت ربع دایره $x^2+y^2=25$ است، یعنی $\frac{25\pi}{4}$. پس

$$I=\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{25\pi}{4}.$$

۹ــ۱ــ۶ انتگرال

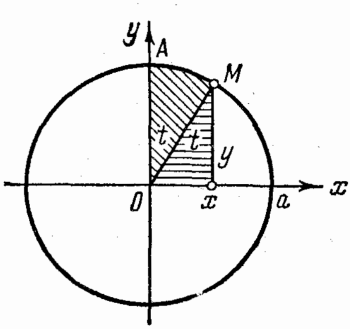
$$I=\int_1^5 (4x-1)\,dx.$$

را با توجه به مفهوم هندسی انتگرال، حساب کنید.

جواب: $I=4.\frac{3+19}{2}=44$ که مساحت ذوزنقه ای است به ارتفاع ٤=۱ــ۵ و قاعده های ۱۹=۱ــ۵×٤ و ۳=۱ــ۱×٤ .

۱۰ــ۱ــ۶ : ثابت کنید

$$I=\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\quad (0<x\leqslant a).$$



شکل ٦۰

حل. انتگرال

$$I=\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

مساحت S_{OAMx} قسمتی از دایره به شعاع a است که در ربع اول قرار دارد (شکل

۶۰) . این مساحت با مجموع مساحت مثلث OMx و مساحت قطاع OAM برابر است .

$$S_{OMx}=\frac{xy}{2}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

مساحت قطاع برابر است با

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}a^2t,$$

که $\sin t=\frac{x}{a}$ پس

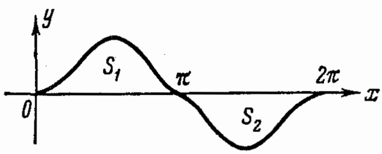
$$S_{OAM}=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},$$

در نتیجه

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

۱۱ــ۱ــ۶ با استفاده از مفهوم هندسی انتگرال، نشان دهید

$$\text{(a)}\ \int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0;\quad \text{(b)}\ \int_{-1}^{1}e^{-x^2}dx=2\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$



شکل ۶۱

حل . (a) نمایش هندسی تابع $y=\sin^3 x$ در شکل ۶۱، نشان داده شده است . نشان می دهیم مقدار مساحتی که در بالای محور x ها واقع است با مساحت واقع در زیر محور x ها برابر است . یعنی، فرض می کنیم $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ ، پس $x=\pi+x_1$ که $0\leqslant x_1\leqslant\pi$ و

$$\sin^3 x=\sin^3(\pi+x_1)=-\sin^3 x_1$$

بنابر این قسمت دوم را می توان با انتقال قسمت اول به اندازه π به طرف راست و استفاده از تقارن نسبت به محور x ها به دست آورد، پس

$$\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0$$

۱۲ــ۱ــ۶ تابع $f(x)=x^3$ در فاصله [۳ ، ۲ــ] مفروض است. این فاصله را به n قسمت مساوی تقسیم کنید و آنگاه (s_n) و (S_n) بترتیب، مجموعهای انتگرال پائین و بالا را حساب کنید.

جواب : $s_n=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};\ S_n=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$

۱۳ــ۱ــ۶ بکمک مفهوم هندسی انتگرال معین، ثابت کنید:

(a) $\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0;$ (b) $\int_0^{2\pi}\cos^3 x\,dx=0;$

(c) $\int_1^{2}(2x+1)\,dx=6;$ (d) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}.$

۱۴ــ۱ــ۶ باستفاده از حد مجموع، انتگرال

$$I=\int_1^4 x^3\,dx,$$

را محاسبه کنید، که در آن فاصله $[1,\ 4]$ به صورتهای زیر تقسیم شده است:

الف. به فاصله های مساوی،

ب. بوسیلهٔ نقاطی که تشکیل یک تصاعد هندسی می دهند،

درهردو حالت نقاط ξ_i را به‌روش زیر انتخاب کنید

(۱) ابتدای هر فاصله،

(۱) انتهای هر فاصله،

(۳) نقطه وسط فاصله های $[x_i,\ x_{i+1}]$.

۲ ــ ۶ محاسبه انتگرالهای معین با استفاده از دستور نیوتن ــ لایبنیتز

دستور زیر معروف به دستور **نیوتن-لایبنیتز** است:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

که $F(x)$ یک تابع اولیه تابع $f(x)$ است، یعنی،

$$F'(x) \equiv f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

۱ـ۲ـ۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

حل. چون $F(x) = \operatorname{arc\,tan} x$ یکی از توابع اولیه $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ است، لذا با استفاده‌از دستور نیوتن ـ لایبنیتز داریم:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tan} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tan} \sqrt{3} - \operatorname{arc\,tan} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

۲ـ۲ـ۶ انتگرالهای زیر حساب کنید:

$$\text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx; \qquad \text{(b)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx; \qquad \text{(c)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

جواب: (a) 1; (b) $\frac{3}{2}$; (c) $\frac{\pi}{6}$.

۳ـ۲ـ۶ تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^2 f(x)\, dx.$$

حل. با توجه به خواص انتگرال معین داریم:

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 \sqrt{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1).$$

۴ــ۲ــ۶ انتگرال

$$I=\int_{0}^{2}|1-x|\,dx.$$

را حساب کنید.

حل . چون

$$|1-x|=\begin{cases}1-x & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

پس

$$\int_{0}^{2}|1-x|\,dx=\int_{0}^{1}(1-x)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx=$$

$$=-\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_{0}^{1}+\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

۵ــ۲ــ۶ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I=\int_{a}^{b}\frac{|x|}{x}\,dx,\qquad (a<b)$$

حل . اگر $0\leqslant a<b$ ، آنگاه $f(x)=\frac{|x|}{x}=1$ بنابراین

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=b-a.$$

هرگاه $a<b\leqslant 0,$ آنگاه $f(x)=-1$ پس

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=-b-(-a)\ \ =a-b.$$

بالاخره اگر $a<0<b$ ، آنگاه آن را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{b}f(x)\,dx=b-(-a).$$

سه حالت فوق را می توان دریک فرمول خلاصه کرد:

$$\int_{a}^{b}\frac{|x|}{x}\,dx=|b|-|a|.$$

توجه : وقتی انتگرال معین را به کمک دستور نیوتن ــ لایبنیتز حساب می کنیم، باید به شرایط استفاده از این دستور توجه بکنیم. این دستور وقتی که تابع در فاصله $[a, b]$ پیوسته است و در تمام فاصلهٔ $[a, b]$ رابطهٔ $F'(x)=f(x)$ برقرار است، بکار می رود [$F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ است]. بویژه، باید تابع اولیه در تمام فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر یک تابع منفصل بعنوان تابع اولیه بکار برده شود، نتیجه غلط بدست می آید.

۶ــ۲ــ۶ اشتباه محاسبه زیر را بیابید:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left[\arctan(-\sqrt{3})-\arctan 0\right]=-\frac{\pi}{6},$$

که در آن

$$\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2}\ (x\neq 1).$$

حل. غلط بودن نتیجه بدیهی است زیرا، انتگرال یک تابع همه جا مثبت، منفی شده است. اشتباه مبتنی براین حقیقت است که تابع $\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ در نقطه $x=1$ انفصال از نوع اول است:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{4};\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

جواب صحیح عبارت است از:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan 0=\frac{\pi}{3}.$$

در اینجا می توان دستور نیوتن ــ لایبنیتز را بکار برد، زیرا تابع $F(x)=\arctan x$ در فاصله $[\sqrt{3}\text{ ، }0]$ پیوسته است و رابطه $F'(x)=f(x)$ در این فاصله برقرار است.

۷ــ۲ــ۶ اشتباه محاسبات زیر را بیابید:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+3\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)\Big|_0^{\pi}=0.$$

(انتگرال تابع همه جا مثبت، صفر شده است!).

حل . در اینجا دستور نیوتن ــ لایبنیتز را نمی توان بکار برد ، زیرا تابع اولیه

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)$$

دارای نقطه انفصال $x=\frac{\pi}{2}$ است . در حقیقت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

مقدار صحیح انتگرال با روش زیر حساب می شود :

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{1}{\cot^2 x+3}\,\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\cot x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

همچنین می توان انتگرال را بکمک تابع اولیه

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x).$$

حساب کرد. برای این منظور فاصله انتگرالگیری $[0,\pi]$ را به دو فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ تقسیم می کنیم . حال اگر در این فاصله ها حدهای $F(x)$ را وقتی $x\to\frac{\pi}{2}\mp 0$ حساب کنیم ، پیوستگی تابع تأیید می شود و لذا می توان دستور نیوتن ــ لایبنیتز را بکار برد

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

۸ـ۲ـ۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx.$$

حل.

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| =$$

$$= \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

بنابراین

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) + (0-(-1)) = 2.$$

توجه اگر این حقیقت را که $\cos x$ در فاصله $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ منفی است، نادیده بگیریم و بنویسیم

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x,$$

جواب غلط

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

نتیجه می شود.

۹ـ۲ـ۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx.$$

حل داریم

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\, |\sin x|.$$

چون دوره تناوب $|\sin x|$ ، π است، پس

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\sin x|\, dx =$$

$$= 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 200\sqrt{2}\,.$$

۱۰ــ۲ــ۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(a) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$;

(b) $I = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

(c) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

(d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$;

(e) $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

(f) $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$;

(g) $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$;

(h) $I = \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$;

(i) $I = \int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$;

(j) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$;

(k) $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

جواب:

(a) $\frac{7}{72}$; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; (c) π; (d) $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\pi}{4}$; (e) $\ln 2$; (f) 1;

(g) $\arctan e - \frac{\pi}{4}$; (h) $\frac{\pi}{16}$; (i) $\frac{14}{15}$; (j) $\frac{4}{3}$; (k) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

۳ـ۶ تخمین زدن (یا برآورد) یک انتگرال

انتگرال معین به عنوان تابعی از حدودش

۱ـ اگر در فاصله $a \leqslant x \leqslant b$ داشته باشیم $f(x) \leqslant \varphi(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

بویژه

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

۲ـ
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

که m کوچکترین مقدار تابع و M بزرگترین مقدار تابع در فاصله $[a, b]$ است (برآورد یک انتگرال).

۳ . اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b$$

(قضیه مقدار میانگین)

٤ . اگر توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند و بعلاوه علامت $\varphi(x)$ در این فاصله ثابت بماند، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad a < \xi < b$$

(تعمیم قضیه مقدار میانگین).

۵ . به ازای هر x از نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ ،

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x); \quad \frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = -f(x)$$

۱ـ۳ـ۶ انتگرالهای زیر را برآورد کنید:

$$\text{(a)}\ \ I=\int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx;\qquad \text{(b)}\ \ I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

$$\text{(c)}\ \ I=\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx.$$

حل . (a) چون تابع $f(x)=\sqrt{3+x^2}$ در فاصلهٔ [۳ ، ۱] به طور یکنواخت صعودی است پس $m=2, M=\sqrt{30}, b-a=2$ بنابر این آن را به صورت زیر برآورد می کنیم :

$$2\cdot 2\leqslant \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx\leqslant \sqrt{30}\cdot 2,$$

یا

$$4\leqslant \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx\leqslant 2\sqrt{30}\approx 10.95.$$

(b) چون

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}<0$$

پس $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در فاصله $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ نزولی است. بنابر این کوچکترین و بزرگترین مقدار آن به قرار زیر است :

$$m=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\quad M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

پس

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right),$$

یعنی

$$0.22\approx \frac{\sqrt{3}}{8}\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant \frac{\sqrt{2}}{6}\approx 0.24.$$

جواب : (c) $3<I<5$. **راهنمایی :** $m=f(2)=\frac{3}{2}$, $M=f(0)=\frac{5}{2}$.

۲ــ۳ــ۶ قدر مطلق انتگرال زیر را برآورد کنید

$$\int_{10}^{19} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx.$$

حل . چون $|\sin x| \leqslant 1$ ، پس به ازای $x \geqslant 10$ ، نامساوی زیر برقرار است :

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| < 10^{-8}$$

بنابر این

$$\left|\int_{10}^{19} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right| < (19-10)\,10^{-8} < 10^{-7}$$

(مقدار انتگرال برابر است با $\approx -10^{-8}$).

۳ـ۳ـ۶ کدام یک ازانتگرالهای زیر بزرگترند :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx, \qquad \int_0^1 x^3\,dx$$

حل . در فاصله $0 < x < 1$ داریم، $\sqrt{x} > x^3$ پس

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx > \int_0^1 x^3\,dx.$$

۴ـ۳ـ۶ نامساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\text{(a)}\;\; 0 < \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}; \quad \text{(b)}\;\; 1 < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e.$$

حل . (a) می دانیم وقتی $0 < x \leqslant 1$ ، آنگاه $0 < \dfrac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} < x^7$ پس

$$0 < \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \int_0^1 x^7\,dx = \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(b) چون به ازای $0 < x < 1$ نامساوی $1 < e^{x^2} < e$ برقرار است ، پس

$$\int_0^1 dx < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < \int_0^1 e\,dx.$$

۵ـ۳ـ۶ نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}\,dx < \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) \quad (R > 0).$$

حل . چون تابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ در فاصله $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ نزولی است (مسئلهٔ

(b) **6.3.1** را ببینید)، پس به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ،

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

بنابر این در این فاصله $\sin x > \frac{2}{\pi} x$ ، و از آنجا

$$e^{-R \sin x} < e^{-\frac{2R}{\pi} x}$$

و

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} x} dx = -\frac{\pi}{2R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi} x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}).$$

۶ـ۳ـ۶ توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله (a, b) انتگرالپذیرند. نامساوی زیر موسوم به نامساوی «**شوارتز ــ بونیا کفسکی**[1]» را ثابت کنید:

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx}.$$

حل. تابع

$$F(x) = [f(x) - \lambda g(x)]^2$$

را در نظر می گیریم که λ عدد حقیقی دلخواهی است. چون $F(x) \geqslant 0$ پس

$$\int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx \geqslant 0,$$

یا

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geqslant 0.$$

عبارت طرف چپ، یک سه جمله‌ای نسبت به λ است. با توجه به نامساوی، به ازای هر λ این سه جمله‌ای نامنفی است. پس مبین معادله نامثبت است، یعنی

$$\left\{\int_a^b f(x) g(x) dx\right\}^2 - \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leqslant 0.$$

بنابر این

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx},$$

---

1. Schwarz-Bunyakovsky

۷ــ۳ــ۶ مقدار انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

را برآورد کنید.

حل . با استفاده از تعمیم قضیه مقدار میانگین، داریم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sin \xi \operatorname{arc\,tan} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi \; (0 < \xi < 1).$$

چون تابع $\sin x$ در فاصله [۱ ، ۰] صعود می کند، پس $\sin \xi < \sin 1$ و تقریب اضافی آن برابر است با

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx < \frac{\pi}{4} \sin 1 \approx 0.64.$$

می‌توانیم مقدار آن را به صورت زیر هم، برآورد کنیم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+\xi^2} \int_0^1 \sin x \, dx = \frac{1}{1+\xi^2} (1-\cos 1) < 1-\cos 1 \approx 0.46.$$

۸ــ۳ــ۶ بکمک مفهوم هندسی، ثابت کنید:

(الف) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ صعود کند و منحنی آن در این فاصله تقعر داشته باشد، آنگاه

$$(b-a) f(a) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2};$$

(ب) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ صعودی و منحنی آن در این فاصله تحدب داشته باشد، آنگاه

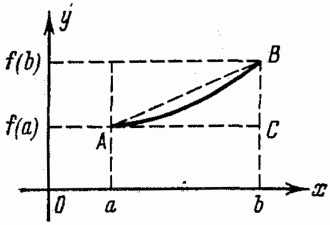
$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x) dx < (b-a) f(b).$$

حل . (الف) بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض می کنیم $f(x) > 0$. بویژه، تحدب منحنی بدین معنی است که منحنی در زیر وتری واقع است که نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ را بهم وصل می کند (شکل ۶۲). بنابراین مساحت ذوزنقه $aABb$ بزرگتر از مساحت ذوزنقه منحنی الضلعی است که از بالا به منحنی محدود است، یعنی

$$\int_a^b f(x)\,dx < S_{aABb} = (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

و برقراری نامساوی زیر طبق شکل بدیهی است،

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx$$



شکل ٦۲

۹ــ۳ــ٦ مطلوب است برآورد مقدار

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

با استفاده از:

(الف) قضیه مقدار میانگین در انتگرال معین،

(ب) نتیجه مسئلهٔ قبل،

(ج) نامساوی

$$\sqrt{1+x^4} < 1+\frac{x^4}{2},$$

(د) نامساوی شوارتزــبونیا کفسکی (مسئلهٔ **٦ــ۳ــ٦** را ببینید).

حل. (الف) با توجه به قضیهٔ مقدار میانگین داریم:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx = \sqrt{1+\xi^4}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

ولی

$$1 < \sqrt{1+\xi^4} < \sqrt{2},$$

بنابراین

$$1 < I < \sqrt{2} \approx 1.414.$$

(ب) چون

$$f''(x) = \frac{2x^2\,(x^4+3)}{(1+x^4)^{3/2}} > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

پس تابع $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ در فاصلهٔ [۰ ، ۱] محدب است. براساس مسئلهٔ قبلی داریم:

$$1<\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx<\frac{1+\sqrt{2}}{2}\approx 1.207.$$

(ج)

$$1<I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx<\int_0^1 \left(1+\frac{x^4}{2}\right)dx=1+\frac{1}{10}=1.1.$$

(د) با فرض $f(x)=\sqrt{1+x^4},\ g(x)=1$ و با توجه به نامساوی «شوارتز ــ بونیاکفسکی» داریم:

$$\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right|=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx=I<\sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx\cdot\int_0^1 1^2\,dx}=$$
$$=\sqrt{1.2}\approx 1.095.$$

۱۰ــ۳ــ۶ از توابع زیر نسبت به x مشتق بگیرید:

$$\text{(a)}\quad F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt \quad (x>0),$$

$$\text{(b)}\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \quad (x>0).$$

حل . (a) انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$F(x)=\int_{x^2}^{c} \ln t\,dt+\int_{c}^{x^3} \ln t\,dt=\int_{c}^{x^3} \ln t\,dt-\int_{c}^{x^2} \ln t\,dt,$$

که $c>0$ یک ثابت دلخواه است.

برای محاسبهٔ $F'(x)$ از مشتق توابع مرکب و از قضیهٔ مشتق از انتگرال نسبت به حد فوقانی، استفاده می کنیم:

$$F'_x(x)=\left[\int_c^{x^3} \ln t\,dt\right]'_{x^3}(x^3)'_x-\left[\int_c^{x^2} \ln t\,dt\right]'_{x^2}(x^2)'_x=\ln x^3\,3x^2-\ln x^2\,2x=$$
$$=(9x^2-4x)\ln x.$$

$$\text{(b)}\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{c} \cos(t^2)\,dt+\int_{c}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt=$$
$$=-\int_{c}^{\frac{1}{x}} \cos(t^2)\,dt+\int_{c}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt;$$

$$F'(x) = -\left[\int_c^{\frac{1}{x}} \cos(t^2)\,dt\right]'_{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\right)'_x + \left[\int_c^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt\right]'_{\sqrt{x}} (\sqrt{x})'_x =$$
$$= -\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x.$$

۱۱ـ۳ـ۶ از توابع زیر نسبت به x مشتق بگیرید:

$$\text{(a)}\quad F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt; \quad \text{(b)}\quad F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt.$$

جواب:

$$\text{(a)}\ \frac{\sin 2x}{x};\ \text{(b)}\ -\sqrt{1+x^4}.$$

۱۲ـ۳ـ۶ در دامنهٔ $x > 0$ ، نقاط اکسترمم تابع $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ را تعیین کنید:

حل . از تابع مشتق می گیریم:

$$F'(x) = \left[\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right]'_x = \frac{\sin x}{x}$$

نقاط بحرانی را تعیین می کنیم:

$$\sin x = 0 ، x = n\pi \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

مقدار مشتق مرتبه دوم به ازای این نقاط عبارت است از:

$$F''(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2};$$
$$F''(n\pi) = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{1}{n\pi}(-1)^n \neq 0.$$

چون مشتق مرتبه دوم در نقاط $x = n\pi\ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$ صفر نیست، پس این نقاط، نقاط اکسترمم تابع هستند. مثلاً اگر n زوج باشد مینیمم، و اگر n فرد باشد ماکزیمم هستند.

۱۳ـ۳ـ۶ مشتق y نسبت به x را از توابع پارامتری زیر به دست آورید:

$$x = \int_1^{t^3} \sqrt[3]{z}\ln z\,dz; \quad y = \int_{\sqrt{t}}^{3} z^2 \ln z\,dz.$$

حل . می دانیم که $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. مقادیر y'_t و x'_t را حساب می کنیم:

$$x'_t=\left(\int_1^{t^3}\sqrt[3]{z}\ln z\,dz\right)'_{t^3}(t^3)'_t=t\ln t^3\cdot 3t^2=9t^3\ln t;$$

$$y'_t=\left(\int_{\sqrt{t}}^{3}z^2\ln z\,dz\right)'_{\sqrt{t}}(\sqrt{t})'_t=-t\ln\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t;$$

از آنجا

$$y'_x=\frac{9t^3\ln t}{-\frac{1}{4}\sqrt{t}\ln t}=-36t^2\sqrt{t}\quad (t>0).$$

۱٤ـــ۳ـــ٦ حدهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x_2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3};\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}(\operatorname{arc\,tan} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+.1}};$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}.$$

جواب: $\text{(b)}\ \frac{\pi^2}{4}$.

حل. (a) در $x=0$ انتگرال $\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx$ برابر صفر است. براحتی می توان تحقیق کرد که می توان برای محاسبهٔ این حد از دستور هوپیتال استفاده کرد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right]_{x^2}(x^2)'_x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

در اینجا حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ وجود دارد. با استفاده از دستور هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{x^2}dx\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}=0.$$

۱۵ـــ۳ـــ٦ در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید:

$$\text{(a)}\ \int_0^y e^{-t^2}\,dt+\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt=0;$$

$$\text{(b)}\ \int_0^y e^t\,dt+\int_0^{x}\sin t\,dt=0;$$

$$\text{(c)}\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int_0^{y}\cos t\,dt=0.$$

جواب:

$$\text{(b)}\ \frac{dy}{dx}=-e^{-y}\sin x.$$

حل . (a) با در نظر گرفتن $y=y(x)$ ، از طرف چپ نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\left[\int_0^y e^{-t^2}\,dt\right]_y'\cdot\frac{dy}{dx}+\left[\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt\right]_{x^2}'(x^2)_x'=0;$$

$$e^{-y^2}\frac{dy}{dx}+\sin^2 x^2\cdot 2x=0.$$

از رابطه اخیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب می کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=-2xe^{+y^2}\sin^2 x^2.$$

(c)با در نظر گرفتن $y=y(x)$ ، از طرف چپ نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz\right]_x'+\left[\int_0^{y}\cos t\,dt\right]_y\frac{dy}{dx}=0.$$

از آنجا

$$\sqrt{3-2\sin^2 x}+\cos y\frac{dy}{dx}=0;\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}.$$

(۱۶ــ۳ــ۶)

(الف) نقاطاکسترمم‌و نقاط عطف منحنی تابع زیر را تعیین کنید:

$$I=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt;$$

(ب) انحنای منحنی به معادله زیر را تعیین کنید:

$$\text{(مارپیچ کارنو)}\quad \begin{cases} x=a\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^t\cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\\[2ex] y=a\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^t\sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt\end{cases}$$

حل . (الف) تابع بطور پیوسته در تمام نقاط محور حقیقی معین و مشتقپذیر است. مشتق آن، یعنی

$$I'_x = (x-1)(x-2)^2$$

در نقاط $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ صفر است و در گذشتن از x_1 علامت آن از منفی به مثبت تبدیل می شود ولی در همسایگی نقطهٔ x_2 علامتش ثابت است. بنابر این در نقطهٔ $x_1 = 1$، مینیمم است و در نقطهٔ $x_2 = 2$ اکسترمم وجود ندارد. مشتق دوم

$$I''_x = 3x^2 - 10x + 8$$

در نقاط $x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = 2$، صفر است و در گذشتن از این نقاط، علامت تغییر می کند. پس این نقاط، طول نقاط عطف منحنی هستند.

(ب) داریم:

$$x'_t = a\sqrt{\pi}\cos\frac{\pi t^2}{2},\quad y'_t = a\sqrt{\pi}\sin\frac{\pi t^2}{2},$$

پس

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \tan\frac{\pi t^2}{2},\quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\sqrt{\pi}\, t}{a\cos^3\frac{\pi t^2}{2}};$$

پس انحناء برابر است با

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\, t}{a}.$$

۱۷ـ۳ـ۶ ثابت کنید تابع $L(x)$ که در فاصله $(0,\ \infty)$ با انتگرال

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

تعریف می شود، یک معکوس تابع e^x است.

حل . مشتق عبارت است از

$$L'(x) = \frac{1}{x};\ (x > 0)$$

چون مشتق مثبت است. پس تابع $y = L(x)$ صعودی است، بنابر این یک تابع معکوس به صورت

$$x = L^{-1}(y)$$

دارد. مشتق تابع معکوس

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{L'(x)}=x,$$

است پس نتیجه می شود

$$x=Ce^{y}$$

(مسئلهٔ **۱۰ــ۱ــ۳** را ببینید) برای تعیین C فرض می کنیم $x=1$ ۰چون $L(1)=0$ ، یعنی ، $y|_{x=1}=0$ پس

$$1=Ce^{0}=C$$

این مطلب ثابت می کند که

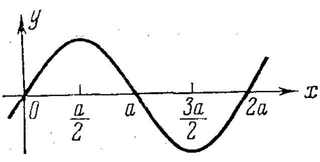
$$x=L^{-1}(y)=e^{y}.$$

۱۸ــ۳ــ۶ . نمایش هندسی تابع $y=f(x)$ در شکل ٦۳ نشان داده شده است . نمودار تابع (اولیه)

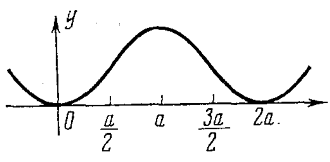
$$I=\int_0^x f(t)\,dt.$$

را مشخص نمائید .

حل . در فاصله $[0,\ a]$ ، تابع مثبت است ، درنتیجه ، تابع اولیه صعود می کند . در فاصله $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ مشتق تابع مفروض ، مثبت است ، پس منحنی $I=I(x)$ محدب است . در فاصلهٔ $\left[\frac{a}{2},\ a\right]$ مشتق تابع منفی است ، درنتیجه منحنی $I=I(x)$ مقعر است ، بنابراین نقطهٔ $x=\frac{a}{2}$ ، نقطهٔ عطف است . مطالعهٔ وضعیت منحنی در فاصلهٔ $[a,\ 2a]$ به طریق مشابه انجام می شود . چون در گذشتن از نقطهٔ $x_1=0$ مشتق $I'(x)=f(x)$ از علامت منفی به مثبت تبدیل می شود ، لذا این نقطهٔ مینیمم است ، و نقطهٔ $x_2=a$ ماکزیمم می باشد زیرا در این نقطه علامت مشتق از مثبت به منفی تبدیل می شود .



شکل ٦۳



شکل ٦٤

چون مساحتهای واقع در بالا و پائین محور x ها دو بدو در فاصله های به طول $2a$ حذف می شوند، پس $I(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2a$ است. با در نظر گرفتن تمام مطالبی که گذشت گراف تابع اولیه طبق شکل ٦٤ رسم می شود.

۱۹ــ۳ــ٦ چند جمله‌ای $P(x)$ را با کوچکترین درجه طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $x=1$ ماکزیممی برابر ٦ و در نقطهٔ $x=3$ مینیممی برابر ۲ داشته باشد.

حل . چون چند جمله ای در همه جا مشتقپذیر است. بنابر این، نقاط اکسترمم فقط می توانند جوابهای مشتق باشند. بعلاوه، مشتق چند جمله‌ای، یک چند جمله ای است. چند جمله ای با کوچکترین درجه که ریشه های $x_2=3$ و $x_1=1$ را داشته باشند، به صورت

$$a(x-1)(x-3)$$

است . بنابر این

$$P'(x)=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3).$$

چون در $x=1$ داریم $P(1)=6$ ، پس

$$P(x)=\int_1^x P'(x)\,dx+6=a\int_1^x (x^2-4x+3)\,dx+6=$$

$$=a\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-1\frac{1}{3}\right)+6.$$

برای تعیین a از شرط $P(3)=2$ استفاده می کنیم که از آنجا، $a=3$. بنابر این

$$P(x)=x^3-6x^2+9x+2$$

۲۰ــ۳ــ٦ چند جمله‌ای $P(x)$ را با کوچکترین درجه طوری تعیین کنید که منحنی نمایش آن، دارای سه نقطه عُطف $(1,\ 1)$ ،$(-1,\ -1)$ و نقطه ای به طول صفر باشد که در این نقطهٔ خط مماس به منحنی، با محور x ها زاویهٔ °٦٠ درجه می سازد.

حل . چون تابع مطلوب یک چند جمله‌ای است، پس نقاط عطف می توانند فقط ریشه های مشتق مرتبه دوم باشند. چند جمله‌ای با کمترین درجه که دارای ریشه های $-1,\ 0,\ 1$ باشد به صورت $ax(x^2-1)$ است. در نتیجه

$$P''(x)=a(x^3-x)$$

چون در $x=0$ داریم:

$$P'(0)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

پس

$$P'(x)=\int_0^x P''(x)\,dx+\sqrt{3}=a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)+\sqrt{3}$$

و همچنین به علت اینکه $P(1)=1$ ، بنابر این

$$P(x)=\int_1^x P'(x)\,dx+1=a\left(\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{7}{60}\right)+\sqrt{3}(x-1)+1$$

ضریب a با شرط $P(-1)=-1$ به دست می آید، از آنجا $a=\frac{60(\sqrt{3}-1)}{7}$

بنابراین

$$P(x)=\frac{\sqrt{3}-1}{7}(3x^5-10x^3)+x\sqrt{3}.$$

۲۱ـ۳ـ۶ با استفاده از قضیه مقدار میانگین در انتگرال معین، نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad 3<\int_0^1\sqrt{q+x^2}\,dx<10,$$

$$\text{(b)}\quad \frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\text{(c)}\quad \frac{2\pi}{13}<\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10+3\cos x}<\frac{2\pi}{7}.$$

۲۲ـ۳ـ۶ با استفاده از نامساوی «شوارتز ــ بونیا کفسکی» ثابت کنید

$$\int_0^1\sqrt{1+x^3}\,dx<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

و نشان دهید که به وسیله قضیه مقدار میانگین برآورد بهتر از این، حاصل نمی شود.

۲۳ـ۳ـ۶ مشتق توابع زیر را بیابید:

$$\text{(a)}\quad F(x)=\int_1^x \ln t\,dt\ (x>0);\qquad \text{(b)}\quad F(x)=\int_{\frac{2}{x}}^{x^2}\frac{dt}{t}.$$

جواب: (a) $\ln x$; (b) $\frac{3}{x}$.

۲۴ـ۳ـ۶ در توابع پارامتری زیر $\frac{dy}{dx}$ را بیابید:

$$\text{(a)}\quad x=\int_{2}^{t}\frac{\ln z}{z}\,dz,\quad y=\int_{5}^{\ln t}e^{z}\,dz;$$

$$\text{(b)}\quad x=\int_{c^2}^{\sin t}\arcsin z\,dz,\quad y=\int_{n}^{\sqrt{t}}\frac{\sin z^2}{z}\,dz.$$

جواب (a) $y'_x=\frac{t}{\ln t}$; (b) $y'_x=\frac{\tan t}{t^2}$

۲۵ــ۳ــ۶ نقاط اکسترمم توابع زیر را تعیین کنید:

$$\text{(a)}\quad F(x)=\int_{1}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,dt;$$

$$\text{(b)}\quad F(x)=\int_{0}^{x^2}\frac{t^2-5t+4}{2+e^t}\,dt.$$

جواب: (a) در $x=1$ ماکزیمم و در $x=-1$ مینیمم دارد. (b) در نقاط $x=-2;\ 0;\ 2$ مینیمم و در نقاط $x=\pm 1$ **ماکزیمم** دارد.

۴ــ۶ تغییر متغیر در انتگرال معین

اگر تابع $x=\varphi(t)$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\varphi(t)$ در فاصله $[\alpha,\beta]$، تابعی پیوسته و یک مقداری بوده و در این فاصله $\varphi'(t)$ نیز پیوسته باشد،

(۲) اگر t در فاصله $[\alpha,\beta]$ تغییر نماید، مقادیر تابع $x=\varphi(t)$ از فاصله $[a,b]$ خارج نشود،

(۳) $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$.

آنگاه دستور تغییر متغیر در انتگرال معین برای هر تابع پیوسته در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر اعمال می شود:

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

اغلب به جای تغییر متغیر $x=\varphi(t)$، معکوس آن یعنی $t=\psi(x)$ بکار می رود. در

این صورت حدود انتگرالگیری مستقیماً از تساویهای $\alpha=\psi(a)$ و $\beta=\psi(b)$ حساب می شوند. در عمل، تغییر متغیر به کمک توابع یکنواخت و به طور پیوسته مشتقپذیر انجام می گیرد. برای راحتی تعویض حدود انتگرالگیری را با جدول زیر انجام می دهیم:

x	t
a	α
b	β

۱ـ۴ـ۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

حل. با استفاده از تغییر متغیر $x=2\sin t$ داریم $-\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{3}$. تابع $x=\varphi(t)=2\sin t$ در فاصله $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ درتمام شرایط قضیهٔ تعویض متغیرها، صدق می کند، زیرا در این فاصله، تابعی یکنواخت بوده و به طور پیوسته مشتقپذیر است. و

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3},\quad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

همچنین

$$x=2\sin t;\quad dx=2\cos t\,dt;\quad \sqrt{4-x^2}=2|\cos t|=2\cos t,$$

زیرا $\cos t$ درفاصله $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$، مثبت است.

بنابراین

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt=2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

۲ـ۴ـ۶ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx.$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = 2\sec t; \qquad dx = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt; \qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline 2 & 0 \\ 4 & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ تابع $2\sec t$ یکنواخت است پس می‌توانیم آن را بکار ببریم. بنابراین

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4\sec^2 t - 4}}{16\sec^4 t}\cdot 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{12}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

۳ــ۴ــ۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)} \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx; \quad \text{(b)} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

جواب: (a) $\frac{\pi a^4}{16}$ (با تغییر متغیر $x = a\sin t$)

(b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (با تغییر متغیر $x = \tan t$).

۴ــ۴ــ۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}; \quad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

حل. (a) تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم.

$$\sin x = t; \qquad \cos x\,dx = dt; \qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \end{array}$$

تابع معکوس $x = \arcsin t$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$ برای $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$) در شرایط قضیه تعویض متغیرها صدق می‌کند. بنابراین

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \ln\frac{t-3}{t-2}\Big|_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$$

(b) تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ را بکار می بریم:

$$x=2\arctan t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 1 \end{array}\right|,$$

چون تابع $\tan\frac{x}{2}$ در فاصله $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ یکنواخت است پس این تغییر متغیر را می توان بکار برد.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan 0\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

۵ــ۴ــ۶ مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\qquad (a>0,\quad b>0).$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$\tan x=t,\qquad \frac{dx}{\cos^2 x}=dt,\qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & 1 \end{array}\right|.$$

بنابر این

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^1\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{b^2}\int_0^1\frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\arctan\frac{bt}{a}\Big|_0^1=\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}.$$

اگر $a=b=1$ آنگاه

$$\frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}=\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

که دقیقاً با نتیجه جاگذاری $a=b=1$ در انتگرال اصلی یکی است

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

۶ــ۴ــ۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$; (b) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(c) $\int_3^2 \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$

جواب:

(a) $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; (b) $2(\sqrt{3}-1)$; (c) $8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$

۷ــ۴ــ۶ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

حل. آن را به انتگرالهای زیر تبدیل می کنیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = I_1 + I_2.$$

برای حل

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$x = \pi - t,$$
$$dx = -dt,$$

x	t
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
π	0

پس

$$I_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt.$$

بنابراین

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \, dx}{1+\cos^2 x} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t \, dt}{1+\cos^2 t}.$$

چون انتگرالهای اول و سوم قرینه یکدیگرند، حذف می شوند، پس

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{1+\cos^2 t}.$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$u = \cos t, \qquad du = -\sin t \, dt,$$

t	u
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0

$$I = -\pi \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

توجه : انتگرال نامعین

$$\int \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

را نمی‌توان به صورت توابع مقدماتی نوشت. طوری که دیدیم به کمک یک روش ابتکاری انتگرال معین، حساب می شود.

۸ــ٤ــ٦ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

حل . تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = \tan t, \qquad dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

x	t
0	0
1	$\frac{\pi}{4}$

بنابراین

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)\sec^2 t}{\sec^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt.$$

مجموع $1+\tan t$ را به صورت زیر حساب می کنیم :

$$1+\tan t=\tan\frac{\pi}{4}+\tan t=\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$$

و در انتگرال قرار می‌دهیم،

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 2\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt=\frac{\pi}{8}\ln 2+I_1-I_2.$$

حال نشان می دهیم که $I_1=I_2$. برای این منظور از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم .

$$t=\frac{\pi}{4}-z,\qquad dt=-dz,$$

t	z
0	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$	0

در انتگرال $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$ قرار می دهیم :

$$I_2=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\right]dz=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)dz=I_1.$$

بنابراین

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

توجه کنید همان طوری که قبلاً هم دیده‌ایم انتگرال

$$\int \frac{\ln (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

قابل تبدیل به انتگرال توابع مقدماتی نیست.

۹ــ۴ــ۶ ثابت کنید همیشه در انتگرال با حدود متناهی a و b، می‌توان تغییر متغیر خطی مانند $x = pt + q$ (p و q اعداد ثابتی هستند) را طوری انتخاب کرد تا حدود انتگرال جدید 0 و 1 شوند.

حل. توجه داریم که تغییر متغیر $x = pt + q$ به طور ضمنی دارای شرایط قضیهٔ تعویض متغیرهاست، چون t به ازای $x = a$ صفر، و به ازای $x = b$ برابر یک است. پس p و q در دستگاه معادلات زیر صدق می کنند

$$a = p\cdot 0 + q,$$
$$b = p\cdot 1 + q,$$

از آنجا $q = a$، $p = b - a$. بنابراین

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \int_0^1 f\,[(b-a)\,t + a]\, dt.$$

۱۰ــ۴ــ۶ مجموع دو انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\, dx + 3 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} dx.$$

حل. هر یک از انتگرالها را به انتگرالی با حدود صفر و یک تبدیل می کنیم. برای این منظور تغییر متغیر $x = -t - 4$ را برای انتگرال اولی بکار می بریم در این صورت $dx = -dt$، و از آنجا

$$I_1 = \int_{-4}^{-5} e^{(x+5)^2}\, dx = -\int_0^1 e^{(-t+1)^2}\, dt = -\int_0^1 e^{(t-1)^2}\, dt.$$

و تغییر متغیر $x=\frac{t}{3}+\frac{1}{3}$ را برای انتگرال دومی در نظر می گیریم که در آن $dx=\frac{dt}{3}$ ، پس

$$I_2=3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} dx=\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt.$$

بنابراین

$$I_1+I_2=-\int_0^1 e^{(t-1)^2}\,dt+\int_0^1 e^{(t-1)^2}dt=0.$$

توجه داریم که هیچ یک از انتگرالهای $\int e^{(x+5)^2}\,dx$ و $\int e^{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx$ به طور جداگانه قابل تبدیل به انتگرال توابع مقدماتی نیستند.

۱۱ــ٤ــ٦ ثابت کنید که انتگرال زیر وقتی k عددی صحیح باشد، برابر صفر است :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx$$

حل .تغییر متغیر زیر را بکار می بریم :

$$x=\pi-t,\qquad dx=-dt,$$

x	t
0	π
π	0

چون k عددی صحیح است، پس

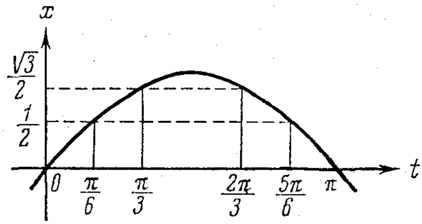
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kx}{\sin x}\,dx=-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin 2k(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}\,dt=-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2kt}{\sin t}\,dt.$$

چون مقدار انتگرال معین با تغییر نماد انتگرالگیری تغییر نمی کند، بنابر این

$$I=-I,\ I=0.$$

۱۲ــ٤ــ٦ انتگرال زیر را حساب کنید :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$



شکل ٦۵

حل . تغییر متغیر

$$x=\sin t \quad ، \quad dx=\cos t\, dt$$

را بکار می بریم (تابع مفروض یکنواخت نیست). حدود انتگرال جدید را از معادلات

$$\frac{1}{2}=\sin t; \ \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin t$$

بدست می آوریم. می توان فرض کرد $t_1=\frac{\pi}{6}$ و $t_2=\frac{\pi}{3}$ و یا همچنین می توانیم فرض کنیم $t_1=\frac{5\pi}{6}$ و $t_2=\frac{2\pi}{3}$.

در هر دو حالت متغیر $x=\sin t$ تمام فاصله $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ را طی می کند (شکل ٦۵ را ببینید) و تابع $\sin t$ در هر دو فاصله $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ یکنواخت است.

حال نشان می دهیم که نتیجه انتگرالگیری در هر دو فاصله یکی است. یعنی،

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t\, dt}{\sin t \cos t}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\ln\tan\frac{\pi}{6}-\ln\tan\frac{\pi}{12}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

از طرفی چون $\cos t$ در فاصله $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ منفی است، داریم:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t\, dt}{\sin t(-\cos t)}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{dt}{\sin t}=$$

$$= \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} = \ln\frac{\tan\frac{5}{12}\pi}{\tan\frac{\pi}{3}} = \ln\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,.$$

توجه : مقادیر $t_2=\frac{\pi}{3}$ ، $t_1=\frac{5\pi}{6}$ را انتخاب نمی کنیم زیرا اگر t در فاصله $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}\right]$ تغییر نماید مقادیر x درخارج فاصله $\left[\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ قرار می گیرند.

۱۳ــ۴ــ۶ ثابت کنید تابع $L(x)$ که درفاصله $(0,\ \infty)$ با انتگرال $L(x)=\int\limits_1^x\frac{dt}{t}$ تعریف می شود، دارای خواص زیر است :

$$L(x_1x_2)=L(x_1)+L(x_2),$$
$$L\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=L(x_1)-L(x_2).$$

حل . با توجه به خاصیت جمع پذیری،

$$L(x_1x_2)=\int\limits_1^{x_1x_2}\frac{dt}{t}=\int\limits_1^{x_1}\frac{dt}{t}+\int\limits_{x_1}^{x_1x_2}\frac{dt}{t}.$$

در انتگرال دوم از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم :

$$t=x_1z,\qquad dt=x_1dz,$$

t	z
x_1	1
x_1x_2	x_2

بنابراین

$$L(x_1x_2)=\int\limits_1^{x_1}\frac{dt}{t}+\int\limits_1^{x_2}\frac{dz}{z}=L(x_1)+L(x_2).$$

با فرض $x_1x_2=x_3;\ \ x_2=\frac{x_3}{x_1}$ داریم :

$$L(x_3)=L(x_1)+L\left(\frac{x_3}{x_1}\right),\qquad L\left(\frac{x_3}{x_1}\right)=L(x_3)-L(x_1).$$

تحقیق درستی رابطهٔ

$$L\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}\ L(x)$$

برای مقادیر صحیح m و n خیلی راحت است. درحقیقت برای مقادیر مثبت m و

n داریم:

$$L\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=mL\left(x^{\frac{1}{n}}\right),\quad L(x)=nL\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

و برای توانهای منفی داریم:

$$L(1)=0,\ \ L(x^{-1})=L\left(\frac{1}{x}\right)=L(1)-L(x)=-L(x).$$

حال با استفاده از پیوستگی انتگرال به عنوان تابعی از حد فوقانی، خاصیت عمومی

$$L(x^a)=aL(x)$$

بدست می آید.

توجه: طوری که دیدیم، $L(x)=\ln x$ • در اینجا خواص اساسی لگاریتم بکمک انتگرال بررسی شد.

۱۴ـــ۴ـــ۶ انتگرال

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx$$

را با تغییر متغیر $(x-2)^2=t$ تغییر دهید •

حل. استفاده از تغییر متغیر در فاصله [۳ ، ۰] نتیجه درستی حاصل نمیشود، زیرا تابع معکوس $x=\varphi(t)$ به صورت دو تابع $x=2\pm\sqrt{t}$ است، یعنی x دارای دو شاخه $x_1=2-\sqrt{t};\ x_2=2+\sqrt{t}$ می باشد. که در شاخه اولی $x<2$ و در شاخه دومی $x>2$. برای حصول به نتیجه درست، انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx=\int_0^2 (x-2)^2\,dx+\int_2^3 (x-2)^2\,dx,$$

فرض می کنیم‌که در انتگرال اول $x=2-\sqrt{t}$ و در انتگرال دومی $x=2+\sqrt{t}$ ، پس

$$I_1=\int_0^2 (x-2)^2\,dx=-\int_4^0 t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{t}\,dt=\frac{8}{3},$$

$$I_2=\int_2^3 (x-2)^2\,dx=\int_0^1 t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}.$$

بنابر این $I=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$ ، که جواب صحیح مسئله است و می توان آن را به صورت زیر،

راحت تر حساب کرد:

$$\int_0^3 (x-2)^2\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^3 = \frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3.$$

۱۵ــ٤ــ٦ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)}\quad I=\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}\,; \qquad \text{(b)}\quad I=\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}\,;$$

$$\text{(c)}\quad I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}\,; \qquad \text{(d)}\quad I=\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx;$$

$$\text{(e)}\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,dx;$$

$$\text{(f)}\quad I=\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx, \quad a>0;$$

$$\text{(g)}\quad I=\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx; \qquad \text{(h)}\quad I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\,.$$

جواب:

(a) $2-2\ln 2$; (b) $0.2\ \ln 112$; (c) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{8}\,\sin\frac{\pi}{12}}$; (d) $\sqrt{3}-0.5\ \ln(2+\sqrt{3})$

(e) $0.25\ln 3$ با تغییر متغیر $\sin x-\cos x=t$ ، (f) $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ با استفاده از تغییر متغیر $x=a\cos t$ ، (g) $\frac{\pi a^2}{2}$ با استفاده از تغییر متغیر $x=2a\sin^2 t$ ، (h) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

۱۶ــ٤ــ٦ بکمک تغییر متغیر مناسب، انتگرالهای زیر را حساب نمائید:

$$\text{(a)}\quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\,; \qquad \text{(b)}\quad \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,;$$

$$\text{(c)}\quad \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}\,; \qquad \text{(d)}\quad \int_{\sqrt{(3a^2+b^2)/2}}^{\sqrt{(a^2+b^2)/2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}\,.$$

جواب: (a) $\frac{\pi}{6}$; (b) $\frac{\pi}{4}$ ، (c) $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{17}$ با تغییر متغیر $x^4=t$ ، (d) $\frac{\pi}{12}$ با تغییر متغیر $x^2=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t$.

۱۷ــ۴ــ۶ براحتی انتگرال

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$$

حساب می شود که مقدارش $\frac{\pi}{4}$ است. در واقع

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{4}$$

از طرف دیگر با استفاده از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ داریم:

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline -2 & -\frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\\ \hline\end{array},$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2\left(4+\frac{1}{t^2}\right)}=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{2}\arctan 2t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{4}.$$

واضح است که جواب درست نیست، زیرا $\frac{1}{4+x^2}>0$ ، ونتیجتاً انتگرال معین این تابع نمی تواند عدد منفی $-\frac{\pi}{4}$ باشد. مورد اشتباه را بیابید.

جواب: تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ را نمی توان بکاربرد زیرا تابع در $t=0$ پیوسته نیست.

۱۸ــ۴ــ۶ اگر در انتگرال

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}$$

تغییر متغیر $\frac{x}{2}=t$ را بکار ببریم، داریم:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-2\cos x}=\int_{0}^{0}\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(5-2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=0$$

واضح است که نتیجه درست نیست، زیرا انتگران مثبت است و در نتیجه انتگرال آن

نمی‌تواند صفر شود. مورد اشتباه را بیابید.

جواب: تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2}$ را نمی‌توان بکار برد، زیرا تابع در $x=\pi$ پیوسته نیست.

۱۹ـ۴ـ۶ تعیین کنید که به چه دلیل با تغییر متغیر $t=x^{\frac{2}{5}}$، نتیجه انتگرالگیری از

$$\int_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx$$

غلط است؟

راهنمائی: تابع معکوس یعنی $x=\pm\sqrt{t^5}$ تابعی دو مقداری است. برای اینکه جواب صحیح باشد لازم است فاصله انتگرالگیری را تغییر دهید:

$$\int_{-2}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx=\int_{-2}^{0}\sqrt[5]{x^2}\,dx+\int_{0}^{2}\sqrt[5]{x^2}\,dx$$

و $x=-\sqrt{t^5}$ را در فاصلهٔ $-2<x<0$، و $x=+\sqrt{t^5}$ را در $0<x<2$ بکار ببرید.

۲۰ـ۴ـ۶ آیا می‌توان برای محاسبه

$$I=\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

از تغییر متغیر $x=\sec t$ استفاده کرد.

جواب: چون $\sec t\geqslant 1$ و فاصله انتگرالگیری [۱ ، ۰] است، پس نمی‌توان از این تغییر متغیر استفاده کرد.

۲۱ـ۴ـ۶ انتگرال

$$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

مفروض است. تغییر متغیر $x=\sin t$ را درنظر می‌گیریم. آیا می‌توان π و $\frac{\pi}{2}$ را به عنوان حدود انتگرال جدید انتخاب کرد؟

جواب: غیر ممکن است، تمرین **۱۲ـ۴ـ۶** را ببینید.

۲۲ـ۴ـ۶ اتحاد زیر را برای هر تابع دلخواه $f(x)$ ثابت کنید:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

راهنمایی . در رابطهٔ

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

تغییر متغیر $x=-t$ را برای اولین انتگرال بکار ببرید.

۲۳ـ۴ـ۶ انتگرال

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

را با تغییر متغیر $\sin x = t$ تغییر دهید.

جواب:

$$\int_{0}^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int_{1}^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\,dt$$

راهنمایی نخست انتگرال را به سه انتگرال در فاصله های

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

تبدیل کنید و آنگاه به ترتیب از تغییر متغیرهای

$$x = \arcsin t,\ x = \pi - \arcsin t,\ x = 2\pi + \arcsin t$$

استفاده کنید.

۵ـ۶ تلخیص انتگرال براساس خاصیت تقارن انتگران

۱. اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-a, a]$ زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

۲. اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-a, a]$ فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

۳. اگر $f(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx,$$

که n عددی صحیح است.

۱ـ۵ـ٦ انتگرال

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

را حساب کنید.

حل. چون $f(x)=|x|$ تابعی زوج است، پس

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_{0}^{1} |x|\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

۲ـ۵ـ٦ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-7}^{7} \frac{x^4 \sin x}{x^6+2}\,dx.$$

حل. چون انتگران تابعی فرد است، بنابر این مقدارش صفر می شود.

۳ـ۵ـ٦ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;$$

$$\text{(b)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

اگر

(۱) $f(x)$ تابعی زوج است. (۲) هرگاه $f(x)$ تابعی فرد است.

جواب: (۱) اگر $f(x)$ زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \text{ and } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = 0$$

(۲) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \text{و} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin n\,dx.$$

٤ـ۵ـ٦ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx$$

جواب: صفر

۵ـ۵ـ٦ مطلوبست محاسبه

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$$

حل . چون

$$f(x+\pi)=\frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi)+\sin^4(x+\pi)}=\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}=f(x).$$

پس انتگران تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است، بنابر این می توان π را از حد بالا و حد پائین انتگرال، کم کرد:

$$\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x\, dx}{\cos^2 x(1+\tan^4 x)}.$$

تغییر متغیر زیر را بکار می بریم

$$t=\tan x,\qquad dt=\frac{dx}{\cos^2 x},$$

x	t
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x\, dx}{\cos^2 x(1+\tan^4 x)}=\int_{0}^{1}\frac{2t\, dt}{1+t^4}=\arc\tan t^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

۶ــ۵ــ۶ اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\int_{-a}^{a}\cos x f(x^2)dx=2\int_{0}^{a}\cos x f(x^2)\,dx.$$

حل . کافی است نشان دهیم انتگران زوج است

$$\cos(-x)f[(-x)^2]=\cos x f(x^2).$$

۷ــ۵ــ۶ مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}dx.$$

حل .

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{2x^7+3x^6-10x^5-7x^3-12x^2+x+1}{x^2+2}dx=$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7-10x^5-7x^3+x}{x^2+2}\,dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^4-4)+1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= 0 + 2\int_0^{\sqrt{2}} \left[3(x^4-2x^2) + \frac{1}{x^2+1}\right] dx =$$

$$= \frac{6}{5}x^5 - 4x^3 + \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}} = -\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

در محاسبه انتگرال، آن را به دو انتگرال تبدیل کردیم که انتگران انتگرال اول فرد و انتگران انتگرال دوم زوج است.

۸ـ۵ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$$

حل. تابع $f(x)=\cos x$ زوج است. ثابت می کنیم تابع $\varphi(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ فرد است،

$$\varphi(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -\varphi(x).$$

پس انتگران، حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد است، پس انتگران تابعی فرد است، بنابر این

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0.$$

۹ـ۵ـ۶ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^8 \sin^9 x\,dx = 0;$ (b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\cos x}\,dx;$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$ (m و n اعداد طبیعی اند)

(d) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin x f(\cos x)\,dx = 0.$

۱۰ـ۵ـ۶ اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

حل. برای انتگرال طرف چپ تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x = a+b-t, \quad dx = -dt, \quad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline a & b \\ b & a \end{array}.$$

پس داریم:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

توجه. رابطهٔ بین دو انتگرال را می توان به صورت زیر تعبیر هندسی کرد:

منحنی نمایش $f(x)$ و منحنی تابع $f(a+b-x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ نسبت به خط $x = \frac{a+b}{2}$ متقارن هستند، یعنی، اگر A به طول x روی محور x ها باشد، آنگاه نقطهٔ A' قرینهٔ آن، نسبت به خط مذکور، دارای طول $x' = a+b-x$ است. بنابر این

$$f(a+b-x') = f[a+b-(a+b-x)] = f(x)$$

می دانیم شکلهای متقارن، مساحتهای برابر دارند پس انتگرالها برابرند. بنابر این، اتحادی که ثابت شد، یک تساوی بین مساحتهای دو ذوزنقهٔ منحنی الضلع را بیان می کند.

۱۱ـ۵ـ۶ تساوی زیر را ثابت کنید

$$\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = \int_0^t g(x)\,f(t-x)\,dx.$$

حل. تغییر متغیر $t-x=z$ را برای انتگرال طرف راست بکار می بریم:

$$-\int_t^0 g(t-z)\,f(z)\,dz = \int_0^t f(z)\,g(t-z)\,dz.$$

۱۲ـ۵ـ۶ نخست تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$$

و با استفاده از آن انتگرالهای

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$$

را حساب کنید.

حل . براساس مسئلهٔ (**6.5.10**) داریم :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx.$$

پس در حالت خاص

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx;$$

برای محاسبه دو انتگرال را با هم جمع می کنیم

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

پس

$$I = \frac{\pi}{4}$$

۱۳ـــ۵ـــ۶ تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

حل . چون

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx,$$

کافی است ثابت کنیم که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

برای انتگرال طرف چپ، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$x = \pi - t, \quad dx = -dt, \qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \pi & 0 \end{array}.$$

بنابراین

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\pi - t)]\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

۱۴ــ۵ــ۶ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx.$$

حل . در انتگرال طرف چپ، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$x = \pi - t, \quad dx = -dt, \qquad \begin{array}{|c|c|} x & t \\ \hline 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{array}.$$

داریم

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\, dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \pi f(\sin t)\, dt - \int_{0}^{\pi} tf(\sin t)\, dt.$$

از آنجا

$$2\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\, dx = \pi \int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx,$$

۱۵ــ۵ــ۶ با استفاده از تساوی

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx,$$

ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\pi.$$

۱۶ـ۵ـ۶ ثابت کنید که اگر

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+$$
$$+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

آنگاه

$$\text{(a)}\ \int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=\pi a_0;\quad \text{(b)}\ \int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx=\pi a_k;$$
$$\text{(c)}\ \int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=\pi b_k\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

۶ـ۶ انتگرالگیری بروش جزء بجزء ـ دستورهای کاهش

اگر u و v توابعی از x باشند و مشتقهای پیوسته‌ای داشته باشند، آنگاه

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx$$

و یا بطور خلاصه

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

۱ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

حل . فرض می کنیم :

$$x=u,\qquad e^x\,dx=dv;$$
$$du=dx;\qquad v=e^x,$$

چون توابع $u=x$ و $v=e^x$ در فاصله [۱ ، ۰] پیوسته اند و مشتقهای پیوسته دارند، لذا

روش جزء بجزء قابل اعمال است.

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$$

۲ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx.$$

حل . فرض می کنیم:

$$u = \sin bx, \qquad dv = e^{ax}\,dx;$$
$$du = b\cos bx\,dx, \qquad v = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

چون توابع $u=\sin bx,\ v=\frac{1}{a}e^{ax}$ در فاصلهٔ $[0,\ \pi]$ پیوسته‌اند و مشتقات پیوسته دارند، پس، از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx =$$

$$= -\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{b}{a}\ I_1.$$

حال I_1 را حساب می کنیم:

$$u = \cos bx, \qquad dv = e^{ax}\,dx,$$
$$du = -b\sin bx\,dx, \qquad v = \frac{1}{a}e^{ax}.$$

بنابراین

$$I = -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}} + \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin bx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{b}{a}\left(-\frac{e^{\frac{a\pi}{b}}}{a} - \frac{1}{a}\right) - \frac{b^2}{a^2}I = \frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}I.$$

پس

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I = \frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2}, \quad I = \frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2+b^2}.$$

بویژه اگر $a=b=1$ داریم:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1).$$

۳ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_1^{e} \ln^3 x\, dx.$$

جواب: $6-2e$

٤ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\, dx.$$

حل. نخست تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$\sqrt{x}=t,\quad x=t^2,\quad dx=2t\,dt,$$

x	t
0	0
$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

از آنجا

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\, dt.$$

انتگرال اخیر را بروش جزء بجزء حساب می کنیم:

$$t=u;\qquad \sin t\, dt = dv;$$
$$du=dt;\qquad v=-\cos t.$$

بنابر این

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\, dt = 2\left[-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt\right] = 2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

۵ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$I=\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$$

جواب: $\pi\sqrt{2}-4.$

۶ــ۶ــ۶ انتگرال زیر را حساب کنید :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx.$$

جواب: $\pi - 2$

۷ــ۶ــ۶ انتگرال

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n\, dx$$

را حساب کنید. n عدد طبیعی است.

حل . می‌توان انتگرال را با بسط عبارت $(a^2 - x^2)^n$ ، براساس دو جمله‌ای نیوتن حل کرد، ولی این روشی خسته کننده و کُند است. آن را، با استفاده از فرمول کاهش، با تبدیل I_n به I_{n-1} حل می کنیم و به صورت زیر عمل می کنیم :

$$I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} (a^2 - x^2)\, dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a x (a^2 - x^2)^{n-1} x\, dx$$

انتگرال آخری را بروش جزء بجزء حساب می کنیم :

$$u = x; \qquad (a^2 - x^2)^{n-1} x\, dx = dv,$$
$$du = dx; \qquad v = -\frac{1}{2n} (a^2 - x^2)^n \quad (n \neq 0).$$

از آنجا داریم :

$$I_n = a^2 I_{n-1} + \frac{1}{2n} x (a^2 - x^2)^n \Big|_0^a - \frac{1}{2n} \int_0^a (a^2 - x^2)^n\, dx = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n.$$

و یا

$$I_n = a^2 \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

این فرمول به ازای تمام مقادیر حقیقی n ، بجز 0 و $-\frac{1}{2}$ معتبر است. بویژه، وقتی n عددی طبیعی باشد، داریم :

$$I_0 = \int_0^a dx = a,$$

از آنجا

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n (2n-2) (2n-4) \ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) (2n-1) (2n-3) \ldots 5 \cdot 3} = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

که در آن

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ (2n),$$
$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2n+1).$$

۸ــ۶ــ۶ با استفاده از نتیجه مسئلهٔ قبل، دستور زیر را ثابت کنید:

$$1-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\dots+(-1)^n\frac{C_n^n}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

که C_n^k ضرایب دو جمله‌ای نیوتن هستند.

حل . انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

انتگران را بکمک دستور دو جمله‌ای بسط داده و از آن در فاصله‌های از ۰ تا ۱ انتگرالگیری می کنیم:

$$I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=$$
$$=\int_0^1 (1-C_n^1x^2+C_n^2x^4-C_n^3x^6+\dots+(-1)^n C_n^nx^{2n})\,dx=$$
$$=\left[x-\frac{C_n^1x^3}{3}+\frac{C_n^2x^5}{5}-\frac{C_n^3x^7}{7}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=$$
$$=1-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\dots+\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

۹ــ۶ــ۶ مطلوبست محاسبهٔ

$$H_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$$

(m عددی طبیعی است)

حل . تغییر متغیر

$$\sin x=t,\qquad \cos x\,dx=dt,$$

x	t
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

انتگرال

$$H_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cos x\, dx = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt,$$

را به‌انتگرالی که در مسئلهٔ (۷ـ۶ـ۶) به ازای $n=\frac{m-1}{2}$ و $a=1$ دیدیم، تبدیل می کند. از آن، دستور کاهش زیر حاصل می شود:

$$H_m = \frac{m-1}{m} H_{m-2} \quad (m \neq 0,\ m \neq 1)$$

چون

$$H_m = I_{\frac{m-1}{2}} = \frac{2\cdot\frac{m-1}{2}}{2\cdot\frac{m-1}{2}+1} I_{\frac{m-1}{2}-1} = \frac{m-1}{m} I_{\frac{m-3}{2}} = \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

پس اگر m فرد باشد، دستور کاهش H_m را به انتگرال زیر تبدیل می کند:

$$H_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1,$$

بنابراین

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

اگر m عددی زوج باشد انتگرال H_m به انتگرال زیر تبدیل می شود:

$$H_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

پس

$$H_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}.$$

۱۰ـ۶ـ۶ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x\, dx$$

(m عددی طبیعی است).

حل. براساس نتایج مسائل **۱۴ـ۵ـ۶** و **۱۳ـ۵ـ۶** داریم:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin^m x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^m x\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx,$$

با استفاده از مسئلهٔ ۹ـ۶ـ۶ داریم:

$$I=\int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ زوج است}\\[2mm] \pi\,\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & m \text{ فرد است}\end{cases}$$

۱۱ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$$

($m>0$ و n عددی طبیعی است)

حل. قبل از هر چیز توجه داریم با اینکه تابع $f(x)=x^m(\ln x)^n$ در $x=0$ بی معنی است ولی می‌توان در فاصلهٔ [۰ ، ۱] با فرض $f(0)=0$ به ازای هر $m>0$ و $n>0$ آن را پیوسته کرد. در واقع

$$\lim_{x\to+0} x^m(\ln x)^n=\lim_{x\to+0}\left(x^{\frac{m}{n}}\ln x\right)^n=0$$

(مسئله 3.2.4. از جلد اول را ببینید).

بنابر این، در حالت خاص به ازای $m>0,\ n>0$ انتگرال I_n وجود دارد. برای محاسبهٔ آن از روش جزء بجزء استفاده می کنیم:

$$u=(\ln x)^n,\qquad dv=x^m\,dx,$$
$$du=\frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx,\qquad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

پس

$$I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=\left.\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\right|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}.$$

اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$I_0=\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1},$$

بالاخره

$$I_n=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

۱۲ـ۶ـ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx,$$

که در آن n و m اعداد صحیح نامنفی هستند.

حل. فرض می کنیم،

$$(1-x)^n=u;\quad x^m\,dx=dv;$$
$$du=-n(1-x)^{n-1}\,dx;\quad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

در این صورت

$$I_{m,n}=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{n}{m+1}I_{m+1,\,n-1}.$$

این رابطه به ازای هر $m>-1$ و $n>0,$ معتبر است. اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه بعد از n بار استفاده از رابطهٔ فوق، نتیجه می شود:

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m+1,\,n-1}=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I_{m+2,\,n-2}=\dots$$
$$\dots=\frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}I_{m+n,\,0}.$$

ولی

$$I_{m+n,\,0}=\int_0^1 x^{m+n}\,dx=\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{m+n+1}.$$

بنابر این

$$I_{m,n}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots3\cdot2\cdot1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(m+n+1)}.$$

این رابطه با شرط نامنفی بودن m ، به صورت زیر نوشته می شود:

$$I_{m,n}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

۱۳ــ۶ــ۶ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(a) $\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx;$ (b) $\int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx;$

(c) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x};$ (d) $\int_0^1 x\arctan x\,dx;$

(e) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx;$ (f) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx;$

(g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \arctan(\sin x)\, dx$; (h) $\int_{1}^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\, dx$.

جواب:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $-\frac{1}{e}$; (c) $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; (d) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; (e) $\ln 2-\frac{1}{2}$;

(f) $\ln\frac{2}{8}$; (g) $\frac{\pi}{2}-1$; (h) $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

۱۴ــ۶ــ۶ ثابت کنید

$$\int_{0}^{1} (\arccos x)^n\, dx = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\int_{0}^{1} (\arccos x)^{n-2}\, dx \quad (n>1).$$

۱۵ــ۶ــ۶ اگر $f''(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\int_{a}^{b} x f''(x)\, dx = [bf'(b)-f(b)]-[af'(a)-f(a)].$$

۷ــ۶ محاسبهٔ مقدار تقریبی انتگرالهای معین

۱ . **دستور ذوزنقه‌ای**[1]: فاصله $[a, b]$ را بوسیله نقاط $x_k=a+kh$ به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم که در آن

$$h=\frac{b-a}{n},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

و دستور زیر را بکار می بریم:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

R، مقدار خطا به صورت زیر برآورد می شود:

$$|R| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},\quad M_2=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

---

1. Trapezoidal formula.

(فرض می کنیم که مشتق مرتبهٔ دوم کراندار است).

۲ . **دستور سیمپسون**[۱]: فاصله $[a, b]$ را بوسیلهٔ نقاط $x_k = a + kh$ به $2n$ فاصله مساوی تقسیم می کنیم که در آن $h = \frac{b-a}{2n}$ ، و در نهایت، دستور زیر را بکار می بریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\{f(x_0) + f(x_{2n}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})]\}.$$

فرض می کنیم $f^{IV}(x)$ ، موجود و کراندار است، خطای محاسبه به صورت زیر برآورد می شود:

$$|R| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad M_4 = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|.$$

۱ــ۷ــ۶ با استفاده از دستور ذوزنقه ای که $n = 10$ ، مقدار تقریبی انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

را حساب کنید:

حل . جدول زیر مقادیر مختلف تابع را باچهار رقم اعشار نشان می دهد:

$$y_i = f(x_i)\ (i = 0, 1, \dots, 10)$$

x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$	x_i	$1+x_i$	$y_i = \frac{1}{1+x_i}$
0.0000	1.0000	1.0000	0.6000	1.6000	0.6250
0.1000	1.1000	0.9091	0.7000	1.7000	0.5882
0.2000	1.2000	0.8333	0.8000	1.8000	0.5556
0.3000	1.3000	0.7692	0.9000	1.9000	0.5263
0.4000	1.4000	0.7143	1.0000	2.0000	0.5000
0.5000	1.5000	0.6667			

۱. Simpson's formula.

با استفاده از دستور ذوزنقه‌ای داریم :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\Big(\frac{1.0000+0.5000}{2} + 0.9091 + 0.8333 + $$
$$+ 0.7692 + 0.7143 + 0.6667 + 0.6250 + 0.5882 + 0.5556 +$$
$$+ 0.5263\Big) = \frac{1}{10}\cdot 6.9377 = 0.69377 \approx 0.6938.$$

برای تعیین خطای نتیجهٔ بدست آمده، مشتق مرتبه دوم را حساب می کنیم

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

چون $0 \leqslant x \leqslant 1$ پس $|f''(x)| \leqslant 2$. درنتیجه می توانیم به جای M_2 عدد ۲ را قرار دهیم، بنابر این

$$|R| \leqslant \frac{2}{12\times 10^2} = \frac{1}{600} < 0.0017.$$

عرضها را بادقت چهار رقم اعشار حساب کردیم، و خطای ناشی از گرد کردن کمتر از

$$\frac{0.00005}{10}(1+9\times 1) = 0.00005$$

است (با دقت بیشتر، $\frac{0.00005}{10}\cdot 9 = 0.000045$ ، زیرا y_{10} و y_0 اعداد دقیق هستند). پس، کل خطای ناشی از دستور ذوزنقه‌ای و گرد کردن مقادیر عرضها، کمتر از ۰/۰۰۱۸ است.

توجه داریم که مقدار انتگرال مفروض با دستور نیوتن ــ لایبنیتز چنین است

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69315.$$

بنابر این، خطای نتیجهٔ بدست آمده کمتر از ۰/۰۰۰۷ است، یعنی، نتیجه‌ها با دقت سه رقم اعشار بدست آمده است.

۲ــ۷ــ۶ با دستور سیمپسون مقدار تقریبی انتگرال

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{e^{0.1x}}{x}\,dx$$

را بادقت چهار رقم اعشار حساب کنید.

حل . برای دقت بیشتر، $2n$ مقدار تابع را حساب می کنیم و مشتق چهارم یعنی $f^{IV}(x)$ را بدست می آوریم که بعد از محاسبهٔ مشتقات متوالی از $f(x)=\frac{e^{0.1x}}{x}$ داریم :

$$f^{IV}(x)=\frac{e^{0.1x}}{x^5}(0.0001x^4-0.004x^3+0.12x^2-2.4x+24)=\frac{P(x)}{x^5}e^{0.1x},$$

که $P(x)$ چند جمله ای داخل پرانتز است . در فاصلهٔ [۰/۵ ، ۱/۵] تابع $\varphi(x)=e^{0.1x}$ صعودی است و بیشترین مقدار تابع به ازای $x=1.5$ بوده و مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $\varphi(1.5)=e^{0.15}<1.2$. می توان تقریب اضافی قدر مطلق نسبت $P(x)$ به x^5 را ، با جمع قدر مطلق جملات آن حساب کرد . بیشترین مقدار هر جمعوند به ازای $x=0.5$ بدست می آید ، بنابر این

$$\left|\frac{P(x)}{x^5}\right|<\frac{0.0001}{x}+\frac{0.004}{x^2}+\frac{0.12}{x^3}+\frac{2.4}{x^4}+\frac{24}{x^5}\leqslant$$
$$\leqslant 0.0002+0.016+0.96+38.4+768<808.$$

و از آنجا $|f^{IV}(x)|<1.2\times 808<1\,000$ ، پس M_4 را می توان ۱۰۰۰ در نظر گرفت . چون می خواهیم مقدار انتگرال را با دقت چهارم اعشاری حساب بکنیم ، لذا ضروری است که مجموع خطای محاسبات و خطای گرد کردن نهایی از ۰/۰۰۰۱ تجاوز نکند . برای این منظور $2n$ مقدار را در نظر می گیریم (طول فاصلهٔ جزءِ را با h نشان می دهیم) به طوری که نامساوی

$$|R|<\frac{1}{2}\cdot 0.0001=5\cdot 10^{-5}$$

برقرار باشد . از حل نامساوی

$$\frac{1^5\times 1\,000}{180\,(2n)^4}<5\times 10^{-5},$$

داریم .

$$2n>19.$$

فرض می کنیم $2n=20$ در این صورت مقدار h برابر است با

$$h=\frac{b-a}{2n}=\frac{1}{20}=0.05$$

اگر دقت بیشتری در محاسبه داشته باشیم ، وقتی $2n=20$ ، داریم :

$$|R|<3\cdot 5\times 10^{-5}$$

اگر y_i را با پنج رقم اعشار حساب بکنیم یعنی خطا از 10^{-5} تجاوز نکند ،

آنگاه خطای بعداز آخرین گرد کردن بزرگتر از ۵-۱۰ نمی شود بنابراین کل خطا کمتر از

$$4.5\times 10^{-5} < 0.0001$$

است .

حال جدول مقادیر تابع $y=\frac{e^{0.1x}}{x}$ را برای مقادیر x از ۰/۵ تا ۱/۵ با $h=0.05$ تنظیم می کنیم . محاسبه با پنج رقم اعشار انجام گرفته است .

i	x_i	$0.1x_i$	$e^{0.1x_i}$	y_i
0	0.50	0.050	1.05127	2.10254
1	0.55	0.055	1.05654	1.92098
2	0.60	0.060	1.06184	1.76973
3	0.65	0.065	1.06716	1.64178
4	0.70	0.070	1.07251	1.53216
5	0.75	0.075	1.07788	1.43717
6	0.80	0.080	1.08329	1.35411
7	0.85	0.085	1.08872	1.28085
8	0.90	0.090	1.09417	1.21574
9	0.95	0.095	1.09966	1.15754
10	1.00	0.100	1.10517	1.10517
11	1.05	0.105	1.11071	1.05782
12	1.10	0.110	1.11628	1.01480
13	1.15	0.115	1.12187	0.97554
14	1.20	0.120	1.12750	0.93958
15	1.25	0.125	1.13315	0.90652
16	1.30	0.130	1.13883	0.87602
17	1.35	0.135	1.14454	0.84781
18	1.40	0.140	1.15027	0.82162
19	1.45	0.145	1.15604	0.79727
20	1.50	0.150	1.16183	0.77455

برای بررسی شهودی ، جدول اطلاعات را جهت تنظیم جدول زیر بکار می بریم :

i	x_i	y_i		
		در $i=0$ و $i=20$	برای i فرد	برای i زوج
0	0.50	2.10254		
1	0.55		1.92098	
2	0.60			1.76973
3	0.65		1.64178	
4	0.70			1.53216
5	0.75		1.43717	
6	0.80			1.35411
7	0.85		1.28085	
8	0.90			1.21574
9	0.95		1.15754	
10	1.00			1.10517
11	1.05		1.05782	
12	1.10			1.01480
13	1.15		0.97554	
14	1.20			0.93958
15	1.25		0.90652	
16	1.30			0.87602
17	1.35		0.84781	
18	1.40			0.82162
19	1.45		0.79727	
20	1.50	0.77455		
	Sums	2.87709	12.02328	10.62893

با استفاده از دستور سیمپسون داریم:

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{e^{0.1x}}{x}\,dx \approx \frac{1}{60}(2.87709 + 4\times 12.02328 +$$

$$+ 2\times 10.62893) = \frac{1}{60}\cdot 72.22807 = 1.2038.$$

۳ــ۷ــ۶ رودخانه‌ای ۲۶ متر عرض دارد. جدول زیر اعماق متوالی آن را در طول یک مقطع در فاصله های ۲ متری نشان می دهد

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	0.3	0.9	1.7	2.1	2.8	3.4	3.3	3.0	3.5	2.9	1.7	1.2	0.8	0.6

در اینجا فاصله را با x و عمق متناظر آن را با y (با واحد متر) نشان می‌دهیم. آهنگ (یا نرخ) متوسط جریان آب ۱/۳ متر برثانیه است، مطلوب است محاسبهٔ Q، مقدار آبی که در یک ثانیه در رودخانه جریان پیدا می‌کند.

حل . S مساحت سطح مقطع را بکمک دستور ذوزنقه‌ای حساب می کنیم :

$$S = \int_0^{26} y\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2}(0.3+0.6)+0.9+1.7+2.1+2.8+3.4+\right.$$

$$\left.+3.3+3.0+3.5+2.9+1.7+1.2+0.8\right] = 55.5 \ \ (\mathrm{m}^2).$$

بنابراین

$$Q = 55.5 \times 1.3 \approx 72 \ \ (\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}).$$

در این حالت برآورد دقیق خطا غیر ممکن است، با بعضی روشهای غیر مستقیم قادریم خطای تقریبی را بدست آوریم. خطای S برابر ۳ متر مربع است، بنابراین، خطای Q برابر ٤ متر مکعب در ثانیه می شود.

٤ــ۷ــ٦ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

(الف) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ را با دستور سیمپسون و با دقت سه رقم اعشار.

(ب) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ را با دستور ذوزنقه‌ای و با دقت سه رقم اعشار.

جواب:

(الف) ۰/۶۰۱ **راهنمایی :** برای تخمین $|f^{IV}(x)|$ درفاصله $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ فرض کنید $2n = 6$. (ب) ۰/۷٤۶۲

۵ــ۷ــ٦ بوسیلهٔ دستور سیمپسون مقدار تقریبی

$$I = \int_{1.05}^{1.36} f(x)\,dx,$$

را تعیین کنید که انتگران با جدول زیر تعریف می شود: **جواب:** ۰/۹۶

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.6

۸ـــ۶ تمرینهای اضافی

۱ــ۸ــ۶ تابع زیر مفروض است :

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & 1<x\leqslant 2,\\ (2-x)^2 & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

مستقیماً نشان دهید که تابع

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

در فاصلهٔ [۳ ، ۰] پیوسته است و مشتق آن در نقاط داخلی موجود و برابر $f(x)$ است.

جواب:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x^2}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2} & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{(x-2)^3}{3}+\dfrac{1}{2} & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

پیوستگی آن مستقیماً بررسی می شود. برای برابری مشتق با تابع $f(x)$ کافی است، فقط در نقاط $x=1,\ x=2$ تحقیق شود.

۲ــ۸ــ۶ نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & 0<x<1,\\ 0 & x=0\\ -1 & x=1\end{cases}$$

در فاصله [۱ ، ۰] انتگرالپذیر است.

راهنمایی ثابت کنید که تابع $f(x)$ در فاصله (۱ ، ۰) و در نقاط انتهائی فاصله، پیوسته است ($\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=f(1)$ و $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(0)$)

۳ــ۸ــ۶ آیا می توان ادعا کرد که اگر قدر مطلق تابعی در فاصله $[a,\ b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه خود تابع در آن فاصله انتگرالپذیر است؟

جواب : خیر . برای مثال تابع زیر را در فاصلهٔ [۱ ، ۰] در نظر بگیرید :

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & x \text{ گویاست} \\ -1 & x \text{ اصم است.} \end{cases}$$

۴ــ۸ــ۶ خط مماس به منحنی تابع $y=f(x)$ در نقاط $x=a$ و $x=b$ بترتیب زوایای $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ با محور x ها می‌سازد. مطلوب است محاسبه

$$\int_a^b f''(x)\,dx$$

اگر $f''(x)$ تابعی پیوسته باشد

جواب: $1-\sqrt{3}$ **راهنمایی:** $\int_a^b f''(x)\,dx=f'(b)-f'(a)$

۵ــ۸ــ۶ ثابت کنید

$$\int_0^x E(x)\,dx=\frac{E(x)(E(x)-1)}{2}+E(x)[x-E(x)].$$

راهنمایی : فرض کنید که

$$E(x)=n\leqslant x<n+1,$$

وقتی طبق تعریف $x>0$. آنگاه با توجه به خاصیت جمعپذیری انتگرال

$$\int_0^x E(x)\,dx=\int_0^1 E(x)\,dx+\int_1^2 E(x)\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n E(x)\,dx+\int_n^x E(x)\,dx.$$

۶ــ۸ــ۶ انتگرال

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

مفروض است. تحقیق کنید که توابع

$$F_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad \text{و} \quad F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

توابع اولیه انتگران هستند، آیا می‌توان برای محاسبه انتگرال بوسیله دستور نیوتن ــ لایبنیتز از هر دو تابع اولیه استفاده کرد؟ و گرنه، از کدام یک از تابع اولیه ها می‌توان استفاده نمود.

جواب : با تابع $F_1(x)$ به جواب درست می رسیم، ولی با $F_2(x)$ نتیجهٔ درستی بدست نمی آید علت این امر منفصل بودن تابع دومی در فاصلهٔ $[0, \pi]$ است .

۷ـ۸ـ۶ تابع اولیه تابع $f(x)$ را طوری بیابید که وقتی $x=x_0$ ، داشته باشیم $y=y_0$ **(مسئلهٔ کوشی)**

جواب : $F(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$ **راهنمایی :** هر تابع اولیه $F(x)$ را می توان به صورت

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+C$$

نشان داد. با فرض $x=x_0$ داریم $C=y_0$.

۸ـ۸ـ۶ به ازای چه مقداری از ξ تساوی

$$\int_a^b e^{2x}\,dx=e^{2\xi}(b-a)$$

برقرار است. نشان دهید

$$\xi>\frac{a+b}{2}.$$

جواب:

$$\xi=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2b-2a}.$$

۹ـ۸ـ۶ تابع

$$F(x)=\int_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt$$

را بررسی نمائید.

جواب : تابع در فاصله [۱ ، ۱ــ] معین، فرد و صعودی است و در فاصله [۰ ، ۱ــ] مقعر و در فاصله [۱ ، ۰] محدب است و نقطهٔ (۰ ، ۰) نقطه عطف می باشد.

۱۰ـ۸ـ۶ درستی نامساویهای زیر راتحقیق کنید:

$$0.692\leqslant\int_0^1 x^x\,dx\leqslant 1$$

راهنمایی : تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^x & 0<x\leqslant 1\\ 1 & x=0\end{cases}$$

تابعی پیوسته در $x=\frac{1}{e}$ ، کوچکترین مقدار $m=e^{-\frac{1}{e}}\approx 0.692$ و درنقاط $x=1$ و

$x=0$ بزرگترین مقدار $M=1$ را دارد.

۱۱ــ۸ــ۶ بکمک نامساوی $\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ $x\geqslant \sin x\geqslant \frac{2}{\pi}x$ نشان دهید:

$$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx<\frac{\pi}{2}.$$

راهنمایی: از نامساوی $\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$ انتگرال بگیرید.

۱۲ــ۸ــ۶ با استفاده از نامساوی $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}(x\geqslant 0)$ و نامساوی «**شوارتز ــ بونیاکفسکی**» (**۶ــ۳ــ۶** را ببینید) نشان دهید:

$$1.096<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,dx<1.111.$$

راهنمایی: اول از نامساوی

$$\sqrt{x\sin x}>\sqrt{x^2-\frac{x^4}{6}}=x\sqrt{1-\frac{x^2}{6}},\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$

انتگرال بگیرید و سپس نامساوی «**شوارتز ــ بونیاکفسکی**» را بکار ببرید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x\sin x}\,dx\leqslant\sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

۱۳ــ۸ــ۶ توابع

$$p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$$

درفاصله $[a,\ b]$ انتگرالپذیرند. تابع $p_1(x)$ نامنفی است و توابع $p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$ درنامساوی

$$p_3(x)\leqslant p_2(x)\leqslant p_4(x).$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید

$$\int_a^b p_3(x)\,p_1(x)\,dx\leqslant\int_a^b p_2(x)\,p_1(x)\,dx\leqslant\int_a^b p_4(x)\,p_1(x)\,dx.$$

۱۴ــ۸ــ۶ تابع $f(x)$ درفاصله $[a,\ b]$ مثبت است. ثابت کنید

$$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

وقتی کوچکترین مقدار را دارد که فقط اگر $f(x)$ در این فاصله تابعی ثابت باشد.

راهنمایی : از نامساوی «**شوارتز_بونیا کفسکی**» به صورت زیر استفاده کنید:

$$\left[\int_a^b \sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

۱۵_۸_۶ ثابت کنید

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

راهنمایی : از تغییر متغیر $\operatorname{arc\,tan}\ x=\frac{t}{2}$ استفاده کنید.

۱۶_۸_۶ ثابت کنید که تابع اولیه یک تابع زوج، تابعی فرد است، و هر تابع اولیه یک تابع فرد، تابعی زوج است.

راهنمایی : اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

تابعی فرد است، زیرا

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=-\int_0^x f(-z)\,dz=-F(x)\quad (t=-z).$$

واگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

تابعی زوج است، زیرا

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=-\int_0^x f(-z)\,dz=F(x)\quad (t=-z);$$

وتمام توابع اولیه به صورت $F(x)+C$ هستند، وبنابراین همگی زوج می باشند.

۱۷ـ۸ـ۶ ثابت کنیدکه اگر $f(x)$ تابعی پیوسته، متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه

$$I=\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

مستقل از a است.

راهنمایی: مشتق از انتگرال نسبت به a برابر صفر است:

$$\frac{dI}{da}=f(a+T)-f(a)=0$$

۱۸ـ۸ـ۶ ثابت کنید که اگر $u=u(x),\quad v=v(x)$ و مشتقات آنها تا مرتبهٔ n، درفاصله $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه

$$\int_a^b uv^{(n)}\,dx=\left[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\dots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right]\Big|_a^b+$$

$$+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}v\,dx.$$

فصل هفتم

کاربردهای انتگرال معین

۱ــ۷ محاسبه حد مجموع بکمک انتگرال معین

اغلب لازم است که حد مجموعی را حساب بکنیم که تعداد جملات آن به‌طور نامتناهی افزایش می‌یابند در بعضی حالات چنین حدهایی را می‌توان بکمک انتگرال معین حساب کرد، بشرط این که بتوان آن را به مجموع انتگرال تبدیل کرد.

مثلاً نقاط

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

را در نظر می گیریم که فاصله [۰ ، ۱] را به n فاصله مساوی به طول $\Delta x = \frac{1}{n}$ تقسیم می کنند برای هرتابع پیوسته $f(x)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

۱ــ۱ــ۷ مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

حل . جملات داخل کروشه، مقادیر تابع $f(x)=\sin x$ را در نقاط

$$x_1=\frac{\pi}{n}; \quad x_2=\frac{2\pi}{n}; \quad \dots; \quad x_{n-1}=\frac{(n-1)\pi}{n},$$

نشان می‌دهند. این نقاط فاصلهٔ $[0, \pi]$ را به n طول مساوی برابر $\Delta x = \frac{\pi}{n}$ تقسیم می‌کنند. بنابراین، اگر جملهٔ $\sin \frac{n\pi}{n} = 0$ را به مجموع، اضافه نماییم، عبارت حاصل، مجموع انتگرال تابع $f(x) = \sin x$ در فاصلهٔ $[0, \pi]$ می‌شود.

بنا به تعریف، وقتی $n \to \infty$، حد چنین مجموع انتگرال، با مجموع انتگرال معین تابع $f(x) = \sin x$ از ۰ تا π می‌شود:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

۲ــ۱ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right).$$

حل. عبارت داخل پرانتز را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{2}{n} \right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{n}{n} \right)^2}} \right).$$

عبارت مورد نظر مجموع انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ در فاصلهٔ [۱ ، ۰] است که به n فاصلهٔ مساوی تقسیم شده است. حد این عبارت وقتی $n \to \infty$، با انتگرال معین تابع از ۰ تا ۱ برابر است:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

۳ــ۱ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \sqrt{\frac{n}{n+9}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right].$$

حل. عبارت را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]=$$
$$=\frac{3}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}\right].$$

این عبارت مجموع انتگرال تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}$ درفاصلهٔ $[0,\ 3]$ است، بنابر این، بنا به تعریف داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)=$$
$$=\int_0^3\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,dx=\int_0^3(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=4-2=2.$$

۴ــ۱ــ۷ بکمک انتگرال معین، حدهای زیر را حساب کنید:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$.

جواب:

(a) $\ln 2$; (b) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) 1; (e) $\frac{1}{2}$.

۵ــ۱ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

حل. با استفاده از لگاریتم داریم:

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right].$$

عبارت داخل کروشه، مجموع انتگرال، انتگرال زیر است:

$$\int_0^1\ln x\,dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1.$$

در نتیجه

$$\ln A = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

۲ــ۷ محاسبهٔ مقادیر متوسط توابع

مقدار متوسط تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ عدد

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

است . مقدار

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

را که مقدار متوسط مربع تابع است ، **مربع میانی ریشهٔ** تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ گویند .

۱ــ۲ــ۷ مطلوب است تعیین μ ، مقدار متوسط تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در فاصلهٔ [۰ ، ۱] .

حل . در این حالت داریم

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

۲ــ۲ــ۷ مقدار متوسط هر یک از توابع زیر را تعیین کنید :

(a) $f(x)=\sin^2 x$ ، در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$

(b) $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ ، در فاصلهٔ [۰ ، ۲]

جواب :

$$\text{(a)}\ \frac{1}{2} \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{e+1}\approx 0.283.$$

۳ــ۲ــ۷ طول متوسط وترهای قائم هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را در فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant 2a$ تعیین نمایید .

حل . مسئله عبارت است از تعیین مقدار متوسط تابع $f(x)=2y=2\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ در فاصلهٔ $[a, 2a]$.

$$\mu = 2\,\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx =$$

$$= \frac{2b}{a^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^{2a} = b\left[2\sqrt{3} - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$$

۴ــ۲ــ۷ مقدار متوسط تابع سینوسی $y = \sin x$ را در فاصلهٔ $[0,\ \pi]$ تعیین کنید.

حل ــ

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637.$$

نتیجه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mu\cdot\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\pi = \int_0^{\pi}\sin x\,dx.$$

با استفاده از مفهوم هندسی انتگرال معین، می توان گفت که مساحت مستطیلی با ابعاد $\mu = \frac{2}{\pi}$ و π با مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در فاصله $0 \leqslant x \leqslant \pi$، برابر است.

۵ــ۲ــ۷ مطلوب است تعیین مقدار متوسط تمام y های مثبت دایرهٔ

$$x^2 + y^2 = 1.$$

جواب: $\frac{\pi}{4}$

۶ــ۲ــ۷ نشان دهید که مقدار متوسط تابع پیوستهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,\ b]$، حد واسطهٔ حسابی مقادیر این تابع است، که این مقادیر از فاصله های جزء مساوی از متغیر x به دست آمده اند.

حل فاصلهٔ $[a,\ b]$ را به n فاصلهٔ جزء مساوی به وسیلهٔ نقاط

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}\quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

تقسیم می کنیم. واسطهٔ حسابی مقادیر تابع $f(x)$ در n نقطهٔ تقسیم کنندهٔ $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mu_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

این عبارت را به شکل زیر می نویسیم:

$$\mu_n = \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i,$$

که در آن

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$

مجموع آخری، مجموع انتگرال تابع $f(x)$ است. پس

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

۷ـ۲ـ۷ مقدار متوسط فشار (p_m) را که از ۲ تا ۱۰ اتمسفر تغییر می کند، بیابید. در صورتی که فشار (p) و حجم (v) در رابطه زیر صدق می کنند

$$pv^{\frac{3}{2}} = 160.$$

حل . وقتی p از ۲ تا ۱۰ اتمسفر تغییر می کند، v فاصلهٔ

$$[4\sqrt[3]{4},\ 4\sqrt[3]{100}]$$

را می پیماید، پس

$$p_m = \frac{1}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} \int_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} 160 v^{-\frac{3}{2}}\,dv =$$

$$= -\frac{320}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} v^{-\frac{1}{2}} \Big|_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} = \frac{40}{\sqrt[3]{20}\,(\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2})} \approx 4.32\,\text{atm}.$$

۸ـ۲ـ۷ در هیدرولیک فرمول Bazin ، v ، سرعت آب را در یک نقطه از یک کانال پهن با مقطع چهار گوش برحسب عمق آن نقطه نسبت به سطح آزاد آب، یعنی، h به صورت زیر بیان می کند:

$$v = v_0 - 20\sqrt{HL}\left(\frac{h}{H}\right)^2,$$

که در این رابطه v_0 سرعت آب در سطح آزاد، H عمق کانال و L شیب کانال است.

سرعت متوسط جریان آب در سطح آزاد، یعنی v_m را در مقطع کانال به دست آورید.

حل . داریم:

$$v_m = \frac{1}{H} \int_0^H \left[v_0 - 20\sqrt{HL}\left(\frac{h}{H}\right)^2\right] dh = v_0 - \frac{20}{3}\sqrt{HL}.$$

۹ـ۲ـ۷ مقدار نیروی محرکه متوسط E_m را در فاصله زمانی تناوب T معین کنید، یا به عبارت دیگر در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=T$ حساب کنید، بشرطی که نیروی محرکه با فرمول زیر محاسبه گردد.

$$E=E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

در اینجا T زمان تناوب برحسب ثانیهٔ، E_0 دامنه (مقدار بیشینه) نیروی محرکه و متناظر با زمان $t=0.25T$ است. کسر $\frac{2\pi t}{T}$ **فاز** نامیده می شود.

حل .

$$E_m=\frac{E_0}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}dt=\frac{E_0 T}{T\cdot 2\pi}\left[-\cos\frac{2\pi t}{T}\right]_0^T=0.$$

پس مقدار متوسط نیروی محرکه در فاصلهٔ یک زمان تناوب برابر صفر است.

۱۰ـ۲ـ۷ بر روی دو میلهٔ قائم OA و CD که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند، یک لامپ الکتریکی با شدت روشنائی i به ارتفاع h نصب کرده‌ایم. روشنائی متوسط بر روی خط مستقیم OC را که پایهٔ دو میله را بهم وصل می کند، بیابید.

جواب : $\frac{2i}{h\sqrt{d^2+h^2}}$

۱۱ـ۲ـ۷ مقدار متوسط مربع نیروی محرکهٔ $(E^2)_m$ را در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=\frac{T}{2}$ حساب کنید (مسئلهٔ **۹ـ۲ـ۷** را ببینید).

حل . چون

$$E=E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

داریم

$$(E^2)_m=\frac{2}{T}E_0^2\int_0^{\frac{T}{2}}\sin^2\frac{2\pi t}{T}dt=\frac{2}{T}E_0^2\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1-\cos\frac{4\pi t}{T}}{2}dt=$$

$$=\frac{E_0^2}{T}\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}}=\frac{E_0^2}{2}.$$

۱۲ـ۲ـ۷ اگر تابع $f(x)$ در فاصله نامتناهی $[0, \infty)$ تعریف شده باشد، آنگاه مقدار متوسط آن چنین است:

$$\mu=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx$$

اگر این حد وجود داشته باشد، توان متوسط مصرفی یک مدار جریان متناوب را به دست

آورید در صورتیکه شدت جریان I و اختلاف پتانسیل u بترتیب با فرمولهای زیر تعریف شده باشند

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha);$$
$$u = u_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi)$$

در اینجا φ اختلاف فاز ثابت بین شدت جریان و اختلاف پتانسیل است (پارامترهای ω و α در رابطهٔ توان متوسط ظاهر نخواهند شد.)

حل . توان مصرفی متوسط

$$w_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \cos(\omega t + \alpha)\, u_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi)\, dt.$$

بااستفاده از

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

برابر است با

$$w_m = \lim_{T\to\infty} \frac{I_0 u_0}{2T}\int_0^T [\cos(2\omega t + 2\alpha + \varphi) + \cos\varphi]\, dt =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{I_0 u_0}{4\omega}\cdot\frac{\sin(2\omega T + 2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha + \varphi)}{T} + \frac{I_0 u_0}{2}\cos\varphi\right\} = \frac{I_0 u_0}{2}\cos\varphi.$$

از این رو کاملاً واضح است که چرا در مهندسی برق کمیت $\cos\varphi$ اهمیت زیادی دارد.

۷ــ۲ــ۱۳ مقدار متوسط μ تابع $f(x)$ را در فاصله های داده شده حساب کنید:

(a) $f(x) = 2x^2 + 1$ در فاصلهٔ [۰ ، ۱]،
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ در فاصلهٔ [۱ ، ۲]،
(c) $f(x) = 3^x - 2x + 3$ در فاصلهٔ [۰ ، ۲]،

جواب :

$$\text{(a) } \mu = \frac{5}{3}; \quad \text{(b) } \mu = \ln 2; \quad \text{(c) } \mu = \frac{8}{\ln 3} + 2.$$

۷ــ۲ــ۱٤ جسمی از حالت سکون به طرف زمین سقوط می کند سرعت آن پس از طی مسافت $s = s_1$ به $v_1 = \sqrt{2gs_1}$ می رسد. نشان دهید سرعت متوسط v_m در این مسیر برابر $\frac{2v_1}{3}$ است.

۷ــ۲ــ۱۵ مقطع یک ظرف (تغار) به شکل قسمتی از سهمی است. قاعدهٔ ظرف a و ارتفاع آن h است. ارتفاع متوسط این ظرف را تعیین کنید. **جواب :** $\frac{2h}{3}$

۷ــ۲ــ۱۶ مقدار متوسط شدت جریان متناوب I_m را در فاصلهٔ زمانی 0 و $\frac{\pi}{\omega}$ حساب کنید (مسئلهٔ **۷ــ۲ــ۱۲** را ببینید). **جواب:** $\frac{2I_0}{\pi}$

۷ــ۲ــ۱۷ ثابت کنید مقدار متوسط شعاعهای کانونی بیضی $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ برابر b است که در آن $p=\frac{b^2}{a}$ و $a,\ b$ نیمقطرهای بیضی و ε خروج از مرکز آن است.

۷ــ۲ــ۱۸ روی پاره خط AB به طول a، نقطهٔ P بفاصلهٔ x از A انتخاب شده است. نشان دهید که مقدار متوسط مساحت مستطیل‌های به ابعاد AP و PB برابر $\frac{a^2}{6}$ است.

۷ــ۲ــ۱۹ مقدار متوسط تابع

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$$

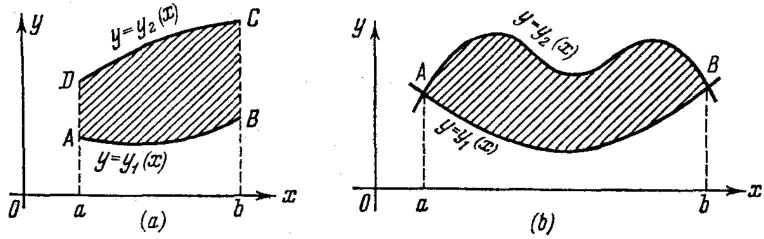
را در فاصله $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ حساب کنید. مستقیماً تحقیق کنید که مقدار متوسط این تابع که با $\frac{1}{6}$ برابر است، با مقداری از تابع $f(x)$ در نقطهٔ معین $x=\xi$ که در فاصلهٔ مفروض واقع است، مساوی می‌باشد.

۷ــ۳ محاسبهٔ مساحت در مختصات قائم

اگر ناحیهٔ مسطح به خطوط $x=a,\ x=b\ (a<b)$ و منحنیهای $y=y_1(x),\ \ y=y_2(x)$ با شرط $y_1(x)\leqslant y_2(x)\ \ (a\leqslant x\leqslant b)$ محدود شود، آنگاه مساحت این ناحیه از دستور زیر حساب می‌شود:

$$S=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]\,dx.$$

بعضی مواقع مرز چپ $x=a$ (یا مرز راست $x=b$) می‌تواند محل تلاقی منحنیهای $y=y_1(x)$ و $y=y_2(x)$ باشد. پس a و b طولهای نقاط تلاقی منحنیها



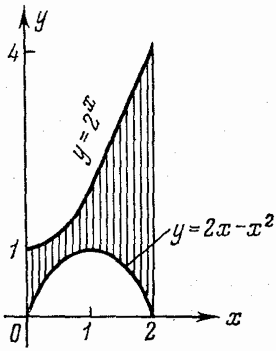
شکل ٦٦

هستند (شکل ٦٦ ، a, b).

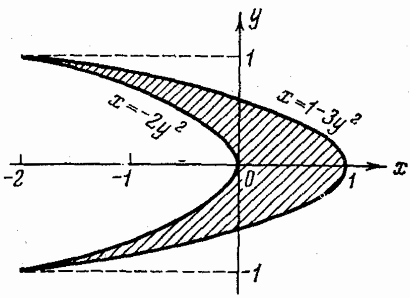
۱ــ۳ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به خطوط $x=0,\ x=2$ و منحنیهای $y=2^x,\ y=2x-x^2$ (شکل ٦٧)

حل . چون ماکزیمم تابع $y=2x-x^2$ در نقطهٔ $x=1$ برابر یک است و در فاصلهٔ [۰ ، ۲] داریم $y=2^x\geqslant 1$ ، پس

$$S=\int_0^2[2^x-(2x-x^2)]\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_0^2-\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$



شکل ٦٧



شکل ٦٨

۲ــ۳ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به سهمی های $x=-2y^2,\ x=1-3y^2$ (شکل ٦٨)

حل . دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x=2y^2;\\ x=1-3y^2,\end{cases}$$

را حل می کنیم، داریم $y_1=-1,\ y_2=1$. چون وقتی $-1\leqslant y\leqslant 1$ ، آنگاه $1-3y^2\geqslant -2y^2$ ، پس

$$S=\int_{-1}^{1}[(1-3y^2)-(-2y^2)]\,dy=2\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

۳ــ۳ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به سهمی $x^2=4y$ و منحنی $y=\frac{8}{x^2+4}$ (شکل ٦٩).

حل . طول نقاط A و C را که نقاط تلاقی منحنیها هستند، تعیین می کنیم.

برای این منظور y را در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y=\frac{8}{x^2+4} \\ y=\frac{x^2}{4}, \end{cases}$$

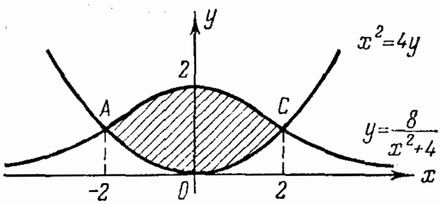
حذف می کنیم، داریم $\frac{8}{x^2+4}=\frac{x^2}{4}$ یا $x^4+4x^2-32=0$ ، ریشه های حقیقی این معادله $x_1=-2$ و $x_2=2$ هستند. طوری که در شکل مشاهده می شود در فاصله [۲، ۲ــ] داریم

$$\frac{8}{x^2+4} \geqslant \frac{x^2}{4}$$

(البته می توانیم برای این کار مقادیر دو تابع را به ازای نقطه‌ای از فاصلهٔ مانند $x=0$ حساب نمائیم، هر کدام از مقادیر بیشتر باشد، تابع متناظر آن بزرگتر است).

در نتیجه

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(4\arctan\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{2}=2\pi-\frac{4}{3}.$$



شکل ٦٩

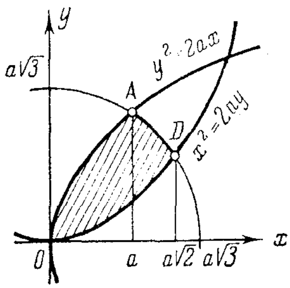
٤ــ٣ــ٧ مساحت ناحیهٔ محدود به سهمی $y=x^2+1$ و خط $x+y=3$ را حساب نمائید.

جواب : $\frac{35}{6}$

٥ــ٣ــ٧ مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایرهٔ $x^2+y^2=3a^2$ و محدود به سهمی های $y^2=2ax\,(a>0)$ و $x^2=2ay$ می باشد، حساب کنید. (شکل ۷۰)

حل . طول نقطهٔ A محل تلاقی سهمی $y^2=2ax$ و دایرهٔ $x^2+y^2=3a^2$ را به دست می آوریم. برای این منظور y را در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ y^2=2ax, \end{cases}$$



(شکل ۷۰)

حذف می کنیم. از آنجا $x^2+2ax-3a^2=0$ و بالاخره ریشهٔ مثبت $x_A=a$ حاصل می شود. به طور مشابه طول نقطهٔ D محل تلاقی دایرهٔ $x^2+y^2=3a^2$ و سهمی $x^2=2ay$ را به دست می آوریم که $x_D=a\sqrt{2}$ است. مساحت برابر است با :

$$S=\int_0^{a\sqrt{2}}[y_2(x)-y_1(x)]\,dx,$$

که در آن

$$y_1(x)=\frac{x^2}{2a},\quad y_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2ax} & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \sqrt{3a^2-x^2} & a<x\leqslant a\sqrt{2}.\end{cases}$$

با توجه به خاصیت جمع پذیری انتگرال ، داریم

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{2ax}-\frac{x^2}{2a}\right)dx+\int_a^{a\sqrt{2}}\left(\sqrt{3a^2-x^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx=$$

$$=\left[\sqrt{2a}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6a}\right]_0^a+\left[\frac{x}{2}\sqrt{3a^2-x^2}+\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{3}}-\frac{x^3}{6a}\right]_a^{a\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2-\frac{a^2}{6}+\frac{3a^2}{2}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2+\frac{1}{6}a^2=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right)a^2.$$

در این محاسبه دستور مثلثاتی

$$\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2})\quad(\alpha\beta>0)$$

را برای بدست آوردن

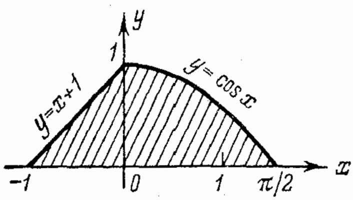
$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}=\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$$
$$=\arcsin\frac{1}{3}.$$

بکار برده‌ایم.

۶ـ۳ـ۷ مساحت ناحیه‌ای را حساب کنید که در ربع اول واقع است و به منحنی های $y^2=4x,\ x^2=4y$ و $x^2+y^2=5$ محدود می باشد.

جواب: $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}$

۷ـ۳ـ۷ مساحت ناحیه‌ای را حساب کنید که به خطوط $y=\cos x$, $y=x+1$ و محور x ها محدود است (شکل ۷۱).



شکل ۷۱

حل. تابع

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \cos x & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

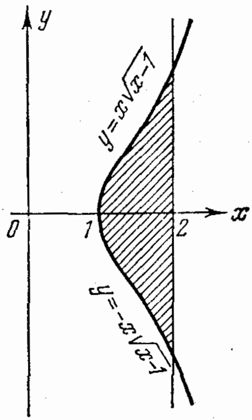
در فاصلهٔ $\left[-1,\ \frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته است. مساحت ذوزنقهٔ منحنی الضلع برابر است با

$$S=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}.$$

۸ـ۳ـ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت بین منحنی $y^2=x^3-x^2$ و خط $x=2$.

حل. از رابطهٔ $y^2=x^2(x-1)$ نتیجه می شود که $x^2(x-1)\geqslant 0$، بنابر-این یا $x=0$ یا $x\geqslant 1$. به عبارت دیگر حوزهٔ تعریف تابع ضمنی $y^2=x^3-x^2$

شامل نقطهٔ $x=0$ و فاصله $[1,\ \infty)$ است. در محاسبهٔ مساحت، نقطهٔ منفرد (۰ ، ۰) هیچ نقشی ندارد، پس فاصله انتگرالگیری، [۱ ، ۲] است (شکل ۷۲).



شکل ۷۲

تابع را به صورت

$$y=\pm x\sqrt{x-1}$$

می‌نویسیم، ملاحظه می‌شود که مساحت از بالا به $y=x\sqrt{x-1}$ و از پائین به $y=-x\sqrt{x-1}$ محدود است. بنابر این

$$S=\int_1^2 [x\sqrt{x-1}-(-x\sqrt{x-1})]\,dx=2\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال از تغییر متغیر

$x-1=t^2,$
$dx=2t\,dt,$

x	t
1	0
2	1

استفاده می‌کنیم. پس

$$S=4\int_0^1 (t^2+1)\,t^2\,dt=4\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{32}{15}.$$

۹ــ۳ــ۷ مساحت محدود به دو شاخه منحنی $(y-x)^2=x^3$ و خط $x=1$ را حساب کنید.

حل . قبل از هر چیز متوجه هستیم که y تابعی ضمنی از x است که فقط به ازای $x\geqslant 0$ معین است ، طرف اول معادله همواره نامنفی است. حال شاخه های منحنی را تعیین می کنیم :

$$y=x+x\sqrt{x} \quad \text{و} \quad y=x-x\sqrt{x}$$

چون $x\geqslant 0$ پس $x+x\sqrt{x}\geqslant x-x\sqrt{x}$ و بنابر این

$$S=\int_0^1 (x+x\sqrt{x}-x+x\sqrt{x})\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{5}.$$

۱۰ــ۳ــ۷ مساحت محدود به حلقهٔ منحنی $y^2=x(x-1)^2$ را حساب کنید

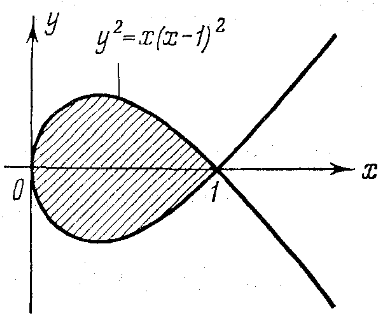
حل . حوزهٔ تعریف تابع ضمنی y ، فاصلهٔ $0\leqslant x<+\infty$ است، چون y از درجه دوم است پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. $y_1(x)$ شاخهٔ مثبت آن، عبارت است از

$$y=y_1(x)=\sqrt{x}\,|x-1|=\begin{cases}\sqrt{x}(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}(x-1), & x>1.\end{cases}$$

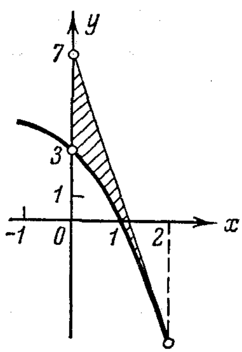
نقاط مشترک شاخه های متقارن $y_1(x)$ و $y_2(x)=-y_1(x)$ باید روی محور x ها باشند. ولی از $y_1(x)=\sqrt{x}\,|x-1|=0$ نتیجه می شود که $x_1=0$ و $x_2=1$. در نتیجه حلقه محدود به منحنیهای

$$y=\sqrt{x}(1-x) \quad \text{و} \quad y=-\sqrt{x}(1-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

می باشد (شکل ۷۳)، مساحت مورد نظر برابر است با :



شکل ۷۳



شکل ۷٤

$$S=2\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)\,dx=2\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{8}{15}.$$

۱۱ـ۳ـ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت محدود به حلقهٔ منحنی

$$y^2=(x-1)(x-2)^2$$

جواب : $\frac{8}{15}$

۱۲ـ۳ـ۷ مساحت محدود به سهمی $y=-x^2-2x+3$ و خط مماس به آن در نقطهٔ $M(2,\ -5)$ و محور y ها را حساب کنید.

حل . معادله خط مماس در نقطهٔ $M(2,\ -5)$ به صورت $y+5=-6(x-2)$ یا $y=7-6x$ است. چون شاخه‌های سهمی به طرف پائین امتداد پیدا می کنند پس منحنی زیر خط مماس قرار دارد یعنی، در فاصلهٔ $[0,\ 2]$ داریم.

$$7-6x\geqslant -x^2-2x+3$$

شکل ۷٤ پس

$$S=\int_0^2[7-6x-(-x^2-2x+3)]\,dx=\int_0^2(x^2-4x+4)\,dx=\frac{8}{3}$$

۱۳ـ۳ـ۷ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به سهمی $y=x^2-2x+2$ و خط مماس به آن در نقطهٔ $M(3,\ 5)$ و محور y ها.

جواب : ۹

۱٤ـ۳ـ۷ روی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b)$$

نقطهٔ $M(x,\ y)$ را که در ربع اول است در نظر می گیریم. نشان دهید که مساحت قطاعی از بیضی که بین نیم قطر اطول و خط OM واقع است عبارت است از

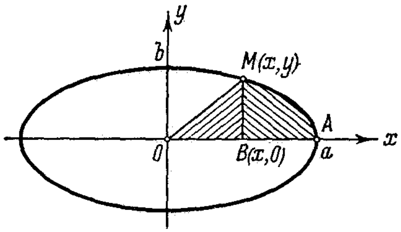
$$S=\frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}.$$

بکمک این رابطه دستور محاسبه مساحت بیضی را نتیجه بگیرید.

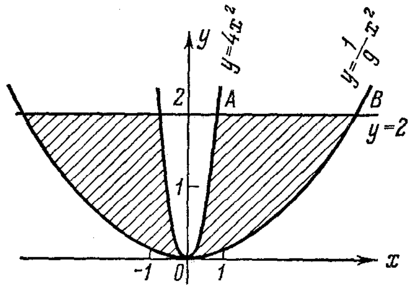
حل . با توجه به شکل ۷۵ داریم :

$$S_{OMAO}=S_{\Delta OMB}+S_{MABM};\quad S_{\Delta OMB}=\frac{xy}{2}=\frac{b}{2a}x\sqrt{a^2-x^2};$$

$$S_{MABM}=\int\limits_x^a y\,dx=\int\limits_x^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{b}{2a}\left(t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\arcsin\frac{t}{a}\right)\Big|_x^a=$$
$$=\frac{b}{2a}\left[-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}\right)\right].$$



شکل ۷۵



شکل ۷٦

چون $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}=\arccos\frac{x}{a}$ پس

$$S_{MABM}=\frac{b}{2a}\left[-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arccos\frac{x}{a}\right].$$

بنابر این

$$S_{OMAO}=S_{\Delta OMB}+S_{MABM}+\frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}.$$

در $x=0$ قطاع، تبدیل به ربع بیضی می شود یعنی،

$$\frac{1}{4}S_{\text{ellipse}}=\frac{ab}{2}\arccos 0=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{ab}{4}\pi,$$

و در نتیجه مساحت بیضی $S=\pi ab$ است. وقتی $a=b$ ، مساحت دایره به دست می آید:

$$S=\pi a^2$$

۱۵ــ۳ــ۷ مساحت محدود به سهمی های $y=\frac{x^2}{9}$, $y=4x^2$ و خط $y=2$ را حساب کنید.

حل . در اینجا توصیه می شود که نسبت به y انتگرالگیری کرده و از تقارن مساحت هم استفاده نماییم (شکل ۷٦). بنابر این معادله ها را نسبت به x حل می کنیم:

$$x=\pm\frac{\sqrt{y}}{2},\quad x=\pm 3\sqrt{y}$$

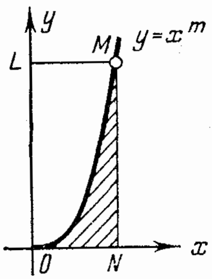
با توجه به تقارن شکل نسبت به محور y ها ، مساحت با دو برابر مساحت S_{OABO} برابر

است :

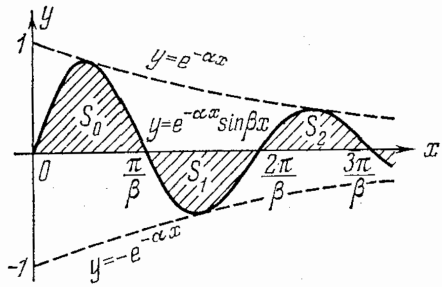
$$S=2S_{OABO}=2\int_0^2\left(3\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)dy=5\int_0^2\sqrt{y}\,dy=\frac{20\sqrt{2}}{3}$$

۱۶ــ۳ــ۷ از نقطهٔ دلخواه $M(x,\ y)$ واقع بر منحنی $y=x^m\ (m>0)$ خطوط MN و $ML\,(x>0)$ را عمود بر محورهای مختصات رسم می کنیم. مساحت ناحیهٔ $ONMO$ چه قسمتی از مساحت مستطیل $ONML$ می باشد؟ (شکل ۷۷).

جواب : $\frac{1}{m+1}$



شکل ۷۷



شکل ۷۸

۱۷ــ۳ــ۷ ثابت کنید که $S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,$ مساحت های محدود به محور x ها و نیم موج های منحنی $y=e^{-\alpha x}\sin\beta x,\ x\geqslant 0$ ، جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q=e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}$ می باشند.

حل . مطابق شکل ۷۸ منحنی ، قسمت مثبت محور x ها ، یعنی Ox را در نقاطی که $\sin\beta x=0$ ، قطع می کند ، از آنجا

$$x_n=\frac{n\pi}{\beta},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

تابع $y=e^{-\alpha x}\sin\beta x$ در فاصلهٔ $(x_{2k},\ x_{2k+1})$ مثبت و در فاصله $(x_{2k+1},\ x_{2k+2})$ منفی است ، یعنی ، علامت تابع در فاصلهٔ $(x_n,\ x_{n+1})$ با عدد $(-1)^n$ یکی است . بنابر این

$$S_n = \int\limits_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} |y|\,dx = (-1)^n \int\limits_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx.$$

ولی انتگرال نامعین آن برابر است با

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x\, dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) + C.$$

در نتیجه

$$S_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x)\right]\Bigg|_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} =$$

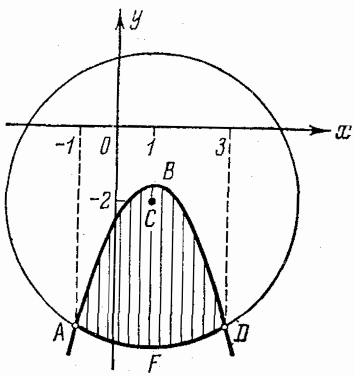
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^2+\beta^2}\left[e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta}\beta\,(-1)^{n+1} - e^{\alpha n\pi/\beta}\beta\,(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{-\alpha n\pi/\beta}\left(1+e^{-\alpha\pi/\beta}\right).$$

پس

$$q = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{e^{-\alpha(n+1)\pi/\beta}}{e^{-\alpha n\pi/\beta}} = e^{-\alpha\pi/\beta},$$

۱۸ــ۳ــ۷ مساحت واقع در داخل دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ و داخل سهمی $y=-x^2+2x+1-2\sqrt{3}$ را حساب کنید.



شکل ۷۹

حل . معادلات منحنی ها را به صورت زیر می نویسیم :

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16,$$
$$y=-(x-1)^2-2\sqrt{3}+2.$$

در نتیجه مرکز دایره نقطهٔ $C(1, -2)$، و شعاع آن ٤ است. محور سهمی خط $x=1$ و رأس آن نقطهٔ $B(1.\ 2,\ -2\sqrt{3})$ می‌باشد (شکل ۷۹). مساحت S_{ABDFA} از دستور زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABDFA}=\int_{x_A}^{x_D}(y_{\text{par}}-y_{\text{circle}})\,dx,$$

که در آن x_A و x_D از حل دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=16,\\ y+2=-(x-1)^2-2\sqrt{3}+4,\end{cases}$$

که در نتیجه $x_A=-1,\ x_D=3$. بنابر این

$$S_{ABDFA}=\int_{-1}^{3}[(-x^2+2x+1-2\sqrt{3})+(2+\sqrt{16-(x-1)^2})]\,dx=$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+(3-2\sqrt{3})\,x+\frac{x-1}{2}\sqrt{16-(x-1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{16}{2}\arcsin\frac{x-1}{4}\right]_{1}^{3}=\frac{32}{3}-8\sqrt{3}+2\sqrt{12}+16\arcsin\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{32}{3}-4\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi.$$

توجه انتگرال را می‌توان با انتخاب تغییر متغیر $x-1=z$ و استفاده از زوج بودن انتگرال، ساده‌تر حل کرد

۱۹ــ۳ــ۷ مساحت بین منحنی های $y=16-x^2$, $y=(x-4)^2$ و محور x ها را حساب کنید.

جواب: $\frac{64}{3}$

۲۰ــ۳ــ۷ مطلوب است محاسبه مساحت محدود به سهمی های

$$x=y^2;\qquad x=\frac{3}{4}y^2+1$$

جواب: $\frac{8}{3}$

۲۱ــ۳ــ۷ مساحت قسمتی از بیضی $x^2+4y^2=8$ را حساب کنید که به وسیلهٔ هذلولی $x^2-3y^2=1$ قطع می‌شود.

جواب $2\pi-(2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})$

۲۲ــ۳ــ۷ مساحت محدود به منحنی $y^2=(1-x^2)^3$ را حساب کنید.

جواب: 0.75π

۲۳ــ۳ــ۷ مساحت محدود به حلقهٔ منحنی $4(y^2-x^2)+x^3=0$ را حساب کنید. **جواب:** $\frac{128}{15}$

۲۴ــ۳ــ۷ مساحت واقع بین منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و خط $x+y=1$ را به دست آورید. **جواب:** $\frac{1}{3}$

۲۵ــ۳ــ۷ مساحت محدود به منحنی $y^2=x^2(1-x^2)$ را به دست آورید. **جواب:** $\frac{4}{3}$

۲۶ــ۳ــ۷ مساحت محدود به حلقهٔ منحنی $x^3+x^2-y^2=0$ را به دست آورید. **جواب:** $\frac{8}{15}$

۲۷ــ۳ــ۷ مساحت محدود به محور عرضها و منحنی $x=y^2(1-y)$ را به دست آورید. **جواب:** $\frac{1}{12}$

۲۸ــ۳ــ۷ مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y=x^4-2x^3+x^2+3$ و محور x ها که بین عرضهای نقاط مینیمم منحنی $y(x)$ واقع است.

جواب: $\frac{91}{30}$

۴ــ۷ محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی هایی که معادلات آنها به صورت پارامتری هستند

اگر مرز ناحیه محدود به معادلات :

$$x=x(t), \qquad y=y(t)$$

باشد، مساحت آن بوسیلهٔ یکی از دستورهای زیر حساب می شود :

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt; \quad S=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt; \quad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx')\,dt,$$

که در آن α و β مقادیر متناظر از پارامتر t برای ابتدا و انتهای مرز ناحیه است که در جهت مثبت پیموده می شود. (جهت مثبت عبارت است از جهتی‌است که اگر متحرکی در آن جهت محیط ناحیه را بپیماید مساحت ناحیه را در طرف چپ خودش داشته باشد).

۱ــ۴ــ۷ مساحت محدود به بیضی

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

را حساب کنید.

حل . برای راحتی ، به صورت زیر عمل می کنیم :

$$xy' - yx' = a\cos t \times b\cos t + b\sin t \times a\sin t = ab$$

پس

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

۲ــ٤ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت محدود به آستروئید

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

حل . برای محاسبه، معادله را به صورت پارامتری می نویسیم :

$$x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

برای راحتی محاسبه، به قرار زیر عمل می کنیم :

$$xy' - yx' = a^2(\cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t\sin t) =$$
$$= 3a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

پس

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')\,dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

۳ــ٤ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیه واقع در یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$$

و محور x ها .

حل . در اینجا مرز ناحیه قسمتی از سیکلوئید است وقتی $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ وقسمتی از محور x هاست که $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi a)$. برای محاسبهٔ مساحت، از فرمول

$$S = -\int_\alpha^\beta yx'\,dt$$

استفاده می کنیم . چون معادله محور x ها، $y = 0$ است پس

$$S = -\int_{2\pi}^{0} a(1 - \cos t)\,a(1 - \cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2\,dt =$$

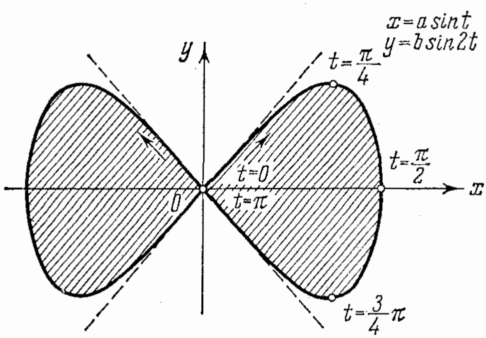
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right] dt = 3\pi a^2$$

۴ـ ۴ـ ۷ مساحت ناحیه محدود به منحنی

$$x = a\sin t, \quad y = b\sin 2t$$

رابدست آورید.

حل . با توجه به اینکه وقتی t به $\pi - t$ تبدیل شود، x ثابت مانده ولی علامت y تغییر می کند پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. وقتی t را به $\pi + t$ تبدیل می کنیم y تغییر نمی کند ولی x تغییر علامت می دهد، بنابر این منحنی نسبت به محور y ها متقارن است.



شکل ۸۰

بعلاوه چون توابع $x = a\sin t;\ \ y = b\sin 2t$ دارای دورهٔ تناوب مشترک 2π هستند پس فاصلهٔ تغییرات پارامتر عبارت است از $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. از معادلات منحنی نتیجه می شود که فقط اگر پارامتر t درفاصلهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تغییر نماید x و y با هم، نامنفی هستند پس به ازای $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ منحنی در ربع اول قرار دارد شکل ۸۰ .

همان طوری که در شکل دیده می شود کافی است مساحت یک حلقه محاسبه گردد که متناظر تغییرات t برای این حلقه از ۰ تا π می باشد، پس

$$S = 2\int_0^{\pi} yx'\,dt = 2\int_0^{\pi} b\sin 2t \times a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi} \cos^2 t\sin t\,dt =$$
$$= -4ab\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}ab.$$

۵ـ ۴ـ ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به حلقه منحنی

$$x=\frac{t}{3}(6-t);\quad y=\frac{t^2}{8}(6-t).$$

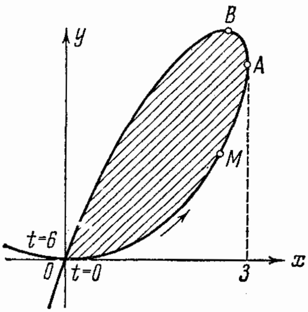
را حساب کنید.

حل . نقاطی از منحنی را تعیین می کنیم که خودش را قطع می کند. هر دو منحنی $x(t)$ و $y(t)$ در فاصلهٔ $-\infty < t < \infty$ معین هستند.

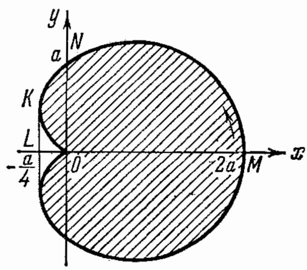
طول و عرض نقطه‌ای را که منحنی خودش را قطع می کند به ازای مقادیر مختلف پارامتر به دست می آیند. چون $x=3-\frac{1}{3}(t-3)^2$ ، پس طولهای نقاط تلاقی به ازای $t=3\pm\lambda$ حاصل می شوند. λ را طوری تعیین می کنیم که رابطه

$$\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda)=\frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda)$$

به ازای $\lambda\neq 0$ برقرار باشد که از آنجا $\lambda=\pm 3$. بنابراین در $t_1=0$ و $t_2=6$ داریم



شکل ۸۱



شکل ۸۲

$x(t_1)=x(t_2)=0$ و $y(t_1)=y(t_2)=0$ یعنی ، (۰ ، ۰) تنها نقطه‌ای است که منحنی خودش را قطع می کند. وقتی t از ۰ تا ۶ تغییر می کند تمام نقاط منحنی در ربع اول قرار می گیرند. وقتی t از ۰ تا ۳ تغییر کند نقطه $M(x,\ y)$ قسمت فوقانی حلقه را رسم می کند، زیرا در این فاصله $x(t)$ و $y(t)=\frac{3tx}{8}$ صعودی هستند و بنابراین $x(t)$ شروع به نزول می کند، در حالی که هنوز $y(t)$ در حال صعود است. شکل ۸۱ نشان می دهد که وقتی منحنی در جهت افزایش t پیموده می شود، ناحیه در سمت چپ قرار می‌گیرد.

برای محاسبه مساحت محدود به این حلقه دستور زیر مناسب است:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^6(xy'-yx')\,dt=\frac{1}{2}\int_0^6\frac{t^2(6-t)^2}{24}\,dt=\frac{27}{5}.$$

۶ــ۴ــ۷ مساحت واقع در حلقهٔ

$$x=t^2;\ \ y=t-\frac{t^3}{3}$$

را بدست آورید.

جواب: $\frac{8}{5}$

۷ــ۴ــ۷ مطلوب است محاسبه مساحت **محدود** به کار دیوئید

$$x=a\cos t\,(1+\cos t);\ \ y=a\sin t\,(1+\cos t).$$

حل. چون توابع $x(t)$ و $y(t)$ توابعی متناوب هستند لذا کافی است فاصله $[-\pi,\ \pi]$ را درنظر بگیریم. چون با تبدیل t به $-t$ مقدار x ثابت مانده وفقط y تغییر علامت می دهد و وقتی t از ۰ تا π تغییر می کند $y\leqslant 0$، بنابراین منحنی نسبت به محور x ها متقارن است.

وقتی t از ۰ تا π تغییر نماید تابع $u=\cos t$ از ۱ تا ۱ــ نزول می کند و

$$x=au\,(1+u)=a\left[-\frac{1}{4}+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

نخست از $x\big|_{u=1}=2a$ به $x\big|_{u=-\frac{1}{2}}=-\frac{a}{4}$ نزول کرده و سپس تا $x\big|_{u=-1}=0$ صعود می کند. می توان نشان داد که y در فاصلهٔ $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$ صعودی و در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\pi\right)$ نزولی است.

نمایش هندسی تابع در شکل ۸۲ نموده شده است و فلش جهتی را نشان می دهد که t افزایش می یابد. در نتیجه

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy'-yx')\,dt=a^2\int_{0}^{\pi}(1+\cos t)^2\,dt=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

۸ــ۴ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ ناحیهٔ محدود به منحنی

$$x=\cos t,\ \ y=b\sin^3 t.$$

جواب: $0.75\pi ab$

راهنمایی: منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است و آنها را در نقاط $x=\pm a,\ y=\pm b$ قطع می کند.

۹ــ۴ــ۷ مساحت محدود به حلقهٔ هر یک از منحنی های زیر را بدست آورید:

(a) $x=t^2-1,\ \ y=t^3-t;$

(b) $x=2t-t^2;\ \ y=2t^2-t^3;$

(c) $x=t^2;\ \ y=\frac{t}{3}(3-t^2).$

جواب: $\frac{8}{15}$ (a) **راهنمایی :** منحنی نسبت به محور x'ها متقارن است و مبداء را مرتبهٔ دیگر، به ازای $t=\pm 1$ قطع می کند. حلقه در ربع های دوم و سوم واقع است.

$\frac{8}{15}$ (b) **راهنمایی :** نقاطی که منحنی خودش را قطع می کند به صورت زیر تعیین می شوند:

از $y=tx(t)$ به ازای $t_1 \neq t_2$ داریم $y(t_1)=t_1x(t_1)=t_2x(t_2)$ و $x(t_1)=x(t_2)$ فقط وقتی $x(t_1)=x(t_2)=0$، یعنی $t_1=0;\ t_2=2$.

(c) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

۱۰ــ۴ــ۷ مساحت ناحیه محدود به منحنی زیر را بدست آورید:

$$x=a\cos t;\ \ y=b\sin t\cos^2 t.$$

جواب: $0.25\pi ab$. **راهنمایی :** منحنی نسبت به هر دو محور متقارن است که دوبار از مبداء می گذرد و دوتا حلقه می سازد. بنابراین کافی است یک چهارم مساحت را که متناظر تغییرات t از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است حساب کرده و نتیجه را به ٤ ضرب کنیم.

۱۱ــ٤ــ۷ مساحت محدود به گستردهٔ بیضی

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t;\quad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t;\quad c^2=a^2-b^2$$

را حساب کنید.

جواب : $\frac{3c^4\pi}{8ab}$. **راهنمایی :** منحنی شبیه به یک آستروئید است که که در جهت قائم، امتداد پیدا می کند.

۵ــ۷ محاسبهٔ مساحت در مختصات قطبی

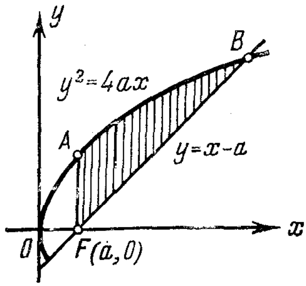
در مختصات قطبی مساحت محدود به منحنی $\rho=\rho(\varphi)$ و شعاع حامل های $\varphi_1=\alpha$ و $\varphi_2=\beta$ با انتگرال زیر حساب می شود:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

۱ــ۵ــ۷ مساحت واقع در ربع اول و محدود به سهمی $y^2=4ax$ و خطوط $y=x-a$ و $x=a$ را حساب کنید.

حل . دستگاه مختصات قطبی را طوری در نظر می گیریم که قطب به نقطهٔ F ،

کانون سهمی منطبق شود و جهت محور قطبی در جهت محور x ها قرار بگیرد. بنابر این معادلهٔ سهمی به صورت $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ است که p پارامتر سهمی است. در اینجا $p = 2a$ و F دارای مختصات $(a,\ 0)$ است. بنابر این معادله سهمی به صورت $\rho = \frac{2a}{1-\cos\varphi}$ بوده و خطوط راست تبدیل به $\varphi = \frac{\pi}{4}$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ می شوند (شکل ۸۳)



شکل ۸۳

پس،

$$S_{FABF} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2}{(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi = 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{4\sin^4\frac{\varphi}{2}}$$

تغییر متغیر زیر را در نظر بگیریم:

$$\cot\frac{\varphi}{2} = z, \qquad -\frac{d\varphi}{2\sin^2(\varphi/2)} = dz,$$

φ	z
$\pi/4$	$\cot(\pi/8)$
$\pi/2$	1

داریم

$$S_{FABF} = a^2\int_1^{\cot(\pi/8)} (1+z^2)\,dz = a^2\left(\cot\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\pi}{8}-1-\frac{1}{3}\right)$$

باتوجه به

$$\cot\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = 1+\sqrt{2}$$

داریم:

$$S_{FABF} = 2a^2\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right).$$

۲ــ۵ــ۷ مساحت محدود به هریک از منحنی های زیر را حساب کنید:

(a) $\rho = 1 + \cos\varphi$;
(b) $\rho = a\cos\varphi$.

جواب: (a) $\frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi a^2}{4}$

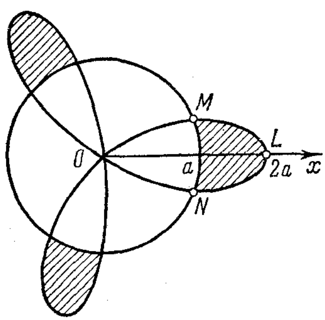
راهنمایی: منحنی دوم دایره‌ای است به شعاع $\frac{a}{2}$ که از قطب می گذرد و نسبت به محور قطبی متقارن است و $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ •

۳ــ۵ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $\rho = 2a\cos 3\varphi$ و دایرهٔ $\rho = a$ ، که مساحت خارج دایره واقع است.

حل . چون منحنی $\rho = 2a\cos 3\varphi$ دارای دورهٔ تناوب $T = \frac{2\pi}{3}$ است وقتی φ بین $-\pi$ و π تغییر می کند شعاع حامل سه حلقهٔ مساوی منحنی را رسم می کند. مقادیر مورد قبول φ ، آن مقادیری هستند که $\cos 3\varphi \geqslant 0$ ، از آنجا

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \dots).$$

پس یکی از حلقه‌ها وقتی φ بین $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ تغییر کند رسم می شود. دو حلقهٔ دیگر، وقتی φ بترتیب بین $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می کند رسم می شوند (شکل ۸۴)، مساحت قسمتهای بریده شده بوسیلهٔ دایره $\rho = a$ ، با سه برابر مساحت ناحیهٔ S_{MLNM} برابر است. مختصات قطبی نقاط M و N با حل معادلهٔ $2a\cos 3\varphi = a$ یعنی $\cos 3\varphi = \frac{1}{2}$ بدست می آیند. جوابهای معادله که بین $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ قرار دارد فقط $-\frac{\pi}{9}$ و $\frac{\pi}{9}$ $(k=0)$ می باشند. پس نقطهٔ N با زاویهٔ قطبی $\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}$ ، و نقطهٔ M با زاویهٔ قطبی $\varphi_2 = \frac{\pi}{9}$ مشخص می شود. با توجه به شکل داریم:



شکل ۸٤

$$S_{MLNM}=S_{OMLNO}-S_{OMNO}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9}4a^2\cos^2 3\varphi\, d\varphi-\frac{1}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9}a^2\, d\varphi=a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

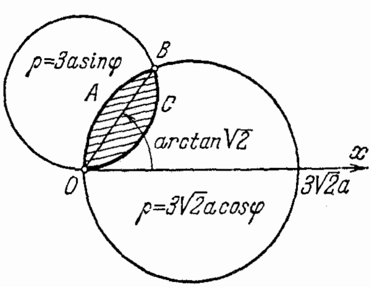
۴ــ۵ــ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به دو دایرهٔ $\rho=3\sqrt{2}\,a\cos\varphi$ و $\rho=3a\sin\varphi$ را بدست آورید.

حل . دایرهٔ اول در نیم صفحه سمت راست قرار دارد و از قطب $\rho=0$ می گذرد و به خط افقی در این نقطهٔ مماس است. در نتیجه قطب، محل تلاقی دایره هاست. نقطه تلاقی دیگر نقطهٔ B است که از حل معادلهٔ $3\sqrt{2}\,a\cos\varphi=3a\sin\varphi$ بدست می آید، یعنی $B(\arctan\sqrt{2},\ a\sqrt{6})$. طوری که در شکل ۸۵ نشان داده شده است مساحت S ، با مجموع مساحت های ناحیه های $OABO$ و $OCBO$ برابر است که در شعاع حامل $\varphi=\arctan\sqrt{2}$ مشترک هستند. کمان BAO از دایرهٔ اول در فاصلهٔ تغییرات $\arctan\sqrt{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ رسم می شود و کمان OCB از دایرهٔ دوم در فاصلهٔ تغییرات $0\leqslant\varphi\leqslant\arctan\sqrt{2}$ رسم می شود. بنابر این

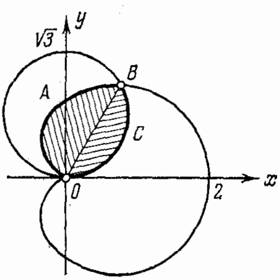
$$S_{OABO}=9a^2\int_{\arctan\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi=\frac{9}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$
$$S_{OCBO}=\frac{9}{2}a^2\int_{0}^{\arctan\sqrt{2}}\sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{9}{4}a^2\left(\arctan\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

پس

$$S_{OABO}+S_{OCBO}=2.25a^2(\pi-\arctan\sqrt{2}-\sqrt{2}).$$



شکل ۸۵



شکل ۸۶

۵ــ۵ــ۷ مساحت ناحیه‌ای از کاردیوئید $\rho = 1+\cos\varphi$ را که بوسیلهٔ دایره $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$ قطع می‌شود حساب کنید (شکل ۸۶)

حل . نقاط تلاقی دو منحنی را با حل دستگاه معادلات زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{3}\sin\varphi, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ \rho=1+\cos\varphi, \end{cases}$$

جوابها $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ ، $\varphi_2=\pi$ هستند. مساحت مطلوب، مجموع دو مساحت است. اولی مساحت قسمتی از دایره، و دومی مساحت قسمتی از کاردیوئید می‌باشد، فصل مشترک دو مساحت شعاع حامل $\varphi=\frac{\pi}{3}$ است. کمان BAO قسمتی از کاردیوئید است که در فاصله تغییرات $\frac{\pi}{3}$ تا π رسم می‌شود، کمان OCB قسمتی از دایره است که در فاصلهٔ تغییرات $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$ رسم می‌شود. بنابر این

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin^2\varphi\, d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=$$

$$=\frac{3}{4}(\pi-\sqrt{3}).$$

۶ــ۵ــ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به کاردیوئید $\rho=a(1-\cos\varphi)$ و دایرهٔ $\rho=a$ را حساب کنید.

جواب : $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$

۷ــ۵ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت حلقهٔ منحنی $x^3+y^3=3axy$.

حل . برای محاسبه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. با توجه به روابط

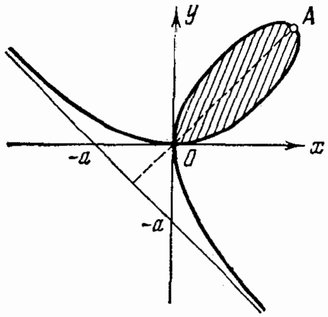
$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi.$$

داریم :

$$\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3a\rho^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

یا

$$\rho=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}=$$
$$=\frac{3a\sin 2\varphi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)(2-\sin 2\varphi)}.$$



شکل ۸۷

از معادله چنین بر می‌آید که اولاً به ازای $\varphi=0$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$ داریم $\rho=0$ ، ثانیاً هرگاه $\varphi\to\frac{3\pi}{4}$ و $\varphi\to-\frac{\pi}{4}$ آنگاه $\rho\to\infty$. از مطلب دوم معلوم می‌شود که منحنی مجانبی **به معادلهٔ** $y=-x-a$ دارد که براحتی می‌توان با روش معمولی، در مختصات قائم، تعیین کرد. در نتیجه **حلقه** منحنی وقتی φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر بکند در ربع اول رسم می‌شود (شکل ۸۷) . پس

$$S_{OAO}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

با توجه به تقارن منحنی نسبت به نیمساز $y=x$ ، یعنی، شعاع حامل $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ، مساحت نصف حلقه را حساب می کنیم یعنی در فاصلهٔ تغییرات $\varphi=0$ تا $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ، و سپس آن را دو برابر می کنیم. برای محاسبهٔ انتگرال از تغییر متغیر

$$\tan\varphi=z,\qquad \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=dz,$$

φ	z
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1

استفاده می کنیم. از آنجا داریم:

$$S_{OAO}=9a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi=9a^2\int_{0}^{1}\frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^2}.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$1+z^3=v,\qquad 3z^2\,dz=dv,$$

z	v
0	1
1	2

بالاخره مساحت به صورت زیر حساب می شود :

$$S_{OAO}=3a^2\int_1^2\frac{dv}{v^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

۸ــ۵ــ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به حلقه های هریک از منحنی های زیر را حساب کنید :

$$(a)\ \rho=a\cos 2\varphi;\quad (b)\ \rho=a\sin 2\varphi.$$

جواب : (a) $\frac{\pi a^2}{8}$؛ (b) $\frac{\pi a^2}{8}$

۹ــ۵ــ۷ مساحت ناحیه ای از کاردیوئید $\rho=a(1-\cos\varphi)$ را حساب کنید که درون دایرهٔ $\rho=a\cos\varphi$ واقع است.

جواب : $a^2\left(\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}\right)$

۱۰ــ۵ــ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $\rho=a\sin\varphi\cos^2\varphi,\ a>0$ را بدست آورید.

جواب : $\frac{\pi a^2}{32}$ **راهنمایی :** منحنی از قطب می گذرد و دو حلقهٔ متقارن نسبت به محور y ها را در ربع اول و دوم می سازد. پس کافی است مساحت یک حلقه را که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ می باشد حساب کرده و آن را دو برابر نماییم.

۱۱ــ۵ــ۷ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $\rho=a\cos^3\varphi\ (a>0)$ را حساب کنید.

جواب : $\frac{5}{32}\pi a^2$ **راهنمایی :** منحنی از قطب می گذرد و نسبت به محور قطبی متقارن است، و مساحت مورد نظر در ربع اول و چهارم واقع است پس کافی است مساحت قسمت بالا را که متناظر به تغییرات φ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است محاسبه و دوبرابر نماییم.

۱۲ــ۵ــ۷ مساحت قسمتی از لمنسکات برنولی $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ را که درون دایرهٔ $\rho=\frac{a}{\sqrt{2}}$ قرار دارد حساب کنید.

جواب : $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

۱۳ــ۵ــ۷ با استفاده از مختصات قطبی مساحت محدود به منحنی

$$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$$

را حساب کنید.

جواب : $\frac{\pi a^2}{2}$ **راهنمایی :** منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است و فقط آنها را در مبداء مختصات قطع می کند و چهار حلقه که هر کدام در یک ربع قرار دارند، می سازد **(گل رزچهاربرگی)**. بنابر این کافی است مساحت یک حلقه که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است حساب کرده و آن را چهار برابر کنیم.

۷ـ۵ـ۱۴ با استفاده از مختصات قطبی مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ را حساب کنید.

جواب : $\sqrt{2}\,\pi a^2$ **راهنمایی :** منحنی نسبت به نیمسازها و محورهای مختصات متقارن است و محورها را در فاصله های مساوی قطع می کند. مبداء مختصات یک نقطهٔ منفرد است. پس کافی است مساحت یک هشتم آن را که متناظر به تغییرات φ از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ است حساب کرده و نتیجه را هشت برابر نماییم.

۷ـ۶ محاسبهٔ حجم یک جسم

حجم یک جسم از رابطهٔ

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

به دست می آید که $S(x)$ مساحت مقطع جسم با هر صفحهٔ عمود به محور x ها در نقطه ای به طول x در فاصلهٔ تغییرات a تا b است. تابع $S(x)$ ، در فاصلهٔ تغییرات x ، از a تا b معین و پیوسته است.

V_x حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ منحنی الضلع محدود به $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ $(a<b)$ از رابطهٔ زیر حساب می شود :

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

V_x حجم حاصل از دوران ناحیهٔ واقع بین منحنی های $y=y_1(x)$ و $y=y_2(x)$ $[0\leqslant y_1(x)\leqslant y_2(x)]$ و خطوط راست $x=a,\ \ x=b$ حول محور x ها از رابطهٔ زیر به دست می آید :

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

اگر منحنی با معادلات پارامتری یا در مختصات قطبی مشخص شود، دستورهای فوق را به صورت مناسب تغییر داده و حجم را حساب می کنیم.

۱ــ۶ــ۷ حجم بیضوی (یا الپسوئید) زیر را حساب کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حل . مقطع بیضوی با صفحهٔ، مقدار ثابت $= x$ ، یک بیضی است (شکل ۸۸)

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

نیمقطرهای این بیضی عبارتند از:

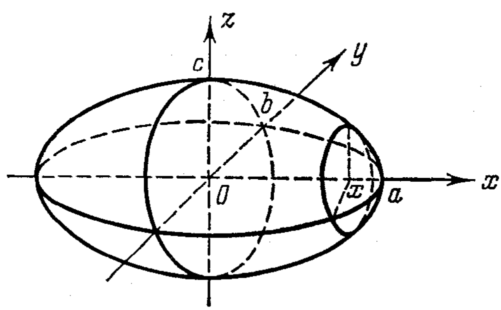
$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};\ c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

مساحت بیضی برابر است با:

$$S(x) = \pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \times c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

(مسئلهٔ **۱ــ۴ــ۷** را ببینید). بنابر این حجم بیضوی برابر

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$



شکل ۸۸

است، در حالت خاص $a=b=c$ ، بیضوی تبدیل به کره می شود و حجم آن برابر است با

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

۲ـ۶ـ۷ حجم قسمتی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=16$ را که بین صفحات $x=2$ و $x=3$ قرار دارد حساب کنید.

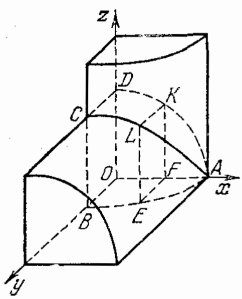
جواب : $9\frac{2}{3}\pi$ **راهنمایی :** صفحهٔ عمود بر محور x ها در نقطهٔ x کره را در مقطع دایره‌ای شکل، با شعاع $r=\sqrt{16-x^2}$ قطع می کنند که مساحت آن $S(x)=\pi(16-x^2)$ است.

۳ـ۶ـ۷ دو استوانه به شعاع قاعده‌های a با محورهای متعامد، مفروض است. حجم مشترک دو استوانه را بدست آورید.

حل . محورهای استوانه‌ها را، محورهای y و z انتخاب می کنیم (شکل ۸۹). حجم $OABCD$ با یک هشتم حجم جسم مورد نظر برابر است.

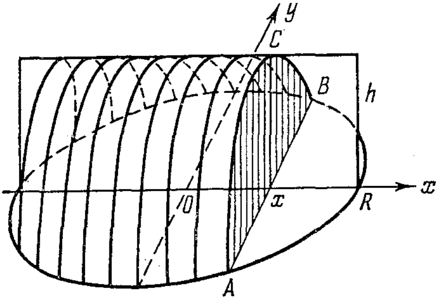
مقطع جسم را با صفحه عمود به محور x ها در فاصلهٔ x از مبداء پیدا می کنیم. مقطع، مربع $EFKL$ با بُعد $EF=\sqrt{a^2-x^2}$ است که مساحت آن برابر $S(x)=a^2-x^2$ و حجم آن برابر است با

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}a^3.$$

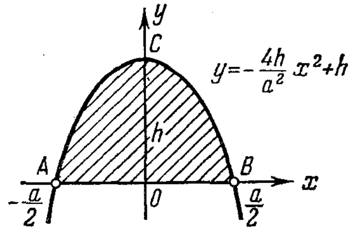


شکل ۸۹

۴ـ۶ـ۷ روی تمام وترهای یک دایره به شعاع R که همگی با هم موازیند سهمی هایی به ارتفاع ثابت h بنا شده است، طوری که صفحهٔ سهمی ها به صفحهٔ دایره عمود است. حجم جسم حاصل را بیابید (شکل ۹۰).



شکل ۹۰



شکل ۹۱

حل . نخست مساحت سهمی به قاعدهٔ a و به ارتفاع h را بدست می آوریم. اگر محورهای مختصات را مطابق شکل ۹۱ در نظر بگیریم، معادلهٔ سهمی به صورت زیر نوشته می شود

$$y=\alpha x^2+h$$

با در نظر گرفتن مختصات نقطهٔ $B\left(\frac{a}{2}\,,\,0\right)$، پارامتر α را حساب می کنیم. در این نقطه داریم، $0=\alpha\frac{a^2}{4}+h$ از آنجا $\alpha=-\frac{4h}{a^2}$ ۰ بنابر این معادلهٔ سهمی

$$y=-\frac{4h}{a^2}x^2+h.$$

بوده و مساحت مورد نظر برابر است با

$$S=2\int_0^{\frac{a}{2}}y\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\frac{4h}{a^2}x^2+h\right)dx=\frac{2}{3}ah.$$

حال حجم را حساب می کنیم. اگر محورهای مختصات را طبق شکل ۹۰ مرتب کنیم و جسم را بوسیلهٔ صفحات عمود به محور x ها در نقطه‌ای به طول x قطع دهیم مساحت مقطع برابر است با $S=\frac{2}{3}ah$ که در آن

$$a=2y=2\sqrt{R^2-x^2}$$

است . پس

$$S(x)=\frac{4}{3}\sqrt{R^2-x^2}\,h \quad \text{و} \quad V=\int_{-R}^{R}S(x)\,dx=\frac{8}{3}h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}\pi hR^2.$$

۵ــ۶ــ۷ صفحه مثلثی بر قطر ثابتی از دایره به شعاع a عمود است و قاعدهٔ آن

وتری از دایره می باشد و رأس مثلث روی خط راستی موازی با آن قطر و به فاصله h از صفحهٔ دایره واقع است. این مثلث از یک طرف قطر تا طرف دیگر آن حرکت می کند در نتیجه جسمی حاصل می شود، حجم آن را بیابید.

جواب: $0.5\pi a^2 h$ **راهنمایی:** مساحت مثلث وقتی به فاصلهٔ x از مرکز دایره قرار گیرد برابر $h\sqrt{a^2-x^2}$ است.

۶ــ۶ــ۷ ناحیهٔ واقع بین محورهای مختصات و **سهمی** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ **حول** محور x ها دوران می کند حجم جسم حاصل را بیابید.

حل . نقاط تلاقی منحنی با محورهای مختصات عبارت است از

$$x=0\ \ y=a,\quad \text{و}\quad y=0\ \ x=a$$

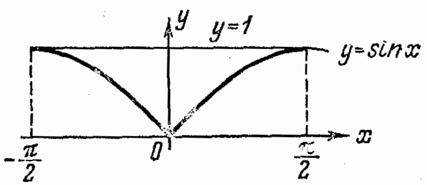
پس فاصلهٔ انتگرالگیری $[0,\ a]$ است. با توجه به معادلهٔ سهمی داریم:

$$y=\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

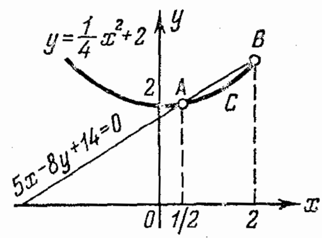
بنابر این

$$V=\pi\int_0^a y^2\,dx=\pi\int_0^a\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^4dx=\pi\int_0^a\left(a^2-4a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+6ax-\right.$$
$$\left.-4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=\frac{1}{15}\pi a^3.$$

۷ــ۶ــ۷ ناحیه واقع بین یک قوس از منحنی سینوسی $y=\sin x$ و محور عرضها و خط $y=1$ را حول محور y ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید (شکل ۹۲).



شکل ۹۲



شکل ۹۳

حل . تابع معکوس $x=\arcsin y$ را درفاصلهٔ [۰، ۱] در نظر می گیریم. پس

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi\int_0^1 (\arcsin y)^2\,dy.$$

با توجه به تغییر متغیر $\arcsin y=t$ داریم:

$$y=\sin t,\quad dy=\cos t\,dt,\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline y & t\\ \hline 0 & 0\\ 1 & \pi/2\\ \hline\end{array}$$

پس

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos t\,dt$$

با استفاده از روش جزء بجزء داریم $V=\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$.

۸ــ۶ــ۷ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y=0.25x^2+2$ و خط $5x-8y+14=0$ حول محور x ها را بدست آورید.

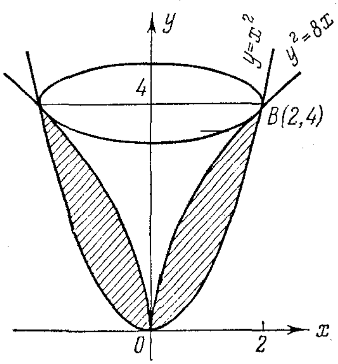
حل . جسم از دوران سطح $ABCA$ حول محور x ها ساخته می شود (شکل ۹۳ را ببینید). برای بدست آوردن طول نقاط A و B دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+2,\\ 5x-8y+14=0\end{cases}$$

داریم $x_B=2$; $x_A=\frac{1}{2}$. در این حالت $y_1(x)=\frac{1}{4}x^2+2$ و $y_2(x)=(5/8)x+7/4$

پس

$$V=\pi\int_{1/2}^{2}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{5}{2}x+7\right)^2-\left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2\right]dx=\frac{891}{1\,280}\pi.$$



شکل ۹٤

۹ــ۶ــ۷ سطح محدود به سهمی های $y=x^2$ و $8x=y^2$ را حول محور y ها دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را بدست آورید.

حل . واضح است که در فاصلهٔ بین مبداء و نقطهٔ تلاقی سهمی ها داریم (شکل ۹۴ را ببینید):

$$x_2(y)=\sqrt{y}\geqslant x_1(y)=\frac{y^2}{8}$$

حال عرض های نقاط تلاقی را با حل دستگاه معادلات زیر بدست می آوریم

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=8x. \end{cases}$$

که داریم، $y_1=0,\ y_2=4$. بنابر این

$$V=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\frac{24}{5}\pi.$$

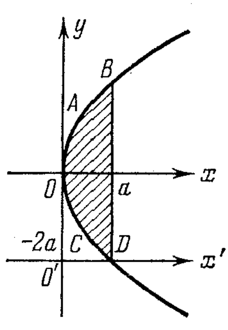
۱۰ــ۶ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ حجم چنبرهٔ حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع a حول محوری واقع در صفحهٔ دایره و به فاصلهٔ b از مرکز آن $(b\geqslant a)$. (مثلاً توئی لاستیک اتومبیل به شکل یک چنبره است).

جواب: $2\pi^2a^2b$

۱۱ــ۶ــ۷ ناحیهٔ واقع بین دو شاخه از منحنی $(y-x)^2=x^3$ و خط $x=1$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{8}{7}$ (تمرین ۹ــ۳ــ۷ را ببینید).

۱۲ــ۶ــ۷ ناحیهٔ محدود به سهمی $y^2=4ax$ و خط $x=a$ را حول خط $y=-2a$ دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید (شکل ۹۵ را ببینید).



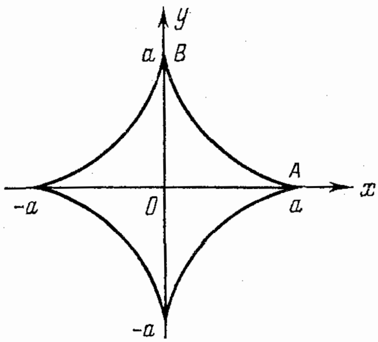
شکل ۹۵

حل . اگر مبداء مختصات را با حفظ جهت و امتداد محورهای مختصات، به نقطهٔ $O'(0, -2a)$ منتقل کنیم، معادله سهمی در دستگاه مختصات جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$(y'-2a)^2=4ax.$$

پس معادلهٔ منحنی OAB ، عبارت است از $y_2=2a+\sqrt{4ax}$ و معادله منحنی OCD به صورت $y_1=2a-\sqrt{4ax}$ است. حجم مورد نظر برابر است با:

$$V=\pi\int_0^a (y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_0^a [(2a+2\sqrt{ax})^2-(2a-2\sqrt{ax})^2]\,dx=\frac{32}{3}\pi a^3.$$



شکل ۹۶

۱۳ــ۶ــ۷ ناحیهٔ محدود به آستروئید $x=a\cos^3 t;\ y=a\sin^3 t$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

حل. حجم مطلوب را با V نشان می دهیم و مقدار آن با دو برابر حجم جسمی برابر است که از دوران سطح OAB حاصل می شود (شکل ۹۶ را ببینید). پس

$$V=2\pi\int_0^a y^2\,dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم،

$$\begin{aligned} x&=a\cos^3 t,\\ dx&=-3a\cos^2 t\sin t\,dt,\\ y&=a\sin^3 t,\end{aligned}$$

x	t
0	$\pi/2$
a	0

بنابر این

$$V = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t\,(-3a\cos^2 t \sin t)\,dt =$$

$$= 6\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\,dt \right].$$

با استفاده از دستوری که در مسئلهٔ **۹ــ۶ــ۶** دیدیم، مقدار انتگرال فوق برابر است با :

$$V = 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{105}\pi a^3$$

۱۴ــ۶ــ۷ حجم حاصل از دوران یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$$

حول محور x ها را حساب کنید. **جواب :** $5\pi^2 a^3$

۱۵ــ۶ــ۷ حجم حاصل از دوران کاردیوئید $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ حول محور قطبی را حساب کنید. شکل این کاردیوئید در شکل ۸۲ داده شده است.

حل . حجم مورد نظر تفاضل دو حجمی است که از دوران دو ناحیهٔ $MNKLO$ و $OKLO$ حول محور x ها که همان محور قطبی است، ساخته می شود.

مثل مسئلهٔ قبل عمل می کنیم و اینجا φ را بعنوان پارامتردر نظر می گیریم،

$$x = \rho\cos\varphi = a\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi),$$
$$y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi).$$

واضح است که طول نقطهٔ M برابر $2a$ است (مقدار x به ازای $\varphi = 0$). طول نقطهٔ K مینیمم تابع $x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$ است. حال می پردازیم به تعیین این مینیمم

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi\,(1 + 2\cos\varphi) = 0,$$

$$\varphi_1 = 0;\ \ \varphi_2 = \frac{2}{3}\pi.$$

در $\varphi_1 = 0$ داریم $x_M = 2a$، و در $\varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$ داریم $x_K = -\frac{a}{4}$.

پس حجم مطلوب را به صورت زیر حساب می کنیم :

$$V = \pi \int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y_2^2\,dx - \pi \int_{-\frac{a}{4}}^{0} y_1^2\,dx.$$

با توجه به تغییر متغیر $x = a\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi)$ ، داریم :

$$y^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 \sin^2\varphi,$$
$$dx = -a\sin\varphi(1+2\cos\varphi)\,d\varphi,$$

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
$2a$	0

,

x	φ
$-a/4$	$2\pi/3$
0	π

پس

$$V = \pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\,[-a\sin\varphi(1+2\cos\varphi)]\,d\varphi -$$
$$-\pi \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\,[-a\sin\varphi(1+2\cos\varphi)]\,d\varphi =$$
$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\,(1+\cos\varphi)^2(1+2\cos\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1-u^2)\,(1+u)^2\,(1+2u)\,du = \frac{8}{3}\pi a^3 \quad (u=\cos\varphi).$$

۱۶ــ٦ــ۷ حجم جسمی را در هر یک از حالات زیر بدست آورید:

الف . محدود به استوانهٔ $z = 4 - y^2$ ، صفحات مختصات و صفحهٔ $x = a$ باشد،

ب . محدود به هیپربولوئید یک پارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ و صفحات $z=1$ و $z=-1$ باشد،

ج . محدود به پارابولوئید $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ و صفحهٔ $z=k$ $(k>0)$ باشد.

جواب: (الف) $\frac{16}{3}a$ (ب) $2\pi ab\left(1+\frac{1}{3c^2}\right)$ (ج) $\frac{1}{2}abk^2\pi$

۱۷ــ٦ــ۷ قطعه‌ای از استوانهٔ قائم با قاعدهٔ دایره‌ای شکل به شعاع a ، بوسیلهٔ صفحه‌ای که از قطر قاعده گذشته و با آن زاویهٔ α می سازد جدا شده است. حجم قسمت جدا شده را بیابید.

جواب: $\frac{2}{3}a^3\tan\alpha$

۱۸ــ٦ــ۷ حجم هر یک از اجسام دوار زیر را حساب کنید:

الف . ناحیهٔ محدود به $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$ ، حول محور x ها دوران می کند،

ب . ناحیهٔ محدود به $y=2x-x^2,\ y=0$ ، حول محور x ها دوران می کند،

ج . ناحیهٔ محدود به $y=x^3,\ y=0,\ x=2$ ، حول محور y ها دوران می کند،

د . ناحیه محدود به یک موج از منحنی $y=\sin x$ و محدود به $y=0$ حول محور x ها دوران می کند،

ر . ناحیه محدود به $x^2-y^2=4,\ y=\pm 2$ ، حول محور y ها دوران می کند،

ز . ناحیه محدود به $(y-a)^2=ax,\ x=0,\ y=2a$ ، حول محور x ها دوران می کند.

جواب: (الف) 12π (ب) $\frac{16}{15}\pi$ (ج) $\frac{64}{5}\pi$ (د) π^2 (ر) $\frac{64}{3}\pi$ (ز) $\frac{4}{3}\pi a^3$

۱۹ــ۶ــ۷ حجم حاصل از دوران منحنی

$$y^2=\frac{ax^3-x^4}{a^2}$$

حول محور x ها را بیابید.

جواب: $\frac{\pi a^3}{20}$

۲۰ــ۶ــ۷ ناحیه محدود به منحنی $y=\sin x$ و خط $y=\frac{2}{\pi}x$ حول محور x ها دوران می کند، حجم حاصل را بیابید.

جواب : $\frac{\pi^2}{12}$

۲۱ــ۶ــ۷ ذوزنقهٔ منحنی الضلع محدود به

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cosh\frac{x}{a}$$

و خطوط

$$x_1=-c,\ x_2=c\ \ (c>0)$$

را حول محور x ها دوران می دهیم ، حجم حاصل را بیابید.

جواب : $\frac{1}{4}\pi a^3\left(e^{\frac{2c}{a}}-e^{-\frac{2c}{a}}\right)+\pi a^2c=\frac{\pi a^3}{2}\sinh\frac{2c}{a}+\pi a^2c$

۲۲ــ۶ــ۷ ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\cos x$ و سهمی $y=\frac{9}{2\pi^2}x^2$ حول محور x ها دوران می کند. حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{\pi}{20}(6\pi+5\sqrt{3})$

راهنمایی : طول نقاط تلاقی $x_1=-\frac{\pi}{3}\ ;\ x_2=\frac{\pi}{3}$ هستند.

۲۳ــ۶ــ۷ ناحیهٔ محدود به دایرهٔ $x^2+y^2=1$ و سهمی $y^2=\frac{3}{2}x$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل را بیابید.

جواب : $\frac{19}{48}\pi$

۲۴ــ۶ــ۷ روی منحنی $y=x^3$ دو نقطهٔ A و B بترتیب به طولهای

$a=1$ و $b=2$ ، انتخاب می کنیم.
ذوزنقهٔ منحنی الضلع $aABb$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب : $\frac{127}{7}\pi$

۲۵ـ۶ـ۷ یک قوس گسترنده بیضی $x=a\cos t;\ y=b\sin t$ را که در ربع اول واقع است حول محور x ها دوران می کند، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب : $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$ **راهنمایی :** معادلات گسترنده بیضی، $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t;\ \ y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ هستند که در آن $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

۲۶ـ۶ـ۷ ناحیه محدود به حلقهٔ منحنی $x=at^2,\ y=a\left(t-\frac{t^3}{3}\right)$ ، حول محور x ها دوران می کند، حجم حاصل را بیابید.

جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

۲۷ـ۶ـ۷ حجم جسمهای حاصل از دوران لمنسکات $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ حول محورهای x و y را حساب کنید.

جواب : $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}};\ \frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$

راهنمایی : از محورهای قطبی استفاده کنید.

۲۸ـ۶ـ۷ حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $\rho=a\cos^2\varphi$ را حول محور قطبی حساب کنید.

جواب: $\frac{4}{21}\pi a^3$

۷ـ۷ محاسبهٔ طول قوس یک منحنی مسطح در مختصات قائم

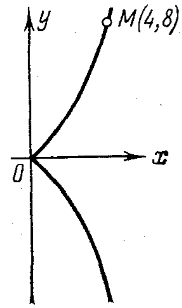
اگر $y=y(x)$ معادله یک منحنی مسطح و $y'(x)$ مشتق آن ، و پیوسته باشد، آنگاه طول قوس این منحنی از انتگرال

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

حساب می شود که a و b طولهای ابتدا و انتهای منحنی هستند.

۱ـ۷ـ۷ طول قوس منحنی $y^2=x^3$ را که بین نقاط (۰،۰) و (۴،۸) واقع اند

حساب کنید (شکل ۹۷ را ببینید).



شکل ۹۷

حل. تابع $y_3(x)$ به ازای $x \geqslant 0$ تعریف شده است. چون نقاط مفروض در ربع اول قرار دارند پس، $y = x^{\frac{3}{2}}$ را در نظر می گیریم. از آنجا

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

در نتیجه

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

۲ــ۷ــ۷ طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بوسیلهٔ خط $x = \frac{4}{3}$ جدا می شود، حساب کنید.

جواب: $\frac{112}{27}$

۳ــ۷ــ۷ طول قسمتی از منحنی $y = \ln\cos x$ را بدست آورید که بین نقاط به طولهای $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$ واقع است.

حل. چون $y' = -\tan x$ ، پس $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$. بنابر این

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\,dx = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\tan\frac{3\pi}{8}$$

۴ــ۷ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ طول قوس منحنی $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ از $x_1 = a$ تا $x_2 = b\ (b > a)$.

جواب: $\ln\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$

۵ــ۷ــ۷ طول قسمتی از منحنی های $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ را که بین دو نقطه

به عرضهای $y=1$ و $y=2$ واقع است، حساب کنید.

حل. برای راحتی، y را بعنوان متغیر انتخاب می کنیم، پس

$$x'=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y} \quad \text{و} \quad \sqrt{1+x'^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)^2}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}$$

بنابر این

$$l=\int_1^2\sqrt{1+x'^2}\,dy=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2y}\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

۶ــ۷ــ۷ محیط آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را حساب کنید.

حل. می دانیم که این منحنی نسبت به محورهای مختصات و نیمسازها، متقارن است. بنابر این کافی است طول آن قسمت از قوس را حساب کنیم که بین نیمساز $y=x$ و محور x ها واقع است و سپس نتیجه را هشت برابر بکنیم. در ربع اول داریم $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$، و به ازای $x=a$ داریم $y=0$، و وقتی $x=\frac{a}{2^{3/2}}$ داریم $y=x$. بعلاوه

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}=-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

در نتیجه

$$l=8\int_{\frac{a}{2^{3/2}}}^{a}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=6a$$

توجه: اگر بخواهیم طول قوسی از آستروئید را که در ربع اول واقع است، حساب کنیم، انتگرال زیر حاصل می شود:

$$\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

که وقتی $x\to 0$، تابع زیر علامت انتگرال به بینهایت میل می کند.

۷ــ۷ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ طول مسیر $OABCO$، که شامل قسمتهایی از منحنیهای $y^2=2x^3$ و $x^2+y^2=20$ می باشد (شکل ۹۸ را ببینید).

حل. کافی است طول قوسهای $l_{\widetilde{OA}}$ و $l_{\widetilde{AB}}$ را حساب بکنیم. زیرا مسیر،

نسبت به محور x ها متقارن است، یعنی طول کل میسر برابر است با

$$l = 2\left(l_{\overset{\frown}{OA}} + l_{\overset{\frown}{AB}}\right)$$

برای تعیین مختصات A ، دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ y^2 = 2x^3, \end{cases}$$

داریم $A\,(2,\ 4)$. برای تعیین $l_{\overset{\frown}{OA}}$ به قرار زیر عمل می‌کنیم:

$$y = \sqrt{2}\, x^{\frac{3}{2}}, \quad y' =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{2}x}.$$

پس

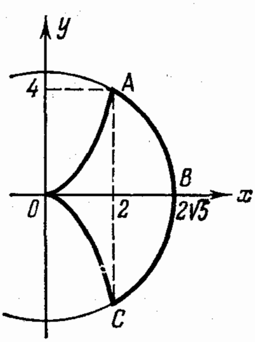
$$l_{\overset{\frown}{OA}} = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{2}x}\, dx = \frac{4}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

چون $l_{\overset{\frown}{AB}}$ روی دایره به شعاع $\sqrt{20}$ مقابل بـه زاویهٔ مرکزی $\operatorname{arc\ tan} 2$ است، پس

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \sqrt{20}\operatorname{arc\,tan} 2$$

بالاخره داریم:

$$l = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) + 4\sqrt{5}\operatorname{arc\,tan} 2.$$



شکل ۹۸

۸ـ۷ـ۷ طول قسمتی از قوس یک منحنی را در حالات زیر بیابید:

الف. قسمتی از منحنی $y=\frac{x^2}{2}-1$ که بوسیله محور x ها جدا می‌شود،

ب. قسمتی از منحنی $y=\ln(2\cos x)$ که بین دو نقطهٔ متوالی از نقاط تلاقی منحنی، با محور x ها قرار دارد.

ج. قسمتی از منحنی $3y^2=x(x-1)^2$ که بین دو نقطهٔ متوالی از نقاط تلاقی منحنی، با محور x ها قرار دارد. (نصف محیط یک حلقه).

جواب: (الف) $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (ب) $2\ln(2-\sqrt{3})$ **راهنمایی:** $x_1=-\frac{\pi}{2};\ x_2=\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۹ـ۷ـ۷ طول قسمتی از منحنی

$$y=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

را حساب کنید، که بین $x=1$ و $x=a+1$ قرار دارد.

جواب: $\frac{a(a+2)}{2}$

۱۰ـ۷ـ۷ طول مسیر محدود به منحنی های $x^2=(y+1)^3$ و $y=4$ را حساب کنید.

جواب: $10\left(\frac{67}{27}+\sqrt{5}\right)$

۸ـ۷ محاسبه طول قوس یک منحنی که معادله‌اش به صورت پارامتری است

اگر معادلات منحنی به صورت $x=x(t),\ y=y(t)$ باشند و مشتقات آنها، یعنی، $x'(t),\ y'(t)$ در فاصلهٔ $[t_1,\ t_2]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس آن از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

که t_1 و t_2 مقادیر پارامتر t برای ابتداء و انتهای منحنی هستند $(t_1<t_2)$.

۱ـ۸ـ۷ طول گسترده دایره

$$x=a(\cos t+t\sin t),\ \ y=a(\sin t-t\cos t)$$

را از $t=0$ تا $t=2\pi$ حساب کنید.

حل . از معادلات، نسبت به t مشتق می گیریم:

$$x'_t = at\cos t, \quad y'_t = at\sin t,$$

از آنجا $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at$. پس

$$l = \int_0^{2\pi} at\, dt = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2a\pi^2.$$

۲ــ۸ــ۷ طول یک قوس از سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

را بدست آورید.

جواب: $8a$

۳ــ۸ــ۷ محیط آستروئید

$$x = a\cos^3 t, \; y = a\sin^3 t$$

را حساب کنید.

حل . از معادلات منحنی نسبت به t مشتق می گیریم:

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t;$$
$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t.$$

پس

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a\,|\sin t\cos t\,| = \frac{3a}{2}|\sin 2t\,|$$

چون تابع $|\sin 2t|$ دارای دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{2}$ است، پس

$$l = 4\times\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 6a$$

توجه . اگر اشتباهاً بنویسیم

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a\sin t\cos t$$

نتیجه درستی بدست نمی آید، زیرا

$$3a\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\, dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

۴ــ۸ــ۷ طول حلقه منحنی

$$x=\sqrt{3}t^2 \text{ ، } y=t-t^3$$

را حساب کنید.

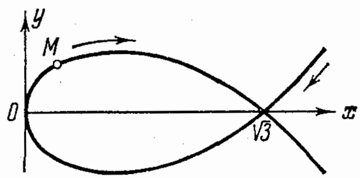
حل. هر دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ به ازای تمام مقادیر t معین هستند. چون $x=\sqrt{3}t^2 \geqslant 0$ ، لذا منحنی در نیم صفحه راست، واقع است، چون با تغییر علامت t ، علامت $x(t)$ ثابت مانده ولی علامت $y(t)$ تغییر می کند، پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است. بعلاوه به ازای دو مقدار مختلف t ، مختصات دو نقطهٔ منطبق بهم از محور x ها بدست می آید، بنابر این منحنی خودش را روی محور x ها قطع می کند. این نقاط با حل معادلهٔ $y=0$ مشخص می شوند (شکل ۹۹ را ببینید).

جهتی روی منحنی که با علامت فلش مشخص شده است، جهت حرکت نقطهٔ $M(x, y)$ را نشان می دهد وقتی که t از $-\infty$ تا ∞ تغییر می کند. ولی از $y=0$ نتیجه می شود که $t_1=0,\ t_{2,3}=\pm 1$. چون $x(t_2)=x(t_3)=\sqrt{3}$ ، پس نقطهٔ $(\sqrt{3}, 0)$ ، تنها نقطه‌ای است که منحنی خودش را قطع می کند. در نتیجه انتگرالگیری باید بین $t_2=-1$ و $t_3=1$ انجام شود. از معادلات نسبت به t مشتق می گیریم، $x'_t=2\sqrt{3}t,\ y'_t=1-3t^2$ و از آنجا

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=1+3t^2$$

در نتیجه

$$l=\int_{-1}^{1}(1+3t^2)\,dt=4$$



شکل ۹۹

۷ـ۸ـ۵ مطلوب است محاسبهٔ طول قوسی از منحنی $x=\frac{t^6}{6},\ y=2-\frac{t^4}{4}$ که بین نقاط تلاقی اش با محورهای مختصات قرار دارد.

جواب: $\frac{13}{3}$.

راهنمایی: منحنی محورهای مختصات را در نقاط متناظر به $t_1=0$ و $t_2=\sqrt[4]{8}$ قطع می کند.

۷ـ۸ـ۶ محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حساب کنید.

حل . از معادلات پارامتری بیضی استفاده می کنیم :

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

از معادلات ، نسبت به t مشتق می گیریم :

$$x'_t=-a\sin t;\quad y'_t=b\cos t$$

از آنجا

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}$$

که ε را خروج از مرکز بیضی گویند و مقدارش برابر

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

است ، پس

$$l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt.$$

که انتگرال $\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$ قابل تبدیل به توابع مقدماتی نیست که آن را انتگرال **بیضوی** (یا الپتیک) **از نوع دوم** گویند که با فرض $t=\frac{\pi}{2}-\tau$ به صورت زیر نوشته می شود :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\tau}\,d\tau=E(\varepsilon),$$

که $E(\varepsilon)$ نمادی برای **انتگرال بیضوی کامل نوع دوم** است .

در نتیجه برای محاسبهٔ محیط بیضی فرمول $l=4aE(\varepsilon)$ مفید است . در عمل فرض می کنند که $\varepsilon=\sin\alpha$ ، و از جدول برای محاسبهٔ

$$E_1(\alpha)=E_1(\arcsin\varepsilon)=E(\varepsilon).$$

استفاده می شود . مثلاً اگر $a=10$ و $b=6$ ، آنگاه

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{10^2-6^2}}{10}=0.8=\sin 53^\circ$$

با توجه به جدول مقادیر انتگرال بیضوی نوع دوم ، داریم :

$$l=40E_1(53^\circ)=40\times 1.2776\approx 51.1.$$

۷ـــ۸ـــ۷ طول قسمتی از منحنی

$$x=t^2, \quad y=\frac{t}{3}(t^2-3)$$

را که بین نقاط تلاقی اش با محور x ها قرار دارد، حساب کنید.

جواب : $4\sqrt{3}$

۸ـــ۸ـــ۷ محیط کاردیوئید به معادلات زیر را بیابید :

$$x=a(2\cos t-\cos 2t)$$
$$y=a(2\sin t-\sin 2t)$$

جواب : $16a$

۹ـــ۸ـــ۷ میحط منحنی

$$x=4\sqrt{2}\,a\sin t; \quad y=a\sin 2t$$

بستهٔ را بیابید.

جواب : $8\pi a$ **راهنمایی :** شکل ۸۰ را ببینید.

۱۰ـــ۸ـــ۷ محیط گسترندهٔ بیضی به معادلات

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t, \quad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t, \quad c^2=a^2-b^2$$

را بیابید. **جواب:** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$

۱۱ـــ۸ـــ۷ طول قسمتی از منحنی

$$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$$
$$y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$$

را که بین $t_1=0$ و $t_2=\pi$ واقع است، حساب کنید.

جواب: $\frac{\pi^3}{3}$

۱۲ـــ۸ـــ۷ روی سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t); \quad y=a(1-\cos t)$$

نقطه ای را تعیین کنید که اولین قوس آن را با نسبت $1:3$ تقسیم کند.

جواب : به ازای $t=\frac{2\pi}{3}$ نقطهٔ $M\left[a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \frac{3a}{2}\right]$

۹ـ۷ طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی

اگر معادلهٔ منحنی هموار در مختصات قطبی به صورت $\rho=\rho(\varphi)$ باشد، طول قوس آن از رابطهٔ

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi$$

بدست می‌آید که φ_1 و φ_2 مقادیر زاویه قطبی φ برای نقاط انتهایی منحنی است $(\varphi_1<\varphi_2)$.

۱ـ۹ـ۷ طول یک دور از پیچ ارشیمیدس $\rho=a\varphi$ را حساب کنید.

حل. وقتی φ از ۰ تا 2π تغییر کند یک دور از منحنی پیچ ارشیمیدس، رسم می شود، پس

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right]$$

۲ـ۹ـ۷ طول پیچ لگاریتمی $\rho=ae^{m\varphi}$ را بین نقطهٔ معین $(\rho_0,\ \varphi_0)$ و نقطهٔ متحرک $(\rho,\ \varphi)$ حساب کنید.

حل. در این حالت داریم (مهم نیست که کدام یک از مقادیر ρ یا ρ_0 بیشتر است):

$$l=\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi\right|=$$

$$=a\sqrt{1+m^2}\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}e^{m\varphi}\,d\varphi\right|=a\,\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|e^{m\varphi}-e^{m\varphi_0}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\rho-\rho_0\right|=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\Delta\rho\right|,$$

یعنی، طول پیچ لگاریتمی با نمو شعاع قطبی، متناسب است.

۳ـ۹ـ۷ محیط کاردیوئید

$$\rho=a(1+\cos\varphi)\ (a>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

را حساب کنید.

حل. از معادلهٔ منحنی مشتق می گیریم،

$$\rho'_{\varphi} = -a \sin \varphi,$$

از آنجا

$$\sqrt{\rho'^2_{\varphi} + \rho^2} = \sqrt{2a^2 (1 + \cos \varphi)} = \sqrt{4a^2 \cos^2 (\varphi/2)} =$$
$$= 2a |\cos (\varphi/2)| = \begin{cases} 2a \cos (\varphi/2), & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ -2a \cos (\varphi/2), & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

پس با استفاده از تقارن داریم

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

۴ـ۹ـ۷ مطلوب است محاسبهٔ قسمتی از طول قوس لمنسکات $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ ، که در سمت راست رأس واقع است. و بین نقطهٔ متناظر به $\varphi = 0$ و هر نقطهٔ دلخواه با زاویهٔ قطبی $\varphi < \frac{\pi}{4}$ قرار دارد.

حل. اگر $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه $\cos 2\varphi > 0$. بنابراین

$$\rho = a \sqrt{2 \cos 2\varphi}; \quad \rho'_{\varphi} = -\frac{a \sqrt{2} \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$
$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}} = \sqrt{2a^2 \left(\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} \right)} = \frac{a \sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

پس

$$l = a \sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a \sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \varphi}}.$$

این انتگرال را، **انتگرال بیضوی از نوع اول** گویند مقدارش به کمک جدولهای خاصی حساب می شود.

۵ـ۹ـ۷ طول قوس منحنی $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ را حساب کنید.

جواب: $1.5\pi a$

۶ـ۹ـ۷ قسمتی از طول خط راست $\rho = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$ را که بین نقاط متناظر به $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ واقع است، حساب کنید.

حل.

$$\rho'_{\varphi} = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}} = a \sec \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \sqrt{1 + \tan^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)} = a \sec^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$$

[چون تابع $sec\left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right)$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ مثبت است، لذا نماد قدر مطلق حذف

شده است.]

$$l = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) d\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$$

۷ــ۹ــ۷ طول منحنی بستهٔ $\rho = a\sin^4\frac{\varphi}{4}$ را حساب کنید.

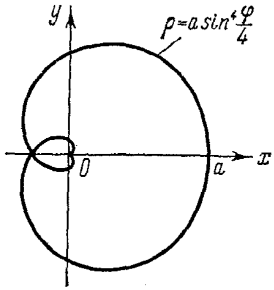
حل . چون تابع زوج است پس منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است، و چون دورهٔ تناوب تابع $\sin^4\frac{\varphi}{4}$، 4π است بنابر این در نیمه‌ای از منحنی که φ از ۰ تا 2π تغییر کند شعاع قطبی از ۰ تا a صعود می کند، و نیمهٔ دیگر با توجه به تقارن رسم می شود (شکل ۱۰۰)

بعلاوه، $\rho'_\varphi = a\sin^3(\varphi/4)\cos(\varphi/4)$ و اگر $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ آنگاه

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} = \sqrt{a^2\sin^8(\varphi/4) + a^2\sin^6(\varphi/4)\cos^2(\varphi/4)} = a\sin^3(\varphi/4)$$

پس

$$l = 2a\int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi/4)\,d\varphi = 8a\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = \frac{16}{3}a \quad (\varphi = 4t).$$



شکل ۱۰۰

۸ــ۹ــ۷ طول قوس منحنی $\varphi = \frac{1}{2}(\rho + 1/\rho)$ را بین $\rho = 2$ و $\rho = 4$ حساب کنید.

حل . دیفرانسیل قوس، dl برابر است با

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi}\,d\varphi = \sqrt{\rho^2\,d\varphi^2 + d\rho^2} = \sqrt{\rho^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + 1}\,d\rho$$

از معادلهٔ منحنی داریم

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

پس

$$l=\int_2^4 \sqrt{\rho^2\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^2+1}\,d\rho=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{4}\left(\rho^2-2+\frac{1}{\rho^2}+4\right)}\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}\,d\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{2}+\ln\rho\right)\Big|_2^4=3+\frac{\ln 2}{2}\,.$$

۹ـ۹ـ۷ طول پیچ هذلولوی (یا پیچ هیپربولیک) $\rho\varphi=1$ را بین $\varphi_1=\frac{3}{4}$ و $\varphi_2=\frac{4}{3}$ حساب کنید.

جواب $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

۱۰ـ۹ـ۷ طول منحنی بستهٔ $\rho=2a(\sin\varphi+\cos\varphi)$ را حساب کنید.

راهنمایی: منحنی $\rho=2\sqrt{2}\,a\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$ یک دایره است.. **جواب** $2\sqrt{2}\,\pi a$

۱۱ـ۹ـ۷ طول قوس منحنی $\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$ را از $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ تا $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید.

جواب $p\,[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

۱۰ـ۷ محاسبهٔ مساحت سطوح دوّار

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی L به معادلهٔ $y=y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$ از دستور

$$P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

بدست می آید. اغلب، این دستور را به صورت زیر می نویسند:

$$P=2\pi\int_L y\,dl,$$

که در آن dl دیفرانسیل قوس است.

اگر معادلهٔ منحنی به شکل پارامتری یا در مختصات قطبی داده شده باشد. کافی است در دستور فوق تغییر متغیر دهیم. (بخشهای ۸ـ۷ و ۹ـ۷ را ببینید).

۱ـ۱۰ـ۷ مساحت سطحی را که از دوران سیکلوئید

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

حول محور x ها حاصل می شود، حساب کنید.

حل. از معادلهٔ منحنی مشتق می گیریم:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

و یا

$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

پس

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{3}}}$$

چون منحنی نسبت به محور y ها متقارن است، بنابر این در محاسبه فرض می کنیم $x\geqslant 0$ و سپس نتیجه را دو برابر می کنیم، بعبارت دیگر مساحت برابر است با

$$P=2\times 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx.$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}=t^2,\qquad -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx=2t\,dt,\qquad \left|\begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & a^{\frac{1}{3}} \\ a & 0 \end{array}\right|.$$

پس

$$P=12\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^{a^{1/3}}t^4\,dt=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

۲ـ۱۰ـ۷ مطلوب است **محاسبه** مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $OABCO$ که بوسیلهٔ منحنی های $y=x^2$ و $x=y^2$ بدست آمده است (شکل ۱۰۱) **حول محور** x ها.

حل. واضح است که منحنی ها در نقاط $O(0,0)$ و $B(1,1)$ همدیگر را قطع می کنند. مساحت مورد نظر را با $P=P_1+P_2$ نشان می دهیم، که در آن P_1 مساحتی است که از دوران OAB بدست و P_2 مساحتی است که از دوران OCB

می آیند.

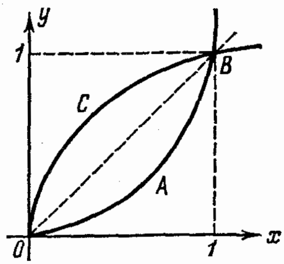
برای محاسبهٔ P_1 از معادلهٔ $x=y^2$ استفاده می کنیم، داریم:

$$y=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

پس

$$P_1=2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=2\pi\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$



شکل ۱۰۱

برای محاسبهٔ P_2 داریم:

$$y=x^2,\ \ y'=2x$$

$$P_2=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

فرض می کنیم

$$x=\frac{1}{2}\sinh t,\ \ dx=\frac{1}{2}\cosh t\,dt$$

از آنجا

$$P_2=\frac{\pi}{4}\int_0^{\operatorname{Arsinh} 2}\sinh^2 t\cosh^2 t\,dt=\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{4}\sinh 4t-t\right)\Big|_0^{\operatorname{Arsinh} 2}=$$

$$=\frac{9\sqrt{5}\pi}{16}-\frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5}).$$

پس

$$P=P_1+P_2=\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}+\frac{9\sqrt{5}\pi}{16}-\frac{1}{32}\pi\ln(2+\sqrt{5})=$$

$$=\frac{67\sqrt{5}\pi}{48}-\frac{\pi}{32}\ln(2+\sqrt{5})-\frac{\pi}{6}.$$

۳ــ۱۰ــ۷ مساحت جسم دواری را حساب کنید که در هریک از حالات زیر ساخته می شود:

(الف) قسمتی از منحنی $y=\frac{x^2}{2}$ که بوسیلهٔ خط $y=\frac{3}{2}$ قطع می شود، حول محور y ها دوران می کند.

(ب) قسمتی از منحنی $y^2=4+x$ که بوسیلهٔ خط $x=2$ قطع می شود، حول محور x ها دوران می کند.

جواب: (الف) $\frac{14\pi}{3}$ (ب) $\frac{62\pi}{3}$

۴ــ۱۰ــ۷ مساحت بیضوی را حساب کنید که از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول محور x ها **ساخته می شود** $(a>b)$

حل. از معادلهٔ منحنی داریم:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};\qquad y'=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2-x^2)}}$$

(در اینجا $y\geqslant 0$ فرض شده است). پس

$$P=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2-x^2)}}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=2\pi\,ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

که در آن $\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}$ ، خروج از مرکز بیضی است

وقتی $b\to a$ ، ε به صفر میل می کند، و

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$$

یعنی بیضوی تبدیل به کره شده و در نتیجه مساحت کره حساب می شود که برابر

$$P=4\pi a^2$$

است.

۵ــ۱۰ــ۷ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران بیضی $4x^2+y^2=4$ حول محور y ها ساخته می شود.

جواب: $2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$

۶ــ۱۰ــ۷ قسمتی از منحنی زنجیری

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cosh\frac{x}{a},$$

را که طول نقاط انتهایی آن بترتیب ۰ و x می باشند، حول محور x ها دوران می دهیم. نشان دهید که بین P و V که بترتیب مساحت و حجم جسم حاصل است رابطهٔ $P=\frac{2V}{a}$ برقرار است.

حل. چون $y'=\sinh\frac{x}{a}$ ، داریم $\sqrt{1+y'^2}=\cosh\frac{x}{a}$. بنابراین

$$P=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2a\pi\int_0^x\cosh^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{2}{a}\pi\int_0^x a^2\cosh^2\frac{x}{a}\,dx,$$

ولی

$$\pi\int_0^x a^2\cosh^2\frac{x}{a}\,dx=\pi\int_0^x y^2\,dx=V,$$

بنابر این

$$P=\frac{2V}{a}$$

۷ــ۱۰ــ۷ مساحت جسمی را حساب کنید که دوران یک حلقه از منحنی $9ax^2=y(3a-y)^2$ حول محور y ها ساخته می شود.

حل. وقتی y از ۰ تا $3a$ تغییر می کند، حلقه رسم می شود. از طرفین معادله نسبت به y مشتق می گیریم:

$$18axx'=(3a-y)^2-2y(3a-y)=3(3a-y)(a-y)$$

از آنجا

$$xx'=\frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$$

پس

$$P=2\pi\int_{y_1}^{y_2}x\sqrt{1+x'^2}\,dy=2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{x^2+(xx')^2}\,dy=$$

$$=2\pi\int_0^{3a}\sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a}+\frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\,dy=\frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ay-$$

$$-y^2)\,dy=3\pi a^2.$$

۷ــ۱۰ــ۸ مساحت جسمی را حساب کنید که از دوران منحنی $8y^2=x^2-x^4$ حول محور x ها حاصل می شود.

جواب: $\frac{\pi}{2}$

۷ــ۱۰ــ۹ قسمتی از منحنی $x=t^2;\ y=\frac{t}{3}(t^2-3)$ را که بوسیلهٔ محور

x ها جدا می شود، حول محور x ها دوران می دهیم، مساحت جسم حاصل را حساب کنید.

حل . از حل معادله $y=0$ داریم $t_1=0$ و $t_{2,3}=\pm\sqrt{3}$، پس $x_1=0$ و $x_{2,3}=3$. معلوم می شود که منحنی در نقاط (۰،۰) و (۳،۰) محور x ها را قطع می کند. وقتی t تغییر علامت دهد، علامت تابع $x(t)$ ثابت مانده ولی علامت تابع $y(t)$ تغییر می کند، پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است (شکل ۱۰۲)

برای محاسبهٔ مساحت کافی است از منحنی OnB استفاده کنیم که تغییرات پارامتر برای این قسمت از ۰ تا $+\sqrt{3}$ است. از معادلات نسبت به t مشتق می گیریم، داریم:

$$x'_t=2t;\ \ y'_t=t^2-1$$

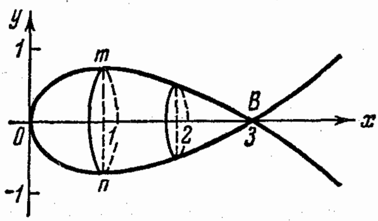
و

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=(1+t^2)\,dt$$

پس

$$P=2\pi\int_{t_1}^{t_2}|y(t)|\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}-\frac{t}{3}(t^2-3)(1+t^2)\,dt=-\frac{2}{3}\pi\int_0^{\sqrt{3}}(t^5-2t^3-3t)\,dt=3\pi$$



شکل ۱۰۲

۱۰ــ۱۰ــ۷ مساحت چنبره‌ای را حساب کنید که از دوران دایرهٔ $x^2+(y-b)^2=r^2\ (0<r<b)$ حول محور x ها بدست می آید.

حل . معادلهٔ پارامتری این دایره چنین است:

$$x=r\cos t;\ \ y=b+r\sin t$$

پس

$$x'_t = -r\sin t;\quad y'_t = r\cos t$$

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi}(b+r\sin t)\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi r\int_0^{2\pi}(b+r\sin t)\,dt = 4\pi^2 br.$$

۱۱ــ۱۰ــ۷ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران لمنسکات $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ حول محور قطبی بدست می آید.

حل . مقادیر حقیقی ρ به ازای $\cos 2\varphi \geqslant 0$ بدست می آیند، یعنی، وقتی $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ (شاخهٔ سمت راست منحنی). یا به ازای $\frac{3}{4}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{4}\pi$ (شاخهٔ سمت چپ منحنی). از معادلهٔ منحنی داریم :

$$dl = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + \left(\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\,d\varphi = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

و

$$y = \rho\sin\varphi = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}$$

مساحت سطحی که از دوران شاخهٔ سمت راست حاصل می شود، برابر است با :

$$P = 2\times 2\pi\int_L y\,dl = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

۱۲ــ۱۰ــ۷ قسمتی از دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ را که بین نقاط $B(0,\ a)$ و $A(a,\ 0)$ واقع است، حول خط $x+y=a$ دوران می دهیم. مساحت جسم حاصل را بیابید.

حل . طول MN ، فاصلهٔ نقطهٔ متحرک $M(x,\ y)$ از دایره $x^2+y^2=a^2$ تا خط $x+y=a$ را حساب می کنیم چون بـه ازای نقاطی از دایره که در ربع اول واقع اند، $x+y\geqslant a$ ، پس :

$$MN = \frac{|x+\sqrt{a^2-x^2}-a|}{\sqrt{2}} = \frac{x+\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{2}}$$

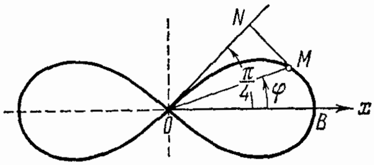
و

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

پس

$$P = 2\pi \int_0^a \frac{x+\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$
$$= \sqrt{2}\,\pi a \left[-\sqrt{a^2-x^2}+x-a\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}(4-\pi).$$

۱۳ـ۱۰ـ۷ مساحت سطحی را حساب کنید که از دوران یک شاخه از لمنسکات $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ حول خط $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ساخته می شود.



شکل ۱۰۳

حل . در مثلث OMN (شکل ۱۰۳)، MN را حساب می کنیم که فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه M از شاخهٔ سمت راست تا محور دوران $\varphi = \frac{\pi}{4}$ است

$$MN = \rho \sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$$

همچنین

$$dl = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

بنابراین

$$P = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2.$$

۱٤ـ۱۰ـ۷ قسمتی از منحنی $y = \frac{x^3}{3}$ را که بین $x = -2$ و $x = 2$ واقع است، حول محور x ها دوران می دهیم، مساحت جسم حاصل را بیابید.

جواب : $(34\sqrt{17}-2)\frac{\pi}{9}$

۱۵ـ۱۰ـ۷ منحنی $y = \sin x$ مفروض است، نصف یک موج از منحنی را حول محور x ها دوران می دهیم. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب : $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$

۱٦ـ۱۰ـ۷ قوسی از سهمی $x^2 = 4ay$ که بوسیلهٔ خط $y = 3a$ جدا می شود حول محور y ها دوران می کند، مساحت سطح حاصل را بیابید.

جواب : $\frac{56}{3}\pi a^2$

۱۷ــ۱۰ــ۷ قسمتی از منحنی $x=e^t\sin t;\quad y=e^t\cos t$ که بین نقاط متناظر $t=0$ و $t=\frac{\pi}{2}$ قرار دارد حول محور x ها دوران می کند. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب : $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^{\pi}-2)$

۱۸ــ۱۰ــ۷ قسمتی از منحنی $x=\frac{t^3}{3};\ y=4-\frac{t^2}{2}$ که بین نقاط تلاقی اش با محورهای مختصات قرار دارد حول محور x ها دوران می کند. مساحت سطح حاصل را حساب کنید.

جواب : $29.6\pi.$

۱۹ــ۱۰ــ۷ مساحت حاصل از دوران منحنی $\rho=2a\sin\varphi$ را حول محور قطبی حساب کنید.

جواب : $4\pi^2a^2$

۲۰ــ۱۰ــ۷ کاردیوئید

$$x=a(2\cos t-\cos 2t),$$
$$y=a(2\sin t-\sin 2t).$$

را حول محور x ها دوران می دهیم مساحت جسم حاصل را حساب کنید.

جواب : $\frac{128}{5}\pi a^2$

۱۱ــ۷ کاربرد هندسی انتگرال معین

۱ــ۱۱ــ۷ سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t);\quad y=a(1-\cos t);\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

مفروض است (شکل ۱۰۴ را ببینید). مطلوب است محاسبهٔ :

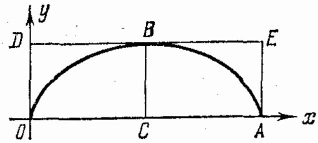
(الف) مساحت سطوحی که از دوران منحنی OBA حول محورهای x و y حاصل می شوند،

(ب) حجم اجسامی که از دوران منحنی $OBAO$ حول محور y ها و حول خط BC ساخته می شوند،

(ج) مساحت سطح حاصل از دوران منحنی BA حول خط BC ،

(د) حجم حاصل از دوران ناحیهٔ $ODBEABO$ حول خط مماس DE .

(هـ) مساحت جسم مذکور در قسمت (د) را حساب کنید.



شکل ۱۰۴

حل . (الف) مساحت حاصل از دوران OBA حول محور x ها برابر است با :

$$P_x = 2\pi \int_L y\,dl = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{64\pi a^2}{3}$$

وقتی منحنی حول محور y ها دوران می کند جسمی به حجم زیر ساخته می شود

$$P_y = 2\pi \int_L x\,dl = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt +$$

$$+ 4\pi a^2 \int_{\pi}^{2\pi} (t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 16\pi^2 a^2.$$

(ب) وقتی منحنی $OBAO$ حول محور y ها دوران می کند جسمی به حجم زیر ساخته می شود

$$V_y = \pi \int_0^{2a} (x_2^2 - x_1^2)\,dy = \pi \int_0^{2a} x_2^2\,dy - \pi \int_0^{2a} x_1^2\,dy,$$

که در آن $x = x_1(y)$ معادلهٔ منحنی BA ، و $x = x_2(y)$ معادلهٔ منحنی OB است. برای محاسبهٔ انتگرالها از تغییر **متغیر** $y = a(1-\cos t)$ استفاده می کنیم که در انتگرال اول t بین 2π و π ، و در انتگرال دوم بین 0 و π تغییر می کند، در نتیجه

$$V_y = \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t-\sin t)^2 a \sin t\,dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t-\sin t)^2 a \sin t\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_{2\pi}^{0} (t-\sin t)^2 \sin t\,dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_{2\pi}^{0} t^2 \sin t\,dt - \int_{2\pi}^{0} t(1-\cos 2t)\,dt + \int_{2\pi}^{0} \sin^3 t\,dt \right] = 6\pi^3 a^3.$$

برای محاسبه حجم جسمی که از دوران ناحیه $OBAO$ حول BC ایجاد می‌شود، نخست مبداء مختصات را به نقطهٔ C منتقل می‌کنیم که معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید به صورت زیر است:

$$x' = a(t - \pi - \sin t); \quad y' = a(1 - \cos t).$$

در محاسبه کافی است منحنی BA را در نظر بگیریم:

$$V = \pi \int_0^{2a} x'^2\, dy' = \pi a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t)^2 \sin t\, dt.$$

از تغییر متغیر $t - \pi = z$ استفاده می‌کنیم:

$$V = -\pi a^3 \int_{\pi}^{0} (z + \sin z)^2 \sin z\, dz = \pi a^3 \int_0^{\pi} (z + \sin z)^2 \sin z\, dz =$$
$$= \frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16).$$

(ج) محورهای مختصات را مانند حالت قبل انتخاب می‌کنیم، داریم:

$$dl = 2a \sin\frac{t}{2}\,|dt| = -2a \sin\frac{t}{2}\, dt.$$

بنابر این

$$P = \int_0^{2a} 2\pi x\, dl = -4\pi a^2 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \pi - \sin t) \sin\frac{t}{2}\, dt =$$
$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (z + \sin z)\cos\frac{z}{2}\, dz = 4\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)\pi a^2.$$

(د) مبداء مختصات را به نقطهٔ B انتقال می‌دهیم و جهت محور y ها را عوض می‌کنیم، داریم:

$$x' = a(t - \pi - \sin t), \quad y' = a(1 + \cos t).$$

با فرض $t - \pi = z$ داریم،

$$x' = a(z + \sin z), \quad y' = a(1 - \cos z),$$

در قوس OBA ، متغیر z از $-\pi$ تا π تغییر می‌کند. پس

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} a^3 (1 - \cos z)^2 (1 + \cos z)\, dz = \pi^2 a^3.$$

(هـ)

$$P = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} y\, dl = 4\pi a^2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos z)\cos\frac{z}{2}\, dz = \frac{32}{3}\pi a^3.$$

۲ــ۱۱ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که به سطوح $x^2+y^2=2x$ و $z^2=8(2-x)$ محدود است.

حل. مولد استوانهٔ اول، با محور y ها موازی است، هادی آن سهمی $z^2=8(2-x)$ است که در صفحهٔ xOz واقع است. مولد استوانهٔ دوم موازی محور z ها بوده و هادی آن دایرهٔ $x^2+y^2=2x$ است که در صفحهٔ xOy قرار دارد. حجم مطلوب از دستور

$$V=\int_0^2 S(x)\,dx.$$

حساب می‌شود که $S(x)$ مساحت مثلثی است که قاعده‌اش برابر $2y$ و ارتفاعش با $2z$ برابر است، پس

$$S(x)=2y\times 2z=4\sqrt{2x-x^2}\sqrt{8(2-x)}.$$

بنابر این

$$V=\int_0^2 4\sqrt{x(2-x)8(2-x)}\,dx=4\sqrt{8}\int_0^2(2-x)\sqrt{x}\,dx=$$

$$=4\sqrt{8}\left(\frac{2}{3}2\sqrt{x^3}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Big|_0^2=\frac{256}{15}.$$

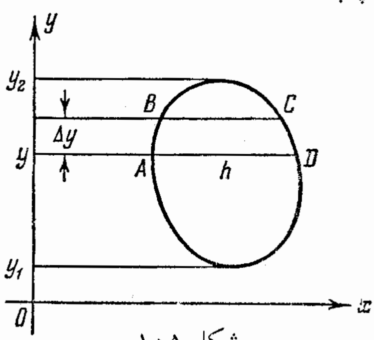
۳ــ۱۱ــ۷ اگر S ناحیهٔ محدب واقع بین دو خط به عرضهای y_1 و y_2 باشد (شکل ۱۰۵). این ناحیه را حول محور xها دوران می‌دهیم. ثابت کنید حجم جسم حاصل از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$V=2\pi\int_{y_1}^{y_2} yh\,dy,$$

که در آن

$$h=x_2(y)-x_1(y),$$

$x=x_1(y)$ معادلهٔ سمت چپ و $x=x_2(y)$ معادلهٔ سمت راست مرز ناحیهٔ S است.



شکل ۱۰۵

حل . فاصلهٔ $[y_1, y_2]$ را به فاصله‌های جزء تقسیم می کنیم و از نقاط حاصل خطوطی به موازات محور دوران رسم می کنیم، با این ترتیب ناحیهٔ S به نوارهای موازی تقسیم می شود. ناحیهٔ مستطیلی شکل $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ تحتانی آن $AD = h$ که روی خط افقی به عرض y قرار دارد و ارتفاع آن AB ، و آن را با Δy نشان می دهیم. حجم جسمی که از دوران مستطیل $ABCD$ حول محور x ها ساخته می شود تقریباً برابر است با :

$$\Delta V \approx \pi (y+\Delta y)^2 h - \pi y^2 h = 2\pi y \Delta y h + \pi h (\Delta y)^2$$

اگر از بینهایت کوچک مرتبهٔ دوم نسبت به Δy صرفنظر کنیم، باقیمانده قسمت اصلی دیفرانسیل حجم است

$$dV = 2\pi\, yh\, dy$$

از آنجا

$$V = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} yh\, dy.$$

باین ترتیب فرمول دیگری بدست می آید که می توان برای محاسبهٔ حجم از آن استفاده کرد.

۴ــ۱۱ــ۷ ناحیه‌ای که به سهمی $y = 2x^2 + 3$ ، و محور x ها و دو خط قائم $x = 0$ و $x = 1$ محدود است، حول محور y ها دوران می کند، حجم حاصل را بیابید.

حل . ناحیه را به نوارهای موازی با محور y ها تقسیم می کنیم. ΔV حجمی است که از دوران یکی از این ناحیه ها بدست آمده است

$$\Delta V = \pi (x+\Delta x)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi\, xy\, \Delta x + \pi y (\Delta x)^2$$

که در آن Δx پهنای نوار است. از بینهایت کوچک مرتبهٔ دوم نسبت به Δx صرفنظر می کنیم، و دیفرانسیل حجم بدست می آید

$$dV = 2\pi\, xy\, dx.$$

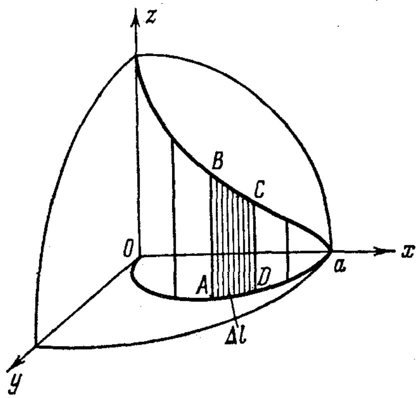
پس

$$V = \int_0^1 2\pi\, xy\, dx = 2\pi \int_0^1 x(2x^2+3)\, dx = 4\pi.$$

۵ــ۱۱ــ۷ مساحت قسمتی از استوانهٔ $x^2 + y^2 = ax$ را که بوسیلهٔ کرهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

محدود می شود، حساب کنید.



شکل ۱۰۶

حل . مولد استوانه موازی محور z ها است و دایرهٔ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ هادی آن است (شکل ۱۰۶ یک چهارم مساحت مطلوب را نشان می دهد). آن قسمت از مساحت را که در شکل ۱۰۶ نشان داده شده است به قوسهای کوچک Δl تقسیم می کنیم. بوسیلهٔ خطوط موازی با محور z ها سطح استوانه را به نوارهایی تقسیم می کنیم. اگر از بینهایت کوچکهای از مرتبهٔ بالاتر صرفنظر کنیم، مساحت نوار $\breve{A}BCD$ برابر می شود با

$$CD\cdot\Delta l$$

اگر ρ و φ مختصات قطبی نقطهٔ D باشند، آنگاه $\rho=a\cos\varphi$ و $CD=\sqrt{a^2-\rho^2}=a\sin\varphi$ و $\Delta l=a\cdot\Delta\varphi$ ، از آنجا دیفرانسیل مساحت بدست می آید :

$$dP=a^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

پس

$$P=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin\varphi\,d\varphi=4a^2.$$

۶ـ۱۱ـ۷ استوانهٔ قائمی به قاعدهٔ دایره‌ای شکل، مفروض است. آن را بوسیله صفحه‌ای که از قطر قاعده می گذرد و با آن زاویه ۴۵° درجه می سازد، قطع می دهیم. آن قسمت از مساحت استوانه که بوسیلهٔ این صفحه جدا می شود، حساب کنید.

حل . محور z ها را محور استوانه فرض می کنیم و قطر مفروض را محور x ها در نظر می گیریم. بنابراین معادلهٔ قاعده $x^2+y^2=a^2$ است و صفحه‌ای که با صفحهٔ

قاعدهٔ یعني با صفحهٔ xOy زاویهٔ ۴۵ درجه می سازد، صفحهٔ $y=z$ است.

مساحت نوار باریک $ABCD$ برابر $dP=zdl$ است (شکل ۱۰۷ را ببینید)، (از بینهایت کوچک مرتبهٔ بالاتر صرفنظر شده است) که dl عنصر قوس محیط قاعده است. در مختصات قطبی داریم:

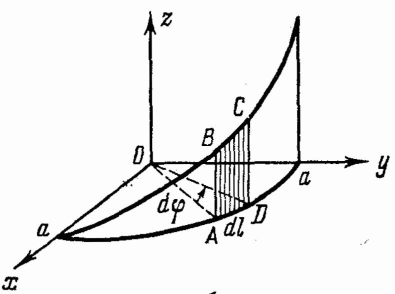
$$z=y=a\sin\varphi; \quad dl=a\,d\varphi$$

پس

$$dP=a^2\sin\varphi\,d\varphi$$

و

$$P=a^2\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=a^2\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}=2a^2$$



شکل ۱۰۷

۷ــ۱۱ــ۷ محورهای دو استوانه که قاعده‌هایشان دایره‌های برابر هستند، بر هم عمودند. مساحت سطح جسمی را حساب کنید که بوسیلهٔ دو استوانه محدود می شود.

جواب: $16a^2$ ، a شعاع قاعدهٔ استوانه است.

۸ــ۱۱ــ۷ ناحیهٔ محدود به سهمی $x^2=y-1$ و محور x ها و دو خط $x=0$ و $x=1$ را حول محور y ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

جواب: 1.5π

۹ــ۱۱ــ۷ مطلوب است محاسبه مساحت بیضی به معادله زیر

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\ (\delta=AC-B^2>0; \quad C>0)$$

حل. از معادله، y را حساب می کنیم:

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{C-\delta x^2}}{C}\ ;\quad y_2=\frac{-Bx+\sqrt{C-\delta x^2}}{C},$$

که درآنها مقدار x باید درنامساوی زیر صدق کند

$$C-\delta x^2\geqslant 0.$$

این نامساوی را حل می کنیم و حدود انتگرالگیری حساب می شود

$$-\sqrt{\frac{C}{\delta}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{C}{\delta}}$$

و مساحت بیضی برابر است با

$$S=\int_{-\sqrt{\frac{C}{\delta}}}^{\sqrt{\frac{C}{\delta}}}(y_2-y_1)\,dx=\frac{4}{C}\int_0^{\sqrt{\frac{C}{\delta}}}\sqrt{C-\delta x^2}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

۱۰ــ۱۱ــ۷ مساحت محدود به هریک ازمنحنیهای زیر را حساب کنید:

(a) $x=2t-t^2;\quad y=2t^2-t^3;$

(b) $x=\frac{t^2}{1+t^2};\quad y=\frac{t\,(1-t^2)}{1+t^2}.$

جواب: (a) $\frac{8}{15}$; (b) $\frac{7}{50}-\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}$.

۱۱ــ۱۱ــ۷ مساحت محدود به هریک ازمنحنیهای زیر را حساب کنید:

(a) $\rho=a\sin 3\varphi$ (رز سه برگی)

(b) $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}\left[\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right];$

(c) $\rho=3\sin\varphi$ و $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi.$

جواب: (a) $\frac{\pi a^2}{4}$; (b) $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$; (c) $\frac{1}{8}(5\pi+6\sqrt{3})$

۱۲ــ۱۱ــ۷ طول قسمتی از منحنی $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ را حساب کنید که بوسیلهٔ خط $x=-1$ جدا می شود.

۱۳ــ۱۱ــ۷ طول قوس OA از منحنی $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$ را حساب کنید که $A\left(\frac{a}{2},\ a\ln\frac{4}{3}\right)$; $O(0,\ 0)$ **جواب:** $\frac{a}{2}(2\ln 3-1)$

۱۴ــ۱۱ــ۷ طول آن قسمت از منحنی $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ را حساب کنید که درون سهمی $y^2=\frac{x}{3}$ قرار دارد. **جواب:** $\frac{\sqrt{2}}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$

۱۵ــ۱۱ــ۷ ثابت کنید که طول محیط بیضی

$$x=\sqrt{2}\sin t; \quad y=\cos t$$

با طول یک موج از منحنی $y=\sin x$ برابر است.

۱۶ــ۱۱ــ۷ ثابت کنید که طول قسمتی از قوس سهمی $y=\frac{1}{2p}x^2$ متناظر به فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant a$ ، با طول قوس پیچ $\rho=P\varphi$ در فاصلهٔ تغییرات $0\leqslant\rho\leqslant a$ برابر است.

۱۷ــ۱۱ــ۷ نسبت مساحت حلقهٔ $y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$ به مساحت دایره‌ای را تعیین کنید که محیط دایره با محیط حلقه برابر باشد.

جواب : $2\pi\frac{\sqrt{3}}{15}$

۱۸ــ۱۱ــ۷ حجم سهموی (یا پارابولوئید بیضی شکل) $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ را حساب کنید که به صفحه $x=a$ محدود است.

جواب : $\pi a^2\sqrt{pq}$

۱۹ــ۱۱ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ حجم محدود به هذلولوی گون(یا هیپربولوئید) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ و صفحات $z=c$ و $z=l>c$.

جواب : $\pi ab\left(\frac{l^3}{3c^2}-l+\frac{2c}{3}\right)$

۲۰ــ۱۱ــ۷ حجم مخروط قائمی با ارتفاع h را حساب کنید که قاعده‌اش بیضی با نیم قطرهای a و b باشد.

جواب : $\frac{\pi abh}{3}$

۲۱ــ۱۱ــ۷ ناحیهٔ محدود به خطوط $y=x+1$ ، $y=2x+1$ و $x=2$ را حول محور x ها دوران می دهیم ، حجم حاصل را حساب کنید.

جواب : 12π

۲۲ــ۱۱ــ۷ ناحیهٔ محدود به هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ و خط $2ay-bx=0$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می دهیم ، حجم حاصل را بیابید.

جواب : $\left(\frac{4\sqrt{3}-6}{9}\right)\pi b^2a$

۲۳ــ۱۱ــ۷ حجم حاصل از دوران منحنی $\rho=a\cos^2\varphi$ را حول محور قطبی حساب کنید.

جواب : $\frac{4}{21}\pi a^3$

۲٤ــ۱۱ــ۷ مساحت سطح حاصل از دوران هر یک از منحنیهای زیر را حساب کنید:

(a) $y=\tan x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ حول محور x ها ،

(b) $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}(0\leqslant x\leqslant a)$ حول محور x ها ،

(c) $x^2+y^2-2rx=0$ حول محور x ها بین ۰ و h واقع است ،

جواب :

(a) $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$;

(b) $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; (c) $2\pi rh$.

۱۲ــ۷ محاسبهٔ فشار، کار و سایر کمیتهای فیزیکی بوسیلهٔ انتگرال معین

I . برای محاسبهٔ نیروی فشار مایعات از **قانون پاسکال** استفاده می‌شود که به صورت

$$P=\gamma hS$$

بیان می‌گردد، که در آن S مساحت سطحی است که فشار بر آن وارد می‌شود و h عمق مایع و γ چگالی آن است.

II . اگر نیروی متغیر $X=f(x)$ ، در امتداد محور x ها عمل کند کار این نیرو در فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ با انتگرال

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

حساب می‌شود.

III . انرژی جنبشی یک نقطهٔ مادّی به جرم m و سرعت v از دستور زیر حساب می‌شود :

$$K=\frac{mv^2}{2}$$

IV . نیرویی که دو بار الکتریکی بفاصلهٔ r و با بارهای e_1 و e_2 بریکدیگر وارد می‌کنند برابر است با :

$$F=\frac{e_1e_2}{r^2}$$

توجه . درحل مسائل عملی ، فرض بر این است که تمام اطلاعات در یک سیستم

واحدی داده شده است و از ابعاد کمیتهای متناظر صرفنظر می کنیم.

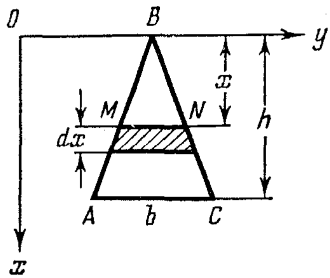
۱ــ۱۲ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ نیروی فشار بر یک مثلث به حالت قائم به قاعدهٔ b و ارتفاع h که قاعده‌اش در پایین و رأس آن در سطح آزاد مایع واقع شده باشد.

حل. دستگاه مختصات را مطابق شکل ۱۰۸ فرض می کنیم و در عمق دلخواه x، نوار باریک افقی به عرضی dx در نظر می گیریم.

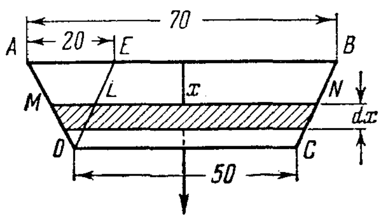
این نوار را یک مستطیل فرض می کنیم و دیفرانسیل سطح را حساب می کنیم $dS = MN\,dx$. از تشابه دو مثلث BMN و ABC داریم

$$\frac{MN}{b} = \frac{x}{h}$$

که در آن $MN = \frac{bx}{h}$ و $dS = \frac{bx}{h}dx$.



شکل ۱۰۸



شکل ۱۰۹

نیروی فشار وارده بر این نوار برابر $dP = x\,dS$ است (توجه کنید که چگالی آب برابر یک است). پس تمام نیروی فشار که به مثلث وارد می شود برابر است با:

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{b}{h}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}bh^2.$$

۲ــ۱۲ــ۷ نیم دایره‌ای بشعاع R بطور قائم در داخل مایعی طوری قرار گرفته است که قطر آن بر سطح آزاد مایع منطبق است. نیروی فشار وارد بر آن را حساب کنید (چگالی مایع γ است).

جواب: $\frac{2}{3}\gamma R^3$

۳ــ۱۲ــ۷ سدّی ذوزنقه ای شکل به حالت قائم، مفروض است که طول قاعدهٔ فوقانی آن ۷۰ متر، و طول قاعدهٔ تحتانی آن ۵۰ متر و ارتفاعش ۲۰ متر است. نیروی فشار آب وارد به سدّ را حساب کنید (شکل ۱۰۹).

حل . دیفرانسیل سطح (dS) ، تقریباً برابر $dS = MN\,dx$ است. از تشابه دو مثلث OML و OAE داریم $\frac{ML}{20} = \frac{20-x}{20}$ ، که در آن

$$ML = 20 - x,\;\; MN = 20 - x + 50 = 70 - x$$

پس

$$dS = MN \times dx = (70 - x)\,dx$$

و دیفرانسیل نیروی فشار آب برابر است با :

$$dP = x\,dS = x\,(70 - x)\,dx$$

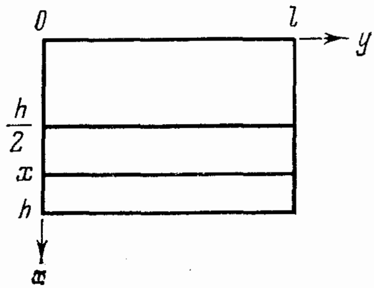
از این عبارت نسبت به x از ۰ تا ۲۰ انتگرال می گیریم :

$$P = \int_0^{20} (70x - x^2)\,dx = 11\,333\,\frac{1}{3}$$

۴ــ ۱۲ــ ۷ مطلوب است محاسبهٔ کار انجام شده از تخلیهٔ یک دیگ بخار نیم کروی شکل به شعاع R .

جواب : $\frac{\pi R^4}{4}$

۵ــ ۱۲ــ ۷ در یک ظرف مستطیلی شکل ، به حجمهای مساوی آب و روغن ریخته شده است. سنگینی آب با دو برابر سنگینی روغن برابر است. نشان دهید که نیروی فشار وارده بر دیواره ظرف یک پنجم نیروی فشاری است که اگر بجای آن، روغن در ظرف ریخته شود.



شکل ۱۱۰

حل . فرض می کنیم h عمق ظرف و l درازای دیوارهٔ آن باشد. محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۱۰ انتخاب می کنیم. چون روغن سبکتر از آب است، بنابر این نیمهٔ فوقانی ظرف را اشغال می کند و نیروی فشاری که بر دیواره وارد می شود برابر است با

$$P_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} xl\,dx = \frac{lh^2}{16}$$

فشاردرعمق $x > \frac{h}{2}$ ، شامل فشار روغن به ارتفاع $\frac{h}{2}$ که به صورت ستونی وارد می شود باضافهٔ فشار آب که به صورت ستونی به ارتفاع $x - \frac{h}{2}$ وارد می شود، می باشد، بنابراین

$$dP_2 = \left[\frac{h}{2}\times\frac{1}{2}+\left(x-\frac{h}{2}\right)\right] l\,dx = \left(x-\frac{h}{4}\right) l\,dx.$$

در نتیجه، نیروی فشاری که از طرف مایع مخلوط در نیمه تحتانی بر دیواره وارد می شود، برابر است با

$$P_2 = \int_{\frac{h}{2}}^{h} l\left(x-\frac{h}{4}\right) dx = \frac{lh^2}{4}$$

تمام نیروی فشار مایع مخلوط به دیواره برابر است با :

$$P = P_1 + P_2 = \frac{lh^2}{4} + \frac{lh^2}{16} = \frac{5}{16}\, lh^2$$

اگر تمام ظرف را فقط با روغن پر بکنیم و نیروی فشار را با $\overline{P}$ نشان دهیم، داریم :

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\int_0^h xl\,dx = \frac{lh^2}{4}$$

پس

$$P - \overline{P} = \frac{1}{16} lh^2 = \frac{1}{5} P$$

۶ــ۱۲ــ۷ بار الکتریکی E که در مبداء مختصات متمرکز است بار e را از نقطهٔ $(a, 0)$ تا نقطهٔ $(b, 0)$ دفع می کند. کار انجام شده A را توسط نیروی رانش F حساب کنید.

حل . دیفرانسیل کار در تغییر مکان dx برابر است با

$$dA = F\,dx = \frac{eE}{x^2}\,dx$$

پس

$$A = eE\int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

وقتی $b \to \infty$ کار A به $\frac{eE}{a}$ میل می کند.

۷ــ۱۲ــ۷ راکتی به وزن P از زمین به طور قائم به طرف بالا تا ارتفاع h پرتاب می شود. کار انجام شده را حساب کنید.

حل . نیروی جاذبهٔ راکت بوسیله زمین را با F ، جرم راکت را با m_R ، و جرم

زمین را با m_E ، نشان می دهیم. طبق قانون نیوتن داریم:

$$F = k\frac{m_R m_E}{x^2}$$

که x فاصلهٔ بین راکت و مرکز زمین است. فرض می کنیم $km_R m_E = K$ ، پس

$$F(x) = \frac{K}{x^2}, \quad R \leqslant x \leqslant h+R$$

که R شعاع زمین است. به ازای $x=R$ نیروی $F(R)$ با وزن راکت (P) برابر است، یعنی $F(R) = P = \frac{K}{R^2}$ ، که در آن $K = PR^2$ ، و $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$.
دیفرانسیل کار انجام شده عبارت است از

$$dA = F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}dx.$$

و مقدار کار برابر است با

$$A = \int_R^{R+h} F(x)\,dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = \frac{PRh}{R+h}$$

و

$$\lim_{h\to\infty} A(h) = \lim_{h\to\infty} \frac{PRh}{R+h} = PR$$

مقدارکاری است که موتور راکت برای خروج از جاذبه زمین انجام می دهد (از حرکت زمین صرفنظر شده است).

۸ــ۱۲ــ۷ یک کرهٔ آهنی به شعاع R حول خودش با سرعت زاویه‌ای ω می چرخد. کار لازم برای متوقف کردن آن چقدر است؟

حل. مقدار کار، با انرژی جنبشی کره برابر است. برای محاسبهٔ این انرژی، کره را به استوانه های توخالی هم مرکز به ضخامت dx ، تقسیم می کنیم. سرعت در هر نقطهٔ استوانه‌ای به شعاع x با ωx برابر است.

عنصر حجم استوانه برابر

$$dV = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

است و عنصر جرم با

$$dM = \gamma\,dV$$

برابر است که γ چگالی آهن است، و دیفرانسیل انرژی جنبشی برابر است با

$$dK = 2\pi\gamma\omega^2 x^3\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

پس

$$K=2\pi\gamma\omega^2\int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{4\pi\gamma R^3}{3}\cdot\frac{\omega^2R^2}{5}=\frac{M\omega^2R^2}{5}$$

۹ــ۱۲ــ۷ یک قرص (یا یک دیسک) به جرم M ، و به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری می چرخد که از مرکز آن گذشته و به صفحه قرص عمود است. انرژی جنبشی قرص را حساب کنید.

جواب : $\frac{MR^2\omega^2}{4}$

۱۰ــ۱۲ــ۷ از یک هادی با مقاومت R ، در مدت یک سیکل T ، جریان سینوسی متناوب

$$I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$$

می گذرد، حرارت رها شده را حساب کنید.

حل . مقدار حرارت رها شده در واحد زمان بوسیله یک جریان مستقیم از قانون **«جول ــ لنز»**[1]

$$Q=0.24\,I^2R$$

حساب می شود. در جریان متناوب ، دیفرانسیل مقدار حرارت برابر است با

$$dQ=0.24\,I^2\,(t)\,R\,dt$$

از آنجا

$$Q=0.24R\int_{t_1}^{t_2}I^2\,dt$$

در این حالت

$$Q=0.24\,RI_0^2\int_0^T\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)dt=$$

$$=0.12\,RI_0^2\left[t-\frac{T}{2\pi}\,\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)}{2}\right]\Bigg|_0^T=0.12RTI_0^2$$

۱۱ــ۱۲ــ۷ یک بیضی به اقطار $2a$ و $2b$ بطور قائم در مایعی به چگالی d طوری غوطه‌ور است که مرکز آن در عمق $h\,(h\geqslant b)$ ، ازسطح مایع قرار دارد. فشار

1 ـ Joule-Lenz

وارد بر بیضی را حساب کنید.

جواب: $\pi abhd$

۷ــ۱۲ــ۱۲ استوانه‌ای با قاعدهٔ دایره‌ای شکل به شعاع r و ارتفاع h، از مایعی به چگالی d پر شده است فشار وارد بر دیواره آن را حساب کنید.

جواب: $\pi r d h^2$

۷ــ۱۲ــ۱۳ یک ظرف مخروطی شکل به ارتفاع H که شعاع قاعده‌اش R، راس آن طرف پایین می باشد، پر از آب است. کار لازم جهت تخلیهٔ آن را حساب کنید.

جواب: $\frac{1}{12}\pi R^2 H$

۷ــ۱۲ــ۱۴ فنری به اندازه ٦ سانتیمتر کشیده می شود. اگر نیروی لازم برای کشیدن یک سانتیمتر، یک کیلوگرم نیرو باشد، کار لازم را حساب کنید.

۷ــ۱۳ محاسبهٔ گشتاور استاتیک و گشتاورماند

محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل

در تمام مسائل این بخش فرض بر آن است که جرم جسم بطور یکنواخت توزیع شده است (خطی، دو و سه بعدی) و چگالی جسم برابر واحد است.

۱. گشتاور استاتیک یک منحنی مسطح L بترتیب نسبت به محور x ها و محور y ها را با M_x و M_y نشان دهیم، مقدار آنها با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$M_x = \int_L y\,dl, \quad M_y = \int_L x\,dl$$

گشتاورماند این منحنی نسبت به مبداء مختصات با دستور زیر بدست می آید:

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\,dl.$$

اگر معادله منحنی L به صورت $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ باشد، آنگاه dl با $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ برابر است.

اگر معادلهٔ L با معادلات پارامتری

$$x = x(t), \; y = y(t) \; (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

مشخص شده باشد، dl برابر $\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ است.

۲ . اگر ناحیه‌ای مسطح محدود به منحنیهای

$$y=y_1(x),\ y=y_2(x) \ ،\ y_1(x)\leqslant y_2(x)$$

و خطوط

$$x=a \ ،\ x=b \ ،\ b\geqslant x\geqslant a$$

باشد، **گشتاورهای استاتیک** با دستورهای زیر حساب می شوند:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx;\ M_y=\int_a^b x\,(y_2-y_1)\,dx$$

۳ - **مختصات مرکز ثقل** یک منحنی مسطح، با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$x_c=\frac{M_y}{l},\ y_c=\frac{M_x}{l}$$

که l طول منحنی L است.

مختصات مرکز ثقل یک ناحیهٔ مسطح عبارتند از

$$x_c=\frac{M_y}{S},\quad y_c=\frac{M_x}{S}$$

که S مساحت ناحیه است.

۱ــ۱۳ــ۷ گشتاور استاتیک ناحیهٔ فوقانی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

را نسبت به محور x ها حساب کنید.

حل . داریم:

$$y\,dl=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx;$$

چون

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \text{و} \quad yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$$

پس

$$y\,dl=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

که در آن $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است.

$$M_x = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right) = b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

در حالت $a=b$ ، بیضی تبدیل به دایره می شود. برای دایره داریم، $M_x = 2a^2$ زیرا $\varepsilon = 0$ و $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$.

۲ــ۱۳ــ۷ گشتاور ماند یک مستطیل به قاعده b و ارتفاع h را نسبت به قاعده‌اش حساب کنید.

حل . نواری از مستطیل به پهنای dy را در نظر می گیریم که بموازات قاعده و بفاصله y از آن می باشد. جرم این نوار با مساحتش، یعنی، $dS = b\,dy$ برابر است، فاصلهٔ تمام نقاط، تا قاعده برابر y ، یا دقیق‌تر، برابر dy است. بنابر این

$$dI_x = by^2\,dy$$

و

$$I_x = \int_0^h by^2\,dy = \frac{bh^3}{3}$$

۳ــ۱۳ــ۷ گشتاور ماند قسمتی از دایره $x^2+y^2=R^2$ را که در ربع اول واقع است، نسبت به محور y ها بدست آورید.

جواب: $0.25\pi R^3$

٤ــ۱۳ــ۷ گشتاور ماند ناحیهٔ محدود به سهمی $y^2=4ax$ و خط $x=a$ را نسبت به محور y ها حساب کنید.

حل . داریم.

$$dI_x = x^2\,dS$$

که dS مساحت نوار باریک قائمی است که بفاصله x از محور y ها قرار دارد (شکل ۱۱۱ را ببینید):

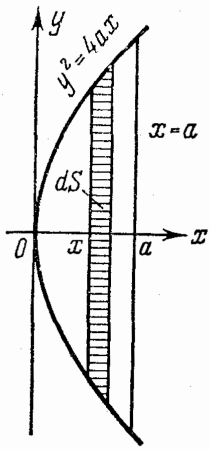
$$dS = 2|y|\,dx = 2\sqrt{4ax}\,dx.$$

پس

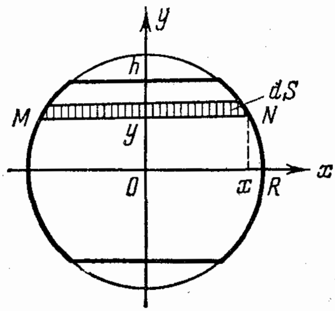
$$I_x = \int_0^a 4x^2\sqrt{ax}\,dx = 4\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{8}{7}a^4.$$

۵ــ۱۳ــ۷ در طراحی پلهای چوبی، اغلب با الوارهای دو طرف تخت، سروکار

داریم. مقطع چنین الواری در شکل ۱۱۲ نمایش داده شده است. گشتاور ماند (یااینرسی دورانی) این مقطع را نسبت به محور افقی میانی بدست آورید.



شکل ۱۱۱



شکل ۱۱۲

حل. محورهای مختصات را مطابق شکل انتخاب می کنیم. پس $dI_x=y^2\,dS$ که در آن

$$dS=MN\,dy=2x\,dy=2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

بنابراین

$$I_x=2\int_{-h}^{h} y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy=4\int_{0}^{h} y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$y=R\sin t;\quad dy=R\cos t\,dt;\quad t_1=0;\quad t_2=\arcsin(h/R)$$

داریم

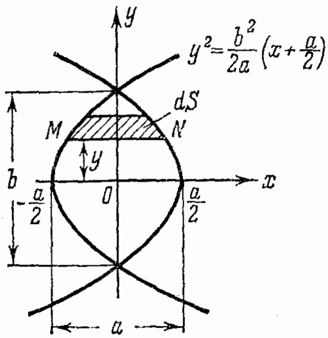
$$I_x=4\int_0^h y^2\sqrt{R^2-y^2}\,dy=4\int_0^{\arcsin(h/R)} R^2\sin^2 t\cdot R\cos tR\cos t\,dt=$$

$$=4R^4\int_0^{\arcsin(h/R)}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{R^4}{2}\int_0^{\arcsin(h/R)}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{R^4}{2}\arcsin\frac{h}{R}+\frac{h}{R}(2h^2-R^2)\sqrt{R^2-h^2}.$$

وقتی $h=R$، گشتاور مانده دایرهٔ مقطع را حول یکی از اقطارش بدست می آوریم که برابر است با $I_x=\frac{\pi R^4}{4}$

۶ــ۱۳ــ۷ گشتاورماند ناحیهٔ محدود به دو سهمی را نسبت به محور x ها حساب کنید که در شکل ۱۱۳ مشخص شده است.



شکل ۱۱۳

حل . محورهای مختصات را مطابق شکل انتخاب کرده و معادلات را می نویسیم. معادلهٔ سهمی سمت چپ عبارت است از:

$$y^2=\frac{b^2}{2a}\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

و معادلهٔ سهمی سمت راست

$$y^2=\frac{b^2}{2a}\left(\frac{a}{2}-x\right)$$

است . گشتاور ماند نوار ها شور خورده برابر است با

$$dI_x=y^2\,dS=y^2\,|MN|\,dy$$

که در آن

$$|MN|=x_2-x_1=2\left(\frac{a}{2}-\frac{2a}{b^2}y^2\right)=$$
$$=a-\frac{4a}{b^2}y^2.$$

پس

$$I_x=\int\limits_{-b/2}^{b/2}y^2\left(a-\frac{4a}{b^2}y^2\right)dy=2\int\limits_{0}^{b/2}y^2\left(a-\frac{4a}{b^2}y^2\right)dy=\frac{ab^3}{30}$$

۷ــ۱۳ــ۷ گشتاور استاتیک قسمتی از سهمی $y^2=2x$ را نسبت به محورهای y و x حساب کنید که بین $x=0$ و $x=2$ $(y>0)$ قرار دارد.

جواب: $M_x=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1);\ M_y=\frac{9}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{16}\ln(2+\sqrt{5})$

۸ــ۱۳ــ۷ گشتاور استاتیک قسمتی از خط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ که دو سر آن روی

محورهای مختصات واقع است، نسبت به محورهای مختصات حساب کنید.

جواب: $M_x = \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}; \quad M_y = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

۹ــ۱۳ــ۷ گشتاور استاتیک قسمتی از منحنی $y=\cos x$ را که بین $x_2 = \frac{\pi}{2}$ و $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ قرار دارد نسبت به محور x ها حساب کنید.

جواب: $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

۱۰ــ۱۳ــ۷ گشتاور استاتیک ناحیه‌ای را نسبت به محور x ها حساب کنید که به سهمی های $y=x^2;\ y=\sqrt{x}$ محدود است.

جواب: ۰/۱۵

۱۱ــ۱۳ــ۷ گشتاور ماند مثلث محدود به $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0 ، b>0)$ و $x=0,\ y=0$ را نسبت به محورهای مختصات حساب کنید.

جواب: $I_x = \frac{ab^3}{12}; \quad I_y = \frac{a^3b}{12}$

۱۲ــ۱۳ــ۷ گشتاور ماند ذوزنقهٔ $ABCD$ را نسبت به قاعده‌اش AD حساب کنید، در صورتی که $AD=a,\ BC=b$ و ارتفاعش برابر h باشد.

جواب: $\frac{(a+3b)\,h^3}{12}$

۱۳ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل نیمدایرهٔ فوقانی دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ را تعیین کنید.

حل . چون این نیم دایره نسبت به محور y ها متقارن است بنابر این مرکز ثقل روی این محور واقع است، پس $x_c=0$ ، برای تعیین y_c از نتیجهٔ مسئلهٔ **۱ــ۱۳ــ۷** استفاده می کنیم. در آن مسئله داشتیم $M_x=2a^2$ ، پس $y_c=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}$. بنابر این
$x_c=0,\ y_c=\frac{2a}{\pi}$

۱۴ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل قسمتی از منحنی زنجیری $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$ را که بین دو نقطهٔ $B(a,\ \cosh a)$ و $A(0,\ 1)$ واقع است. تعیین کنید.

حل . داریم:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\cosh x\,dx$$

پس

$$l=\int_L dl=\int_0^a \cosh x\,dx=\sinh a$$

بنابر این

$$M_y=\int_L x\,dl=\int_0^a x\cosh x\,dx=x\sinh x\Big|_0^a-\int_0^a \sinh x\,dx=$$
$$=a\sinh a-\cosh a+1$$

در نتیجه

$$x_c=\frac{a\sinh a-(\cosh a-1)}{\sinh a}=a-\frac{\cosh a-1}{\sinh a}=a-\tanh\frac{a}{2}$$

به طور مشابه

$$M_x=\int_L y\,dl=\int_0^a \cosh^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a (1+\cosh 2x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sinh 2x}{2}\right)\Big|_0^a=\frac{a}{2}+\frac{\sinh 2a}{4}$$

$$y_c=\frac{\frac{a}{2}+\frac{\sinh 2a}{4}}{\sinh a}=\frac{a}{2\sinh a}+\frac{\cosh a}{2}$$

۱۵ــ ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

را تعیین کنید.

حل . اولین قوس سیکلوئید نسبت به خط $x=\pi a$ متقارن است. بنابر این مرکز ثقل روی خط واقع است پس $x_c=\pi a$. چون طول این قوس برابر $l=8a$ است (محاسبه اش راحت است) پس

$$y_c=\frac{1}{l}\int_L y\,dl=\frac{1}{8a}2a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\ t)\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=\frac{4}{3}a$$

۱۶ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل قسمتی از آستروئید $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را که در ربع اول قرار دارد تعیین کنید.

جواب : $x_c=y_c=0.4a$

۱۷ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل قسمتی از کاردیوئید $\rho=a(1+\cos\varphi)$ را که بین $\varphi=0$ و $\varphi=\pi$ واقع است، تعیین کنید.

حل . معادلهٔ منحنی را به صورت پارامتری می نویسیم :

$$x=\rho\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi;$$
$$y=\rho\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

وقتی پارامتر φ بین ۰ و π تغییر می کند، قسمت فوقانی رسم می شود. چون تمام درازای

منحنی برابر $8a$ است و

$$dl = \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2}\, d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

(مسئلهٔ **۳ــ۹ــ۷** را ببینید) داریم:

$$x_c = \frac{1}{l}\int_L y\, dl = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)\, 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -\frac{4}{5}a\cos^5\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = \frac{4}{5}a$$

به طور مشابه

$$y_c = \frac{1}{4a}\int_L x\, dl = \frac{1}{4a}\int_0^\pi a\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)\, 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \cos\varphi\cos^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = a\int_0^\pi \left(2\cos^5\frac{\varphi}{2} - \cos^3\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

با فرض $\frac{\varphi}{2} = t$ داریم (مسئلهٔ **۹ــ٦ــ٦** را ببینید):

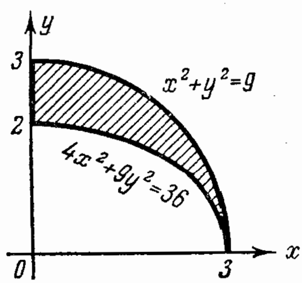
$$y_c = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^5 t - \cos^3 t)\, dt = 4a\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} - 2a\frac{2}{3} = \frac{4}{5}a$$

بنابر این

$$x_c = y_c = \frac{4a}{5}$$

جالب توجه است که مرکز ثقل قوس فوقانی کاردیوئید روی نیمساز ربع اول واقع است در حالی که این قوس نسبت به نیمساز ربع اول متقارن نیست.

۱۸ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل قسمتی از ناحیهٔ بین بیضی $4x^2 + 9y^2 = 36$ و دایرهٔ $x^2 + y^2 = 9$ که در ربع اول واقع است، تعیین کنید (شکل ۱۱٤).



شکل ۱۱٤

حل نخست گشتاورهای استاتیک را نسبت به محورهای مختصات حساب

می کنیم :

$$M_y=\int_0^3 x\,(y_2-y_1)\,dx=\int_0^3 x\left[\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=3;$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^3 (y_2^2-y_1^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\left[(9-x^2)-\frac{4}{9}(9-x^2)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=5.$$

مساحت ربع دایره به شعاع ۳ برابر $\frac{9\pi}{4}$ و مساحت ربع بیضی به نیم قطرهای $a=3$ و $b=2$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

بنابر این مساحت مطلوب برابر است با

$$S=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

پس

$$x_c=\frac{M_y}{S}=\frac{4}{\pi};\quad y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{20}{3\pi}$$

۱۹ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل ناحیهٔ محدود به سهمی $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ و محورهای مختصات را تعیین کنید.

جواب : $x_c=y_c=\frac{a}{5}$

۲۰ــ۱۳ــ۷ مختصات **مرکز** ثقل **سطح** محدود به منحنی $\rho=a\cos^3\varphi\ \ (a>0)$ را تعیین کنید.

حل . چون همیشه $\rho\geqslant 0$ ، پس تغییرات φ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ است. با توجه به زوج بودن تابع $\cos\varphi$ ، منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است و به ازای $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ منحنی از مبداءِ مختصات می گذرد. مساحت این ناحیه برابر است با

$$S=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=a^2\,\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{32}\pi a^2$$

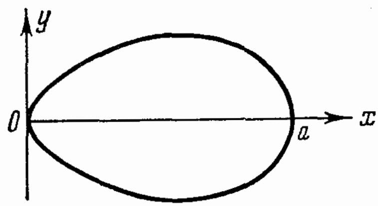
محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۱۵ در نظر می گیریم .معادلات **پارامتری** منحنی را می نویسیم :

$$x=\rho\cos\varphi=a\cos^4\varphi;$$
$$y=\rho\sin\varphi=a\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

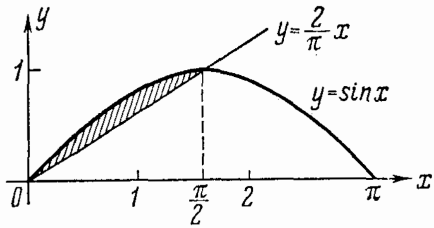
مرکز ثقل روی محور x ها قرار دارد، یعنی، $y_c = 0$ (چون منحنی نسبت به این محور متقارن است). پس کافی است x_c را حساب کنیم

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^a xy\,dx}{S} = \frac{8a^3}{S}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{8a^3}{S}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10}\varphi - \cos^{12}\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{(5/32)\,\pi a^2}\left(\frac{1\times3\times5\times7\times9}{2\times4\times6\times8\times10} - \frac{1\times3\times5\times7\times9\times11}{2\times4\times6\times8\times10\times12}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{21}{40}a$$



شکل ۱۱۵



شکل ۱۱۶

۲۱ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل ناحیهٔ محدود به خط $y = \frac{2}{\pi}x$ و منحنی سینوسی $y = \sin x \;\; (x \geqslant 0)$ را تعیین کنید (شکل ۱۱۵).

حل . خط مستقیم و منحنی همدیگر را در نقاط $\left(\frac{\pi}{2}\,,\; 1\right)$ و $(0,\; 0)$ قطع می کنند. مساحت ناحیه ای که بین خط و منحنی قرار دارد، برابر است با

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx = \frac{4-\pi}{4}$$

پس

$$x_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2\right) dx}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{2}{4-\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2}{4-\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{4}{3\pi^2}x^3\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}\,;$$

$$y_c = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx}{\frac{4-\pi}{4}} = \frac{4}{4-\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx -$$

$$-\frac{8}{\pi(4-\pi)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx=\frac{4}{4-\pi}-\frac{\pi^2}{3(4-\pi)}=\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}.$$

۲۲ــ۱۳ــ۷ قضیه های زیر را ثابت کنید **(قضیه های گلدین**[1]**)**.

قضیهٔ ۱ . مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول محوری که در صفحهٔ منحنی واقع بوده و او را قطع نکند، با حاصلضرب درازای منحنی در محیط دایره‌ای برابر است که مرکز ثقل منحنی در دوران ایجاد می کند.

قضیهٔ ۲ . حجم حاصل از دوران یک ناحیهٔ مسطح حول محوری که در صفحهٔ شکل (یا ناحیه) واقع است و ناحیه را قطع نمی کند، با حاصلضرب مساحت ناحیه در طول محیط دایره‌ای برابر است که مرکز ثقل در دوران می سازد.

برهان . (۱) دستور محاسبهٔ مساحت سطح دوار حاصل از دوران منحنی L حول محور x ها، یعنی

$$P=2\pi\int_L y\,dl$$

(بخش **۱۰ــ۷** را ببینید) را باعرض مرکز ثقل این منحنی، یعنی

$$y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int_L y\,dl$$

مقایسه می کنیم، داریم:

$$P=2\pi\,ly_c=l\cdot 2\pi y_c$$

l درازای منحنی است که دوران می کند و $2\pi y_c$ محیط دایره به شعاع y_c است، یعنی، محیط دایره‌ای است که مرکز ثقل در دوران حول محور x هامی سازد.

(۲) دستور محاسبهٔ حجم جسم حاصل از دوران یک شکل (یا ناحیهٔ) مسطح حول محور x ها یعنی

$$V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2).dx$$

(بخش **۶ــ۷** را ببینید) را باعرض مرکز ثقل این ناحیه، یعنی،

$$y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{1}{2S}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx.$$

---

1. Guldin's theorems

مقایسه می کنیم، داریم :

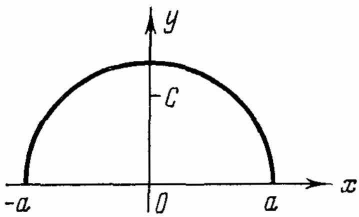
$$V=\pi\cdot 2S\,y_c=S\cdot 2\pi y_c$$

که S مساحت ناحیه‌ای است که دوران می کند و $2\pi y_c$ طول محیط دایره‌ای است که مرکز ثقل در دوران حول محور x ها می سازد.

۲۳ــ۱۳ــ۷ با استفاده از قضیهٔ اول گلدین، مرکز ثقل نیم دایره به شعاع a را بدست آورید.

حل . محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۱۷ انتخاب می کنیم. با توجه به تقارن ، $x_c=0$. حال y_c را حساب می کنیم. اگر این نیم دایره حول محور x ها دوران کند مساحت سطح حاصل برابر $4\pi a^2$ می شود، و درازای منحنی برابر $l=\pi a$ است. بنابر این، مطابق اولین قضیهٔ گلدین داریم :

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi y_c;\quad y_c=2\,\frac{a}{\pi}$$



شکل ۱۱۷

۲۴ــ۱۳ــ۷ قضیهٔ دوم گلدین را بکار برده مختصات مرکز ثقل ناحیهٔ محدود به محور x ها و یک قوس سیکلوئید

$$x=a\,(t-\sin t);\quad y=a\,(1-\cos t)$$

را تعیین کنید.

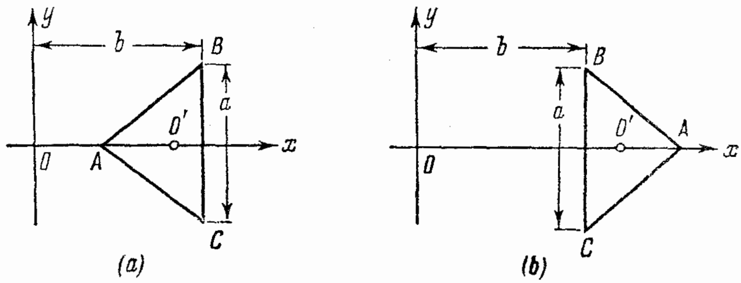
حل . چون ناحیه مورد نظر نسبت به خط $x=\pi a$ متقارن است. پس مرکز تقارن روی این خط قرار دارد، در نتیجه $x_c=\pi a$

V حجم جسم دوار حاصل از دوران این شکل حول محور x ها برابر $5\pi^2a^3$ است (مسئلهٔ ۱۴ــ۶ــ۷ را ببینید) و S مساحت شکل برابر $3\pi a^2$ است (مسئلهٔ ۳ــ۴ــ۷ راببینید). با توجه به قضیهٔ دوم گلدین داریم :

$$y_c=\frac{V}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}$$

۷ــ۱۳ــ۲۵ مثلث متساوی الضلاع به ضلع a را حول خطی به موازات قاعده به فاصلهٔ $b > a$ از آن دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را حساب کنید.

حل . می توان مثلث را به دو حالت مطابق شکل ۱۱۸ در نظر گرفت. ارتفاع مثلث $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و مساحت آن برابر $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است. O' مرکز تقارن مثلث، محل لاقی سه میانه است که فاصله اش تا محور تقارن، در حالت اول $b - \frac{a\sqrt{3}}{6}$، و در حالت دوم $b + \frac{a\sqrt{3}}{6}$ است.



شکل ۱۱۸

توجه به قضیهٔ دوم گلدین

$$V_1 = \frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \pi\left(\frac{a^2 b\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4}\right),$$
$$V_2 = \frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{4}\left(b + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \pi\left(\frac{a^2 b\sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4}\right).$$

۷ــ۱۳ــ۲۶ مطلوب است تعیین مختصات مرکز ثقل قسمتی از قوس دایره‌ای به شعاع R، که مقابل به زاویهٔ مرکزی 2α باشد.

جواب : $x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_c = 0$

۷ــ۱۳ــ۲۷ مختصات مرکز ثقل ناحیه‌ای را تعیین کنید که محدود به منحنی کسینوسی $y = \cos x$ و خط $y = \frac{1}{2}$ بوده و بین $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = -\frac{\pi}{3}$ قرار دارد.

۷ــ۱۳ــ۲۸ مختصات مرکز ثقل ناحیه‌ای محدود به منحنی $y^2 = ax^3 - x^4$ را تعیین کنید.

جواب : $x_c = \frac{5a}{8}$; $y_c = 0$

۷ــ۱۳ــ۲۹ مختصات مرکز ثقل پیچ لگاریتمی $\rho = ae^{\varphi}$ را که بین $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

و $\varphi_2 = \pi$ قرار دارد، تعیین کنید.

جواب:
$$x_c = -\frac{0.2\,(2e^{2\pi}-e^{\pi})}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}\,; \qquad y_c = \frac{0.2a\,(e^{2\pi}-2e^{\pi})}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$$

۳۰ــ۱۳ــ۷ شش ضلعی منتظمی به ضلع a را حول یکی از اضلاعش دوران می دهیم. حجم جسم دوار حاصل را حساب کنید.

جواب : $4.5\pi a^3$.

۳۱ــ۱۳ــ۷ مختصات مرکز ثقل نیم دایرهٔ فوقانی به شعاع R را با استفاده از قضیهٔ گلدین تعیین کنید.

جواب : $x_c = 0; \quad y_c = \dfrac{4R}{3\pi}$

۱٤ــ۷ چند مسئلهٔ اضافی

۱ــ۱٤ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ مساحت ناحیه‌ای که در ربع اول واقع بوده و به منحنی های $y^n = x^m$ و $y^m = x^n$ محدود است (m و n اعداد صحیح و مثبت هستند). در مورد وابستگی تمام مساحت به فرد و یا زوج بودن اعداد m و بحث کنید.

راهنمایی : منحنی ها همدیگر را در ربع اول و در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ قطع می کنند. مساحتی که در ربع اول قرار دارد از رابطهٔ

$$\left|\int_0^1 \left(x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{m}{n}}\right) dx\right|$$

بدست می آید. اگر m و n هر دو زوج باشند، ناحیه نسبت به مبداء مختصات متقارن است. اگر m و n یکی فرد و دیگری زوج باشد، ناحیه فقط در ربع اول قرار دارد.

جواب : اگر m و n هر دو زوج باشند

$$\left|\frac{m-n}{m+n}\right|;\ 4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$$

اگر m و n هر دو فرد باشند

$$2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$$

و اگر m و n یکی فرد و دیگری زوج باشد، $\left|\dfrac{m-n}{m+n}\right|$

۲ــ۱۴ــ۷

(الف) ثابت کنید که مساحت ذوزنقهٔ منحنی الضلع محدود به محور x ها و خطوط $x=a,\ \ x=b$ و سهمی $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ را می‌توان با استفاده از دستور زیر، موسوم به **دستور چبیشف**، حساب کرد:

$$S=\frac{b-a}{3}\left[y\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)+y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b-a}{2}\right)\right]$$

(ب) ثابت کنید که مساحت محدود به منحنی

$$y=f(x)=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

را می‌توان از دستور زیر، موسوم به **فرمول گوس** بدست آورد:

$$S=\frac{b-a}{9}\left[5f\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}\right)+8f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+5f\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}\right)\right].$$

۳ــ۱۴ــ۷ نشان دهید که مساحت محدود به پیچ لگاریتمی $\rho=ae^{m\varphi}$ و دو شعاع حامل دلخواه با تفاضل مربعات این شعاعها، متناسب است.

راهنمایی: بکمک دستور محاسبهٔ مساحت در مختصات قطبی، عمل کنید.

۴ــ۱۴ــ۷ دو جسم بین دو صفحه موازی P و Q قرار دارند. اگر این دو جسم بوسیلهٔ هر صفحه R که همواره با آنها موازی است، بریده شود و مقطع های برابر بسازد. ثابت کنید که حجم این دو جسم برابر است. **(اصل کاوالری[1])**

راهنمایی: چون مقطع ها برابرند، اگر مساحت آنها را با تابع $S(x)$ نشان دهیم، داریم

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

که برابر حجم هرکدام از دو جسم است.

۵ــ۱۴ــ۷ اگر تابع $S(x)\ \ (0\leqslant x\leqslant h)$ مساحت مقطع جسمی را با **صفحه عمود** به محور x ها را نشان دهد که چند جمله‌ای است که درجه‌اش از سه بیشتر نیست، آنگاه حجم این جسم برابر است با

$$V=\frac{h}{6}\left[S(0)+4S\left(\frac{h}{2}\right)+S(h)\right]$$

---

1. Cavalieri's principle

با استفاده از این فرمول، دستورهایی برای محاسبهٔ حجم: کره_ قطعه کروی با یک یا دو قاعده |(یعنی، قطعه‌ای از کره که با یک **یا دو** صفحهٔ موازی قطع شود) مخروط، مخروط ناقص، بیضوی(الپسوئید) و پاراابولوئید دوّار (یا سهموی) بیابید.

راهنمایی: فرمول، مستقیماً از دستور سیمپسون نتیجه می شود:

$$\int_0^h f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{h}{2}\right)+f(h)\right]$$

که در کره $S(x)=\pi(r^2-x^2)$; و در مخروط $S(x)=\frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$. و در پارابولوئید دوار $S(x)=2\pi p x$ و غیره می باشد.

۶_۱۴_۷ ثابت کنید که حجم حاصل از دوران شکل محدود به $a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x)$ که $y(x)$ تابعی یک به یک و پیوسته است، حول محور y ها برابر است با

$$V=2\pi\int_a^b xy(x)\,dx$$

راهنمایی: ذوزنقهٔ منحنی الضلع را به نوارهایی به پهنای Δx تقسیم کنید و سپس عنصر حجم را که برابر $\Delta V=2\pi\, xy\,\Delta x$ است، بنویسید.

۷_۱۴_۷ ثابت کنید که حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\varphi)$ حول محور قطبی برابر است با

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

۸_۱۴_۷ ثابت کنید که طول قوس منحنی

$$\begin{aligned} x&=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t,\\ y&=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t \end{aligned}\qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

برابر است با

$$[f(t)+f''(t)]_{t_1}^{t_2}$$

راهنمایی: از دستور محاسبهٔ طول قوس وقتی، معادلهٔ منحنی به صورت پارامتری است استفاده کنید.

۹_۱۴_۷ منحنی با معادلات پارامتری

$$x=\int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz,\qquad y=\int_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz$$

مشخص شده است. طول قوسی از این منحنی را بدست آورید که بین مبداء تا نزدیکترین

نقطه که خط مماس قائم دارد، واقع است.

جواب : $\ln\frac{\pi}{2}$ **راهنمایی :** مبداء مختصات به ازای $t=1$ و نزدیکترین نقطه تا مبداء که مماس قائم دارد به ازای $t=\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید.

۱۰ــ۱۴ــ۷ دستور محاسبهٔ طول قوس در مختصات قطبی را با استفاده از تعریف، بدون اینکه از تبدیل مختصات قائم به قطبی استفاده کنید، بدست آورید.

۱۱ــ۱۴ــ۷ ثابت کنید طول قوس منحنی زنجیری $y=\cosh x$ از نقطه $(0,\ 1)$ تا نقطهٔ دلخواه از دستور

$$l(x)=\sinh x$$

بدست آید. از دستور محاسبهٔ طول قوس منحنی وقتی معادله به صورت پارامتری باشد استفاده کرده معادلات پارامتری منحنی زنجیری را تعیین کنید.

۱۲ــ۱۴ــ۷ نخی انعطاف پذیر که وزن تمام نقاطش یکسان است. بین دو نقطهٔ A و B معلق است. اگر فاصلهٔ دو نقطه برابر $AB=2b$ باشد و انحراف نخ برابر f باشد و شکل نخ معلق یک سهمی باشد، نشان دهید که طول نخ برابر

$$l=2b\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{b^2}\right)$$

است که در آن $\frac{f}{b}$ بقدر کافی کوچک است.

۱۳ــ۱۴ــ۷ نسبت مساحت حلقهٔ منحنی $y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$ به مساحت دایره‌ای را تعیین کنید که محیط دایره و محیط حلقه برابر باشند.

جواب : $2\pi\frac{\sqrt{3}}{15}$

۱۴ــ۱۴ــ۷ طول قسمتی از منحنی محل تلاقی استوانهٔ

$$(y+z)^2=4ax$$

با مخروط

$$\frac{4}{3}x^2+y^2-z^2=0$$

را تعیین کنید که بین مبداء مختصات و نقطهٔ $M(x,\ y,\ z)$ واقع است.

جواب : $\sqrt{2}\cdot z.$

۱۵ــ۱۴ــ۷ ثابت کنید که مساحت بیضی

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\quad (AC-B^2>0)$$

برابر است با

$$S=-\frac{\pi\Delta}{(AC-B^2)^{3/2}}$$

که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

۱٦ــ۱٤ــ۷ مطلوب است محاسبهٔ

(الف). S مساحت ناحیه محدود به هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ و قسمت مثبت محور x ها و خطی که مبداءِ مختصات را به نقطهٔ $M(x, y)$ واقع بر روی هذلولی وصل می کند.

(ب). Q مساحت ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محور x ها و خطی که مبداءمختصات را به نقطهٔ $N(x, y)$ وصل می کند حساب کنید و نشان دهید که مختصات نقاط M و N از دستورهای زیر بدست‌می آیند:

$$x_M = \cosh 2S, \quad y_M = \sinh 2S, \quad x_N = \cos 2Q, \quad y_N = \sin 2Q$$

جواب: (الف) $0.5 \ln(x+y)$ **(ب)** $\frac{\pi}{4} - 0.5 \arcsin x$

۱۷ــ۱٤ــ۷ با استفاده از **قضیهٔ گلدین**[1] ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث بفاصلهٔ یک سوم ارتفاع از قاعده‌اش می باشد.

۱۸ــ۱٤ــ۷ اگر ξ مرکز ثقل ذوزنقهٔ منحنی الضلع محدود به منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد، آنگاه درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^b (ax+b) f(x)\,dx = (a\xi + b) \int_a^b f(x)\,dx$$

(دستور ورشچگین[2])

۱۹ــ۱٤ــ۷ قطاعی محدود به منحنی پیوستهٔ $\rho = f(\varphi)$ و دو شعاع حامل دلخواه، مفروض است. ثابت کنید که مختصات مرکز ثقل از دستورهای زیر حاصل می شوند

$$x_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}; \quad y_c = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}.$$

1. Guldin's theorem 2. Vereshchagin's rule

۲۰ــ۱٤ــ۷ ثابت کنید مختصات مرکز ثقل قوسی از منحنی $\rho = f(\varphi)$ در دستگاه مختصات قائم، با فرمولهای زیر حساب می شود:

$$x_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}; \quad y_c = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}$$

فصل هشتم

انتگرالهای غیر عادی[1] (یا توسعی)

۱ــ۸ انتگرالهای غیر عادی با حدود بینهایت

تابع $f(x)$ به ازای $x \geqslant a$ معین و در فاصلهٔ $[a, \ A]$ انتگرالپذیراست. در این صورت

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

را **انتگرال غیر عادی**[1] تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, \ +\infty]$ گویند و آن را با نماد

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

نشان می دهند. همین طور انتگرالهای

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{B} f(x)\,dx$$

تعریف می شوند. پس

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{B} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^B f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^C f(x)dx + \lim_{B \to +\infty} \int_C^B f(x)\,dx$$

---

1. *improper integral*

اگر حدهای بالا موجود و متناهی باشند، انتگرال را **همگرا (یا متقارب)** گویند و در غیر این صورت آن را **واگرا (یا متباعد)** نامند.

آزمون مقایسه : اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای تمام مقادیر $x \geqslant a$ معین و در فاصله $[a, A], A \geqslant a$ انتگرالپذیر باشند و به ازای تمام مقادیر $x \geqslant a$ داشته باشیم $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ، آنگاه از همگرایی انتگرال $\int_a^\infty g(x)\, dx$ **همگرایی انتگرال** $\int_a^\infty f(x)\, dx$ نتیجه می شود و

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \leqslant \int_a^\infty g(x)\, dx$$

و همچنین از واگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(x)\, dx$ ، واگرایی انتگرال $\int_a^\infty g(x)\, dx$ نتیجه می شود.

آزمون مقایسهٔ ویژه : اگر وقتی $x \to \infty$ تابع $f(x) \geqslant 0$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ $\lambda > 0$ درمقایسه با $\frac{1}{x}$ باشد، آنگاه به ازای $\lambda > 1$ انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ همگرا و به ازای $\lambda \leqslant 1$ انتگرال واگرا است.

همگرایی مطلق و همگرایی مشروط : فرض می شود که تابع $f(x)$ به ازای تمام مقادیر $x \geqslant a$ معین است. اگر انتگرال $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ همگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)\, dx$ هم همگرا است و آن را **همگرای مطلق** گویند. دراین حالت

$$\left|\int_a^\infty f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

اگر $\int_a^\infty f(x)\, dx$ همگرا باشد درحالی که $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ واگرا است، آنگاه $\int_a^\infty f(x)\, dx$ را **همگرای مشروط** گویند.

تغییر متغیر در انتگرال غیرعادی بر اساس قضیهٔ زیر انجام می گیرد :

قضیهٔ : فرض می کنیم تابع $f(x)$ به ازای $x \geqslant a$ معین و پیوسته است. اگر تابع $x = \varphi(t)$ در فاصلهٔ $\alpha < t < \beta$ (α و β می توانند $-\infty$ و ∞ باشند)

معین و یکنواخت، و مشتق پیوسته $\varphi'(t) \neq 0$ را داشته باشد و

$$\lim_{t \to \alpha+0} \varphi(t) = a \quad \text{و} \quad \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t) = +\infty$$

آنگاه

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

انتگرالگیری به روش جزء بجزء را می توان بدون هیچ مشکلی انجام داد.

۱ــ۱ــ۸ بکمک تعریف ، انتگرالهای غیرعادی زیر را حساب و یا واگرایی آنها را ثابت کنید:

$$\text{(a)} \int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}; \quad \text{(c)} \int_0^\infty x \sin x\,dx$$

حل . (a) بنا به تعریف

$$\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{A \to +\infty} \int_{e^2}^A \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_{e^2}^A \right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \ln^2 A} \right) = \frac{1}{8}$$

(b) بنابه تعریف

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B \to -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(می توان به جای $x=0$ هر نقطهٔ متناهی از محور x ها را انتخاب کرد).

طرف اول را حساب می کنیم:

$$\lim_{B \to -\infty} \int_B^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B \to -\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{x+1}{2} \Big|_B^0 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{x+1}{2} \Big|_0^A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{2}.$$

پس

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) بنابه تعریف،

$$\int_0^{\infty} x\sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} x\sin x\,dx.$$

فرض می کنیم $u=x,\ dv=\sin x\,dx$ ، و از روش جزء بجزء استفاده می کنیم

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^A + \int_0^A \cos x\,dx\right) =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}(-A\cos A+\sin A).$$

ولی حد آخری وجود ندارد. در نتیجه انتگرال $\int_0^{\infty} x\sin x\,dx$ واگراست.

۲ــ۱ــ۸ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\text{(a)}\ \int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}};\quad \text{(b)}\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^3};\quad \text{(c)}\ \int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$$

$$\text{(d)}\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)};\quad \text{(e)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10};\quad \text{(f)}\ \int_0^{\infty}e^{-x}\sin x\,dx$$

حل . (a) بنابه تعریف

$$\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2-3)^{-1/2}}{-1/2}\Big|_2^A\right] =$$
$$= -\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{A^2-3}}-1\right] = 1$$

جواب : (b) $\frac{1}{2}\ln 2$; (c) 1; (d) $1-\ln 2$; (e) π; (f) $\frac{1}{2}$

۳ــ۱ــ۸ ثابت کنید که انتگرالهای

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}\,dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{b} e^{px}\,dx$$

به ازای هرثابت $p>0$ ، همگرا و به ازای هر $p<0$ واگرا است.

٤ــ۱ــ۸ انتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+2x^2+3x^4}$$

را برای همگرایی بررسی کنید.

حل . تابع

$$f(x)=\frac{1}{1+2x^2+3x^4}$$

مثبت است و وقتی $x\to\infty$ ، درمقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ

$\lambda = 4$ است. چون $4 > 1$ ، بنابه **آزمون مقایسهٔ ویژه** ، انتگرال همگراست.

۵ــ۱ــ۸ ثابت کنید که

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sin^2 x}$$

همگراست

حل. تابع $f(x) = \frac{1}{x+\sin^2 x}$ به ازای $x \geqslant 1$ مثبت و پیوسته است. وقتی $x \to \infty$ ، تابع در مقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ $\lambda = 1$ است. مطابق **آزمون مقایسهٔ ویژه** ، انتگرال واگراست.

۶ــ۱ــ۸ نوع انتگرالهای زیر تعیین کنید:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\tan\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\text{(c)} \int_1^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx; \quad \text{(d)} \int_2^\infty \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx; \quad \text{(e)} \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$$

جواب: (a) واگراست. **راهنمایی:** برای $x > \sqrt{e-1}$ داریم

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}$$

(b) همگراست. (c) واگراست.

راهنمایی: از $\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ استفاده کنید. (d) همگراست، (e) واگراست.

۷ــ۱ــ۸ نوع انتگرال زیر راتعیین کنید

$$\int_1^\infty \frac{(x+\sqrt{x+1})\,dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}$$

حل. انتگران به ازای $x \geqslant 1$ تابعی مثبت و پیوسته است. مرتبه بینهایت کوچکی آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x \to \infty$ ، تعیین می کنیم. چون

$$\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}} = \frac{1}{x} \times \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+2\sqrt[5]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^{10}}}}$$

پس $\lambda = 1$. مطابق **آزمون مقایسهٔ ویژه** ، انتگرال واگراست.

۸ــ۱ــ۸ نوع انتگرال زیر را تعیین کنید،

$$\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$$

حل . چون تابع

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}$$

وقتی $x\to+\infty$ یک بینهایت کوچک از مرتبه $\lambda=\frac{3}{2}$ درمقایسه با $\frac{1}{x}$ است، پس انتگرال همگراست.

۹ــ۱ــ۸ نوع انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_2^{\infty}\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}\,dx$$

حل . انتگران به ازای $x\geqslant 2$ مثبت و پیوسته است. حال مرتبه بینهایت کوچکی آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x\to+\infty$، تعیین می کنیم:

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}=\frac{1}{x^{\frac{11}{35}}}\times\frac{\sqrt[7]{2+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^3}}}$$

چون $\lambda=\frac{11}{35}<1$ ، پس انتگرال واگراست.

۱۰ــ۱ــ۸ نوع انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_1^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$$

حل . تابع

$$f(x)=1-\cos\frac{2}{x}=2\sin^2\frac{1}{x}$$

به ازای $x\geqslant 1$ مثبت و پیوسته است. چون

$$2\sin^2\frac{1}{x}\sim 2\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{2}{x^2}$$

پس بنابه **آزمون مقایسه ویژه** انتگرال همگراست.

۱۱ــ۱ــ۸ نوع انتگرال زیر را تعیین کنید

$$\int_1^{\infty}\ln\frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}\,dx,\quad n>0$$

حل . انتگران را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=\ln\frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}=\ln\left[1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n}\right]$$

چون وقتی $x\to\infty$ ، تابع $\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n}$ یک بینهایت کوچک است. پس

$$f(x) \sim \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{n} \sim \frac{1}{nx}$$

به عبارت دیگر $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1/x} = \frac{1}{n}$ پس انتگرال واگراست.

۱۲ـ۱ـ۸ نوع انتگرال زیر را مشخص کنید:

$$\int_1^{\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

حل. علامت تابع

$$f(x) = \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}$$

با تغییر علامت صورت عوض می شود (زیرا علامت مخرج همیشه مثبت است). لذا نوع انتگرال زیر را تعیین می کنیم:

$$\int_1^{\infty} \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

چون

$$\frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3}$$

و انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{5dx}{x^3}$$

همگراست، پس انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

بنابه آزمون مقایسه همگراست. بنابر این انتگرال مورد نظر همگرای مطلق است.

۱۳ـ۱ـ۸ ثابت کنید انتگرال زیر موسوم به **انتگرال دیریکله** بطور مشروط همگرا است.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

حل. انتگرال را به مجموع دو انتگرال به صورت زیر می نویسیم:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

انتگرال اول یک انتگرال عادی است (زیرا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$). انتگرال دوم را به روش جزء بجزء حساب می کنیم.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{\sin x}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{A}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{\cos x\,dx}{x^2}\right]=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

ولی انتگرال غیر عادی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ همگرای مطلق است، زیرا

$\frac{|\cos x|}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$ ، وانتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست. پس انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست.

به طور مشابه، به راحتی ثابت می شود که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

هم همگراست. حال ثابت می کنیم که

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

واگراست. درحقیقت

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x},$$

ولی انتگرال

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln A-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

واگراست، زیرا $\lim\limits_{A\to\infty}\ln A=\infty$ وانتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}$ همگراست.

۱۴ــ۱ــ۸ همگرایی انتگرالهای زیررا ثابت کنید:

(a) $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$; $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$; (b) $\int_0^\infty 2x\cos(x^4)\,dx$.

حل . (a) با فرض $x=\sqrt{t}$ داریم :

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

انتگرال طرف دوم را به صورت زیر می نویسیم :

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

چون $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=0$ ، پس اولین انتگرال طرف دوم یک انتگرال عادی است . برای محاسبهٔ انتگرال دوم، روش جزء بجزء را بکار می بریم :

$$u=1/\sqrt{t},\quad \sin t\,dt=dv,$$

$$\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Big|_{\pi/2}^\infty-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt.$$

چون $\frac{|\cos t|}{t^{3/2}}\leqslant\frac{1}{t^{3/2}}$ و انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}$ همگراست، بنابر این انتگرال اخیر همگرای مطلق است . بطور مشابه، ثابت می شود که انتگرال $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ همگرا است . دوانتگرال فوق را ، انتگرالهای فرنه[1] گویند . این انتگرالها برای توجیه شکست نور بکار می روند .

(b) این انتگرال با تغییر متغیر $x^2=t$ ، به انتگرال

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$$

تبدیل می شود و دیدیم که این انتگرال همگراست .

توجه . انتگرالهای **فرنه** نشان می دهند حتی وقتی $x\to\infty$ ، و انتگران صفر نشود ، انتگرال می تواند همگرا شود . انتگرال (b) نشان می دهد که انتگرال غیر عادی می تواند همگرا شود حتی اگر انتگران بیکران باشد . در واقع ، به ازای

$$x=\sqrt[4]{n\pi}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

---

1. *Fresnel's integrals.*

مقادیر تابع برابر $\pm\sqrt[4]{n\pi}$ است، یعنی تابع بیکران می باشد.

۱۵ــ۱ــ۸ انتگرال غیر عادی زیر را حساب کنید

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$ ، n عددی طبیعی است.

حل. تغییر متغیر $x=\tan t$ را بکار می بریم که در آن $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$. پس وقتی $x=0$ داریم $t=0$ واگر $x\to+\infty$ آنگاه $t\to\frac{\pi}{2}-0$ و $x'_t=\frac{1}{\cos^2 t}\neq 0$ در نتیجه بنابه قضیهٔ تغییر متغیر در انتگرال غیر عادی، داریم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^{2n} t}\times\sec^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2} t\,dt$$

که این انتگرال در **۹ــ۶ــ۶** حساب شده است پس

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}\pi/2, & n=1,\\ \dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n>1\end{cases}$$

۱۶ــ۱ــ۸ انتگرال زیر را حساب کنید

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

حل. تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$x=1/t;\quad dx=-(1/t^2)\,dt;\quad t_1=\infty,\quad t_2=0$$

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx=\int_0^\infty \frac{(1/t^4)\,dt}{1+1/t^4}=\int_0^\infty \frac{dt}{t^4+1}.$$

به طرفین انتگرال I را اضافه می کنیم:

$$2I=\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt=\int_0^\infty \frac{1/t^2+1}{t^2+1/t^2}\,dt.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$z=t-1/t,\quad (1+1/t^2)\,dt=dz, t\to+\infty,\ z\to+\infty, t\to+0,\ z\to-\infty$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{2}\left[\lim_{B\to-\infty}\int_B \frac{dz}{z^2+2}+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dz}{z^2+2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{B\to-\infty}\arctan\frac{B}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{A\to+\infty}\arctan\frac{A}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

۱۷ــ۱ــ۸ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$(a)\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx; \qquad (b)\ \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1}\,dx$$

جواب : (a) 0 **راهنمایی:** انتگرال را بصورت زیر بنویسید

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

برای انتگرال دوم از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ استفاده کنید و نشان دهید

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx; \qquad (b)\ \frac{m!}{2}$$

۱۸ــ۱ــ۸ انتگرال زیر را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید:

$$I = \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx$$

حل . انتگرال را به مجموع دو انتگرال زیر می نویسیم:

$$I_1 = \int_1^N \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx, \quad I_2 = \int_N^\infty \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx$$

چون $x \geqslant 1$ داریم:

$$0 < \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1} < \frac{x^{3/2}}{x^5} = x^{-7/2}$$

پس

$$0 < I_2 = \int_N^\infty x^{-7/2}\,dx = \frac{2}{5} N^{-5/2}$$

به ازای $N=7$ داریم:

$$I_2 < \frac{2}{5} \times \frac{1}{49\sqrt{7}} < 0.0031$$

انتگرال

$$I_1 = \int_1^7 \frac{\sqrt{x^3-x^2+1}}{x^5+x^2+1}\,dx$$

را بکمک دستور سیمپسون وقتی $h=1$ حساب می کنیم

$$S_1 = 0.2155$$

و به ازای $\frac{h}{2}=0.5$ داریم

$$S_{0.5} = 0.2079$$

چون تفاضل دو مقدار ۰/۰۰۷۶ است انتگرال I_1 مقدار $S_{0.5}=0.2079$ را بادقت بیشتر، با خطای $\frac{0.0076}{15} \cong 0.0005$ حساب کنید.

در نتیجه مقدار تقریبی انتگرال برابر

$$I \approx 0.208$$

با خطای کمتر از ۰/۰۰۴ است یا $I = 0.21$ با دو رقم اعشار می باشد.

۲ـ۸ انتگرالهای غیر عادی توابع بیکران

اگر تابع $f(x)$ در فاصله $a \leqslant x < b$ تعریف شود و در هر فاصلهٔ $[a, b-\varepsilon],\ 0 < \varepsilon < b-a$ انتگرالپذیر باشد و در چپ نقطهٔ b بیکران باشد، آنگاه بنابه تعریف

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

اگر حد موجود و متناهی باشد، انتگرال غیر عادی را **همگرا** و در غیر این صورت آن را **واگرا** گویند.

بطور مشابه، اگر تابع $f(x)$ در راست نقطهٔ a بیکران باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

بالاخره اگر تابع در یک نقطهٔ داخلی c از فاصلهٔ $[a, b]$ بیکران باشد، آنگاه بنابه تعریف

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ بجز در چند نقطهٔ متناهی پیوسته باشد. اگر تابع پیوسته‌ای مانند $F(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ وجود داشته باشد که در آن

$$F'(x) = f(x)$$

بجز در چند نقطهٔ متناهی برقرار باشد، آنگاه دستور **نیوتن ـ لایبنیتز**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

بر قرار است.

گاهی تابع $F(x)$ را **تابع اولیه تعمیم یافتهٔ** $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ گویند

برای توابعی که در فاصلهٔ $a \leqslant x < b$ تعریف شده و مثبت باشند آزمونهای همگرایی (آزمونهای مقایسه)، مشابه آزمونهای مقایسه در انتگرالهای غیر عادی با حدهای بینهایت

می باشند.

آزمون مقایسه. فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصلهٔ $a \leqslant x < b$ معین و در هر فاصلهٔ $[a, b-\varepsilon]$ $0 < \varepsilon < b-a$ انتگرالپذیر باشند. اگر $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$، آنگاه از همگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می‌شود و $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$. همچنین از واگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ نتیجه می شود.

آزمون مقایسهٔ ویژه: اگر تابع $f(x) \geqslant 0$ در فاصله $a \leqslant x < b$ معین و پیوسته باشد و وقتی $x \to b-0$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه λ در **مقایسه** با $\frac{1}{b-x}$ باشد، آنگاه به ازای $\lambda < 1$ انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا و به ازای $\lambda \geqslant 1$ انتگرال واگراست.

بویژه، انتگرال

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

وقتی $\lambda < 1$، همگرا و وقتی $\lambda \geqslant 1$ واگراست.

همگرایی شرطی و همگرایی مطلق اگر تابع $f(x)$ در فاصله $a \leqslant x < b$ معین و در هر فاصلهٔ $[a, b-\varepsilon]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه از همگرایی $\int_a^b |f(x)|\,dx$، همگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می شود. در این حالت می گویند که $\int_a^b f(x)\,dx$ **همگرای مطلق** (یا **بطور مطلق همگرا**) است. اما اگر انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا ولی انتگرال $\int_a^b |f(x)|\,dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را **همگرای شرطی** (یا **بطور مشروط همگرا**) گویند.

آزمون مشابهی برای انتگرال غیرعادی $\int_a^b f(x)\,dx$ که $f(x)$ در راست نقطهٔ a بیکران باشد، بکار می رود.

۱ــ۲ــ۸ انتگرال غیرعادی زیر را حساب کنید (یا واگرایی آنها را ثابت کنید):

(a) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$;

(c) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; (d) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

(e) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; (f) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$.

حل . (a) تابع $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ در همسایگی نقطهٔ $x=1$ بیکران است. چون تابع در فاصله $[1+\varepsilon,\ e]$ پیوسته است. لذا در این فاصله انتگرالپذیر است. پس

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^e\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right] = \frac{3}{2}.$$

(b) تابع $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ بیکران است و در فاصله $\left[0,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ پیوسته می باشد در نتیجه در این فاصله انتگرالپذیر است. بنابر این

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \infty.$$

پس انتگرال واگرا است.

(c) انتگران در همسایگی نقاط $x=1$ و $x=3$ بیکران است، پس بنابه تعریف

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

(به جای نقطه $x=2$ می‌توان هر نقطهٔ داخلی $[1,\ 3]$ را انتخاب کرد). هر کدام از انتگرالها را جداگانه حساب می کنیم.

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[0-\arcsin(\varepsilon-1)\right] = \frac{\pi}{2};$$

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin(x-2)\Big|_2^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} [\arc\sin (1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}.$$

پس،

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(d) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ در همسایگی نقطهٔ $x=1$ بیکران است، که این یک نقطهٔ داخلی فاصلهٔ انتگرالگیری است، بنابر این، بنابه تعریف

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

هر یک از انتگرالها را حساب می کنیم. اگر $0 \leqslant x < 1$، آنگاه

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin (1-\varepsilon) - 0] = \frac{\pi}{2}.$$

اگر $1 < x \leqslant 2$ آنگاه

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln (x + \sqrt{x^2-1}) \Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln (2+\sqrt{3}) - \ln (1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1})\right] = \ln (2+\sqrt{3}).$$

پس

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln (2+\sqrt{3}).$$

(e) انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int_0^1 x^{12/5} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}}$$

انتگرال اول یک انتگرال عادی است که بکمک دستور نیوتن ــ لایبنتیز حساب می شود

$$\int_0^1 x^{12/5} dx = \frac{5}{17} x^{17/5} \Big|_0^1 = \frac{5}{17}$$

توابع انتگـرالهای دوم و سوم در طرف راست نقطهٔ $x=0$ بیکران هستند. بنابر این

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{4/15}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{15}{11} x^{11/15}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{15}{11};$$

بطور مشابه

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{3/5}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{5}{2} x^{2/5}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{5}{2}.$$

پس

$$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = \frac{5}{17}+\frac{15}{11}-2\cdot\frac{5}{2} = -\frac{625}{187}$$

(f) کسر $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ را به مجموع کسرهای جزئی معادل می نویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right]$$

پس

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$$

چون

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \ln(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \infty,$$

پس انتـگرال واگراست دیگر نیازی به‌محاسبهٔ انتـگرال دوم که یک انتـگرال عادی است، نمی باشد.

توجه : در محاسبهٔ انتگرالهای مسئلهٔ **۱ـ۲ـ۸** می توان از **تابع اولیهٔ تعمیم یافته** استفاده کرده و فرمول نیوتن ــ لایبنیتز را بکار برد. مثلاً در مسئلهٔ (a) **۱ـ۲ـ۸** تابع $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}$ در فاصلهٔ $[1,\ e]$ پیوسته و در هر نقطهٔ فاصلهٔ $1<x\leqslant e$ مشتقپذیر است، و در این فاصله $F'(x)=f(x)$. پس

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_1^e = \frac{3}{2}$$

۲ـ۲ـ۸ بکمک تعریف، انتگرالهای زیر را محاسبه یا واگرایی آنها را ثابت کنید:

(a) $\int_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}$; (b) $\int_0^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;

(c) $\int\limits_0^1 \cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}$; (d) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

(e) $\int\limits_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (f) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$.

جواب : (a) $9a^{\frac{2}{3}}$ ؛ (b) واگراست ، (c) واگراست ؛ (d) $6\sqrt[3]{2}$; (e) $\frac{\pi}{3}$;

(f) به ازای $p < 1$ همگرا و به ازای $p \geq 1$ واگرا است .

۳ـ۲ـ۸ انتگرالهای غیر عادی زیر را حل کنید :

(a) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$; (b) $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$

حل (a) انتگرال را به صورت نامعین حل می‌کنیم .

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\right) + C$$

تابع $F(x) = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\right)$ **تابع اولیهٔ تعمیم یافته** تابع

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

در فاصلهٔ [۳،۳ـ] است ، زیرا این تابع در این فاصله پیوسته است و در هر نقطهٔ فاصلهٔ (۳،۳ـ) داریم $F'(x) = f(x)$ ؛ با استفاده از دستور نیوتن ـ **لایبنیتز** داریم :

$$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{9}{2}\pi.$$

(b) انتگران را به صورت زیر می نویسیم :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

انتگرال را به صورت نامعین حل می کنیم :

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C$$

تابع $F(x) = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ تابع اولیهٔ تعمیم یافتهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ [۰،۲] است ، زیرا این تابع در این فاصلهٔ پیوسته است و در فاصلهٔ $[0,\ 2)$ داریم $F'(x) = f(x)$ بنابر این ، دستور نیوتن ـ **لایبنیتز** را بکار برده ، داریم :

$$\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \left(2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}\right)\Big|_0^2 = \pi + 2.$$

۴ــ۲ــ۸ نوع انتگرال

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$$

را تعیین کنید

حل . در نقطهٔ $x=0$ انتگران به بینهایت میل می کند. چون $\lambda=\frac{4}{3}>1$ ، پس هر دو انتگرال $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ و $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ واگرا هستند. درنتیجه انتگرال واگراست. اگر بیکران بودن تابع را نادیده بگیریم و فرمول نیوتن ـ لایبنتیز را برای محاسبه بکار ببریم به نتیجه غلط

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\Big|_{-1}^{1}=-6.$$

می رسیم. نادرست بودن نتیجه واضح است زیرا انتگران تابعی مثبت است.

۵ــ۲ــ۸ انتگرالهای غیرعادی زیر را برای همگرایی بررسی نمائید:

$$\text{(a)} \int_{0}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx; \qquad \text{b)} \int_{0}^{1} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}\,dx.$$

حل (a) انتگران وقتی $x \to +0$ ، یک بینهایت بزرگ است. چون وقتی $x \to +0$ داریم

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

تابع زیر علامت انتگرال در مقایسه با $\frac{1}{x}$ یک بینهایت بزرگ از مرتبهٔ $\lambda=1$ است. مطابق آزمون مقایسه ویژه، انتگرال واگرا است.

(b) انتگران را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$$

این تابع وقتی که $x \to 1$ یک بینهایت بزرگ است که اگر آن را با $\frac{1}{1-x}$ مقایسه کنیم مرتبه‌اش $\lambda=\frac{1}{5}$ است (زیرا کسر اول وقتی $x \to 0$ به یک میل می کند)، بنابر این بنابه آزمون مقایسهٔ ویژه، انتگرال همگراست.

۶ــ۲ــ۸ همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی نمائید:

$$\text{(a)} \int_{0}^{2} \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}\,dx; \quad \text{(b)} \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}\,dx \text{ ، } \text{(c)} \int_{0}^{1} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$$

حل . (a) تابع $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}$ در فاصلهٔ (۰، ۲) مثبت و در نقطهٔ $x=0$ نامعین است. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\infty$. درواقع، چون وقتی $x\to0$،

$$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x,\ \ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)\sim\sqrt[5]{x^3}$$

داریم

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=\infty$$

همزمان نشان دادیم وقتی $x\to0$ داریم $f(x)\sim\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ، یعنی اگر $f(x)$ را که یک بینهایت بزرگ است با $\dfrac{1}{x}$ مقایسه کنیم مرتبه‌اش $\lambda=\dfrac{2}{5}<1$ است. درنتیجه بنابه آزمون مقایسهٔ ویژه، انتگرال همگراست.

(b) مرتبه تابع بینهایت بزرگ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}$ را در نقطهٔ $x=2$ نسبت به $\dfrac{1}{2-x}$ تعیین می‌کنیم. برای این منظور $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2}\,\sqrt[3]{2+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$$

پس واضح است که وقتی $x\to2$، $f(x)$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda=\dfrac{1}{3}<1$ است. مطابق آزمون مقایسهٔ ویژه، انتگرال همگراست.

(c) تابع

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$$

درنقطهٔ $x=0$ بیکران است. چون وقتی $x\to+0$،

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}\left(1-\dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{x}}\right)}\sim\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

و وقتی $x\to+0$ ، تابع $f(x)$ درمقایسه با $\dfrac{1}{x}$ بی‌نهایت بزرگ از مرتبه $\lambda=\dfrac{1}{4}<1$ است. پس انتگرال بنابه آزمون مقایسه ویژه همگراست.

۷ـ۲ـ۸ نوع انتگرالهای زیررا تعیین کنید:

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$;   (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

(c) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}\,dx$;   (d) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x^3+x^5}$;

(e) $\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$; (f) $\int_0^2 \frac{\ln(\sqrt[4]{x}+1)}{e^{\tan x}-1}\,dx$

جواب : (a) همگرا (b) واگرا (c) همگرا (d) همگرا (e) واگرا (f) همگرا

۸ــ۲ــ۸ ثابت کنید که انتگرال زیر همگراست :

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

حل . در فاصله $0<x\leqslant 1$

$$0\leqslant\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ولی انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، پس بنابه آزمون مقایسه، انتگرال

$$\int_0^1\left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right|dx$$

همگراست و در نتیجه انتگرال مورد نظر به طور مطلق همگراست.

۹ــ۲ــ۸ ثابت کنید که انتگرال

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$$

همگراست و آنرا حساب کنید

حل . از روش جزء بجزء استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u=\ln(\sin x),\ \ dx=dv$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx.$$

چون

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x}=1,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x}{\tan x}=0.$$

انتگرال آخری یک انتگرال عادی است. در نتیجه انتگرال اصلی همگراست.

حال در انتگرال I فرض می‌کنیم $x=2t$ ، داریم :

$$dx=2dt\quad x=0\ \text{at}\ t_1=0;\ x=\frac{\pi}{2}\ \text{at}\ t_2=\frac{\pi}{4}$$

و از آنجا

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/4} (\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\,dt =$$

$$=2t\ln 2\Big|_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt =$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

برای محاسبه انتگرال آخری تغییر متغیر $t=\pi/2-z$. را بکار می بریم، داریم

$$dt=-dz;\ t=0\ \text{at}\ z_1=\pi/2;\ t=\pi/4\ \text{at}\ z_2=\pi/4.$$

پس

$$2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt=-2\int_{\pi/2}^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)dz=2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin z\,dz$$

بنابر این.

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin z\,dz=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I$$

بالاخره.

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

۱۰ــ۲ــ۸ انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\qquad (\text{عددی طبیعی است } n)$$

حل. وقتی $x\to 1-0$ ، تابع در مقایسه با $\frac{1}{1-x}$ یک بینهایت بزرگ ازمرتبه $\lambda=\frac{1}{2}$ است. بنابر این انتگرال همگراست.

برای محاسبهٔ انتگرال از تغییر متغیر $x=\sin t$ استفاده می کنیم. آنگاه

$$dx=\cos t\,dt,\quad x=0\quad t=0,\ x=1\quad t=\pi/2$$

پس

$$\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n t\cdot\cos t\,dt}{\cos t}=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$$

انتگرال حاصل در مسئله **۹ــ۶ــ۶** حساب شده است.

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{زوج است } n\\[2mm] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & \text{فرد است } n\end{cases}$$

۱۱ــ۲ــ۸ انتگرالهای زیر را محاسبه و یا واگرایی آنها را ثابت کنید:

$$\text{(a)}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x};\quad \text{(b)}\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};\quad \text{(c)}\int_0^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

جواب: (a) واگرا (b) $2\sqrt{\ln 2}$ (c) $\frac{51}{7}$

۱۲ــ۲ــ۸ انتگرال زیر را حساب کنید

$$I_n=\int_0^1 x^m \ln^n x\,dx$$ ($m>-1$ و n طبیعی است)

حل . به ازای $n=0$ ، انتگرال مستقیماً حساب می شود :

$$I_0=\int_0^1 x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1=\frac{1}{m+1}$$

به ازای $n>0$ ، انتگرال را به روش جزء بجزء حساب می کنیم :

$$u=\ln^n x;\qquad dv=x^m\,dx;$$
$$du=n\ln^{n-1}x\,\frac{dx}{x};\qquad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

داریم :

$$I_n=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

از این دستور کاهش می توان از I_n به I_0 رسید :

$$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}=+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{n-2}=\ldots=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I_0$$

و بالاخره

$$I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

۱۳ــ۲ــ۸ انتگرال

$$I=\int_{0.3}^{2.0}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

را بادقت ۰/۰۳ حساب کنید.

حل . چون $2+x-x^2=(2-x)(1+x)$ ، پس انتگران در $x=2$ بیکران است . انتگرال را به صورت مجموع دو انتگرال می نویسیم :

$$I_1=\int_{0.3}^{2-\varepsilon}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}},\qquad I_2=\int_{2-\varepsilon}^{2}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

انتگرال اول را بادقت مورد نظر حساب می کنیم و سپس دومی را تخمین می زنیم . به ازای $\varepsilon\leqslant 0.1$ داریم :

$$0<I_2<\frac{e^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\int_{2-\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}=0.115\times\frac{4}{3}\varepsilon^{\frac{3}{4}}=0.153\,\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

با فرض $\varepsilon=0.1$ داریم $I_2<0.028$. حال انتگرال

$$I_1=\int_{0.3}^{1.9}\frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

را بوسیله دستور سیمپسون با $h = 0.8$ حساب می کنیم:

$$S_{0.8} = 0.519$$

و با $h/2 = 0.4$ داریم:

$$S_{0.4} = 0.513$$

بنابر این، مقدار انتگرال I_1 با دقت بیشتر و با خطای کمتر از ۰/۰۰۱ برابر ۰/۵۱۳ است. چون I_2 مثبت است پس مقدار انتگرال بعد از گرد کردن، با خطای کمتر از ۰/۰۳ تقریباً برابر $I \approx 0.52$ است.

توجه: با فرض $\varepsilon = 0.01$ داریم $I_2 < 0.005$ ولی محاسبهٔ

$$I_1 = \int_{0.3}^{1.99} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}$$

خیلی پرزحمت است.

۱۴-۲-۸ نوع انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x};$$

$$\text{(c)} \int_0^1 \frac{\cos^2 x\,dx}{(1-x)^2}; \quad \text{(d)} \int_0^1 \frac{\tan x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{(e)} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{6}{5}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

جواب: (a) همگرا (b) واگرا (c) واگرا (d) همگرا (e) همگرا

۳ـ۸ کاربردهای فیزیکی و هندسی انتگرالهای غیر عادی

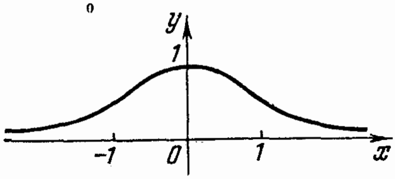
۱ـ۳ـ۸ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ و مجانب اش را حساب کنید.

حل. تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ در تمام محور حقیقی پیوسته است و $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$. پس محور x ها مجانب منحنی است که در شکل ۱۱۹ داده شده است. مساحت مورد نظر بین منحنی و محور x ها که در دو طرف این محور نامحدود است قرار دارد. بعبارت دیگر هدف محاسبهٔ انتگرال غیر عادی

$$S=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

است با توجه به تقارن ناحیه نسبت به محور y ها داریم :

$$S=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim_{A\to\infty} \arctan x\Big|_0^A=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$



شکل ۱۱۹

۲ــ۳ــ۸ مساحت سطح حاصل از دوران قسمتی از منحنی $y=e^{-x}$ که بین $x=0$ و $x=+\infty$ واقع است حول محور x ها را حساب کنید.

حل . مساحت مورد نظر با مقدار انتگرال غیرعادی زیر برابر است :

$$S=2\pi\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

برای محاسبه ، از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم :

$$e^{-x}=t \qquad dt=-e^{-x}\,dx \qquad t=1,\ x=\infty \qquad t=0 \qquad x=0$$

پس

$$S=2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_0^1=$$

$$=\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$$

۳ــ۳ــ۸ مساحت محدود به حلقهٔ فلیوم دکارت [1]

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

را بدست آورید.

حل . فلیوم دکارت در شکل ۸۷ نشان داده شده است. معادلهٔ منحنی را در مختصات قطبی تعیین می کنیم :

$$x=\rho\cos\varphi;\qquad y=\rho\sin\varphi$$

---

1 . folium of Descartes

$$\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi - 3a \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

چون مساحت مطلوب، متناظر تغییرات φ بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است، پس

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} \, d\varphi$$

برای محاسبه از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$\tan \varphi = t; \ \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = dt; \ \ \varphi = 0 \qquad t = 0, \ \ \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad t = \infty$$

پس

$$S = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 \, dt}{(1+t^3)^2} = \frac{9a^2}{2} \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} \frac{t^2 \, dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3a^2}{2} \lim_{A \to \infty} \left[\frac{1}{1+t^3} \right]_0^A = \frac{3}{2} a^2$$

۴ــ۳ــ۸ حجم حاصل از دوران منحنی $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ حول مجانب اش $x = 2a$ را بدست آورید.

حل . منحنی در شکل ۱۲۰ نشان داده شده است. مبداء مختصات را بدون تغییر جهت محورهای مختصات به نقطهٔ O' $(2a, \ 0)$ منتقل می کنیم. در دستگاه مختصات جدید

$$X = x - 2a, \ Y = y$$

بوده ومعادلهٔ منحنی به صورت

$$Y^2 = \frac{(X+2a)^3}{-X}$$

است. در دستگاه محورهای مختصات جدید، محور دوران $X = 0$ ، یعنی مجانب منحنی می باشد و مقدار حجم برابر است با

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \, dY = 2\pi \int_0^{\infty} X^2 \, dY$$

برای محاسبه متغیر را با X عوض می کنم، برای این منظور باید $dY = Y' \, dX$ از معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید حساب شود :

$$2YY' = -\frac{3\,(X+2a)^2 \, X - (X+2a)^3}{X^2} = -\frac{2\,(X+2a)^2 \, (X-a)}{X^2}$$

که در آن $Y > 0$ وداریم :

$$Y' = -\frac{(X+2a)^2 (X-a)}{X^2 Y} = -\frac{(X+2a)(X-a)}{X^2 \sqrt{-(X+2a)/X}}$$

پس

$$V = -2\pi \int_{-2a}^{0} \frac{(X+2a)(X-a)}{\sqrt{-(X+2a)/X}}\, dX$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$(X+2a)/X = -t^2; \ X = -2a \qquad t = 0,\ X = 0 \quad t = \infty$$

بنابر این

$$X = -\frac{2a}{1+t^2}; \quad dX = \frac{4at}{(1+t^2)^2}dt; \quad X + 2a = \frac{2at^2}{1+t^2}$$

$$X - a = -\frac{3a+at^2}{1+t^2};$$

از آنجا

$$V = 2\pi \int_0^\infty \frac{2at^2(3a+at^2)\,4at\,dt}{t(1+t^2)(1+t^2)(1+t^2)^2} =$$

$$= 48\pi a^3 \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^4} dt + 16\pi a^3 \int_0^\infty \frac{t^4}{(1+t^2)^4}\, dt.$$

دوباره تغییر متغیر زیر را بکار می بریم:

$$t = \tan z,\ dt = \sec^2 z\, dz, \qquad t = 0 \quad z = 0,\ \ t = \infty، z = \pi/2$$

پس

$$V = 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \cos^4 z\, dz + 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 z \sin^4 z\, dz =$$

$$= 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 z\, dz - 48\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 z\, dz +$$

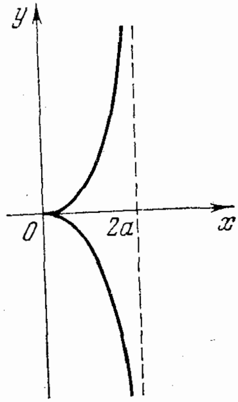
$$+ 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 z\, dz - 16\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 z\, dz$$

از دستورهای آشنای

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$

استفاده می کنیم (مسئله ۹ـ۶ـ۶ را ببینید)، داریم:

$$V = 64\pi a^3 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\times 3}{2\times 4} - 64\pi a^3 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6} = 2\pi^2 a^3$$



شکل ۱۲۰

۵ــ۳ــ۸ ثابت کنید که مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و محورهای مختصات و مجانب اش $x=1$ ، متناهی است و برابر $\frac{\pi}{2}$ می باشد.

۶ــ۳ــ۸ ثابت کنید که مساحت محدودو به منحنی $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ و محور x ها و خطوط $x=\pm 1$ برابر ۶ است و همچنین مساحت واقع بین منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ و محور x ها و خطوط $x=\pm 1$ نامتناهی است.

۷ــ۳ــ۸ مطلوب است محاسبهٔ حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به خطوط $y=e^{-x},\ x=0,\ y=0\,(0\leqslant x<+\infty)$

(الف) حول محور x ها،

(ب) حول محور y ها

جواب : (الف) $\frac{\pi}{2}$ (ب) 2π.

۸ــ۳ــ۸ مساحت محدود به سیسوئید (یا پیچ وار) $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ و مجانبش را حساب کنید.

جواب : $3\pi a^2$

۹ــ۳ــ۸ مساحت محدود به منحنی $y=e^{-2x}$ (به ازای $x>0$) و محورهای مختصات را حساب کنید:

جواب : $\frac{1}{2}$

۱۰ــ۳ــ۸ حجم حاصل از دوران شاخهٔ نامحدود به منحنی $y=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ به ازای $x\geqslant 1$ ، حول محور x ها را حساب کنید.

جواب : $\frac{4\pi}{3}$

۱۱ــ۳ــ۸ جرم m را در O مبداء مختصات در نظر بگیرد. این جرم بوسیله یک نقطهٔ مادی M به جرم واحد که روی محور x ها و در فاصله $x=r$ از مبداء قرار دارد، جذب می شود. این نیرو بنابر **قانون نیوتن** برابر $F=\frac{m}{x^2}$ است. کار انجام شده توسط نیروی F را حساب کنید در صورتی که نقطهٔ M از $x=r$ تا بینهایت تغییر مکان دهد.

حل چون نیرو در جهت خلاف تغییر مکان است. پس کار منفی است. از این رو

$$A=\int_r^\infty -\frac{m}{x^2}\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_r^N -\frac{m}{x^2}\,dx=-\frac{m}{r}$$

در ضمن جابجائی بازگشت نقطهٔ M از بینهایت به $x=r$ نیروی جاذبهٔ نیوتنی، کار مثبتی معادل $\frac{m}{r}$ انجام خواهد داد. این کمیت را **پتانسیل** نیروی مورد نظر در نقطهٔ $x=r$ می نامند و معیاری برای تعیین انرژی پتانسل ذخیره شده در یک نقطهٔ است.

۱۲ــ۳ــ۸ در مطالعه برروی جریانهای میرا که از تخلیه الکتریکی حاصل می شود گالوانومترهای **بالستیکی** مورد استفاده قرار می گیرند که درجات آنها بجای متناسب بودن با شدت جریان I، با انتگرال شدت جریان، یعنی $g=\int_0^\infty I\,dt$ متناسب هستند، ویا بجای متناسب بودن با مجذور شدت جریان I^2، با انتگرال مجذور شدت جریان، یعنی $S=\int_0^\infty I^2\,dt$ متناسبند. در این رابطه t زمان بوده و از شروع تخلیه سنجیده می شود و I شدت جریان متغیری است که تابع زمان t می باشد. گرچه در عمل، شدت جریان پس از زمان محدودی غیر قابل اندازه گیری است، ولی از نظر تئوری، فرآیند همواره ادامه دارد. برای آسان شدن رابطه در تمام محاسبات زمان تخلیه را محدود فرض می کنیم.

g و S را در فرآیندهای زیر حساب کنید:

(الف) $I=I_0e^{-kt}$ (تخلیه ساده) k ضریب ثابتی است که از صفر بزرگتر می باشد.

(ب) $I=I_0e^{-kt}\sin\omega t$ (تخلیه نوسانی ساده) ω و k ضرایب ثابتی هستند.

حل. (الف)

$$g=\int_0^\infty I_0e^{-kt}\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A I_0e^{-kt}\,dt=I_0\lim_{A\to\infty}\left[\frac{-e^{-kt}}{k}\right]_0^A=I_0/k;$$

$$S=\int_0^\infty I_0^2 e^{-2kt}\,dt=\frac{I_0^2}{2k};$$

(ب)

$$g=\int_0^\infty I_0 e^{-kt}\sin\omega t\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A I_0 e^{-kt}\sin\omega t\,dt=$$

$$=\frac{I_0}{\omega^2+k^2}\lim_{A\to\infty}\left[(\omega\cos\omega t+k\sin\omega t)\,e^{-kt}\right]_0^A=\frac{I_0\omega}{\omega^2+k^2};$$

$$S=\int_0^\infty I_0^2 e^{-2kt}\sin^2\omega t\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A I_0^2 e^{-2kt}\,\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt=$$

$$=-\frac{I_0^2}{4k}\lim_{A\to\infty}\left[1-\frac{1}{\omega^2+k^2}(k^2\cos 2\omega t+\omega k\sin 2\omega t)\right]e^{-2kt}\Big|_0^A=$$

$$=\frac{I_0^2\omega^2}{4k\,(k^2+\omega^2)}.$$

۱۳ــ۳ــ۸ فرض کنید یک تیر افقی با طول نا محدود (از دو طرف) برروی پایه‌ای الاستیک (یاکشان) قرار دارد و بوسیله نیروی متمرکز P در نقطهٔ O ، خم شده است. اگر محور x ها را در امتداد تیر (قبل از خم شدن) فرض کنیم و محور y ها را در نقطهٔ O با جهت به طرف پائین رسم کنیم، معادله منحنی تیر خم شده به صورت زیر است

$$y=\frac{P\alpha}{2k}e^{-\alpha|x|}(\cos\alpha x+\sin\alpha|x|),$$

که در آن α و k ضرایب ثابت معینی هستند. انرژی پتانسیل حاصل از تغییر متغیر شکل الاستیک تیر را بکمک معادلهٔ

$$W=Ee\int_0^\infty (y'')^2\,dx$$

حساب کنید. (E, e ثابتند)

حل . y'' را حساب می کنیم، داریم :

$$y''=\frac{P\alpha^3}{k}e^{-\alpha x}\left[(\cos\alpha x+\sin\alpha x)-2(-\sin\alpha x+\cos\alpha x)+\right.$$

$$\left.+(-\sin\alpha x-\cos\alpha x)\right]=\frac{P\alpha^3}{k}e^{-\alpha x}(\sin\alpha x-\cos\alpha x).$$

پس

$$W=\frac{P^2\alpha^6 Ee}{k^2}\int_0^\infty e^{-2\alpha x}(1-2\sin\alpha x\cos\alpha x)\,dx=$$

$$=\frac{P^2\alpha^6 Ee}{k^2}\left[\frac{1}{2\alpha}-\frac{2\alpha}{4\alpha^2+4\alpha^2}\right]=\frac{P^2\alpha^5 Ee}{4k^2}.$$

۱۴ـ۳ـ۸ چقدر کار لازم است تا جسمی به جرم m را از سطح زمین تا بینهایت دور کنیم؟

جواب : mgR **راهنمایی :** نیروی جاذبه جسمی توسط زمین بوسیله دستور $f=\frac{mg\,R^2}{r^2}$ حساب می شود که در آن m جرم جسم، r فاصله جسم تا مرکز زمین، R شعاع زمین است.

۱۵ـ۳ـ۸ چقدر کار لازم است تا یک بار الکتریکی $e_2=1$ را از بینهایت تا یک واحدی بارالکتریکی e_1 جابجا کنیم؟

جواب : e_1 **راهنمایی :** نیروی وارده بر همدیگر بوسیله بارها از دستور $\frac{e_1e_2}{r^2}$ بدست می آید، که در آن e_1 و e_2 مقادیر بارهای الکتریکی و r فاصلهٔ بین آنهاست.

۴ـ۸ چند مسئلهٔ اضافی

۱ـ۴ـ۸ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$$

به ازای $p>1$ و $q<1$ همگراست.

راهنمایی: انتگرال را به صورت زیر بنویسید:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^{a}\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\quad (a>1)$$

و سپس با توجه به اینکه در انتگرال اول وقتی $x\to 1$ داریم $\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1$ و در انتگرال دوم وقتی $q<0$، تابع لگاریتمی نسبت به هر تابع نمائی به کندی صعود می کند، از آزمون مقایسه ویژه استفاده کنید.

۲ـ۴ـ۸ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^{\infty}x^p\sin x^q\,dx,\qquad q\neq 0$$

با شرط $-1<(p+1)/q<0$ همگرای مطلق و با شرط $0\leqslant(p+1)/q<1$ همگرای شرطی است.

راهنمایی : تغییر متغیر $x^q=t$ را به کار ببرید و انتگرال را به صورت

$$\pm \frac{1}{q} \int_{0}^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q-1}} \sin t \, dt$$

تبدیل بکنید و سپس

$$\int_{0}^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q-1}} \sin t \, dt$$

را به صورت مجموع دو انتگرال

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$$

بنویسید که در آن $\alpha = 1 - \frac{p+1}{q}$ و آنگاه نشان دهید که انتگرال به ازای $1 < \alpha < 2$ همگرای مطلق و به ازای $0 < \alpha \leqslant 1$ همگرای شرطی است. توجه داشته باشید که در $\frac{p+1}{q} = 0$ انتگرال تبدیل به انتگرال $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ می شود که همگرای شرطی است و به ازای $\frac{p+1}{q} = -1$ تبدیل به انتگرال واگرای $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ می شود.

۳ــ٤ــ۸ ثابت کنید که انتگرال زیر موسوم به **انتگرال اویلر نوع اول** به ازای $p > 0$ و $q > 0$ همگراست:

$$(\text{تابع beta}) \qquad B(p, q) = \int_{0}^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

راهنمایی: انتگرال را به مجموع دو انتگرال

$$\int_{0}^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

تبدیل کرده و از آزمون مقایسهٔ ویژه استفاده کنید.

٤ــ٤ــ۸ ثابت کنید که اگر $|\beta| \neq |\alpha|$ آنگاه

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx = 0$$

راهنمایی: اگر $|\beta| \neq |\alpha|$ آنگاه

$$\int_{0}^{T} \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$$

کراندار است.

۵ــ٤ــ۸ ثابت کنید:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cdot x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2} \qquad (\text{طبیعی است } n)$$

راهنمایی : با تغییر متغیر $t=x^2$ انتگرال تبدیل به **تابع گامای اویلر** می شود.

۶ــ۴ــ۸ ثابت کنید که اگر به ازای هر عدد مثبت a انتگرال

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$$

همگرا باشد واگر وقتی $x \to 0$ تابع $f(x)$ به A میل کند، آنگاه انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx \qquad (\alpha>0,\quad \beta>0)$$

همگراست و مقدارش با $A\ln(\beta/\alpha)$ برابر است.

راهنمایی : فرض کنید

$$\int_a^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx=\int_{a\alpha}^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx-\int_{a\beta}^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx=\int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx=A\ln\frac{\beta}{\alpha}+\int_{\alpha a}^{\beta a}\frac{f(x)-A}{x}\,dx$$

و سپس **قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته** را به کار برده و نشان دهید که وقتی $a \to 0$، آخرین انتگرال به صفر میل می کند.

۷ــ۴ــ۸ ثابت کنید که

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}\,dx=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

راهنمایی : در انتگرال اول فرض کنید $f(x)=e^{-x}$ و در انتگرال دوم $f(x)=\cos x$، و سپس از نتایج مسئلهٔ **۶ــ۴ــ۸** استفاده کنید.

۸ــ۴ــ۸ به ازای چه مقادیری از m انتگرال

$$\int_0^2 \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$$

همگراست؟

جواب: به ازای $m<3$ همگرا و به ازای $m\geqslant 3$ واگراست.

راهنمایی : از هم ارزی $\frac{x^2}{2}$ با $1-\cos x$ وقتی $x \to 0$ استفاده کنید.

۹ــ۴ــ۸ ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

به ازای $k<1$ همگرا و به ازای $k\geqslant 1$ واگراست.

راهنمایی : انتگرال

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

را به مجموع دو انتگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^k} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{(\sin x)^k}$$

تبدیل کرده‌و با تغییر متغیر $x=\pi-t$ انتگرال دوم را به انتگرال اول تبدیل کنید و آنگاه از هم **ارزی** $\sin x$ با x وقتی $x \to 0$ استفاده کنید.

۱۰ــ۴ــ۸ ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^s}\,dx$$

وقتی $0 < s < 4$ **همگرا** و وقتی $1 < s < 4$ همگرای مطلق است.

راهنمایی: فرض کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^s}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^s}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^s}\,dx$$

در طرف دوم، تابع انتگرال اول، وقتی $x \to 0$ یک بینهایت بزرگ از مرتبهٔ $s-3$ است. با توجه به آزمون مقایسهٔ ویژه، وقتی $s-3 < 1$ یعنی وقتی $s < 4$، انتگرال اول به طور مطلق همگراست و این انتگرال وقتی $s \geqslant 4$، واگرا می باشد. در انتگرال دوم چون تابع $\sin x\,(1-\cos x)$ کراندار است در نتیجه به ازای $s > 1$ به طور مطلق همگراست. اما اگر $0 < s \leqslant 1$، انتگرال دوم به طور مشروط همگراست، چون تفاضل دو انتگرال همگرای شرطی

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^s}\,dx \quad \text{و} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x^s}\,dx$$

به طور مشروط همگراست (مسئلهٔ **۱۳ــ۱ــ۸** را ببینید)

۱۱ــ۴ــ۸ فرض کنید که

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

همگراست و تابع $\varphi(x)$ کراندار است. آیا انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

لازم است که همگرا باشد؟ اگر انتگرال (۱) به طور مشروط همگرا باشد در همگرایی انتگرال (۲) چه می توان گفت؟

راهنمایی: انتگرال (۲) می تواند واگرا باشد. مثلاً

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & 2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi. \end{cases}$$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگراست (مسئلهٔ **۱۳ــ۱ــ۸** را ببینید) ولی انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

واگراست (مسئله **۱۳ــ۱ــ۸** را ببینید). اما اگر انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ به طور مطلق همگراست. اگر $|\varphi(x)| < C$ آنگاه

$$|f(x)\varphi(x)| < C\,|f(x)|$$

و سپس از **قضیهٔ مقایسه استفاده کنید.**

۱۲ــ٤ــ۸ درستی رابطهٔ

$$f(x)=2f(\pi/4+x/2)-2f(\pi/4-x/2)-x\ln 2$$

را وقتی $f(x)=-\int_0^x \ln\cos y\,dy$ ثابت کنید. و با استفاده از این تساوی انتگرال زیر را حساب کنید:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\,dy.$$

راهنمایی: با تغییر متغیر $y=\frac{\pi}{2}-z$، تابع $f(x)$ را به

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\sin z\,dz$$

تبدیل کنید. با توجه به $\sin z=2\sin\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2}$ انتگرال فوق را به مجموع سه انتگرال تبدیل کنید.

۱۳ــ٤ــ۸ یک دستور کاهش برای انتگرال

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx \quad (\text{طبیعی است } n)$$

پیدا کرده و سپس آنرا حساب کنید.

راهنمایی : با استفاده از روش جزء بجزء با فرض

$$u=\ln \cos x,\ \cos 2nx\, dx=dv$$

داریم

$$I_n=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx \frac{\sin x}{\cos x}\, dx, \quad n\neq 0$$

چون

$$\sin 2nx=\sin (2n-2)\, x\cdot \cos 2x+\sin 2x\cdot \cos (2n-2)\, x,$$

بنابراین

$$I_n=\frac{1}{2n}\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)\, x \frac{\sin x}{\cos x} dx+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)\, x\cdot \sin 2x\, dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot \cos (2n-2)\, x\, dx\right]$$

مستقیماً با محاسبه نشان دهید که اگر $n\geqslant 2$ عبارتهای دوم و سوم صفر هستند. بنابراین برای $n\geqslant 2$ داریم:

$$I_n=-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2n-2)\, x \frac{\sin x}{\cos x}\, dx=-\frac{n-1}{n}\, I_{n-1}$$

چون

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \frac{\sin x}{\cos x}\, dx=\frac{\pi}{4}$$

پس

$$I_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\ ;\ I_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3\cdot 4}$$

و به استقراء داریم:

$$I_n=(-1)^{n-1}\,\frac{\pi}{4n}$$

فصل نهم

سریهای نامتناهی

۱ـ۹ همگرایی و واگرایی سریهای نامتناهی

سری زیر را در نظر می گیریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad (۱)$$

فرض کنید

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

دنبالهٔ **مجموعهای جزئی** سری باشد که در آن

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \qquad (۲)$$

اگر این دنباله همگرا باشد، یعنی عددی مانند S وجود داشته باشد طوری که $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ آنگاه سری (۱) را **همگرا** (یا **متقارب**) و S را **مجموع** آن گویند. اگر $\lim_{n\to\infty} S_n$ وجود نداشته باشد، سری را **واگرا** (یا **متباعد**) نامند گاهی سری نامتناهی (۱) را با $\sum u_n$ نشان می دهیم که u_n **جملهٔ عمومی** یا جمله n ام سری است.

مثال ۱ : سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots.$$

را در نظر می گیریم. در این سری

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

چون

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

پس این سری همگراست و $S = 1$.

مثال ۲: سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

را درنظر می گیریم. دراینجا ۱ یا $S_n = 0$، که بستگی به فرد یازوج بودن n دارد. چون $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجود نیست پس سری واگراست.

مطالب بنیادی درباره سریهای نامتناهی

۱ـ(الف) شرط لازم همگرایی. اگر سری Σu_n همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

ولی لازم نیست که عکس آن درست باشد، یعنی اگر $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ممکن است که سری Σu_n همگرا نباشد.

(ب) شرط کافی واگرایی. اگر حد جملهٔ n ام صفر نباشد، سری واگراست.

۲. اگر تمام جملات یک سری را به یک عدد ثابت مخالف صفر ضرب بکنیم، نوع آن (از نظر همگرایی یا واگرایی) تغییر نمی کند.

۳. اگر تعداد **متناهی** جملهٔ ازاول سری حذف کنیم یا تعداد **متناهی** جمله به آن اضافه کنیم، نوع آن تغییر نمی کند.

سریهای خاص

۱ ــ سری هندسی[1]. سری

$$\sum_{n=1} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots,$$

را یک سری **سری هندسی** گویند که r و a دو عدد ثابت هستند. وقتی $r < 1$ سری همگرا است و مجموع آن برابر $S = \dfrac{a}{1-r}$ است و هر گاه $r \geqq 1$، سری واگراست مجموع n جملهٔ اول آن برابر است با

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

۲ــسری p. سری

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

---

1. Geometric series

را سری p گویند که در آن p عددی ثابت است، که به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leqq 1$ واگرا می‌باشد. در حالت $p = 1$ آن را **سری همساز** یا **هارمونیک** گویند.

آزمونهای سریهای عددی برای همگرایی و واگرایی

۱ــ آزمون مقایسه برای یک سری با جملات نامنفی

(الف) همگرایی . فرض کنید به ازای هر $n > N$ داشته باشیم $v_n \geqq 0$ و Σv_n همگرا باشد. آنگاه اگر به ازای هر $n > N$ نامساویهای

$$0 \leqq u_n \leqq v_n$$

برقرار باشند، Σu_n نیز همگراست. توجه کنید که $n > N$ از **مرتبه‌ای به بعد** برقرار است. اغلب، این نامساویها از مرتبهٔ $N = 1$ برقرار هستند.

مثال : چون

$$\frac{1}{2^n + 1} \leqq \frac{1}{2^n}$$

و $\Sigma \frac{1}{2^n}$ همگراست، لذا $\Sigma \frac{1}{2^n + 1}$ نیز همگرا می‌باشد.

(ب) واگرایی . فرض کنید به ازای هر $n > N$ داریم $v_n \geqq 0$ و Σv_n واگراست. آنگاه اگر به ازای هر $n > N$، داشته باشیم $u_n \geqq v_n$، سری Σu_n نیز واگراست.

مثال : چون

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

و $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، لذا $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ نیز واگرا می‌باشد.

۲ــ آزمون خارج قسمت برای یک سری با جملات نامنفی

(الف) اگر $v_n \geqq 0$ و $u_n \geqq 0$ و اگر

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0 \quad \text{یا} \quad \infty$$

آنگاه Σv_n و Σu_n یا هر دو واگرا هستند و یا هر دو همگرا می‌باشند، یعنی این دو سری از یک نوع می‌باشند.

(ب) اگر در قسمت (الف) $A = 0$ و Σv_n همگرا باشد، آنگاه Σu_n نیز همگراست.

(ج) اگر در قسمت (الف) $A = \infty$، و سری Σv_n واگرا باشد. آنگاه Σu_n

نیز واگرا است. (مسئله ۸ــ۱ــ۹) را ببیند)

این آزمون در رابطه با آزمون مقایسه است و اغلب در تشخیص نوع سریها خیلی مفید است. در حالت خاص هر گاه $v_n = 1/n^p$ ، سری مجهول با سری p مقایسه می شود.

قضیهٔ ۱ . فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = A$ آنگاه

(i) وقتی $p > 1$ و A عددی متناهی باشد. سری Σu_n همگراست.

(ii) اگر $p \leqq 1$ و $A \neq 0$ ، A می‌تواند بینهایت باشد، سری Σu_n واگراست .

چند مثال : ۱ . $\Sigma \frac{n}{4n^3-2}$ همگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}.$$

۲ . چون

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = \infty.$$

لذا $\Sigma \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ واگراست.

۳ . آزمون انتگرال برای یک سری با جملات نامنفی

اگر $f(x)$ تابعی مثبت ، و به ازای $x \geqq N$ نزولی باشد و به طوری که

$$f(n) = u_n, \;\; n = N, N+1, N+2, \ldots,$$

آنگاه Σu_n وقتی همگرا یا واگراست که

$$\int_N^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_N^M f(x)\,dx$$

همگرا یا واگرا باشد.. در حالت خاص، ممکن است $N = 1$ باشد.

مثال : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، زیرا

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

موجود است.

٤ــ آزمون سریهای متناوب

تعریف : سری را متناوب گویند که علامت جملات آن یک در میان منفی و مثبت باشد.

یک سری متناوب وقتی همگراست که دارای دو شرط زیر باشد.

$$(a) \quad |u_{n+1}| \leqq |u_n| \qquad n \geqq 1$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (\text{یا } \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0)$$

(قضیهٔ لایبنتیز) مسئله ۱۵ــ۱ــ۹ را ببینند.

مثال : در سری

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

داریم $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ که در آن

$$|u_n| = \frac{1}{n}, \quad |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

پس به ازای $n \geqslant 1$ داریم $|u_{n+1}| \leqq |u_n|$ ، بنابراین

$$\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0$$

سری همگراست.

قضیهٔ ۲ .

اگر یک سری متناوب دارای دو شرط (b) و (a) باشد. جملات آن را تا جمله‌ای بنویسیم، خطای عددی از قدرمطلق جملهٔ بعدی کمتر است.

مثال : اگر جملات سری

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots,$$

را تا جمله چهارم بنویسیم خطا از $0.2 = \frac{1}{5}$ کمتر است

۵ . همگرایی مطلق و همگرایی شرطی

سری Σu_n را **همگرایی مطلق** گویند اگر سری $\Sigma |u_n|$ همگرا باشد. اگر Σu_n همگرا ولی $\Sigma |u_n|$ واگرا باشد. آنگاه Σu_n را **همگرای شرطی** گویند.

قضیهٔ ۳

اگر $\Sigma |u_n|$ همگرا باشد، Σu_n نیز همگرا است. بعبارت دیگر، یک سری همگرای مطلق ، همگراست (مسئله ۱۷ــ۱ــ۹ را ببینند).

مثال ۱ . سری

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \cdots$$

همگرای مطلق است پس همگراست زیرا

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

همگراست.

مثال ۲ . سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

همگراست ولی سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

واگراست. پس سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

به طور مشروط همگراست.

تمام آزمونهایی که در تشخیص نوع سریهای نامنفی به کار می روند در تشخیص همگرایی مطلق نیز به کار می روند.

۶. آزمون نسبت (یا **قاعده دالامبر**) فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$$

آنگاه سری Σu_n

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L<1$

(ب) واگراست اگر $L>1$

اگر $L=1$ نوع سری با این آزمون مشخص نمی شود (مسئله ۲۰ـ۱ـ۹ را ببینید).

۷. آزمون ریشهٔ n ام (یا قاعده **کوشی**)

اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = L$$

آنگاه سری Σu_n

(الف) به طور مطلق همگراست اگر $L<1$

(ب) واگراست هرگاه $L>1$

وقتی $L=1$ نوع سری با این روش مشخص نمی شود.

توجه. اگر نوع یک سری با آزمون نسبت مشخص نشود، نوع آن با آزمون ریشهٔ نیز مشخص نخواهد شد و بالعکس.

۸. آزمون را به [1]

اگر

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = L$$

آنگاه سری Σu_n

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L<1$

(ب) واگراست یا بطور مشروط همگراست اگر $L>1$

---

1. Raabe's test

اگر $L=1$ نوع سری با این آزمون مشخص نمی شود.

اغلب، این آزمون وقتی بکار می رود که نوع سری با آزمون نسبت قابل تشخیص نیست.

۹ . آزمون گوس

اگر

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1-\frac{L}{n}+\frac{c_n}{n^2}$$

که در آن به ازای هر $n>N$ داریم $|c_n|<P$ ، آنگاه سری Σu_n

(الف) (به طور مطلق) همگراست اگر $L>1$

(ب) واگراست یا بطور مشروط همگراست اگر $L\leqq 1$

اغلب ازاین آزمون وقتی استفاده می شود که نوع سری با آزمون «**را به**» قابل **تشخیص** نیست.

چند قضیه درباره همگرایی مطلق سریها

قضیهٔ ٤

می توان ترتیب جملات یک سری همگرای مطلق را بدلخواه عوض کرد و همه سریهای حاصل همگرا هستند و یک مجموع دارند. حال آن که اگر جملات یک سری همگرای شرطی را به طور مناسب تغییر دهیم سری حاصل می تواند واگرا و یا همگرا به مجموعی دلخواه باشد (مسئله **٤١ــ١ــ٩** را ببینید).

قضیهٔ ۵ .

مجموع ، تفاضل و حاصلضرب دوسری همگرای مطلق ، همگرای مطلق است. این عملیات را می توان برای تعداد متناهی سری انجام داد.

۱ــ۱ــ۹ (الف) ثابت کنید سری

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

همگراست

(ب) مجموع سری **(الف)** را حساب کنید.

حل .

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

پس ،

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

چون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

پس سری همگراست و مجموع آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲ـ ۱ـ ۹ . (الف) ثابت کنید که سری

$$\tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^n$$

همگراست

(ب) مجموع آن را بیابید.

حل . داریم

$$S_n = \tfrac{2}{3} + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + (\tfrac{2}{3})^n$$
$$\tfrac{2}{3}S_n = (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots + (\tfrac{2}{3})^n + (\tfrac{2}{3})^{n+1}$$

از آنجا

$$\tfrac{1}{3}S_n = \tfrac{2}{3} - (\tfrac{2}{3})^{n+1} \quad \text{یا} \quad S_n = 2\{1 - (\tfrac{2}{3})^n\}$$

چون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\{1 - (\tfrac{2}{3})^n\} = 2,$$

پس سری همگراست و مجموع آن برابر ۲ است.

روش دیگر: این سری یک سری هندسی است که در آن $a = \frac{2}{3}, r = \frac{2}{3}$ ، پس مجموع آن برابر است با

$$a/(1-r) = \tfrac{2}{3}/(1 - \tfrac{2}{3}) = 2$$

۳ـ ۱ـ ۹ ثابت کنید که سری

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

واگراست.

حل . چون

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

پس سری واگراست (زیرا شرط کافی واگرایی در سری موجود است).

۹ــ۱ــ٤ نشان دهید سری با جملهٔ عمومی

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

واگراست با اینکه $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

حل. براحتی تحقیق می شود که

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

می نویسیم

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$
$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$$

چون S_n بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد لذا سری واگراست.

این مسئله نشان داد که $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ یک **شرط لازم** برای همگرایی سری Σu_n است نه یک **شرط کافی**.

مسائل مربوط به آزمون مقایسه وآزمون خارج قسمت

۹ــ۱ــ۵ اگر

$$0 \leqq u_n \leqq v_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

و اگر Σv_n همگرا باشد، ثابت کنید Σu_n نیز همگراست (اثبات همگرایی در آزمون مقایسه).

حل. فرض کنید

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

چون Σv_n همگراست پس $\lim_{n \to \infty} T_n$ موجود و مثلاً برابر T است. همچنین، چون

$$v_n \geqq 0, \ T_n \leqq T$$

پس

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqq T$$

یا

$$0 \leqq S_n \leqq T$$

پس S_n کراندار و صعودی است لذا دارای حد است یعنی سری Σu_n همگراست.

۹ــ۱ــ٦ با استفاده از آزمون **مقایسه** ثابت کنید

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

واگراست.

حل . داریم

$$1 \geqq \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3} \geqq \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7} \geqq \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\cdots+\tfrac{1}{15} \geqq \tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}+\cdots+\tfrac{1}{16}\ (\text{۸ جمله}) = \tfrac{1}{2}$$

پس

$$1+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})+\cdots \geqq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots$$

چون طرف راست از هر عدد مثبتی بزرگتر است پس مجموع آن بینهایت است، بنابراین سری واگراست

با روشی که دیدیم می‌توان نشان داد که سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ به ازای $p \leqq 1$ واگرا و به ازای $p > 1$ همگراست.

۷ــ۱ــ۹ نوع سری زیر را مشخص کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$$

حل . چون

$$\ln n < n \quad \text{و} \quad \frac{1}{2n^3-1} \leqq \frac{1}{n^3}$$

پس

$$\frac{\ln n}{2n^3-1} \leqq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست ، بنابراین، سری مفروض نیز همگرا می باشد.

۸ــ۱ــ۹ فرض کنید که u_n و v_n مثبت هستند. اگر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \neq 0, \quad (\text{بینهایت نیست } A)$$

ثابت کنید Σu_n و Σv_n هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

حل . بنابه فرض ، به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان عدد طبیعی N را طوری بدست آورد که وقتی $n > N$ داشته باشیم

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \epsilon$$

پس به ازای تمام مقادیر $n = N+1, N+2, \ldots$ داریم:

$$(۱) \qquad (A-\epsilon)v_n < u_n < (A+\epsilon)v_n \qquad \text{یا} \qquad -\epsilon < \frac{u_n}{v_n} - A < \epsilon$$

اگر n را از $N+1$ تا بینهایت تغییر دهیم و سپس نامساویهای حاصل را جمع کنیم (یا دقیقتر به n از $N+1$ تا M ، مقدار دهیم و سپس M را به بینهایت میل دهیم). نتیجه

می شود.

$$(A-\epsilon)\sum_{N+1}^{\infty} v_n \leq \sum_{N+1}^{\infty} u_n \leq (A+\epsilon)\sum_{N+1}^{\infty} v_n \qquad (۲)$$

اگر فرض کنیم $A-\epsilon>0$ به کلیت مسئله خللی وارد نمی‌شود. پس از طرف راست رابطهٔ (۲) نتیجه می شود که هر گاه Σv_n همگرا باشد Σu_n نیز همگراست. از طرف چپ نامساوی (۲) چنین نتیجه می شود که هرگاه Σv_n واگراست، Σu_n نیز واگرا می باشد.

۹ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+3}$$

حل. (a) برای n های بزرگ، $\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ تقریباً با $\frac{4n^2}{n^3}=\frac{4}{n}$ برابر است. با فرض

$$u_n=\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n} \quad \text{و} \quad v_n=\frac{4}{n}$$

داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$. چون $\Sigma v_n=4\Sigma 1/n$ واگراست، لذا Σu_n نیز واگراست.

توجه کنید که از رفتار u_n برای n های بزرگ سری مقایسه مناسب v_n **نتیجه می شود.** در مثال فوق با توجه به این مطلب $v_n=1/n$ بدست آمد.

روش دیگر:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}\right)=4$$

بنابه قضیه ۱، سری واگراست.

(b) برای n بزرگ، $u_n=\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ تقریباً برابر $v_n=\frac{n}{2n^3}=\frac{1}{2n^2}$ است.

چون $\Sigma v_n=\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{n^2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ همگراست (بنابه سری p که $p=2$). در نتیجه سری مفروض نیز همگراست.

روش دیگر:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}\right)=\frac{1}{2}$$

بنابه قضیه ۱، سری همگراست.

(c) بنابه دستور هوپیتال داریم

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2+3}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$$

پس بنابه قضیهٔ یک به ازای $p=3/2$ سری همگراست.

توجه کنید که نامساوی

$$\frac{\ln n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

همواره برقرار است. ولی نمی توان به استناد آزمون مقایسه بدلیل اینکه سری $\Sigma 1/n$ واگرا است نتیجه بگیریم که سری مفروض هم واگراست.

۱۰ــ۱ــ۹ همگرایی سریهای

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$$

را بررسی نمائید.

حل. (a) بنابه دستور هوپیتال و یا هر روش مناسب دیگر داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2} = 0$$

پس بنابه قضیهٔ ۱ چون $p=2$ سری همگراست.

(b) برای مقادیر بزرگ n، عبارت $\sin(1/n)$ تقریباً با $1/n$ برابر است. چون

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right\}^3 = 1$$

پس بنابه قضیهٔ ۱، چون $p=3$ سری همگراست.

۱۱ــ۱ــ۹ آزمون انتگرال را ثابت کنید.

حل. آزمون را به ازای $N=1$ ثابت می کنیم و سپس می توان براحتی آنرا به ازای $N>1$ ثابت کرد.

با توجه به یکنواختی $f(x)$ داریم:

$$u_{n+1} = f(n+1) \leqq f(x) \leqq f(n) = u_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

با توجه به خواص انتگرال معین در فاصلهٔ $x=n$ تا $x=n+1$ داریم:

$$u_{n+1} \leqq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqq u_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

اگر به n مقادیر از ۱ تا $M-1$ را بدهیم و سپس طرفین نامساویها را جمع کنیم داریم:

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M \leqq \int_1^M f(x)\,dx \leqq u_1 + u_2 + \cdots + u_{M-1} \qquad (1)$$

اگر $f(x)$ اکیداً نزولی باشد علامت تساوی در (۱) را می توان حذف کرد.

اگر

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx$$

موجود و برابر S باشد از طرف چپ نامساوی (۱) نتیجه می شود که

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_M$$

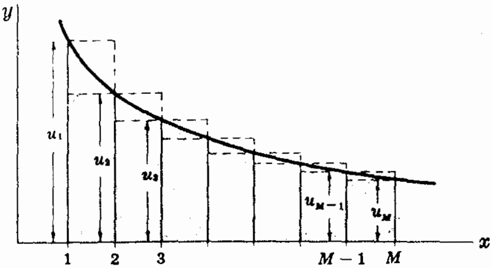
به طور یکنواخت صعودی از بالا به S محدود است پس Σu_n همگراست.

اگر

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)\,dx$$

بینهایت باشد طرف راست نامساوی (۱) نشان می دهد که Σu_n واگراست. و بدین ترتیب اثبات تمام می شود.

۱۲ــ۱ــ۹ اثبات مسئله ۱۱ــ۱ــ۹ را به طور هندسی تفسیر کنید.



شکل ۱۲۱

حل . به طور هندسی

$$u_2+u_3+\cdots+u_M$$

مجموع مساحات تمام مستطیلها را نشان می دهد که در شکل ۱۲۱ سایه دار نشان داده شده است، درحالی که

$$u_1+u_2+\cdots+u_{M-1}$$

تمام مساحات مستطیلهائی می باشد که در شکل به صورت سایه دار یا غیر سایه دار می باشند. مقدار مساحت منحنی $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=M$ بین دو مجموعه مساحتی که در نتیجه (۱) مسئله ۱۱ــ۱ــ۹ مشخص شده، واقع است.

۱۳ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ \sum_1^\infty \frac{1}{n^p},\ (\text{ثابت است } p)\quad (b)\ \sum_1^\infty \frac{n}{n^2+1};\quad (c)\ \sum_2^\infty \frac{1}{n\ln n};\quad (d)\ \sum_1^\infty ne^{-n^2}.$$

حل . (a) با توجه به

$$\int_1^M \frac{dx}{x^p}=\int_1^M x^{-p}\,dx=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^M=\frac{M^{1-p}-1}{1-p}\quad،\quad p\neq 1$$

اگر $p < 1$ داریم:

$$\lim_{M \to \infty} \frac{M^{1-p}-1}{1-p} = \infty$$

پس انتگرال واگراست و در نتیجه سری واگرا می باشد.

اگر $p > 1$ داریم

$$\lim_{M \to \infty} \frac{M^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

پس انتگرال همگراست و در نتیجه سری همگرا می باشد.

اگر $p = 1$ داریم

$$\int_1^M \frac{dx}{x^p} = \int_1^M \frac{dx}{x} = \ln M$$

و

$$\lim_{M \to \infty} \ln M = \infty$$

پس انتگرال واگرا بوده و نتیجتاً سری واگراست.

بنابر این اگر $p > 1$ سری همگرا و اگر $p \leqq 1$ سری واگراست.

(b) چون

$$\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{x\,dx}{x^2+1} = \lim_{M \to \infty} \tfrac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_1^M = \lim_{M \to \infty} \{\tfrac{1}{2} \ln(M^2+1) - \tfrac{1}{2} \ln 2\} = \infty$$

پس سری واگراست.

(c) چون

$$\lim_{M \to \infty} \int_2^M \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^M = \lim_{M \to \infty} \{\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)\} = \infty$$

پس سری واگراست.

(d) چون

$$\lim_{M \to \infty} \int_1^M x e^{-x^2}\,dx = \lim_{M \to \infty} -\tfrac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_1^M = \lim_{M \to \infty} \{\tfrac{1}{2} e^{-1} - \tfrac{1}{2} e^{-M^2}\} = \tfrac{1}{2} e^{-1}$$

پس سری واگراست.

توجه داشته باشید وقتی سری همگراست، مقدار متناظر آن (در حالت کلی) با مقدار سری برابر نیست. در هر صورت، اغلب می توان مجموع سری را با انتگرال تقریب زد (مسئله ۴۰ـــ۱ـــ۹ را ببینید).

۱۴ـــ۱ـــ۹ ثابت کنید

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

حل . بنابه مسئله ۱۱ـ۱ـ۹ داریم

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=2}^{M}\frac{1}{n^2+1} < \lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{dx}{x^2+1} < \lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M-1}\frac{1}{n^2+1}$$

یعنی

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

پس

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

چون

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4}$$

با اضافه کردن $\frac{1}{2}$ به طرفین نامساوی نتیجه می شود :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

پس درستی نامساویها ثابت می شود .

۱۵ـ۱ـ۹ (قضیهٔ لایبنتیز) سری متناوب

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

مفروض است که در آن $0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ • ثابت کنید :

(الف) سری همگراست .

(ب) اگر تعداد متناهی جمله از سری را بنویسیم خطای حاصل از قدر مطلق جملهٔ مابعد، کمتر است .

حل . (الف) : مجموع $2M$ جمله از سری برابر است با

$$\begin{aligned} S_{2M} &= (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2M-1}-a_{2M}) \\ &= a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2M-2}-a_{2M-1})-a_{2M} \end{aligned}$$

چون مقدار هر پرانتز نامنفی است پس

$$S_{2M} \geqq 0, \quad S_2 \leqq S_4 \leqq S_6 \leqq S_8 \leqq \cdots \leqq S_{2M} \leqq a$$

پس $\{S_{2M}\}$ دنباله‌ای کراندار و به طوریکنواخت صعودی است پس حدی مانند S دارد • از طرفی

$$S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1}.$$

چون

$$\lim_{M\to\infty} S_{2M} = S \quad \text{و} \quad \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = 0$$

(بنابه فرض $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ است). نتیجه می شود که

$$\lim_{M\to\infty} S_{2M+1} = \lim_{M\to\infty} S_{2M} + \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = S + 0 = S.$$

پس حد مجموعهای جزئی برابر S است، یعنی سری همگراست.

(ب) خطای بعد از $2M$ جمله برابر است با

$$(a_{2M+1} - a_{2M+2}) + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \cdots = a_{2M+1} - (a_{2M+2} - a_{2M+3}) - \cdots$$

چون مقدار هر پرانتز نامنفی است پس اگر همه جملات حذف شوند مجموع از a_{2M+1} کمتر یا با آن مساوی است.

به طور مشابه، خطای حاصل بعد از $2M+1$ اول برابر است با

$$-a_{2M+2} + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \cdots = -(a_{2M+2} - a_{2M+3}) - (a_{2M+4} - a_{2M+5}) - \cdots$$

که این نامثبت بوده بزرگتر از $-a_{2M+2}$ است.

۱۶ـ۱ـ۹ **(الف)** ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

همگراست.

(ب) ما گزیرم خطای بعد از ۸ و ۹ جمله اول سری را تعیین کنید.

(ج) چند جمله اول سری را انتخاب کنیم تا قدر مطلق خطای حاصل از ۰/۰۰۱ کمتر باشد.

حل. (الف) سری عبارت است از

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \cdots.$$

اگر $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$، آنگاه

$$a_n = |u_n| = \frac{1}{2n-1}, \quad a_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

چون

$$\frac{1}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n-1} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

پس بنابه مسئله **۱۵ـ۱ـ۹** (الف) سری همگراست.

(ب) از نتایج مسئله **۱۵ـ۱ـ۹** (ب) استفاده می کنیم. خطای ۸ جمله اول سری یعنی

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15}$$

مثبت بوده و از $\frac{1}{17}$ بیشتر نیست.

۹ جمله اول سری عبارت است از

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17}$$

و خطا منفی بوده و بزرگتر یا مساوی $-\frac{1}{19}$ است یعنی قدر مطلق نا بیشتر $\frac{1}{19}$ است.

(ج) قدر مطلق خطای حاصل بعد از M جمله اول کمتر از $1/(2M+1)$ است. برای رسیدن به دقت مورد نظر باید

$$1/(2M+1) \leqq .001$$

شود. از آنجا $M \geqq 499.5$ پس حداقل ۵۰۰ جمله لازم است

مسائل مربوط به همگرایی شرطی و همگرایی مطلق

۱۷ــ۱ــ۹ ثابت کنید یک سری همگرای مطلق، همگراست.

حل. فرض کنید $\Sigma |u_n|$ همگراست، باید نشان دهیم که Σu_n همگراست. فرض می کنیم

$$S_M = u_1 + u_2 + \cdots + u_M$$

و

$$T_M = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_M|$$

آنگاه

$$\begin{aligned} S_M + T_M &= (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \cdots + (u_M + |u_M|) \\ &\leqq 2|u_1| + 2|u_2| + \cdots + 2|u_M| \end{aligned}$$

چون $\Sigma |u_n|$ همگراست و چون به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، داریم $u_n + |u_n| \geqq 0$ نتیجه می شود که $S_M + T_M$ دنباله ای کراندار و صعودی یکنواخت است پس $\lim_{M \to \infty} (S_M + T_M)$ موجود است.

همچنین چون $\lim_{M \to \infty} T_M$ وجود دارد (زیرا بنابه فرض سری همگرای مطلق است)، پس

$$\lim_{M \to \infty} S_M = \lim_{M \to \infty} (S_M + T_M - T_M) = \lim_{M \to \infty} (S_M + T_M) - \lim_{M \to \infty} T_M$$

وجود دارد بنابر این سری همگراست.

۱۸ــ۱ــ۹ نوع سری

$$\frac{\sin\sqrt{1}}{1^{3/2}} - \frac{\sin\sqrt{2}}{2^{3/2}} + \frac{\sin\sqrt{3}}{3^{3/2}} - \cdots$$

را تعیین کنید.

حل. چون قدر مطلق هر جمله سری، کمتر یا مساوی جمله متناظرش از سری

$$\frac{1}{1^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \cdots,$$

که همگراست می باشد. پس سری همگرای مطلق است و بنابه مسئله **۱۷ـ۱ـ۹** همگراست.

۱۹ـ۱ـ۹ همگرایی و همگرایی مطلق سریهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1},\quad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$$

حل. (a) اگر

$$a_n = |u_n| = \frac{n}{n^2+1} \quad \text{و} \quad a_{n+1} = |u_{n+1}| = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

آنگاه به ازای $n \geqq 1$ داریم $a_{n+1} \leqq a_n$ و همچنین

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

پس سری بنابه مسئله ۱۵ـ۱ـ۹ همگراست.

سری با قدر مطلق جملات عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

پس بنابه مسئله (b) **۱۳ـ۱ـ۹** واگراست. بنابر این سری مفروض همگرای مطلق نبوده بلکه همگرای شرطی است.

(b) سری با قدر مطلق جملات، $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ است. بنابه آزمون انتگرال، این سری وقتی همگراست که انتگرال

$$\lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{dx}{x\ln^2 x}$$

موجود باشد و وقتی که واگراست که این انتگرال وجود نداشته باشد.

اگر

$$u=\ln x,\ \int\frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+c = -\frac{1}{\ln x}+c.$$

پس

$$\lim_{M\to\infty}\int_2^M\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln M}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

بنابر این انتگرال وجود دارد، پس سری همگراست.

بنابر این $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$ به طور مطلق همگراست، پس همگرا می باشد.

روش دیگر

چون

$$\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \leqq \frac{1}{n\ln^2 n} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} = 0$$

بنا بـه مسئله ۱۵ـ۱ـ۹ (الف) این سری متناوب همگراست . برای اثبات همگرایی مطلق به صورت فوق عمل می کنیم .

(c) چون $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ که در آن $u_n = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$ ، بنابراین سری مفروض نمی‌تواند همگرا شود . برای نشان دادن $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ، کافی است ثابت کنیم :

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \neq 0$$

این را می‌توان بکمک دستور هوپیتال یا هر روش دیگر ثابت کرد [مسئله (b) ۲۱ـ۱ـ۹ را ببینید]

مسائل مربوط به آزمون نسبت

۲۰ـ۱ـ۹ دستور نسبت را ثابت کنید .

حل . سری

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

را در نظر بگیرید که هر جمله آن نامنفی است . باید ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$$

آنگاه سری همگراست .

بنابه فرض می‌توان عدد طبیعی و بقدر کافی بزرگ N را طوری تعیین کرد که به ازای هر $n \geqq N$ داشته باشیم $(u_{n+1}/u_n) < r$ که در آن $L < r < 1$. پس

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< r\,u_N \\ u_{N+2} &< r\,u_{N+1} < r^2 u_N \\ u_{N+3} &< r\,u_{N+2} < r^3 u_N \end{aligned}$$

از جمع این نامساویها داریم :

$$u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots < u_N(r + r^2 + r^3 + \cdots)$$

چون $0 < r < 1$. پس سری بنابه آزمون مقایسه همگراست .

اگر سری جملات منفی هم داشته باشد سری

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$$

را در نظر می گیریم . با توجه به استدلال فوق و مسئله ۱۷ـ۱ـ۹ اگر

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$$

آنگاه سری Σu_n (به طور مطلق) همگراست .

به طور مشابه می توان ثابت کرد که اگر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$$

آنگاه سری Σu_n واگراست ، حال آنکه اگر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L = 1$$

آنگاه نوع آن با آزمون نسبت مشخص نمی شود [مسئله (c) ۲۱ــ۱ــ۹ را ببینید].

۲۱ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$$

حل . (a) در اینجا $u_n = n^4 e^{-n^2}$ ، پس

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \lim_{n\to\infty} e^{-2n-1} =$$
$$1\cdot 0 = 0$$

چون $0 < 1$ پس سری همگراست .

(b) در اینجا $u_n = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$ ، پس

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(-1)^{n-1}2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$$

چون $2 > 1$ پس سری واگراست ، با مسئله (c) ۱۹ــ۱ــ۹ مقایسه کنید .

(c) در این مسئله $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ ، پس

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(-1)^{n-1}n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)n} = 1$$

بنابراین این آزمون نوع سری را مشخص نمی کند ، ولی با استفاده از آزمونهای دیگر (مسئله (a) ۱۹ــ۱ــ۹ را ببینید) . معلوم می شود که سری همگراست .

مسائل مربوط به آزمونهای گوناگون

۲۲ــ۱ــ۹ نوع سری

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \dots$$

را وقتی $(a)\ r = 2/3,\ (b)\ r = -2/3$ ، $(c)\ r = 4/3$ مشخص کنید .

حل . چون $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2|r|$ یا $\frac{1}{2}|r|$ و به فرد یا زوج بودن n بستگی ندارد پس نمی‌توان از آزمون نسبت استفاده کرد.

بهرحال از آزمون ریشهٔ استفاده می کنیم ، داریم :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r^n|} = \sqrt[n]{2}\,|r| & \text{وقتی } n \text{ فرد است} \\ \sqrt[n]{|r^n|} = |r| & \text{وقتی } n \text{ زوج است} \end{cases}$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = |r|$ چون $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.

بنابراین اگر $|r| < 1$ سری همگرا و اگر $|r| > 1$ سری واگراست. پس در حالات (b) و (a) سری همگرا و در حالت (c) سری واگرا است.

۲۳ـ۱ـ۹ نوع سری

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\dots(3n)}\right)^2 + \dots .$$

را تعیین کنید.

حل . چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$$

پس نمی‌توان از آزمون نسبت استفاده کرد. بنابه **آزمون رابه** داریم :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right\} = \frac{4}{3} > 1$$

پس سری همگراست.

۲٤ـ۱ـ۹ همگرایی سری زیر را بررسی نمائید :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\right)^2 + \dots .$$

حل . چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1$$

پس آزمون نسبت نوع آن را مشخص نمی کند. همچنین آزمون **رابه** نیز نوع آن را مشخص نمی کند زیرا

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left\{1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right\} = 1$$

به صورت زیر عمل می کنیم :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5-4/n}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c_n}{n^2}$$

که در آن $|c_n| < P$ ، پس بنابه آزمون **گوس** سری واگراست.

۲۵ــ۱ــ۹ **(الف)** ثابت کنید که سری

$$\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

همگراست.

(ب) مجموع این سری را حساب کنید.

جواب : (ب) 1/12

۲۶ــ۱ــ۹ ثابت کنید که نوع یک سری تغییر نمی کند اگر:

(الف) تمام جملات آن به یک عدد ثابت غیر صفر ضرب شود،

(ب) تعداد متناهی جمله از اول سری حذف یا به آن اضافه شود.

۲۷ــ۱ــ۹ ثابت کنید که اگر سریهای Σv_n و Σu_n بترتیب به B و A همگرا باشند آنگاه $\Sigma(u_n + v_n)$ به $A+B$ همگراست.

۲۸ــ۱ــ۹ ثابت کنید که سری

$$\tfrac{3}{2} + (\tfrac{3}{2})^2 + (\tfrac{3}{2})^3 + \cdots = \Sigma(\tfrac{3}{2})^n$$

واگراست.

۲۹ــ۱ــ۹ مورد اشتباه محاسبات زیر را بیابید:

فرض کنید

$$S = 1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

آنگاه

$$S = 1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1$$

و

$$S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0.$$

پس $1 = 0$.

۳۰ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-3},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n},$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-3},\quad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}.$$

جواب : (a) همگراست . (b) واگراست . (c) واگراست . (d) همگراست .
(e) واگراست . (f) همگراست .

۳۱ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید :

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{3/2}},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n^3}}$$

جواب : (a) همگراست . (b) واگراست

۳۲ــ۱ــ۹ واگرائی را در آزمون مقایسه ثابت کنید .

۳۳ــ۱ــ۹ از آزمون مقایسه استفاده کرده ثابت کنید :

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ وقتی $p>1$ همگرا و وقتی $p\leqq 1$ واگراست

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n}$ واگراست

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ همگراست

۳۴ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید :

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^3},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n\tan^{-1}(1/n^3)},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\sin n}{n(1+e^{-n})},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\sin^2(1/n).$$

جواب : (a) همگراست (b) واگراست (c) واگراست (d) واگراست .

۳۵ــ۱ــ۹ اگر Σu_n همگرا باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$$

۳۶ــ۱ــ۹ بکمک آزمون انتگرال نوع سریهای زیر را تعیین کنید :

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1},\quad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad (e)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n},\quad (f)\ \sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln n)}}{n\ln n}.$$

جواب :

(a) واگراست (b) همگراست (c) همگراست (d) همگراست (e) واگراست (f) واگراست .

۳۷ــ۱ــ۹ بکمک آزمون انتگرال ثابت کنید

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},$$ p ثابت است .

(الف) به ازای $p>1$ همگرا و **(ب)** به ازای $p\leqq 1$ واگراست

۳۸ــ۱ــ۹ ثابت کنید

$$\frac{9}{8}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

(می توانید از آزمون انتگرال استفاده بکنید) .

۳۹ـ۱ـ۹ نوع سری زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}$$

جواب : همگراست.

۴۰ـ۱ـ۹ ثابت کنید:

(**الف**) $\frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{3} \leqq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leqq \frac{2}{3}n^{3/2} + n^{1/2} - \frac{2}{3}$

(**ب**) از (الف) استفاده کرده مقدار تقریبی

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{100}$$

را حساب کنید و بیشترین خطا را بدست آورید.

جواب : (**ب**) ۶۷۱/۵=۴/۵

۴۱ـ۱ـ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1},$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{-1}\frac{1}{n}, \quad (e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}.$$

جواب :

(a) همگراست، (b) همگراست، (c) واگراست، (d) همگراست، (e) واگراست.

۴۲ـ۱ـ۹ (**الف**) ثابت کنید:

$$S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \cdots\right)$$

(**ب**) در سمت راست برای محاسبه S تا سه رقم اعشار حداقل چند جمله از اول سری لازم است؟

جواب : (**ب**) حداقل ۱۰۰ جمله

۴۳ـ۱ـ۹ همگرایی مطلق و همگرایی شرطی سریهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1} \qquad (c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1} \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^3+1)^{4/3}} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n-1}$$

جواب : (a) همگرای مطلق (b) همگرای شرطی (c) همگرای شرطی، (d) واگرا (e) همگرای مطلق (f) همگرای مطلق.

۴۴ـ۱ـ۹ ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi a}{x^2+n^2}$$

به ازای هر ثابت a و هر x حقیقی همگرای مطلق است.

۴۵ــ۱ــ۹ بکمک آزمون نسبت نوع سریهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n-1)!},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3},$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}},\quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$$

جواب : (a) همگرای (مطلق) (b) همگراست (c) واگرا ، (d) همگرای (مطلق)، (e) واگراست.

۴۶ــ۱ــ۹ نشان دهید که آزمون نسبت را نمی توان در تعیین نوع یک سری همگرای شرطی بکاربرد.

۴۷ــ۱ــ۹ ثابت کنید که:

(الف) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ همگراست.

(ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

۴۸ــ۱ــ۹ آزمون ریشه را ثابت کنید.

۴۹ــ۱ــ۹ از آزمون ریشهٔ استفاده کنید نوع سریهای مسئله **۴۵ــ۱ــ۹** را بجز قسمت (b) ، تعیین نمائید.

۵۰ــ۱ــ۹ ثابت کنید که سری

$$\tfrac{1}{3}+(\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{1}{3})^3+(\tfrac{2}{3})^4+(\tfrac{1}{3})^5+(\tfrac{2}{3})^6+\cdots$$

همگراست.

۵۱ــ۱ــ۹ نوع سریهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots$, **(ب)** $\frac{2}{9}+\frac{2\cdot 5}{9\cdot 12}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{9\cdot 12\cdot 15}+\cdots.$

جواب : (الف) واگرا، (ب) همگراست

۲ــ۹ دنباله تابعی و سری تابعی ــ همگرایی یکنواخت

فرض کنید

$$\{u_n(x)\},\ n=1,2,3,\ldots$$

یک **دنباله تابعی** باشد که درفاصله $[a,b]$ تعریف شده است. دنباله را **همگرا** به $F(x)$ گویند یا گویند دارای حد $F(x)$ در $[a,b]$ است، اگر به ازای هر $\epsilon>0$ و هر x از $[a,b]$

بتوان $N > 0$ طوری یافت که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|u_n(x) - F(x)| < \epsilon$$

در این حالت می نویسیم :

$$\lim u_n(x) = F(x)$$

N می تواند به x بستگی داشته باشد، همان طوری که به ϵ بستگی دارد. اگر فقط به ϵ بستگی داشته باشد نه به x، می گویند که دنباله به $F(x)$ در $[a, b]$ **به طور یکنواخت** همگراست یا در $[a, b]$ **همگرای یکنواخت** است.

سری تابعی

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots \qquad (۳)$$

را در $[a, b]$ **همگرا** گویند اگر دنباله مجموعهای جزئی

$$\{S_n(x)\}, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

همگرا باشند که در آن

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

در $[a, b]$ همگراست. در این حالت می نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$$

و $S(x)$ را **مجموع** سری گویند.

$\Sigma u_n(x)$ را همگرا به $S(x)$ در $[a, b]$ گویند اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ و هر x از $[a, b]$ بتوانیم عددی مانند $N > 0$ بیابیم طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

اگر N **فقط** به ϵ بستگی داشته باشد نه به x، سری را در $[a, b]$ **همگرای یکنواخت** گویند.

چون

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

باقیمانده بعد از n جمله است، لذا می توانیم بگوییم که $\Sigma u_n(x)$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، N وابسته به ϵ را (بدون این که به x بستگی داشته باشد) طوری می توان یافت که

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

به ازای هر $n > N$ و هر x از $[a, b]$ برقرار باشد. این تعاریف را می توان برای هر فاصله

غیر از $a \leqq x \leqq b$ مانند $a < x < b$ و غیره تنظیم نمود.

فاصله همگرایی (مطلق یا یکنواخت) یک سری مجموعه مقادیری از x است که به ازای آنها سریهای حاصل همگرای (مطلق یا یکنواخت) باشند.

چند آزمون ویژه برای سریهای همگرای یکنواخت

۱ . آزمون M وایرشتراس[1] . اگر بتوان دنباله مثبت،

$$M_1, M_2, M_3, \ldots$$

را طوری یافت که در فاصله‌ای

$$(a) \quad |u_n(x)| \leqq M_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) $\quad \Sigma M_n$ همگرا باشد

آنگاه $\Sigma u_n(x)$ به طور یکنواخت در این فاصله همگرای مطلق است.

مثال : چون

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

و $\Sigma \frac{1}{n^2}$ همگراست پس سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ به طور یکنواخت در فاصله $[0, 2\pi]$ همگرای مطلق است.

شرایط این آزمون برای همگرایی یکنواخت کافی است ولی لازم نیست، یعنی ممکن است یک سری همگرای یکنواخت باشد ولی این آزمون برای آن برقرار نباشد. مسئله **۶ــ۲ــ۹** را ببینید.

۲ . آزمون دیریکله [2]

(الف) فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی یکنواخت با جملات مثبت ثابت باشد که دارای حد صفر است.

(ب) به ازای $a \leqq x \leqq b$ عدد ثابت P موجود باشد که به ازای هر $n > N$

$$|u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)| < P$$

آنگاه سری

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

در $a \leqq x \leqq b$ همگرای یکنواخت است.

---

1. Weierstrass 2. Dirichlet's test

چند قضیه درباره سریهای یکنواخت

اگریک سری تابعی نامتناهی ، همگرای یکنواخت باشد، خواص مجموع سری تابعی متناهی را دارد، که در قضیه های زیر آمده است :

قضیه ٦. اگر

$$\{u_n(x)\},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند و اگر $\Sigma u_n(x)$ همگرای یکنواخت در $[a, b]$ به $S(x)$ باشد، آنگاه $S(x)$ در $[a, b]$ پیوسته است.

یا ساده‌تر، این قضیه می گوید که سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته، تابعی پیوسته است. اغلب از این نتیجه در اثبات اینکه یک سری همگرای یکنواخت نیست، استفاده می شود که در این حالت نشان می دهند که مجموع $S(x)$ در نقطه‌ای منفصل است (مسئله **٦ــ۲ــ۹** را ببینید).

درحالت خاص اگر x_0 در $[a, b]$. باشد قضیه می گوید

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

درآن حدهای چپ و راست وقتی که x_0 یک نقطه انتهایی فاصله $[a, b]$ باشد، بکار می رود.

قضیه ۷. اگر

$$\{u_n(x)\},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند واگر $\Sigma u_n(x)$ در $[a, b]$ به $S(x)$ همگرای یکنواخت باشند، آنگاه

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{٤}$$

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \tag{٥}$$

ساده‌تر یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته، جمله به جمله انتگرالپذیرند.

قضیه ۸. اگر

$$\{u_n(x)\},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

در $[a, b]$ پیوسته باشند و مشتقهای پیوسته داشته باشند واگر $\Sigma u_n(x)$ به $S(x)$ همگرا باشد درحالی که $\Sigma u'_n(x)$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است، آنگاه در $[a, b]$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{۶}$$

و

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) \tag{۷}$$

این قضیه شرایطی را نشان می دهد که تحت آن شرایط یک سری می تواند جمله به جمله دیفرانسیل پذیر باشد.

قضیه های مشابهی را می توان برای دنباله ها بیان کرد. مثلاً اگر

$\{u_n(x)\},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

در $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه،

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)\, dx \tag{۸}$$

که این مشابه قضیه ۷ است.

سریهای توانی

سری به صورت

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{۹}$$

یک **سری توانی** نسبت به x گویند که در آن $a_0, a_1, a_2, \ldots$ اعداد ثابتی هستند. اغلب سری (۹) را با $\Sigma a_n x^n$ نشان می دهند.

در حالت کلی سری به ازای $|x| < R$ همگرا و به ازای $|x| > R$ واگرا ست که در آن R را **شعاع همگرایی** سری گویند. به ازای $|x| = R$ سری ممکن است همگرا و ممکن است واگرا باشد.

فاصله $|x| < R$ یا $-R < x < R$ و در صورت امکان به انضمام نقاط انتهایی فاصله را **فاصله همگرایی** گویند. اگر چه آزمون مقایسه اغلب در تعیین این فاصله موفق است، در صورت ناتوانی این آزمون در تعیین این فاصله می توان از آزمونهای دیگر استفاده کرد (مسئله **۲۲ـ۱ـ۹** را ببینید).

دو حالت خاص $R = \infty$ و $R = 0$ پیش میآیند که در حالت اول سری فقط به ازای $x = 0$ همگراست و در حالت دوم سری به ازای هر x همگرا می باشد که در این حالت می نویسیم $-\infty < x < \infty$ (مسئله **۱ـ۲ـ۹** را ببینید). وقتی از همگرایی سریهای توانی صحبت می شود فرض بر آن است که $R > 0$، در غیر این صورت تذکر داده خواهد شد.

مطالبی که در مورد سری (۹) بیان شد، مشابه آنها وقتی x با $(x - a)$

تعویض می گردد، بیان می شود.

چند قضیه درباره سریهای توانی

قضیه ۹ . یک سری توانی درهر فاصله که **تماماًدر داخل** فاصله همگرایی قرار دارد، به طور مطلق **همگرای یکنواخت** است.

قضیه ۱۰ . یک سری توانی می تواند در هر فاصله که **تماماً در داخل** فاصله همگرایی قرار داشته باشد، جمله به جمله **مشتقپذیر** یا **انتگرالپذیر** باشد.

این قضیه را می توان از قضیه ۹ و از قضایائی که درباره همگرائی یکنواخت بیان شده است، نتیجه گرفت. نتایج را می توان طوری تعمیم داد که شامل نقاط انتهایی فاصله همگرایی خودش باشد که در قضایای زیر آمده اند.

قضیه ۱۱ . قضیه آبل[1] .

اگر سری توان دریکی از نقاط انتهایی فاصله همگرائی خودش، همگرا باشد، فاصله همگرائی یکنواخت آن شامل این نقطه انتهائی است. مسئله ۱۸ــ۲ــ۹ را ببینید.

قضیه ۱۲ . قضیه حد آبل[2] .

اگر $\sum\limits^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x = x_0$ همگرا باشد. این نقطه می تواند یکی از نقاط داخلی یا یکی از نقاط انتهائی فاصله همگرائی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0} a_n x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \qquad (۱۰)$$

اگر x_0 یکی از نقاط انتهائی باشد در (۱۰) برحسب اینکه x_0 نقطه سمت راست یا نقطه سمت چپ فاصله باشد بترتیب از $x \to x_0-$ یا $x \to x_0+$ استفاده می کنیم.

این مطلب از قضیه ۱۱ و قضیه ٦ که در رابطه با پیوستگی مجموع یک سری همگرای یکنواخت می باشد، نتیجه شده است.

عملیات با سریهای توانی

در قضیه های زیر فرض بر آن است که تمام سریهای توانی در فاصله ای همگرا هستند.

قضیه ۱۳ . دو سری را می توان جماه به جمله به ازای هر x در فاصله ای که هر دو در آن همگرا هستند جمع یا از هم تفریق کرد.

---

1. *Abel's theorem* 2. *Abel's limit theorem.*

قضیه ۱۴ . دوسری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را می توان برهم ضرب کرده و سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را بدست آورد که در آن

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 \qquad (۱۱)$$

عمل ضرب به ازای آن مقادیر x که در فاصله همگرائی مشترک آنها واقع است معتبرمی باشد.

قضیه ۱۵ . اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را به سری توانی $\Sigma b_n x^n$ که $b_0 \neq 0$ تقسیم کنیم، خارج قسمت را می توان به صورت یک سری توانی نوشت که به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک x همگرا می باشد.

قضیه ۱۶ . اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، آنگاه با تغییر متغیر $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ می توان ضرایب a_n را نسبت به b_n حساب کرده این فرآیند را **عکس سری** گویند.

بسط توابع به سری توانی

فرض کنید $f(x)$ و مشتقات آن

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

موجود و درفاصله بسته $a \leqq x \leqq b$ پیوسته باشند، و $f^{(n+1)}(x)$ درفاصله باز $a < x < b$ وجود داشته باشد. آنگاه (همانطوری که می دانیم) داریم:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \qquad (۱۲)$$

که در آن R_n باقیمانده بسط می باشد و به صورت زیر است:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \text{(فرم لاگرانژ)} \qquad (۱۳)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-a) \qquad \text{(فرم کوشی)} \qquad (۱۴)$$

که در آن ξ که بین a و x قراردارد درحالت کلی دردو فرم بالا یکی نیستند.

اگر n تغییر کند درحالت کلی ξ نیز تغییر می کند. به ازای هر x و ξ در $[a,b]$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

آنگاه (۱۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (۱۵)$$

که این رابطه را **بسط تیلر** یا **سری تیلر** تابع $f(x)$ گویند وقتی $x=a$ اغلب این رابطه را **بسط لاگرانژ** یا **سری لاگرانژ** تابع $f(x)$ نامند.

چند سری توانی مهم

سریهای زیر که به تابع مفروض در فاصلهٔ نشان داده شده **همگرا هستند** در محاسبات **خیلی** مورد استفاده واقع می شوند.

1. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$
$$-\infty < x < \infty$$

2. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$
$$-\infty < x < \infty$$

3. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$
$$-\infty < x < \infty$$

4. $$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$
$$-1 < x \leqq 1$$

5. $$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$
$$-1 < x < 1$$

6. $$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$
$$-1 \leqq x \leqq 1$$

7. $$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

این سری را **سری بینم** گویند.

(الف) اگر p عددی طبیعی یا صفر باشد، سری محدود است.

(ب) اگر $p > 0$ ولی صحیح نباشد، سری به ازای

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

(مطلقاً) همگراست.

(ج) اگر $-1 < p < 0$، سری به ازای $-1 < x \leqq 1$ همگراست.

(د) اگر $p \leqq -1$، سری به ازای $-1 < x < 1$ همگراست.

در تمام حالات p، اگر $-1 < x < 1$ سری به طور مطمئن همگراست.

۱ـ۲ـ۹ به ازای چه مقادیری از x سریهای زیر همگرا هستند:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-a)^n,\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}.$$

حل. (a) داریم،

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n}$$

فرض می کنیم $x \neq 0$ (چون وقتی $x = 0$ سری همگراست)، پس

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}|x| = \frac{|x|}{3}$$

بنابراین اگر $\frac{|x|}{3} < 1$ سری همگراست و اگر $\frac{|x|}{3} > 1$ سری واگراست. اگر $\frac{|x|}{3} = 1$ یعنی وقتی $x = \pm 3$ این آزمون موثر نیست. نوع سریها را جداگانه بررسی می کنیم

اگر $x = -3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

بنابه قضیه لایبنتیز همگراست.

اگر $x = 3$ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

حاصل می شود که واگراست.

پس **فاصله همگرایی** سری، $-3 \leqq x < 3$ می باشد. درخارج این فاصله سری واگرا است.

توجه داشته باشید که درفاصله $-3 < x < 3$ سری همگرای مطلق است. به ازای $x = -3$

سری همگرای شرطی است .

(b) مانند قسمت (a)عمل می کنیم . در این حالت

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} x^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = 0$$

پس به ازای هر x سری همگرای (مطلق) است . یعنی فاصله همگرایی (مطلق) سری

$$-\infty < x < \infty$$

می باشد .

(c) در این حالت داریم :

$$u_n = n!\,(x-a)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,(x-a)^{n+1}}{n!\,(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x-a|$$

اگر $x \neq a$ حد بینهایت است . پس سری به ازای $x = a$ همگراست .

(d) داریم

$$u_n = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(3n-1)(x-1)}{2n(3n+2)}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{x-1}{2}$$

بنابراین به ازای $|x-1| < 2$ همگرا و بـــه ازای $|x-1| > 2$ واگراست.

وقتی $|x-1| = 2$ یـعـنـی $x-1 = \pm 2$ یا $x = -1$ و $x = 3$ از این آزمون نتیجه ای حاصل نمی شود .

به ازای $x = 3$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

که این سری بعلت این که جمله n ام به صفر میل نمی کند واگراست .

به ازای $x = -1$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$$

این سری نیز واگراست چون حد جمله n ام صفر نیست .

پس سری به ازای $|x-1| < 2$ همـگـراسـت . یـعـنـی فـاصـلـه هـمـگـرایـی سـری

$2 < x-1 < -2$ یا $3 > x > -1$ می‌باشد.

۲ــ۲ــ۹ به ازای **چه مقادیری از** x سریهای زیر همگرا هستند:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n,\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

حل. (a) چون

$$u_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n.$$

پس

اگر $x \neq 1, -2$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \left|\frac{x+2}{x-1}\right|$$

اگر $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$ سری همگراست و **اگر** $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 1$ سری واگراست.
و وقتی $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = 1$ یعنی وقتی $x = -\frac{1}{2}$ نوع سری با این روش معلوم نیست.
اگر $x = 1$ سری واگراست.
اگر $x = -2$ سری همگراست.
وقتی $x = -\frac{1}{2}$ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

بدست می‌آید که همگراست.

پس سری **درفاصله** $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 1$ **و به ازای** $x = -2$ **و** $x = -\frac{1}{2}$ یعنی به ازای $x \leqq -\frac{1}{2}$ همگرا است.

(b) در این حالت

$$u_n = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$$

پس نمی‌توان از دستور نسبت استفاده **کرد. با توجه به**

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

ملاحظه می‌شود که اگر $x \neq 0, -1, -2, \ldots, -n$ داریم

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$$

با شرط اینکه $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ بدست می آید

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1/x$$

بنابراین سری به ازای هر x بجز $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ همگراست و مجموع آن برابر $1/x$ است.

مسائل مربوط به همگرایی یکنواخت

۳ـ۲ـ۹ فاصلهٔ همگرایی سری

$$(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots$$

را تعیین کنید

روش اول

مجموع n جمله اول سری برابر است

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots + x^{n-1}(1-x) \\ & 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots + x^{n-1} - x^n \\ &= 1 - x^n \end{aligned}$$

اگر $|x| < 1$ داریم $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} (1 - x^n) = 1$

اگر $|x| > 1$ حد $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ وجود ندارد.

اگر $x = 1,$ داریم $S_n(x) = 0$ و $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = 0$

اگر $x = -1$ داریم $S_n(x) = 1 - (-1)^n$ و $\lim_{n \to \infty} S_n(x)$ وجود ندارد.

بنابراین سری به ازای $|x| < 1$ و $x = 1$ همگراست یعنی فاصله همگرایی **سری** $-1 < x \leqq 1$ می باشد

روش دوم

از آزمون نسبت **استفاده می کنیم** در می یابیم که اگر $x \neq 1$ داریم

$$u_n = x^{n-1}(1-x)$$

پس

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} |x|$$

بنابراین وقتی $|x| < 1$ سری همگرا **ووقتی** $|x| > 1$ **سری واگراست. اگر** $|x| = 1$ این روش نوع سری را تعیین نمی کند اگر $x = 1$ سری **همگرا** واگر $x = -1$ سری واگراست است. بنابراین فاصله همگرایی سری $-1 < x \leqq 1$ می باشد.

۴ـ۲ـ۹ همگرایی یکنواخت سری مسئله **۳ـ۲ـ۹** را درفاصله های زیر

بررسی نمائید:

$$(a)\ -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2},\ \ (b)\ -\tfrac{1}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{2},\ \ (c)\ -.99 \leqq x \leqq .99,$$
$$(d)\ -1 < x < 1,\ \ (e)\ 0 \leqq x < 2$$

حل . (a) بنابه مسئله **۳ــ۲ــ۹** داریم

اگر $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ، $S_n(x) = 1 - x^n,\ S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$

پس سری در این فاصله **همگراست**؛ باقیمانده بعداز n جمله برابر است با

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = 1 - (1 - x^n) = x^n$$

سری در این فاصله همگرای یکنواخت است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ بتوانیم N که مستقل از x وابسته به ϵ را طوری بیابیم که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

حال

$|R_n(x)| = |x^n| = |x|^n < \epsilon$ وقتی $n \ln |x| < \ln \epsilon$ یا $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|}$

چون $|x| < \frac{1}{2}$ لذا $\ln |x|$ منفی است، که وقتی طرفین به آن تقسیم شده است جهت نامساوی تغییر پیدا کرده است.

ولی اگر $|x| < \frac{1}{2}$ ، $\ln |x| < \ln (\frac{1}{2})$ و $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} > \frac{\ln \epsilon}{\ln (\frac{1}{2})} = N$. بنابراین چون N مستقل از x است، پس سری در این فاصله همگرای یکنواخت است.

(b) در این حالت $|x| \leqq \frac{1}{2}$ ، $\ln |x| \leqq \ln (\frac{1}{2})$ و $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} \geqq \frac{\ln \epsilon}{\ln (\frac{1}{2})} = N$

بنابراین درفاصله $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ همگرای یکنواخت است.

(c) مشابه مطالبی که گذشت اگر ۰/۹۹ را با $\frac{1}{2}$ عوض کنیم معلوم می شود که سری در فاصله $-.99 \leqq x \leqq .99$ همگرای یکنواخت است.

(d) اگر دلایل فوق را بکار گیریم و اگر $|x|$ را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم می توانیم کسر $\frac{\ln \epsilon}{\ln |x|}$ را بقدر کافی بزرگ کنیم. پس N وجود ندارد، در نتیجه سری در فاصله $-1 < x < 1$ همگرای یکنواخت نیست.

(e) چون سری در تمام نقاط این فاصله همگرا نیست پس **نمی تواند** در این فاصله همگرای یکنواخت شود.

۵ــ۲ــ۹ در پیوستگی تابع

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

از مسئله **۳ــ۲ــ۹** درفاصله $0 \leqq x \leqq 1$ بحث کنید.

حل اگر $0 \leqq x < 1$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x^n) = 1$$

اگر $x = 1$

$$S_n(x) = 0 \text{ و } S(x) = 0.$$

پس

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leqq x < 1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

بنابراین $S(x)$ در $x = 1$ منفصل و در سایر نقاط فاصله $0 \leqq x < 1$ پیوسته است.

در مسئله ۱۰ــ۲ــ۹ نشان می دهیم که اگر یک سری در فاصله ای همگرای یکنواخت باشد تابع مجموع آن $S(x)$ در این فاصله باید پیوسته شود. این مطلب نشان‌می دهد که اگر تابع مجموع، درفاصله‌ای پیوسته نباشد، سری در آن فاصله نمی تواند همگرای یکنواخت شود. اغلب از این حقیقت در اثبات اینکه یک سری (با یک دنباله) همگرای یکنواخت نیست، استفاده می شود.

۶ــ۲ــ۹ همگرائی یکنواخت سری.

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots.$$

را بررسی کنید.

حل. فرض می کنیم $x \neq 0$. پس سری یک سری هندسی با قدر نسبت $1/(1+x^2)$ می باشد که حد مجموع آن برابر است با

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - 1/(1+x^2)} = 1 + x^2.$$

اگر $x = 0$، مجموع n جملهٔ اول برابر $S_n(0) = 0$ **است پس**

$$S(0) = \lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0$$

چون

$$\lim_{x\to 0} S(x) = 1 \neq S(0)$$

پس $S(x)$ در $x = 0$ منفصل است، پس سری در فاصله ای که شامل $x = 0$ باشد **همگرای یکنواخت** نیست (مسئله ۱۰ــ۲ــ۹ را ببینید) اگر چه در این فاصله **همگرای مطلق** باشد.

مسائل مربوط به آزمون M وایرشتراس

۷ــ۲ــ۹ آزمون M وایرشتراس را ثابت کنید، یعنی اگر

$$|u_n(x)| \leqq M_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

که در آن M_n ثابتهای مثبتی هستند طوری که ΣM_n همگراست ، آنگاه $\Sigma u_n(x)$ همگرا یکنواخت (ومطلق) است

باقیمانده سری $\Sigma u_n(x)$ بعد از n جمله برابر است با

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

حال

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leqq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leqq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$$

ولی

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots$$

می توان به ازای $n > N$ از ϵ کوچکتر شود چون ΣM_n **همگراست**. چون آشکار است که N مستقل از x, است پس به ازای $n > N$ **داریم**

$$R_n(x) < \epsilon$$

یعنی سری همگرای مطلق است . همگرایی مطلق را می توان از آزمون مقایسه نتیجه گرفت .

۸ــ۲ــ۹ همگرائی یکنواخت سریهای زیر را بررسی نمائید :

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$$

حل .(a) چون

$$\left|\frac{\cos nx}{n^4}\right| \leqq \frac{1}{n^4} = M_n$$

چون ΣM_n همگراست (بنابه سری p و $p = 4 > 1$)، پس بنابه آزمون وایرشتراس سری به ازای هر x همگرای یکنواخت (ومطلق) است .

(b) بنابه آزمون نسبت سری در فاصله $-1 \leqq x \leqq 1$ یعنی در فاصله $|x| \leqq 1$ همگراست .

به ازای هر x از این فاصله داریم :

$$\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right| = \frac{|x|^n}{n^{3/2}} \leqq \frac{1}{n^{3/2}}$$

با فرض $M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ درمی یابیم که ΣM_n همگراست . پس سری مفروض بنابه آزمون M وایرشتراس در فاصله $-1 \leqq x \leqq 1$ **همگرای** یکنواخت است .

(c) داریم

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}$$

چون ΣM_n که در $M_n = \frac{1}{n}$ همگرا نیست ، پس آزمون M **وایرشتراس** را در این حالت **نمی توان** به کار برد چون هیچ نتیجه ای برای همگرایی یکنواخت **با این آزمون** حاصل نمی شود (همچنین مسئله **۳۹ــ۲ــ۹** را ببینید).

(d) چون

$$\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$$

و $\Sigma \frac{1}{n^2}$ همگراست. پس بنابه آزمون M وایرشتراس، سری به ازای هر x همگرای یکنواخت است.

۹ــ۲ــ۹ اگر سری توانی $\Sigma a_n x^n$ به ازای $x = x_0$ همگرا باشد ثابت کنید:

(الف) در فاصله $|x| < |x_0|$ همگرای مطلق.

(ب) در فاصله $|x| \leqq |x_1|$ که در آن $|x_1| < |x_0|$، همگرای یکنواخت است.

حل .(الف) چون $\Sigma a_n x_0^n$ همگراست پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ بنابراین می توان n را بقدر کافی بزرگ انتخاب کرد طوری که $|a_n x_0^n| < 1$، یعنی به ازای $n > N$ داریم

$$|a_n| < \frac{1}{|x_0|^n}$$

پس

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \tag{۱}$$

چون آخرین سری در رابطه (۱) به ازای $|x| < |x_0|$ همگراست، پس بنابه آزمون مقایسه اولین سری نیز همگرا خواهد بود یعنی سری مفروض همگرای یکنواخت است.

(ب) فرض کنید $M_n = \frac{|x_1|^n}{|x_0|^n}$. چون $|x_1| < |x_0|$، پس ΣM_n همگراست بنابه قسمت (الف) به ازای $|x| \leqq |x_1|$، $|a_n x^n| < M_n$، بنابراین با توجه به آزمون M وایرشتراس سری $\Sigma a_n x^n$ همگرای **یکنواخت است**.

نتیجه می شود که سری توانی در هر فاصله واقع در **داخل** فاصله همگرائی خودش، همگرای یکنواخت است.

اثبات قضایای مربوط به همگرایی یکنواخت

۱۰ــ۲ــ۹ قضیه ۶ را ثابت کنید.

حل . باید نشان دهیم که $S(x)$ در $[a, b]$ پیوسته است. از

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

نتیجه می شود

$$S(x+h) = S_n(x+h) + R_n(x+h)$$

از آنجا

$$S(x+h) - S(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) \tag{۱}$$

h را طوری انتخاب می کنیم که x و $x+h$ در $[a, b]$ باشند (مثلاً اگر $x = b$ الزاماً $h < 0$).
چون $S_n(x)$ مجموع تعداد متناهی تابع پیوسته است، پس خود پیوسته می باشد.
پس به ازای هر $\epsilon > 0$ می توانیم δ را طوری بیابیم که وقتی $|h| < \delta$ داشته باشیم

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \epsilon/3 \qquad (۲)$$

چون بنابه فرض سری همگرای یکنواخت است، می توانیم N را طوری انتخاب کنیم که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم،

$$|R_n(x)| < \epsilon/3 \quad و \quad |R_n(x+h)| < \epsilon/3 \qquad (۳)$$

بنابه روابط (۱)، (۲)، (۳)، وقتی $|h| < \delta$ داریم

$$|S(x+h) - S(x)| \leqq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| < \epsilon$$

از این رابطه پیوستگی تابع مجموع نتیجه می شود.

۱۱ــ۲ــ۹ قضیه ۷ را ثابت کنید

حل . اگر تابعی در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، در آن فاصله انتگرالپذیر است. چون توابع $S(x), S_n(x)$ و $R_n(x)$ پیوسته اند پس

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

برای اثبات قضیه باید نشان دهیم رابطه

$$\left|\int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

را می توان با انتخاب n بقدر کافی بزرگ، به دلخواه کوچک کرد. چون سری همگرای یکنواخت است بنابراین به ازای هر $n > N$ مستقل از x در $[a, b]$ داریم.

$$|R_n(x)| < \epsilon/(b-a)$$

پس

$$\left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |R_n(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \epsilon$$

این رابطه معادل است با

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \{\lim_{n\to\infty} S_n(x)\}\,dx$$

۱۲ـــ۲ـــ۹. قضیه ۸ را ثابت کنید.

حل . فرض کنیم $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ ، بنابه فرض سری در فاصله $[a, b]$ همگرای یکنواخت است، پس می‌توانیم (بنابه مسئله ۱۱ـــ۲ـــ۹) جمله به جمله آن را انتگرالگیری نماییم، داریم

$$\int_a^x g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n(x) - u_n(a)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a)$$

چون بنابه فرض $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ در $[a, b]$ به $S(x)$ همگراست. از دو طرف

$$\int_a^x g(x)\,dx = S(x) - S(a)$$

مشتق می گیریم داریم

$$g(x) = S'(x)$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

۱۳ـــ۲ـــ۹ فرض کنید

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots,\ 0 \leqq x \leqq 1$$

(الف) آیا تساوی زیر برقرار است؟

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx$$

(ب) نتیجه (الف) را شرح دهید.

حل . (الف)

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \tfrac{1}{2}$$

چون به ازای $x = 0$ یا در فاصله $0 < x \leqq 1$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0,$$

پس

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx$$

یعنی در اینجا نمی‌توان حدعبارت زیر علامت انتگرال را حساب کرد.

(ب) دلیل برای قسمت (الف) آن است که با اینکه دنباله $S_n(x)$ به صفر همگراست ولی به صفر همگرای **یکنواخت** نیست. در اثبات این مطلب، ملاحظه می کنیم که تابع nxe^{-nx^2} درنقطه $x = 1/\sqrt{2n}$، ماکزیممی برابر $\sqrt{\frac{1}{2}n}\,e^{-1/2}$ دارد (با توجه به دستور های ساده حساب دیفرانسیل واضح است). پس وقتی $n\to\infty$، $S_n(x)$ نمی توانـد **به ازای هر** x به دلخواه کوچک شود، پس نمی تواند در صفر همگرای یکنواخت گردد.

۹ـ۲ـ۱۴ فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

حل. داریم

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

پس بنابه آزمون M وایرشتراس، سری به ازای هر x بویژه در فاصله $0 \leqq x \leqq \pi$ همگرای یکنواخت است، بنابر این می توان از آن جمله به جمله انتگرالگیری کرد. پس

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n^4} = 2\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

مسائل مربوط به سری توان

۹ـ۲ـ۱۵ ثابت کنید که سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و سری توان حاصل از مشتق آن، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ دارای یک شعاع همگرائی هستند.

حل. فرض می کنیم $R > 0$ شعاع همگرائی $\Sigma a_n x^n$ باشد. فرض می کنیم $0 < |x_0| < R$. پس بنابه مسئله ۹ـ۲ـ۹ می توانیم N را طوری تعیین کنیم که اگر $n > N$ داشته باشیم $|a_n| < \frac{1}{|x_0|^n}$.

پس جملات سری

$$\Sigma\ |na_n x^{n-1}| \qquad \Sigma\ n\ |a_n|\ |x|^{n-1}$$

وقتی $n > N$ می‌توانند کمتر از جملات متناظرشان از سری

$$\Sigma\ n \frac{|x|^{n-1}}{|x_0|^n}$$

باشند که این سری بنابه آزمون نسبت به ازای $|x| < |x_0| < R$ همگراست.

بنابراین $\Sigma na_n x^{n-1}$ به ازای تمام نقاط x_0 (فرقی نمی‌کند که $|x_0|$ چگونه به R میل می‌کند) همگرای مطلق است.

در هر صورت اگر $|x| > R$، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} na_n x^{n-1} \neq 0$، و معلوم می‌شود که $\Sigma na_n x^{n-1}$ همگرا نیست.

بنابراین R، فاصله همگرائی $\Sigma\ na_n x^{n-1}$ است. توجه کنید که سری مشتق ممکن است به ازای مقادیری از x که $|x| = R$، همگرا باشد و ممکن است همگرا نباشد.

۱۶ــ۲ــ۹ درستی نتیجه **۱۵ــ۲ــ۹** را برای سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$$

نشان دهید.

حل. با استفاده از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2}|x| = \frac{|x|}{3}$$

سری به ازای $|x| < 3$ همگراست، و به ازای $x = \pm 3$ نیز همگرا می‌باشد، پس فاصله همگرائی سری $-3 \leqq x \leqq 3$ است.

سری مشتق عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

بنابه مسئله (a)**۱ــ۲ــ۹** فاصله همگرائی این سری $-3 \leqq x < 3$ می‌باشد. $R = 3$ شعاع همگرائی هر دو سری است، در حالی که دو یک فاصله همگرائی ندارند.

توجه کنید که اگر مجاز به استفاده از آزمون نسبت در مسئله **۱۵ــ۲ــ۹** را داشته باشیم می‌توانیم نتیجه آن را با این آزمون ثابت کنیم. اگر این آزمون قابل اعمال نباشد می‌توان آن را طوری که در مسئله **۲۲ــ۱ــ۹** دیدیم به صورت دیگری ثابت کنیم.

۱۷ــ۲ــ۹ ثابت کنید که یک سری توان در هر فاصله واقع در **داخل** فاصله همگرائی خودش:

(الف) تابعی پیوسته مانند $f(x)$ را نمایش می دهد،
(ب) می توان آن را جمله به جمله انتگرالگیری کرد تا انتگرال $f(x)$ حاصل شود،
(ج) می توان جمله به جمله از آن مشتق گرفت تا مشتق $f(x)$ بدست آید.

حل. اثبات را برای سری توان $\Sigma a_n x^n$ انجام می دهیم و می توان آن را برای سری $\Sigma a_n (x-a)^n$ تعمیم داد.

(الف) درستی این مطلب از مسائل **۹ــ۲ــ۹** و **۱۰ــ۲ــ۹** و از پیوستگی جملات سری نتیجه می شود.

(ب) درستی این قسمت از مسائل **۹ــ۲ــ۹** و **۱۱ــ۲ــ۹** و از انتگرالپذیری هر جمله $a_n x^n$ از سری نتیجه می شود.

(ج) بنابه مسئله **۱۵ــ۲ــ۹** سری مشتق هر سری توانی همیشه در هر فاصله واقع در داخل فاصله همگرائی خودش، همگراست، و بنابر این در نقاط داخلی این فاصله همگرای یکنواخت است. پس نتیجه مطلوب از مسائل **۹ــ۲ــ۹** و **۱۲ــ۲ــ۹** حاصل می شود.

اگر سری توانی در یک (یا دو نقطه) انتهائی فاصله همگرائی خودش، همگرا باشد، ممکن است **(الف)** و **(ب)** در این نقطه (یا این نقاط) برقرار باشند، مسئله **۱۸ــ۲ــ۹** را ببینید.

۱۸ــ۲ــ۹ قضیه آبل را ثابت کنید:

اگر سری توانی دریکی از نقاط انتهائی فاصله همگرائی خودش، همگرا باشد، آنگاه فاصله همگرائی یکنواخت آن شامل این دو نقطه انتهائی است.

حل. برای سادگی اثبات، سری توانی را به صورت $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ در نظرمی گیریم که $x = 1$ یک نقطه انتهائی فاصله همگرائی آن است طوری که سری به طور مطمئن در فاصله $0 \leqq x \leqq 1$ همگرا می باشد.

فرض کنیم

$$R_n(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots, \qquad R_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

برای اثبات باید نشان دهیم که به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان عدد N را طوری تعیین کرد که رابطه

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

به ازای هر $n > N$ که N بویژه مستقل از هر x فاصله $0 \leqq x \leqq 1$ است، برقرار باشد. حال در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= (R_n - R_{n+1})x^n + (R_{n+1} - R_{n+2})x^{n+1} + (R_{n+2} - R_{n+3})x^{n+2} + \cdots \\ &= R_n x^n + R_{n+1}(x^{n+1} - x^n) + R_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+1}) + \cdots \\ &= x^n\{R_n - (1-x)(R_{n+1} + R_{n+2}x + R_{n+3}x^2 + \cdots)\} \end{aligned}$$

بنابر این به ازای هر $0 \leqq x < 1$ داریم

$$|R_n(x)| \leqq |R_n| + (1-x)(|R_{n+1}| + |R_{n+2}|x + |R_{n+3}|x^2 + \cdots) \tag{۱}$$

چون بنابه فرض Σa_k همگراست، نتیجه می شود که به ازای هر $\epsilon > 0$ می توان N را طوری یافت که به ازای هر $k \geqq n$ داشته باشیم $|R_k| < \epsilon/2$. پس به ازای هر $n > N$ از (۱) داریم:

$$|R_n(x)| \leqq \frac{\epsilon}{2} + (1-x)\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}x + \frac{\epsilon}{2}x^2 + \cdots\right) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{۲}$$

زیرا وقتی $0 \leqq x < 1$ داریم:

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$$

همچنین وقتی $x = 1$، به ازای $n > N$ داریم

$$|R_n(x)| = |R_n| < \epsilon$$

پس به ازای هر $n > N$ داریم

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

که در آن N مستقل از مقدار x از فاصله $0 \leqq x \leqq 1$ می باشد و بدین ترتیب نتیجه مطلوب بدست می آید.

تعمیم این قضیه برای هر سری توانی دیگر براحتی انجام می گیرد.

۱۹ـ۲ـ۹ قضیه حد آبل را ثابت کنید

حل. بر اساس مسئله **۱۸ـ۲ـ۹** سری توان را به صورت $\Sigma a_k x^k$ در نظر می گیریم که در فاصله $0 \leqq x \leqq 1$ همگراست.

پس باید نشان دهیم:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

در اثبات این رابطه از مسئله **۱۸ـ۲ـ۹** که می گوید $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ در فاصله $0 \leqq x \leqq 1$ همگرای یکنواخت است و همچنین از مسئله **۱۰ـ۲ـ۹** که بیان می کند که $\Sigma a_k x^k$ در $x = 1$ پیوسته است، استفاده می شود.

تعمیم به سایر سریهای توانی براحتی انجام میگیرد.

۲۰ـ۲ـ۹ (الف) ثابت کنید

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

که درفاصله $-1 \leqq x \leqq 1$ همگرای یکنواخت است

(ب) ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

حل (الف) بنابه بسط توابع داریم

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad -1 < x < 1 \tag{۱}$$

با استفاده از مسائل **۹ــ۲ــ۹** و**۱۱ــ۲ــ۹** از طرفین (۱) درفاصله $-1 < x < 1$ از ۰ تا x انتگرال می گیریم:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{۲}$$

چون سری (۲) به ازای $x = \pm 1$ همگراست بنابه مسئله **۱۸ــ۲ــ۹** درفاصله

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

همگرای یکنواخت است. پس $\tan^{-1} x$ دراین فاصله همگرای یکنواخت است.

(ب) بنابه مسئله **۱۹ــ۲ــ۹** وقسمت (الف) داریم:

$$\lim_{x \to 1^-} \tan^{-1} x = \lim_{x \to 1^-} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \right)$$

یا

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

۲۱ــ۲ــ۹ مطلوب است محاسبه

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

با دقت سه رقم اعشار.

حل. داریم:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots, \quad -\infty < u < \infty.$$

اگرفرض کنیم $u = -x^2$ بدست می آید:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$$

پس

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots.$$

چون سری به ازای هر x همگراست، درنتیجه درفاصله $0 \leqq x \leqq 1$ همگرای یکنواخت می باشد. با انتگرالگیری جمله به جمله آن داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx &= x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{x^5}{5\cdot 3!} - \frac{x^7}{7\cdot 4!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \cdots \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3\cdot 2!} + \frac{1}{5\cdot 3!} - \frac{1}{7\cdot 4!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \cdots \\ &= 1 - 0.16666 + 0.03333 - 0.00595 + 0.00092 - \cdots \quad 0.862\end{aligned}$$

توجه کنید خطای جمع چهار جمله اول در سری متناوب از قدر مطلق جملهٔ پنجم کمتر است، یعنی خطا از ۰/۰۰۱ کمتر است مسئله **۱۵ــ۲ــ۹** را ببینید.

۲۲ــ۲ــ۹ فاصله همگرائی هریک از سریهای زیر را تعیین کنید.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n(3n-1)},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x^2)^n},$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n,\quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$$

جواب: $(a)\ -1 \leqq x \leqq 1$, $(b)\ -1 < x \leqq 3$, (c) به ازای هر $x \neq 0$, $(d)\ x > 0$, $(e)\ x \leqq 0$.

۲۳ــ۲ــ۹ ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n$$

در فاصله $-1 \leqq x < 1$ همگراست.

۲۴ــ۲ــ۹ با استفاده از تعریف، همگرایی یکنواخت سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}$$

راهنمایی: جمله n ام را به کسرهای جزئی تجزیه کرده و نشان دهید

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$$

جواب: در هر فاصله که شامل $x=0$ باشد همگرای یکنواخت نیست و در سایر فاصله ها همگرای یکنواخت می باشد.

۲۵ــ۲ــ۹ مسئله **۶ــ۲ــ۹** را مستقیماً با بدست آوردن $S_n(x)$ حل کنید.

۲۶ــ۲ــ۹ در همگرائی و همگرائی یکنواخت سریهای زیر بحث کنید:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n,\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{2^n-1},\quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n},\ x \geqq 0$$

جواب: (a) به ازای $|x|<3$ همگرا و به ازای $|x| \leqq r < 3$ همگرای یکنواخت، (b) به ازای هر x همگرای یکنواخت، (c) به ازای $x \geqq 0$ همگراست ولی همگرای یکنواخت نیست، و به ازای $x \geqq r > 0$ همگرای یکنواخت است.

۲۷ــ۲ــ۹ اگر

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ثابت کنید:

(الف) $F(x)$ به ازای هر x پیوسته است.

(ب) $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$

(ج) $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ همه جا پیوسته است

۲۸ـ۲ـ۹ ثابت کنید

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right) dx = 0$$

۲۹ـ۲ـ۹ ثابت کنید

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sinh n\pi}$$

به ازای هر x از هر مرتبه‌ای مشتقپذیر است.

۳۰ـ۲ـ۹ همگرائی یکنواخت دنباله

$$u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

را بررسی نمائید

۳۱ـ۲ـ۹ ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x/n)^n} = 1 - e^{-1}$$

۳۲ـ۲ـ۹ (الف) ثابت کنید

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

(ب) ثابت کنید

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots.$$

راهنمایی: از

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

استفاده کنید.

۳۳ـ۲ـ۹ ثابت کنید

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,\quad -1 \leqq x \leqq 1$$

۳۴ـ۲ـ۹ انتگرالهای زیر را تا سه رقم اعشار حساب کنید

$$(a)\ \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx,\quad (b)\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$$

جواب : $(a)\ 0.461,\ \ (b)\ 0.486$

۳۵ــ۲ــ۹ مقادیر زیر را تا سه رقم اعشار حساب کنید

$$(a)\ \sin 40^\circ,\ \ (b)\ \cos 65^\circ,\ \ (c)\ \tan 12^\circ$$

جواب : $(a)\ 0.643,\ \ (b)\ 0.423,\ \ (c)\ 0.213$

۳۶ــ۲ــ۹ بسطهای زیر را بدست آورید:

$$(a)\quad \tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(b)\quad \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

۳۷ــ۲ــ۹ ثابت کنید.

$$(a)\quad \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$(b)\quad \{\ln(1+x)\}^2 = x^2 - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4} - \cdots \quad -1 < x \leqq 1$$

۳۸ــ۲ــ۹ ثابت کنید که شعاع همگرائی سری $\Sigma a_n x^n$ را می‌توان از حدهای زیر (در صورت وجود داشتن حد) بدست آورد.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\ \ (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

۳۹ــ۲ــ۹ ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ درفاصله که شامل

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

نباشد همگراست

راهنمایی : از آزمون دیریکله استفاده کنید

۴۰ــ۲ــ۹ ثابت کنید.

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2$$

۴۱ــ۲ــ۹ اگر

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

به S همگرا باشد، ثابت کنید

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{3}{2}S$$

که این سری از تجدید آرایش سری فوق بدست آمده است

راهنمایی : سری را به $1/2$ ضرب و سپس آن را به صورت

$$0+\tfrac{1}{2}+0-\tfrac{1}{4}+0+\tfrac{1}{6}+\cdots$$

بنویسید و آنگاه جمله به جمله با سری اصلی جمع کنید. توجه کنید که $S=\ln 2$ ، مسئله ۳۲ـ۲ـ۹ را ببینید.

۴۲ـ۲ـ۹ ثابت کنید

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

در فاصله $|x|<1$ به $1/(1-x)^2$ همگراست.

۴۳ـ۲ـ۹ ثابت کنید

$$(a)\quad \coth x = \frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots$$

$$(b)\quad \cot x = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots$$

$$(c)\quad \tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

$$(d)\quad \csc x = \frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\cdots$$

راهنمایی : (a) از $\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{2}\left(\coth\frac{x}{2}-1\right)$ استفاده کنید

(b) از تعویض x با ix در (a) استفاده کنید.

(c) از $\tan x=\cot x-2\cot 2x$ استفاده کنید

(d) « $\csc x=\cot x+\tan x/2$ « «